

# 部分分布の垂直荷重を受ける直方体の 3次元応力解析について

ON THE THREE DIMENSIONAL STRESS ANALYSIS  
OF A RECTANGULAR BLOCK UNDER A PARTIALLY  
DISTRIBUTED VERTICAL LOAD

奥 村 勇\*  
By Isamu OKUMURA

## 1. 結 言

直方体あるいは直方柱の3次元弾性問題の研究には、大別して、数値解法によるものと、級数解法によるものとが見受けられる。

数値解法によるものには、差分法を併用した色部<sup>1)</sup>、Integral method を3次元弾性問題に拡張して用いた岡村<sup>2)</sup>の研究が報告されている。また、より一般性のある解法として、有限要素法による研究例<sup>3)</sup>も見られる。

級数解法によるものには、K.T. Iyengar ら<sup>4)</sup>、小林ら<sup>5)</sup>の研究が見受けられる。級数解法による場合、基本解として、J. Boussinesq の解、H. Neuber の解あるいは B. Galerkin の解などを用いることが考えられる。K.T. Iyengar らの研究は B. Galerkin の解によるものである。

ところで、上述の3つの解とは別に、秦<sup>6)</sup>は H. Neuber の解に第3項  $2 \operatorname{rot} \vartheta$  を付加した一般化された H. Neuber の解を導出している。小林らの研究は、この一般化された H. Neuber の解によるものである。

軸対称問題においては、第3項  $2 \operatorname{rot} \vartheta$  が不要であることは周知のことであるが、非軸対称問題においては、一般的にいって、この第3項を無視することはできないように思われる。

本文の解法は一般化された H. Neuber の解に基づくものであり、境界条件がそれぞれ異なる直方体の3つの問題に適用して、第3項が必要となる問題または不要となる問題についての解法を系統的に述べ、3次元応力解析を行うものである<sup>注)</sup>。

本文で取扱った直方体は、側面が自由で、上面の中央に長方形に分布した一様圧縮荷重を受け、(1) 底面が剛な床に固定された直方体、(2) 底面が弾性床の上に置かれ

た直方体、(3) 底面がなめらかな剛な床の上に置かれた直方体の3つの問題である。(3)の問題は、高さが2倍の直方体の上、下面に同じ荷重が作用する軸対称問題と等価な問題であるが、(2)の問題で弾性床の剛性を無限大にした場合とも考えられるので、比較するために解析を行う。

数値計算は3つの問題において、立方体で荷重が正方形分布の場合について行った。

級数解法による場合には、未知定数を定める多元連立一次方程式を解くことが大きな仕事となるが、これを直接法で解く際には、解の精度あるいは計算機の容量などが問題となり、なかなか困難である。本文では、多元連立一次方程式の解法には、加速係数を用いた反復法により行い、それらの困難さを解決した。

## 2. 基礎方程式と基本解

変位ベクトルで表わした弾性体のつりあい方程式は、物体力がない場合には、次式となる。

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$\nu$ : ポアソン比

式(1)の変位ベクトル  $\mathbf{u}$  を次のようにおく。

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + \operatorname{grad} \chi \dots\dots\dots (2)$$

ただし

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3) \dots\dots\dots (2.a)$$

式(2)を式(1)に代入して

$$\nabla^2 \chi = -\frac{1}{2(1-\nu)} \operatorname{div} \mathbf{B} \dots\dots\dots (3)$$

となる。

上式を積分して次式を得る。

$$\chi = -\frac{1}{4(1-\nu)} (\mathbf{r} \mathbf{B} + B_0) \dots\dots\dots (4)$$

ただし

\* 正会員 工修 北見工業大学助教授 土木工学科  
注) 一部は土木学会第 27 回、28 回年次学術講演会にて発表。

$$\nabla^2 B_0 = 0 \dots\dots\dots (4 \cdot a)$$

また、直角座標による場合には、動径  $r$  の成分は次式となる。

$$r = (x, y, z) \dots\dots\dots (4 \cdot b)$$

式 (4) を式 (2) に代入すると

$$u = B - \frac{1}{4(1-\nu)} \text{grad}(rB + B_0) \dots\dots\dots (5)$$

を得る。上式は P.F. Papkovitch の解<sup>7)</sup> (1932 年) である。

式 (5) で

$$B = \frac{2(1-\nu)}{G} \Phi, \quad B_0 = \frac{2(1-\nu)}{G} \phi_0$$

$G$  : せん断弾性係数

とおくと、式 (5) は次のように変形できる。

$$2Gu = -\text{grad}(r\Phi + \phi_0) + 4(1-\nu)\Phi \dots\dots\dots (6)$$

式 (6) は H. Neuber の解<sup>8)</sup> (1934 年) である。

さて、式 (2) の調和ベクトル  $B$  の中より、 $\text{rot } \vartheta$  型の調和ベクトルを最初より分離して

$$2GB = 4(1-\nu)\Phi + 2 \text{rot } \vartheta \dots\dots\dots (7)$$

ただし

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \vartheta = 0 \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad \vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

とおくと、式 (3) は次式となる。

$$2G\nabla^2 \chi = -2 \text{div } \vartheta \dots\dots\dots (8)$$

上式を積分して

$$2G\chi = -(r\vartheta + \phi_0) \dots\dots\dots (9)$$

ただし

$$\nabla^2 \phi_0 = 0 \dots\dots\dots (9 \cdot a)$$

を得る。したがって、式 (2)、(7) および式 (9) より次式が導出される。

$$2Gu = -\text{grad } F + 4(1-\nu)\Phi + 2 \text{rot } \vartheta \dots\dots\dots (10)$$

ここで

$$F = r\vartheta + \phi_0 \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

式 (10) は H. Neuber の解に第 3 項  $2 \text{rot } \vartheta$  を付加したものであり、H. Neuber の解の拡張といえる。秦<sup>9)</sup> はこの解を一般化された H. Neuber の解とよんでいる。

一方、J. Boussinesq の解の一般化された表現は次式である。

$$2Gu = \text{grad } \varphi + 2 \text{rot } \vartheta + \text{grad}(r\lambda) - 4(1-\nu)\lambda \dots\dots\dots (11)$$

ただし

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 \lambda = \nabla^2 \vartheta = 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \dots\dots\dots (11 \cdot a)$$

いま、式 (11) において

$$\varphi = -\phi_0, \quad \lambda = -\Phi, \quad F = r\vartheta + \phi_0$$

とおけば、式 (10) が得られる。したがって、式 (10) は形式上 J. Boussinesq の解に等価であるといえる。

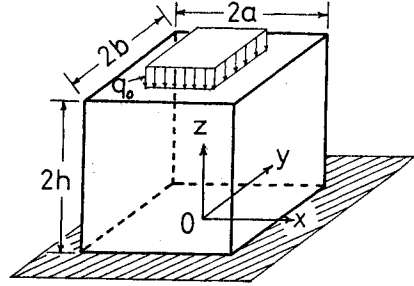


図-1 直方体の座標系

本文では、基本解として、式 (10) の一般化された H. Neuber の解を用いることにする。

直角座標による場合には、式 (7 \cdot a) に示される調和ベクトル  $\Phi$  および  $\vartheta$  の成分は

$$\nabla^2 \phi_1 = \nabla^2 \phi_2 = \nabla^2 \phi_3 = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\nabla^2 \vartheta_1 = \nabla^2 \vartheta_2 = \nabla^2 \vartheta_3 = 0 \dots\dots\dots (13)$$

ここで

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を満足する 3 次元調和関数となる。

図-1 に示した直方体の応力状態が  $x=0$  の面および  $y=0$  の面に関して対称となることを考慮し、式 (9 \cdot a) および式 (12) を解くと、おのおの独立な調和関数  $\phi_0, \phi_1, \phi_2$  および  $\phi_3$  などは次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{01(k,s)} &= - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \beta_s y \cos \tau_k z \\ &\quad \cdot (A_{ks}^{(1)} \cosh l_{ks} x) \\ \phi_{1(k,s)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \beta_s y \cos \tau_k z \\ &\quad \cdot (A_{ks}^{(2)} \sinh l_{ks} x) \\ \phi_{02(k,i)} &= - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \cos \tau_k z \\ &\quad \cdot (B_{ki}^{(1)} \cosh m_{ki} y) \\ \phi_{2(k,i)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \cos \tau_k z \\ &\quad \cdot (B_{ki}^{(2)} \sinh m_{ki} y) \\ \phi_{03(i,s)} &= - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \cos \beta_s y \\ &\quad \cdot (C_{is}^{(1)} \cosh n_{is} z + \bar{C}_{is}^{(1)} \sinh n_{is} z) \\ \phi_{3(i,s)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \cos \beta_s y \\ &\quad \cdot (C_{is}^{(2)} \sinh n_{is} z + \bar{C}_{is}^{(2)} \cosh n_{is} z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

また、式 (13) を解き、 $\vartheta_1, \vartheta_2$  および  $\vartheta_3$  は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{1(k,s)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sin \beta_s y \sin \tau_k z \\ &\quad \cdot (A_{ks}^{(3)} \cosh l_{ks} x) \\ \vartheta_{2(k,i)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sin \alpha_i x \sin \tau_k z \end{aligned} \right\}$$

$$\vartheta_{3(i,s)} = \left. \begin{aligned} & \cdot (B_{ki}^{(3)} \cosh m_{ki}y) \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sin \alpha_i x \sin \beta_s y \\ & \cdot (C_{is}^{(3)} \cosh n_{is}z + \bar{C}_{is}^{(3)} \sinh n_{is}z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} l_{ks} &= \sqrt{\beta_s^2 + \tau_k^2}, \quad m_{ki} = \sqrt{\alpha_i^2 + \tau_k^2} \\ n_{is} &= \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_s^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{a}, \quad \beta_s = \frac{s\pi}{b}, \quad \tau_k = \frac{k\pi}{2h} \dots\dots\dots (17)$$

$$i, s, k = 0, 1, 2, \dots$$

ただし

$$l_{ks} \neq m_{ki} \neq n_{is} \neq 0 \dots\dots\dots (18)$$

また、 $A_{ks}^{(1)}, \dots, \bar{C}_{is}^{(3)}$ などは境界条件によって決定されるべき未知定数である。

### 3. 変位と応力の式

$u, v$  および  $w$  を、おのおの  $x$  方向、 $y$  方向および  $z$  方向の変位を表わすものとする、これらは式 (10)、(14) および式 (15) より次のように表わされる。

$$2Gu = 2G(u_{(k,s)} + u_{(k,i)} + u_{(i,s)}) \dots\dots\dots (19)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_{(k,s)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \beta_s y \cos \tau_k z [ \{ l_{ks} A_{ks}^{(1)} \\ & \quad + (3-4\nu) A_{ks}^{(2)} \} \sinh l_{ks} x \\ & \quad - l_{ks} A_{ks}^{(2)} x \cosh l_{ks} x ] \\ 2Gu_{(k,i)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sin \alpha_i x \cos \tau_k z [ -(\alpha_i B_{ki}^{(1)}) \\ & \quad + 2\tau_k B_{ki}^{(3)} \cosh m_{ki} y \\ & \quad + \alpha_i B_{ki}^{(2)} y \sinh m_{ki} y ] \\ 2Gu_{(i,s)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sin \alpha_i x \cos \beta_s y [ (-\alpha_i C_{is}^{(1)}) \\ & \quad + 2\beta_s C_{is}^{(3)} \cosh n_{is} z + (-\alpha_i \bar{C}_{is}^{(1)}) \\ & \quad + 2\beta_s \bar{C}_{is}^{(3)} \sinh n_{is} z \\ & \quad + \alpha_i C_{is}^{(2)} z \sinh n_{is} z \\ & \quad + \alpha_i \bar{C}_{is}^{(2)} z \cosh n_{is} z ] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19 \cdot a)$$

$$2Gv = 2G(v_{(k,s)} + v_{(k,i)} + v_{(i,s)}) \dots\dots\dots (20)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} 2Gv_{(k,s)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sin \beta_s y \cos \tau_k z [ (-\beta_s A_{ks}^{(1)}) \\ & \quad + 2\tau_k A_{ks}^{(3)} \cosh l_{ks} x \\ & \quad + \beta_s A_{ks}^{(2)} x \sinh l_{ks} x ] \\ 2Gv_{(k,i)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \cos \tau_k z [ \{ m_{ki} B_{ki}^{(1)} \\ & \quad + (3-4\nu) B_{ki}^{(2)} \} \sinh m_{ki} y \\ & \quad - m_{ki} B_{ki}^{(2)} y \cosh m_{ki} y ] \\ 2Gv_{(i,s)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \sin \beta_s y [ (-\beta_s C_{is}^{(1)}) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & + 2\alpha_i C_{is}^{(3)} \cosh n_{is} z \\ & - (\beta_s \bar{C}_{is}^{(1)} + 2\alpha_i \bar{C}_{is}^{(3)}) \sinh n_{is} z \\ & + \beta_s C_{is}^{(2)} z \sinh n_{is} z \\ & + \beta_s \bar{C}_{is}^{(2)} z \cosh n_{is} z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20 \cdot a)$$

$$2Gw = 2G(w_{(k,s)} + w_{(k,i)} + w_{(i,s)}) \dots\dots\dots (21)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} 2Gw_{(k,s)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \beta_s y \sin \tau_k z [ -(r_k A_{ks}^{(1)}) \\ & \quad + 2\beta_s A_{ks}^{(3)} \cosh l_{ks} x \\ & \quad + \tau_k A_{ks}^{(2)} x \sinh l_{ks} x ] \\ 2Gw_{(k,i)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \sin \tau_k z [ (-r_k B_{ki}^{(1)}) \\ & \quad + 2\alpha_i B_{ki}^{(3)} \cosh m_{ki} y \\ & \quad + \tau_k B_{ki}^{(2)} y \sinh m_{ki} y ] \\ 2Gw_{(i,s)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \cos \beta_s y [ \{ n_{is} C_{is}^{(1)} \\ & \quad + (3-4\nu) C_{is}^{(2)} \} \sinh n_{is} z \\ & \quad + \{ n_{is} \bar{C}_{is}^{(1)} + (3-4\nu) \bar{C}_{is}^{(2)} \} \\ & \quad \times \cosh n_{is} z \\ & \quad - n_{is} C_{is}^{(2)} z \cosh n_{is} z \\ & \quad - n_{is} \bar{C}_{is}^{(2)} z \sinh n_{is} z ] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21 \cdot a)$$

垂直応力  $\sigma_x, \sigma_y$  および  $\sigma_z$  は次式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= F^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) \\ & \quad + 2 \left( \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x \partial z} \right) \\ \sigma_y &= F^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) \\ & \quad + 2 \left( \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial x \partial y} \right) \\ \sigma_z &= F^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) \\ & \quad + 2 \left( \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial y \partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

から求めて次のように表わされる。

$$\sigma_x = \sigma_{x(k,s)} + \sigma_{x(k,i)} + \sigma_{x(i,s)} \dots\dots\dots (23)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x(k,s)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \beta_s y \cos \tau_k z [ \{ l_{ks}^2 A_{ks}^{(1)} \\ & \quad + 2(1-\nu) l_{ks} A_{ks}^{(2)} \} \cosh l_{ks} x \\ & \quad - l_{ks}^2 A_{ks}^{(2)} x \sinh l_{ks} x ] \\ \sigma_{x(k,i)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \cos \tau_k z [ (-\alpha_i^2 B_{ki}^{(1)}) \\ & \quad + 2\nu m_{ki} B_{ki}^{(2)} - 2\alpha_i \tau_k B_{ki}^{(3)} \\ & \quad \cdot \cosh m_{ki} y + \alpha_i^2 B_{ki}^{(2)} y \sinh m_{ki} y ] \\ \sigma_{x(i,s)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \cos \beta_s y [ (2\nu n_{is} C_{is}^{(2)}) \\ & \quad + 2\alpha_i \beta_s C_{is}^{(3)} - \alpha_i^2 C_{is}^{(1)} \cosh n_{is} z \\ & \quad + (2\nu n_{is} \bar{C}_{is}^{(2)} + 2\alpha_i \beta_s \bar{C}_{is}^{(3)}) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\alpha_i^2 \bar{C}_{is}^{(1)}) \sinh n_{is} z + \alpha_i^2 C_{is}^{(2)} \\ & \cdot z \sinh n_{is} z + \alpha_i^2 \bar{C}_{is}^{(2)} z \cosh n_{is} z \end{aligned} \right\} \quad (23 \cdot a)$$

$$\sigma_y = \sigma_y(k, s) + \sigma_y(k, i) + \sigma_y(i, s) \quad \dots \dots \dots (24)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y(k, s) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \beta_s y \cos r_k z [(-\beta_s^2 A_{ks}^{(1)}) \\ & + 2 \nu l_{ks} A_{ks}^{(2)} + 2 \beta_s r_k A_{ks}^{(3)}] \cosh l_{ks} x \\ & + \beta_s^2 A_{ks}^{(2)} x \sinh l_{ks} x \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y(k, i) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \cos r_k z [m_{ki}^2 B_{ki}^{(1)} \\ & + 2(1-\nu) m_{ki} B_{ki}^{(2)}] \cosh m_{ki} y \\ & - m_{ki}^2 B_{ki}^{(2)} y \sinh m_{ki} y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y(i, s) = & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \cos \beta_s y [(2 \nu n_{is} C_{is}^{(2)}) \\ & - 2 \alpha_i \beta_s C_{is}^{(3)} - \beta_s^2 C_{is}^{(1)}] \cosh n_{is} z \\ & + (2 \nu n_{is} \bar{C}_{is}^{(2)} - 2 \alpha_i \beta_s \bar{C}_{is}^{(3)}) \\ & - \beta_s^2 \bar{C}_{is}^{(1)} \sinh n_{is} z + \beta_s^2 C_{is}^{(2)} \\ & \cdot z \sinh n_{is} z + \beta_s^2 \bar{C}_{is}^{(2)} z \cosh n_{is} z \end{aligned} \right\} \quad (24 \cdot a)$$

$$\sigma_z = \sigma_z(k, s) + \sigma_z(k, i) + \sigma_z(i, s) \quad \dots \dots \dots (25)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z(k, s) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \beta_s y \cos r_k z [(-r_k^2 A_{ks}^{(1)}) \\ & + 2 \nu l_{ks} A_{ks}^{(2)} - 2 \beta_s r_k A_{ks}^{(3)}] \cosh l_{ks} x \\ & + r_k^2 A_{ks}^{(2)} x \sinh l_{ks} x \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z(k, i) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \cos r_k z [(-r_k^2 B_{ki}^{(1)}) \\ & + 2 \nu m_{ki} B_{ki}^{(2)} + 2 \alpha_i r_k B_{ki}^{(3)}] \\ & \cdot \cosh m_{ki} y + r_k^2 B_{ki}^{(2)} y \sinh m_{ki} y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z(i, s) = & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \cos \beta_s y [\{n_{is}^2 C_{is}^{(1)} \\ & + 2(1-\nu) n_{is} C_{is}^{(2)}\} \cosh n_{is} z \\ & + \{n_{is}^2 \bar{C}_{is}^{(1)} + 2(1-\nu) n_{is} \bar{C}_{is}^{(2)}\} \\ & \cdot \sinh n_{is} z - n_{is}^2 C_{is}^{(2)} z \sinh n_{is} z \\ & - n_{is}^2 \bar{C}_{is}^{(2)} z \cosh n_{is} z \end{aligned} \right\} \quad (25 \cdot a)$$

せん断応力  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  および  $\tau_{yz}$  は次式

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = & -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial x^2} \\ \tau_{xz} = & -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x \partial y} \\ \tau_{yz} = & -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (26)$$

から求めて、次のように表わされる。

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(k, s) + \tau_{xy}(k, i) + \tau_{xy}(i, s) \quad \dots \dots \dots (27)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy}(k, s) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sin \beta_s y \cos r_k z [ \{-\beta_s l_{ks} A_{ks}^{(1)} \\ & - (1-2\nu) \beta_s A_{ks}^{(2)} + r_k l_{ks} A_{ks}^{(3)}\} \\ & \cdot \sinh l_{ks} x + \beta_s l_{ks} A_{ks}^{(2)} x \cosh l_{ks} x \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy}(k, i) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sin \alpha_i x \cos r_k z [ \{-\alpha_i m_{ki} B_{ki}^{(1)} \\ & - (1-2\nu) \alpha_i B_{ki}^{(2)} - r_k m_{ki} B_{ki}^{(3)}\} \\ & \cdot \sinh m_{ki} y + \alpha_i m_{ki} B_{ki}^{(2)} y \cosh m_{ki} y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy}(i, s) = & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sin \alpha_i x \sin \beta_s y [ \{\alpha_i \beta_s C_{is}^{(1)} \\ & + (\alpha_i^2 - \beta_s^2) C_{is}^{(3)}\} \cosh n_{is} z \\ & + \{\alpha_i \beta_s \bar{C}_{is}^{(1)} + (\alpha_i^2 - \beta_s^2) \bar{C}_{is}^{(3)}\} \\ & \cdot \sinh n_{is} z - \alpha_i \beta_s C_{is}^{(2)} z \sinh n_{is} z \\ & - \alpha_i \beta_s \bar{C}_{is}^{(2)} z \cosh n_{is} z \end{aligned} \right\} \quad (27 \cdot a)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(k, s) + \tau_{xz}(k, i) + \tau_{xz}(i, s) \quad \dots \dots \dots (28)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}(k, s) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \beta_s y \sin r_k z [ \{-r_k l_{ks} A_{ks}^{(1)} \\ & + (1-2\nu) r_k A_{ks}^{(2)} + \beta_s l_{ks} A_{ks}^{(3)}\} \\ & \cdot \sinh l_{ks} x + r_k l_{ks} A_{ks}^{(2)} x \cosh l_{ks} x \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}(k, i) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sin \alpha_i x \sin r_k z [ \{\alpha_i r_k B_{ki}^{(1)} \\ & + (r_k^2 - \alpha_i^2) B_{ki}^{(3)}\} \cosh m_{ki} y \\ & - \alpha_i r_k B_{ki}^{(2)} y \sinh m_{ki} y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}(i, s) = & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sin \alpha_i x \cos \beta_s y [ \{-\alpha_i n_{is} C_{is}^{(1)} \\ & - (1-2\nu) \alpha_i C_{is}^{(2)} + \beta_s n_{is} C_{is}^{(3)}\} \\ & \cdot \sinh n_{is} z + \{-\alpha_i n_{is} \bar{C}_{is}^{(1)} - (1-2\nu) \\ & \cdot \alpha_i \bar{C}_{is}^{(2)} + \beta_s n_{is} \bar{C}_{is}^{(3)}\} \cosh n_{is} z \\ & + \alpha_i n_{is} C_{is}^{(2)} z \cosh n_{is} z \\ & + \alpha_i n_{is} \bar{C}_{is}^{(2)} z \sinh n_{is} z \end{aligned} \right\} \quad (28 \cdot a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{yz}(k, s) + \tau_{yz}(k, i) + \tau_{yz}(i, s) \quad \dots \dots \dots (29)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}(k, s) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sin \beta_s y \sin r_k z [ \{\beta_s r_k A_{ks}^{(1)} \\ & + (\beta_s^2 - r_k^2) A_{ks}^{(3)}\} \cosh l_{ks} x \\ & - \beta_s r_k A_{ks}^{(2)} x \sinh l_{ks} x \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}(k, i) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \sin r_k z [ \{-r_k m_{ki} B_{ki}^{(1)} \\ & - (1-2\nu) r_k B_{ki}^{(2)} + \alpha_i m_{ki} B_{ki}^{(3)}\} \\ & \cdot \sinh m_{ki} y + r_k m_{ki} B_{ki}^{(2)} y \cosh m_{ki} y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}(i, s) = & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \alpha_i x \sin \beta_s y [ \{-\beta_s n_{is} C_{is}^{(1)} \\ & + (1-2\nu) \beta_s C_{is}^{(2)} + \alpha_i n_{is} C_{is}^{(3)}\} \\ & \cdot \sinh n_{is} z - \{\beta_s n_{is} \bar{C}_{is}^{(1)} + (1-2\nu) \\ & \cdot \beta_s \bar{C}_{is}^{(2)} + \alpha_i n_{is} \bar{C}_{is}^{(3)}\} \cosh n_{is} z \\ & + \beta_s n_{is} C_{is}^{(2)} z \cosh n_{is} z \\ & + \beta_s n_{is} \bar{C}_{is}^{(2)} z \sinh n_{is} z \end{aligned} \right\} \quad (29 \cdot a)$$

### 4. 荷重の Fourier 級数展開と付加すべき解

図-2 に示した直方体の上面の中央に作用する長方形分布の部分圧縮荷重の重 Fourier 級数展開は、 $q_0$  を荷重強度とすれば、次式となる。

$$\begin{aligned}
 p(x, y) = & q_0 \left( \frac{cd}{ab} + \frac{2d}{b\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \alpha_i c \cos \alpha_i x \right. \\
 & + \frac{2c}{a\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \sin \beta_s d \cos \beta_s y \\
 & \left. + \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{is} \sin \alpha_i c \sin \beta_s d \right. \\
 & \left. \cdot \cos \alpha_i x \cos \beta_s y \right) \dots\dots\dots (30)
 \end{aligned}$$

上式の右辺の定数項 (第1項) を処理するために、簡単な形の解が必要となる。それは、H. Neuber の解あるいは J. Boussinesq の第3基本解より求めることができ、次のような応力関数が得られる。

$$\phi_{1(0,0)} = A_{00}x, \quad \phi_{2(0,0)} = B_{00}y, \quad \phi_{3(0,0)} = C_{00}z \dots (31)$$

上式の応力関数は式 (14) において、 $l_{ks} = m_{ki} = n_{is} = 0$  とした場合に相当する応力関数である。これらの応力関数から得られる変位および応力は次のようである。

$$\left. \begin{aligned}
 2Gu_0 &= 2(1-2\nu)A_{00}x \\
 2Gv_0 &= 2(1-2\nu)B_{00}y \\
 2Gw_0 &= 2(1-2\nu)C_{00}z
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{x,0} &= 2(1-\nu)A_{00} + 2\nu B_{00} + 2\nu C_{00} \\
 \sigma_{y,0} &= 2(1-\nu)B_{00} + 2\nu A_{00} + 2\nu C_{00} \\
 \sigma_{z,0} &= 2(1-\nu)C_{00} + 2\nu A_{00} + 2\nu B_{00} \\
 \tau_{xy,0} &= \tau_{xz,0} = \tau_{yz,0} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

式 (32) および式 (33) が式 (19)~(21) および式 (23)~(25) におのおの付加すべき変位 および応力である。

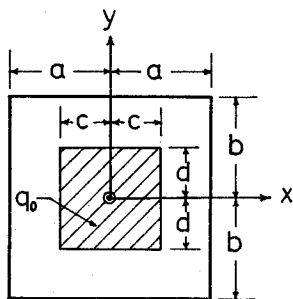


図-2 上面の中央に長方形分布する圧縮荷重

### 5. 境界条件と未知定数の関係式

図-1 に示した上面に  $x, y$  軸に関して対称に長方形分布した部分圧縮荷重を受ける直方体の側面は自由であるが、底面の境界条件は次の3つの問題においてそれぞれ異なる。

#### (1) 底面が剛な床に固定された直方体の問題

$$x = \pm a \text{ で } \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \sigma_x = 0 \dots\dots\dots (34 \cdot a, b, c)$$

$$y = \pm b \text{ で } \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_y = 0 \dots\dots\dots (35 \cdot a, b, c)$$

$$z = 2h \text{ で } \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = -p(x, y) \dots\dots\dots (36 \cdot a, b, c)$$

$$z = 0 \text{ で } u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \dots (37 \cdot a, b, c)$$

境界条件式 (34)~(37) により未知定数間の関係が次のように求められる。

式 (34・a) と式 (34・b) とにより

$$\left. \begin{aligned}
 A_{ks}^{(3)} &= 0 \\
 A_{ks}^{(1)} &= \frac{A_{ks}^{(2)}}{l_{ks}} (2\nu - 1 + l_{ks}a \coth l_{ks}a)
 \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

式 (35・a) と式 (35・b) とにより

$$\left. \begin{aligned}
 B_{ki}^{(3)} &= 0 \\
 B_{ki}^{(1)} &= \frac{B_{ki}^{(2)}}{m_{ki}} (2\nu - 1 + m_{ki}b \coth m_{ki}b)
 \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

また、式 (37・c)、(36・a) および式 (36・b) より

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{C}_{is}^{(1)} &= \frac{\bar{C}_{is}^{(2)}}{n_{is}} (4\nu - 3) \\
 C_{is}^{(3)} &= -\bar{C}_{is}^{(3)} \coth 2hn_{is}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

$$\begin{aligned}
 C_{is}^{(1)} &= \frac{1}{n_{is}} [C_{is}^{(2)} (2hn_{is} \coth 2hn_{is} + 2\nu - 1) \\
 &\quad + \bar{C}_{is}^{(2)} \{2(1-\nu) \coth 2hn_{is} + 2hn_{is}\}] \\
 &\dots\dots\dots (41)
 \end{aligned}$$

式 (38)~(41) の関係により、せん断応力および底面の変位  $w$  に関する境界条件は式の上で満たされていることがわかる。また、これらの関係を用いて、変位および応力の式に含まれている 12 個の未知定数を 5 個の未知定数  $A_{ks}^{(2)}, B_{ki}^{(2)}, C_{is}^{(2)}, \bar{C}_{is}^{(2)}$  および  $\bar{C}_{is}^{(3)}$  で書き表わすことができる。

この問題においては、基本解の第3項に関係した未知定数  $A_{ks}^{(3)}$  および  $B_{ki}^{(3)}$  は 0 となるが  $C_{is}^{(3)}$  および  $\bar{C}_{is}^{(3)}$  は 0 とはならず、第3項が必要となることが注目される。

#### (2) 底面が弾性床に置かれた直方体の問題

$$x = \pm a \text{ で } \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \sigma_x = 0 \dots\dots\dots (34 \cdot a, b, c)$$

$$y = \pm b \text{ で } \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_y = 0 \dots\dots\dots (35 \cdot a, b, c)$$

$$z = 2h \text{ で } \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = -p(x, y) \dots\dots\dots (36 \cdot a, b, c)$$

$$z = 0 \text{ で } \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = Kw \dots\dots\dots (42 \cdot a, b, c)$$

$K$ : 地盤係数

(1) の問題と同様に式 (34・a, b) および式 (35・a, b) より式 (38) および式 (39) の関係式が得られる。

式 (42・a) と式 (42・b) とにより

$$\bar{C}_{is}^{(3)}=0, \quad \bar{C}_{is}^{(1)}=-\frac{\bar{C}_{is}^{(2)}}{n_{is}}(1-2\nu) \dots\dots(43)$$

式 (36・a), (36・b) および式 (43) より

$$\left. \begin{aligned} C_{is}^{(3)} &= 0 \\ C_{is}^{(1)} &= \frac{1}{n_{is}} \{ C_{is}^{(2)} (2 hn_{is} \coth 2 hn_{is} - 1 + 2\nu) + 2 hn_{is} \bar{C}_{is}^{(2)} \} \dots\dots(44) \end{aligned} \right\}$$

の関係が得られる。したがって、4 個の未知定数  $A_{ks}^{(2)}$ ,  $B_{ki}^{(2)}$ ,  $C_{is}^{(2)}$  および  $\bar{C}_{is}^{(2)}$  で変位および応力を表わすことができる。

この問題は非軸対称問題ではあるが、面の回転が拘束されていないために、第 3 項に関係した未知定数はすべて 0 となり、第 3 項は不要となることがわかる。

(3) 底面がなめらかな剛な床の上に置かれた直方体の問題

$$x = \pm a \quad \text{で} \quad \tau_{xy}=0, \quad \tau_{xz}=0, \quad \sigma_x=0 \dots\dots(34 \cdot a, b, c)$$

$$y = \pm b \quad \text{で} \quad \tau_{xy}=0, \quad \tau_{yz}=0, \quad \sigma_y=0 \dots\dots(35 \cdot a, b, c)$$

$$z = 2h \quad \text{で} \quad \tau_{xz}=0, \quad \tau_{yz}=0, \quad \sigma_z = -p(x, y) \dots\dots(36 \cdot a, b, c)$$

$$z = 0 \quad \text{で} \quad \tau_{xz}=0, \quad \tau_{yz}=0, \quad w=0 \dots\dots(45 \cdot a, b, c)$$

ここでも (1) の問題と同様に式 (34・a, b) および式 (35・a, b) より式 (38) および式 (39) の関係を得る。

式 (45・c), (45・a) および式 (45・b) より

$$\bar{C}_{is}^{(1)} = \bar{C}_{is}^{(2)} = \bar{C}_{is}^{(3)} = 0 \dots\dots(46)$$

式 (46), (36・a) および式 (36・b) より

$$\left. \begin{aligned} C_{is}^{(3)} &= 0 \\ C_{is}^{(1)} &= -\frac{C_{is}^{(2)}}{n_{is}} (2\nu - 1 + 2 hn_{is} \coth 2 hn_{is}) \dots\dots(47) \end{aligned} \right\}$$

の関係が得られる。したがって、この問題では、3 個の未知定数  $A_{ks}^{(2)}$ ,  $B_{ki}^{(2)}$  および  $C_{is}^{(2)}$  で変位および応力を表わすことができる。この問題においても第 3 項は不要となることがわかる。

式 (31) に含まれている未知定数  $A_{00}$ ,  $B_{00}$  および  $C_{00}$  は式 (30), (33) と境界条件式 (34・c), (35・c) および式 (36・c) とにより次のように求められる。

$$A_{00} = B_{00} = -\nu C_{00} \dots\dots(48)$$

$$C_{00} = -\frac{q_0 cd}{ab} \cdot \frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \dots\dots(49)$$

式 (48) および式 (49) は上述の 3 つの問題において共通である。

6. 未知定数の連立一次方程式

(1) 底面が剛な床に固定された直方体の問題

5 個の未知定数  $A_{ks}^{(2)}$ ,  $B_{ki}^{(2)}$ ,  $C_{is}^{(2)}$ ,  $\bar{C}_{is}^{(2)}$  および  $\bar{C}_{is}^{(3)}$  を求めるために、残りの 5 個の境界条件、すなわち、式 (34・c), (35・c), (36・c), (37・a) および式 (37・b) を用いる。これらの境界条件を満足させるためには、垂直応力および変位をおのおの Fourier 級数に展開することが必要となる。結果のみを示すことにし、次の 5 群の連立一次方程式を得る。

式 (37・a) より

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k I_{is}^{(1)} A_{ks}^{(2)} + k J_{si}^{(2)} B_{ki}^{(2)}) + K_{is}^{(1)} C_{is}^{(2)} + \bar{K}_{is}^{(1)} \bar{C}_{is}^{(2)} - L_{is}^{(1)} \bar{C}_{is}^{(3)} - M_{is}^{(1)} = 0 \dots\dots(50)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} k I_{is}^{(1)} &= -\frac{4\pi \sinh l_{ks} a}{a^2} \cdot \frac{i(-1)^i}{(l_{ks}^2 + \alpha_i^2)^2} \cdot \{ l_{ks}^2 + (1-\nu)(l_{ks}^2 + \alpha_i^2) \} \\ k J_{si}^{(1)} &= \frac{4\pi \sinh m_{ki} b}{ab} \cdot \frac{i \varepsilon_s (-1)^s}{(m_{ki}^2 + \beta_s^2)^2} \cdot \{ \beta_s^2 - \nu(m_{ki}^2 + \beta_s^2) \} \\ K_{is}^{(1)} &= -\frac{\alpha_i}{n_{is}} (2 hn_{is} \coth 2 hn_{is} - 1 + 2\nu) \\ \bar{K}_{is}^{(1)} &= -\frac{\alpha_i}{n_{is}} \{ 2(1-\nu) \coth 2 hn_{is} + 2 hn_{is} \} \\ L_{is}^{(1)} &= 2 \beta_s \coth 2 hn_{is} \\ M_{is}^{(1)} &= \frac{4\nu(1-2\nu) C_{00} a}{\pi} \cdot \frac{\delta_s \bar{\delta}_i (-1)^i}{i} \dots\dots(50 \cdot a) \end{aligned} \right\}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_s &= \begin{cases} 1 & (s \geq 1) \\ 0.5 & (s = 0) \end{cases}, \quad \delta_s = \begin{cases} 1 & (s = 0) \\ 0 & (s \neq 0) \end{cases} \\ \bar{\delta}_i &= \begin{cases} 0 & (i = 0) \\ 1 & (i \neq 0) \end{cases} \dots\dots(50 \cdot b) \end{aligned} \right\}$$

式 (37・b) より

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k J_{is}^{(2)} A_{ks}^{(2)} + k I_{si}^{(2)} B_{ki}^{(2)}) + K_{is}^{(2)} C_{is}^{(2)} + \bar{K}_{is}^{(2)} \bar{C}_{is}^{(2)} + L_{is}^{(2)} \bar{C}_{is}^{(3)} - M_{is}^{(2)} = 0 \dots\dots(51)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} k J_{is}^{(2)} &= \frac{4\pi \sinh l_{ks} a}{ab} \cdot \frac{(-1)^i \varepsilon_i}{(l_{ks}^2 + \alpha_i^2)^2} \cdot \{ \alpha_i^2 - \nu(l_{ks}^2 + \alpha_i^2) \} \\ k I_{si}^{(2)} &= -\frac{4\pi \sinh m_{ki} b}{b^2} \cdot \frac{s(-1)^s}{(m_{ki}^2 + \beta_s^2)^2} \cdot \{ m_{ki}^2 + (1-\nu)(m_{ki}^2 + \beta_s^2) \} \\ K_{is}^{(2)} &= -\frac{\beta_s}{n_{is}} (2 hn_{is} \coth 2 hn_{is} - 1 + 2\nu) \\ \bar{K}_{is}^{(2)} &= -\frac{\beta_s}{n_{is}} \{ 2(1-\nu) \coth 2 hn_{is} + 2 hn_{is} \} \dots\dots \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} L_{is}^{(2)} &= 2\alpha_i \coth 2hn_{is} \\ M_{is}^{(2)} &= \frac{4\nu(1-2\nu)C_{00}b}{\pi} \cdot \frac{\delta_i \bar{\delta}_s (-1)^s}{s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51 \cdot a)$$

式 (34・c) より

$$\sum_{i=0}^{\infty} ({}_i J_{sk}^{(3)} B_{ki}^{(2)} + {}_i K_{ks}^{(1)} C_{is}^{(2)} + {}_i \bar{K}_{ks}^{(1)} \bar{C}_{is}^{(2)} - {}_i L_{ks}^{(1)} \bar{C}_{is}^{(3)}) + I_{ks}^{(1)} A_{ks}^{(2)} = 0 \dots\dots\dots (52)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} I_{ks}^{(1)} &= \frac{l_{ks}}{\sinh l_{ks} a} (l_{ks} a + \cosh l_{ks} a \sinh l_{ks} a) \\ {}_i J_{sk}^{(3)} &= \frac{4 \sinh m_{ki} b}{b} \cdot \frac{(-1)^{i+s} \varepsilon_s}{(m_{ki}^2 + \beta_s^2)^2} \\ &\quad \cdot \{\alpha_i^2 \beta_s^2 + \nu \tau_k^2 (m_{ki}^2 + \beta_s^2)\} \\ {}_i K_{ks}^{(1)} &= \frac{2 \sinh 2hn_{is}}{h} \cdot \frac{(-1)^{i+k} \varepsilon_k}{(n_{is}^2 + \tau_k^2)^2} \\ &\quad \cdot \{\alpha_i^2 \tau_k^2 + \nu \beta_s^2 (n_{is}^2 + \tau_k^2)\} \\ {}_i \bar{K}_{ks}^{(1)} &= \frac{2 \cosh 2hn_{is}}{h} \cdot \frac{(-1)^{i+k} \varepsilon_k}{(n_{is}^2 + \tau_k^2)^2} \\ &\quad \cdot \{\nu \beta_s^2 (n_{is}^2 + \tau_k^2) + \alpha_i^2 \tau_k^2\} \\ &\quad - \frac{2(-1)^i \varepsilon_k}{h(n_{is}^2 + \tau_k^2)^2} \{\alpha_i^2 (n_{is}^2 + 2\tau_k^2) \\ &\quad + \nu(\beta_s^2 - \alpha_i^2)(n_{is}^2 + \tau_k^2)\} \\ {}_i L_{ks}^{(1)} &= \frac{2\alpha_i \beta_s n_{is} (-1)^i \varepsilon_k}{h(n_{is}^2 + \tau_k^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52 \cdot a)$$

式 (35・c) より

$$\sum_{s=0}^{\infty} ({}_s J_{ik}^{(4)} A_{ks}^{(2)} + {}_s K_{ki}^{(2)} C_{is}^{(2)} + {}_s \bar{K}_{ki}^{(2)} \bar{C}_{is}^{(2)} + {}_s L_{ki}^{(2)} \bar{C}_{is}^{(3)}) + I_{ki}^{(2)} B_{ki}^{(2)} = 0 \dots\dots\dots (53)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} I_{ki}^{(2)} &= \frac{m_{ki}}{\sinh m_{ki} b} \\ &\quad \cdot (m_{ki} b + \cosh m_{ki} b \sinh m_{ki} b) \\ {}_s J_{ik}^{(4)} &= \frac{4 \sinh l_{ks} a}{a} \cdot \frac{(-1)^{i+s} \varepsilon_i}{(l_{ks}^2 + \alpha_i^2)^2} \\ &\quad \cdot \{\alpha_i^2 \beta_s^2 + \nu \tau_k^2 (l_{ks}^2 + \alpha_i^2)\} \\ {}_s K_{ki}^{(2)} &= \frac{2 \sinh 2hn_{is}}{h} \cdot \frac{(1)^{k+s} \varepsilon_k}{(n_{is}^2 + \tau_k^2)^2} \\ &\quad \cdot \{\beta_s^2 \tau_k^2 + \nu \alpha_i^2 (n_{is}^2 + \tau_k^2)\} \\ {}_s \bar{K}_{ki}^{(2)} &= \frac{2 \cosh 2hn_{is}}{h} \cdot \frac{(-1)^{s+k} \varepsilon_k}{(n_{is}^2 + \tau_k^2)^2} \\ &\quad \cdot \{\beta_s^2 \tau_k^2 + \nu \alpha_i^2 (n_{is}^2 + \tau_k^2)\} \\ &\quad - \frac{2(-1)^s \varepsilon_k}{h(n_{is}^2 + \tau_k^2)^2} \{\beta_s^2 (n_{is}^2 + 2\tau_k^2) \\ &\quad + \nu(\alpha_i^2 - \beta_s^2)(n_{is}^2 + \tau_k^2)\} \\ {}_s L_{ki}^{(2)} &= \frac{2\alpha_i \beta_s n_{is} (-1)^s \varepsilon_k}{h(n_{is}^2 + \tau_k^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53 \cdot a)$$

最後に、式 (36・c) より

$$\sum_{k=0}^{\infty} ({}_k I_{is}^{(3)} A_{ks}^{(2)} + {}_k I_{si}^{(4)} B_{ki}^{(2)} + K_{is}^{(3)} C_{is}^{(2)}$$

$$+ \bar{K}_{is}^{(3)} \bar{C}_{is}^{(2)} + p_{is} = 0 \dots\dots\dots (54)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} {}_k I_{is}^{(3)} &= \frac{4 \sinh l_{ks} a}{a} \cdot \frac{(-1)^{i+k} \varepsilon_i}{(l_{ks}^2 + \alpha_i^2)^2} \\ &\quad \cdot \{\tau_k^2 \alpha_i^2 + \nu \beta_s^2 (l_{ks}^2 + \alpha_i^2)\} \\ {}_k I_{si}^{(4)} &= \frac{4 \sinh m_{ki} b}{b} \cdot \frac{(-1)^{s+k} \varepsilon_s}{(m_{ki}^2 + \beta_s^2)^2} \\ &\quad \cdot \{\tau_k^2 \beta_s^2 + \nu \alpha_i^2 (m_{ki}^2 + \beta_s^2)\} \\ K_{is}^{(3)} &= \frac{n_{is}}{\sinh 2hn_{is}} \\ &\quad \cdot (2hn_{is} + \cosh 2hn_{is} \sinh 2hn_{is}) \\ \bar{K}_{is}^{(3)} &= \frac{n_{is}}{\sinh 2hn_{is}} \{2(1-\nu) + \sinh^2 2hn_{is}\} \\ p_{is} &= q_0 \left( \frac{2d}{b\pi} \frac{\bar{\delta}_i \delta_s}{i} \sin \alpha_i c + \frac{2c}{a\pi} \frac{\bar{\delta}_s \delta_i}{s} \sin \beta_s d \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{\pi^2} \frac{\bar{\delta}_i \delta_s}{is} \sin \alpha_i c \sin \beta_s d \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54 \cdot a)$$

(2) 底面が弾性床の上に置かれた直方体の問題

この問題では、4個の未知定数  $A_{ks}^{(2)}$ ,  $B_{ki}^{(2)}$ ,  $C_{is}^{(2)}$  および  $\bar{C}_{is}^{(2)}$  が残っており、境界条件式 (34・c), (35・c), (36・c) および (42・c) より次の4群の連立一次方程式を得る。

式 (34・c) より

$$\sum_{i=0}^{\infty} ({}_i J_{sk}^{(3)} B_{ki}^{(2)} + {}_i K_{ks}^{(1)} C_{is}^{(2)} + {}_i \bar{K}_{ks}^{(1)} \bar{C}_{is}^{(2)} + I_{ks}^{(1)} A_{ks}^{(2)}) = 0 \dots\dots\dots (55)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} {}_i \bar{K}_{ks}^{(1)} &= \frac{2 \cosh 2hn_{is}}{h} \cdot \frac{(-1)^{i+k} \varepsilon_k}{(n_{is}^2 + \tau_k^2)^2} \\ &\quad \cdot \{\alpha_i^2 \tau_k^2 + \nu \beta_s^2 (n_{is}^2 + \tau_k^2)\} \\ &\quad - \frac{2(-1)^i \varepsilon_k}{h(n_{is}^2 + \tau_k^2)^2} \\ &\quad \cdot \{\alpha_i^2 \tau_k^2 + \nu \beta_s^2 (n_{is}^2 + \tau_k^2)\} \dots\dots (55 \cdot a) \end{aligned} \right\}$$

また、 $I_{ks}^{(1)}$ ,  ${}_i J_{sk}^{(3)}$  および  ${}_i K_{ks}^{(1)}$  は式 (52・a) に示したものである。

式 (35・c) より

$$\sum_{s=0}^{\infty} ({}_s J_{ik}^{(4)} A_{ks}^{(2)} + {}_s K_{ki}^{(2)} C_{is}^{(2)} + {}_s \bar{K}_{ki}^{(2)} \bar{C}_{is}^{(2)} + I_{ki}^{(2)} B_{ki}^{(2)}) = 0 \dots\dots\dots (56)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} {}_s \bar{K}_{ki}^{(2)} &= \frac{2 \cosh 2hn_{is}}{h} \cdot \frac{(-1)^{k+s} \varepsilon_k}{(n_{is}^2 + \tau_k^2)^2} \\ &\quad \cdot \{\beta_s^2 \tau_k^2 + \nu \alpha_i^2 (n_{is}^2 + \tau_k^2)\} \\ &\quad - \frac{2(-1)^s \varepsilon_k}{h(n_{is}^2 + \tau_k^2)^2} \\ &\quad \cdot \{\beta_s^2 \tau_k^2 + \nu \alpha_i^2 (n_{is}^2 + \tau_k^2)\} \dots\dots (56 \cdot a) \end{aligned} \right\}$$

また、 $I_{ki}^{(2)}$ ,  ${}_s J_{ik}^{(4)}$  および  ${}_s K_{ki}^{(2)}$  は式 (53・a) に示したものである。

式 (36・c) より

$$\sum_{k=0}^{\infty} (kI_{is}^{(3)}A_{ks}^{(2)} + kI_{si}^{(4)}B_{ki}^{(2)}) + K_{is}^{(3)}C_{is}^{(2)} + \bar{K}_{is}^{(3)}\bar{C}_{is}^{(2)} + p_{is} = 0 \dots\dots\dots(57)$$

ここで

$$\bar{K}_{is}^{(3)} = n_{is} \sinh 2hn_{is} \dots\dots\dots(57 \cdot a)$$

また、 $kI_{is}^{(3)}$ 、 $kI_{si}^{(4)}$ 、 $K_{is}^{(3)}$  および  $p_{is}$  は式 (54・a) に示したものである。

最後に、式 (42・c) より

$$\sum_{k=0}^{\infty} (kI_{is}^{(5)}A_{ks}^{(2)} + kI_{si}^{(6)}B_{ki}^{(2)}) + K_{is}^{(4)}C_{is}^{(2)} + \bar{K}_{is}^{(4)}\bar{C}_{is}^{(2)} = 0 \dots\dots\dots(58)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} kI_{is}^{(5)} &= \frac{4 \sinh l_{ks}a}{a} \cdot \frac{(-1)^i \varepsilon_i}{(l_{ks}^2 + \alpha_i^2)^2} \\ &\quad \cdot \{ \tau k^2 \alpha_i^2 + \nu \beta_s^2 (l_{ks}^2 + \alpha_i^2) \} \\ kI_{si}^{(6)} &= \frac{4 \sinh m_{ki}b}{b} \cdot \frac{(-1)^s \varepsilon_s}{(m_{ki}^2 + \beta_s^2)^2} \\ &\quad \cdot \{ \tau k^2 \beta_s^2 + \nu \alpha_i^2 (m_{ki}^2 + \beta_s^2) \} \\ K_{is}^{(4)} &= n_{is} (1 + 2hn_{is} \coth 2hn_{is}) \\ \bar{K}_{is}^{(4)} &= \left\{ 2hn_{is}^2 - 2(1-\nu)(1+\nu) \frac{K}{E} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(58 \cdot a)$$

$E$ ：縦弾性係数

(3) 底面がなめらかな剛な床の上に置かれた直方体の問題

この問題では、 $A_{ks}^{(2)}$ 、 $B_{ki}^{(2)}$  および  $C_{is}^{(2)}$  の3個の未知定数が残っており、境界条件式 (34・c)、(35・c) および式 (36・c) より次の3群の連立一次方程式を得る。

式 (34・c) より

$$\sum_{i=0}^{\infty} ({}_iJ_{sk}^{(3)}B_{ki}^{(2)} + {}_iK_{ks}^{(1)}C_{is}^{(2)}) + I_{ks}^{(1)}A_{ks}^{(2)} = 0 \dots\dots\dots(59)$$

ここで、 $I_{ks}^{(1)}$ 、 ${}_iJ_{sk}^{(3)}$  および  ${}_iK_{ks}^{(1)}$  は式 (52・a) に示したものである。

式 (35・c) より

$$\sum_{s=0}^{\infty} ({}_sJ_{ik}^{(4)}A_{ki}^{(2)} + {}_sK_{ki}^{(2)}C_{is}^{(2)}) + I_{ki}^{(2)}B_{ki}^{(2)} = 0 \dots\dots\dots(60)$$

ここで、 $I_{ki}^{(2)}$ 、 ${}_sJ_{ik}^{(4)}$  および  ${}_sK_{ki}^{(2)}$  は式 (53・a) に示したものである。

最後に、式 (36・c) より

$$\sum_{k=0}^{\infty} (kI_{is}^{(3)}A_{ks}^{(2)} + kI_{si}^{(4)}B_{ki}^{(2)}) + K_{is}^{(3)}C_{is}^{(2)} + p_{is} = 0 \dots\dots\dots(61)$$

ここで、 $K_{is}^{(3)}$ 、 $kI_{is}^{(3)}$ 、 $kI_{si}^{(4)}$  および  $p_{is}$  は式 (54・a) に示したものである。

(4) 立方体の問題で荷重が正方形分布の場合

$a=b=h$  の立方体で荷重が  $c=d$  の正方形分布の場合を(1)の問題について述べることにする。

この場合には、応力状態の対称性により、 $B_{ki}^{(2)} = A_{ki}^{(2)}$  となるので、式 (50)~(54) に示した5群の連立一次方程式は4群の連立一次方程式に低下する。

未知定数を次のように置いて式の無次元化を行う。

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_{ks}^{(2)}}{aq_0} &= A_{ks}, & \frac{B_{ki}^{(2)}}{aq_0} &= B_{ki} = A_{ki} \\ \frac{\bar{C}_{is}^{(3)}}{a^2q_0} &= D_{is}, & \frac{C_{00}}{q_0} &= C_{00}' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(62)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} l_{ks}' &= \frac{\pi}{2} \sqrt{k^2 + 4s^2}, & m_{ki}' &= \frac{\pi}{2} \sqrt{k^2 + 4i^2} \\ n_{is}' &= \pi \sqrt{i^2 + s^2}, & O &= k^2 + 4i^2 + 4s^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(63)$$

と置く。式 (50)、(51)、(52) および式 (54) の4群の連立一次方程式を反復法で解くのではあるが、 $C_{is}^{(2)}$  と  $\bar{C}_{is}^{(2)}$  は  $i \geq 5$ 、 $s \geq 5$  の範囲では符号が異なるだけで絶対値はおおよそ等しく、電子計算機を用いて解く上で桁落の影響が強く表われ、収束がなかなか困難である。

この弊害を除去するために、ここで新しい未知定数を導入し、 $C_{is}^{(2)}$  および  $\bar{C}_{is}^{(2)}$  を次のように置き換える。

$$\left. \begin{aligned} C_{is} &= \frac{1}{2aq_0} (C_{is}^{(2)} + \bar{C}_{is}^{(2)}) \\ \bar{C}_{is} &= \frac{1}{2aq_0} (C_{is}^{(2)} - \bar{C}_{is}^{(2)}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(64)$$

式 (62)~(64) の諸量を用いて、式 (50)、(51)、(52) および式 (54) の4群の連立一次方程式を反復法で解くのに適した形に整頓して示すと次のようである。

式 (50) と式 (51) より  $D_{is}$  を消去して

$$\begin{aligned} n_{is}' \bar{N}_{is} \bar{C}_{is} &= -n_{is}' N_{is} C_{is} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} ({}_kI_{is}^{(1)}A_{ks} + {}_kI_{si}^{(1)}A_{ki}) - M_{is} \dots\dots\dots(65) \end{aligned}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} N_{is} &= 2(n_{is}' + 1 - \nu) \coth 2n_{is}' + 2\nu - 1 + 2n_{is}' \\ \bar{N}_{is} &= 2(n_{is}' - 1 + \nu) \coth 2n_{is}' + 2\nu - 1 - 2n_{is}' \\ M_{is} &= 4\nu(1 - 2\nu)C_{00}'(\delta_s \delta_i (-1)^i + \delta_i \delta_s (-1)^s) \\ {}_kI_{is}^{(1)} &= -\frac{16(-1)^i}{O^2} \sinh l_{ks}' [i^2 \{k^2 + 4s^2 \\ &\quad + (1 - \nu)O\} - \varepsilon_i s^2 (4i^2 - \nu O)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(65 \cdot a)$$

式 (65) と式 (54) より  $\bar{C}_{is}$  を消去して

$$\begin{aligned} H_{is} C_{is} &= -\bar{N}_{is} \sum_{k=0}^{\infty} ({}_kI_{is}^{(2)}A_{ks} + {}_kI_{si}^{(2)}A_{ki}) \\ &- K_{is} \sum_{k=0}^{\infty} ({}_kI_{is}^{(1)}A_{ks} + {}_kI_{si}^{(1)}A_{ki}) \\ &+ K_{is} M_{is} - \bar{N}_{is} p_{is}' \dots\dots\dots(66) \end{aligned}$$



ここで

$$\left. \begin{aligned} H_{is} &= n_{is}' \left[ -\frac{8}{\sinh 2n_{is}'} \{n_{is}'^2 + (1-\nu)^2\} \right. \\ &\quad \left. + (8\nu-6) \sinh 2n_{is}' \right] \\ K_{is} &= \frac{2}{\sinh 2n_{is}'} (n_{is}' - 1 + \nu) + e^{-2n_{is}'} \\ {}_k I_{is}^{(2)} &= \frac{16(-1)^{k+i} \varepsilon_i}{O^2} \sinh l_{ks}' (k^2 i^2 + \nu s^2 O) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (66 \cdot a)$$

$\bar{N}_{is}$  および  ${}_k I_{is}^{(1)}$  は式 (65・a) に示したものである。また、 $p_{is}'$  は式 (54・a) に示した  $p_{is}$  を  $q_0$  で除したものである。

式 (52) より

$$I_{ks} A_{ks} = - \sum_{i=0}^{\infty} ({}_i J_{sk} A_{ki} + {}_i K_{ks} C_{is} + {}_i \bar{K}_{ks} \bar{C}_{is} - {}_i L_{ks} D_{is}) \dots\dots\dots (67)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} I_{ks} &= \frac{l_{ks}'}{\sinh l_{ks}'} (l_{ks}' + \cosh l_{ks}' \sinh l_{ks}') \\ {}_i J_{sk} &= \frac{8(-1)^{s+i} \varepsilon_s}{O^2} \sinh m_{ki}' (16 i^2 s^2 + \nu k^2 O) \\ {}_i K_{ks} &= \frac{8(-1)^{i+k} \varepsilon_k}{O^2} e^{2n_{is}'} (k^2 i^2 + \nu s^2 O) \\ &\quad - \frac{8(-1)^i \varepsilon_k}{O^2} \{i^2 (k^2 + O) + \nu (s^2 - i^2) O\} \\ {}_i \bar{K}_{ks} &= -\frac{8(-1)^{i+k} \varepsilon_k}{O^2} e^{-2n_{is}'} (k^2 i^2 + \nu s^2 O) \\ &\quad + \frac{8(-1)^i \varepsilon_k}{O^2} \{i^2 (k^2 + O) + \nu (s^2 - i^2) O\} \\ {}_i L_{ks} &= \frac{8 i s n_{is}' (-1)^i \varepsilon_k}{O} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (67 \cdot a)$$

最後に、式 (50) と式 (51) とより  $C_{is}$  および  $\bar{C}_{is}$  を消去して

$$L_{is} D_{is} = \sum_{k=0}^{\infty} ({}_k I_{is}^{(3)} A_{ks} - {}_k I_{si}^{(3)} A_{ki}) \dots\dots\dots (68)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} L_{is} &= \frac{2 n_{is}'^2 \coth 2 n_{is}'}{is} \\ {}_k I_{is}^{(3)} &= -\frac{32(1-\nu)(-1)^i}{O} \sinh l_{ks}' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (68 \cdot a)$$

なお、

$$\left. \begin{aligned} C_{is} &= C_{si}, \quad \bar{C}_{is} = \bar{C}_{si} \\ D_{is} &= -D_{si}, \quad D_{ii} = 0 (i=s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (69)$$

の関係がある。

式 (65)~(68) の4群の連立一次方程式を反復法で解くためには、まず、式 (66) において、右辺の  $A_{ks}$ 、 $A_{ki}$  を0として  $C_{is}$  を求め、これを式 (65) の右辺に代入して  $\bar{C}_{is}$  を求める。次にこの  $C_{is}$ 、 $\bar{C}_{is}$  を式 (67) の右辺に代入し、 $A_{ki}$  は0として  $A_{ks}$  を求める。最後にこ

の  $A_{ks}$  を式 (68) の右辺に代入して  $D_{is}$  を求める。このようにして得られた値を第1近似値とし、これらを上記述べた順に各式の右辺に代入して第2、第3の近似値を得る。この手順を必要な精度にいたるまで繰り返すのであるが、加速係数を併用すると収束が非常に早くなる。

直接法で解く場合には、0要素も記憶させなければならないが、上に述べた反復法によれば、0要素は記憶させる必要がなく、計算機の使用 core 数が大幅に減少し、実数型の overflow を起こさない範囲で、級数の項数をかなり多く取ることができる。

以上 (1) の問題のみについて述べたが、(2) の問題においても式 (64) の未知定数の置きかえは肝要なことである。

### 7. 数値計算例

(1)、(2) および (3) の問題について、 $a=b=h$  の立方体で、荷重が  $c=d$  の正方形分布の場合を取り扱った。ポアソン比  $\nu$  はすべて 0.20 とし、荷重分布幅  $c$  と立方体の辺長  $a$  との比  $c/a$  が 0.9, 0.5, 0.2, 0.1 の4つの場合について応力を求めたが、(1) の問題については  $c/a=0.5, 0.2$  の2つの場合の応力分布を、(2) および (3) の問題については  $c/a=0.5$  の場合の応力分布を縦軸に応力の値、横軸に  $x/a$  を取り、パラメーターとして  $z$  を用いてそれぞれ示した。

#### (1) 底面が剛な床に固定された立方体の問題

この問題では、4群の連立一次方程式を解くことになるが、級数の項数を24項取り、約1900元の連立一次方程式を加速係数  $\alpha$  を0.5として反復法で解いた。ただし、 $i, s, k$  を同時に23とすると、電子計算機において実数型のオーバー・フローが生ずるので、それをさけるため、たとえば、 $C_{is}$  については、 $i=s=17$  を基準とし、それ以上の  $i, s$  については、 $i$  を増したときには  $s$  を漸時減らしていくといった項数の取り方を試みた。

表-1 および表-2 には、級数の項数を変化させたときの垂直応力  $\sigma_x$  および  $\sigma_z$  の収束の状況をそれぞれ示す。表-1 より、 $z=0.6h$  における  $\sigma_x$  は十分正確に収束していると判断できるが、変位が拘束されている面、すなわち、 $z=0$  の面における  $\sigma_x$  はまだ十分に収束していないことがわかる。表-2 より、 $\sigma_z$  は  $\sigma_x$  に比較していくぶん収束が早いようであり、特に、 $z$  軸にそった  $\sigma_z$  は級数の項数が12項でも、 $z=2h$  を除けば、十分に収束しているようである。表-1 および表-2 をとおし、応力の収束は立方体の内部では早いですが、表面、特に、幾何学的に不連続となるような辺においては、遅いようで

表-1 級数の項数を変化させたときの  $\sigma_x/q_0$  の収束の状況 ( $a=b=h, c=d, c/a=0.5$ )

項数 $k, s, i$	$z=0$			$z=0.6h$			$z=2h$		
	$x=0$ $y=0$	$x=\pm 0.5a$ $y=\pm 0.5b$	$x=\pm a$ $y=0$	$x=0$ $y=0$	$x=\pm 0.5a$ $y=\pm 0.5b$	$x=\pm a$ $y=0$	$x=0$ $y=0$	$x=\pm 0.5a$ $y=\pm 0.5b$	$x=\pm a$ $y=0$
11	-0.0698	-0.0668	0.1615	0.0259	0.0180	0.0171	-0.5629	-0.1192	0.1917
13	-0.0683	-0.0446	0.1660	0.0259	0.0180	0.0158	-0.6309	-0.1130	0.2394
17	-0.0663	-0.0465	0.1735	0.0260	0.0180	0.0116	-0.6231	-0.1141	0.2345
23	-0.0645	-0.0617	0.1829	0.0260	0.0180	0.0086	-0.5805	-0.1184	0.2061

表-2 級数の項数を変化させたときの  $\sigma_z/q_0$  の収束の状況 ( $a=b=h, c=d, c/a=0.5$ )

項数 $k, s, i$	$z=0$			$z=0.6h$			$z=2h$		
	$x=0$ $y=0$	$x=\pm 0.5a$ $y=\pm 0.5b$	$x=\pm a$ $y=0$	$x=0$ $y=0$	$x=\pm 0.5a$ $y=\pm 0.5b$	$x=\pm a$ $y=0$	$x=0$ $y=0$	$x=\pm 0.5a$ $y=\pm 0.5b$	$x=\pm a$ $y=0$
11	-0.2259	-0.2154	-0.4190	-0.3207	-0.2576	-0.2227	-0.9547	-0.2551	-0.1124
13	-0.2265	-0.2242	-0.4366	-0.3207	-0.2576	-0.2240	-1.0515	-0.2459	-0.0644
17	-0.2273	-0.2235	-0.4663	-0.3208	-0.2576	-0.2283	-1.0400	-0.2466	-0.0689
23	-0.2281	-0.2175	-0.5018	-0.3208	-0.2575	-0.2314	-0.9790	-0.2525	-0.0964

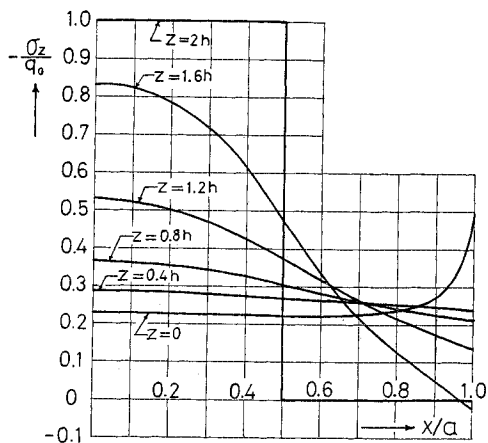


図-3  $y=0$  面における  $\sigma_z$  の分布 ( $c/a=0.5$ )

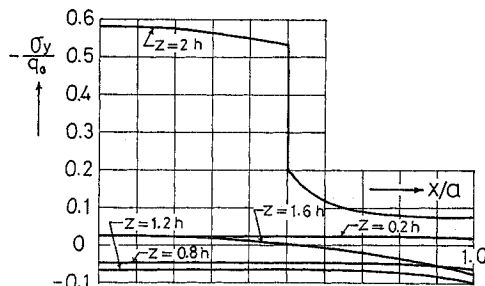


図-5  $y=0$  面における  $\sigma_y$  の分布 ( $c/a=0.5$ )

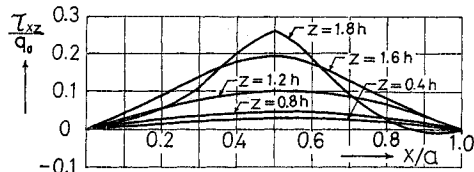


図-6  $y=0$  面における  $\tau_{xz}$  の分布 ( $c/a=0.5$ )

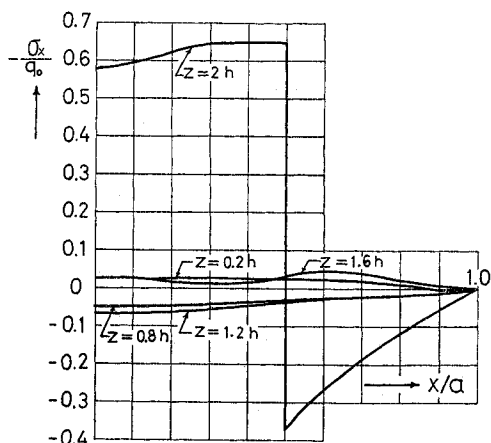


図-4  $y=0$  面における  $\sigma_x$  の分布 ( $c/a=0.5$ )

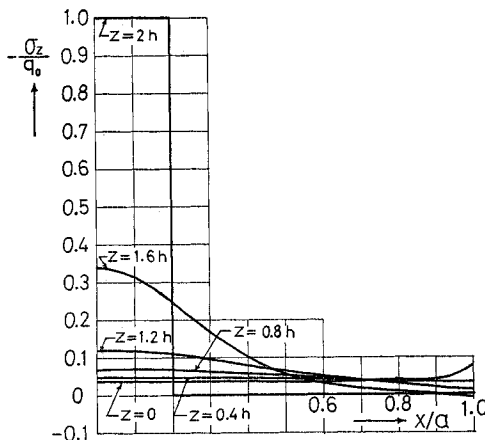


図-7  $y=0$  面における  $\sigma_z$  の分布 ( $c/a=0.2$ )

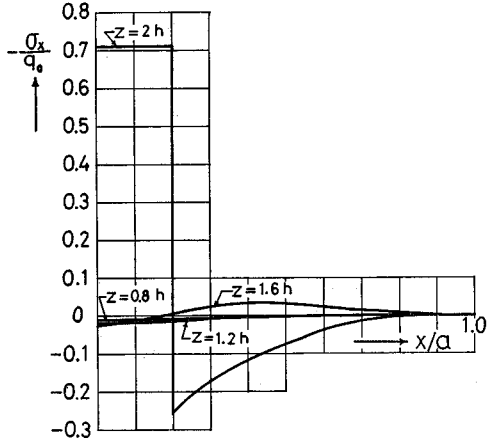


図-8  $y=0$  面における  $\sigma_x$  の分布 ( $c/a=0.2$ )

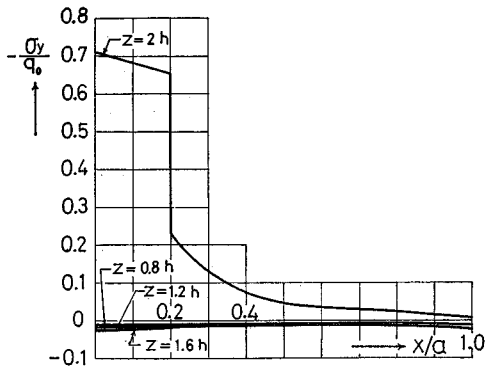


図-9  $y=0$  面における  $\sigma_y$  の分布 ( $c/a=0.2$ )

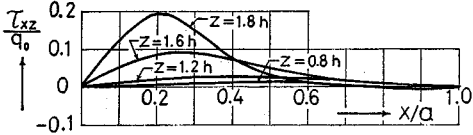


図-10  $y=0$  面における  $\tau_{xz}$  の分布 ( $c/a=0.2$ )

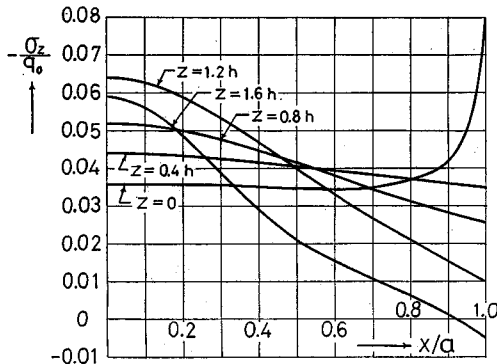


図-11  $y=0.5a$  面における  $\sigma_z$  の分布 ( $c/a=0.2$ )

ある。

$z=0$  の面における  $\sigma_z$  を除いた他の応力の収束は遅く、そのため、 $z=0$  の面における応力の分布は、 $\sigma_z$  以外は図に示さなかった。

図-3~図-6には  $c/a=0.5$  の場合の応力分布を、図-7~図-16には  $c/a=0.2$  の場合の応力分布をそれぞれ示した。

図-3、図-7および図-11に示されているように、 $z=0$  の面における  $\sigma_z$  は立方体の周辺で応力集中の傾向を表わしている。また、 $z=1.6h$  における  $\sigma_z$  が立方体

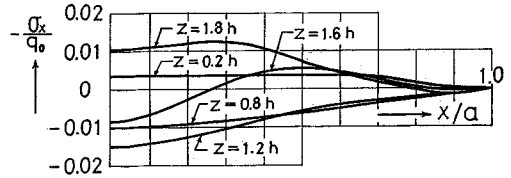


図-12  $y=0.5a$  面における  $\sigma_x$  の分布 ( $c/a=0.2$ )

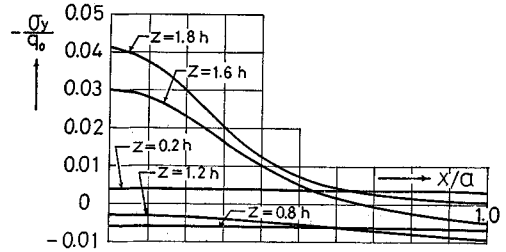


図-13  $y=0.5a$  面における  $\sigma_y$  の分布 ( $c/a=0.2$ )

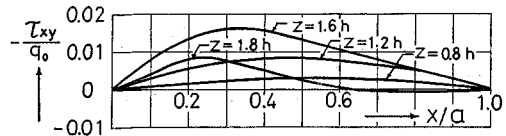


図-14  $y=0.5a$  面における  $\tau_{xy}$  の分布 ( $c/a=0.2$ )

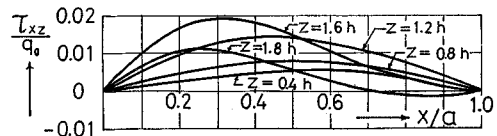


図-15  $y=0.5a$  面における  $\tau_{xz}$  の分布 ( $c/a=0.2$ )

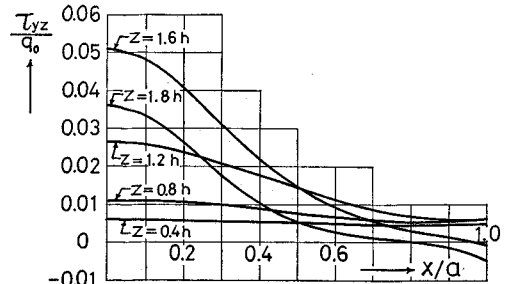


図-16  $y=0.5a$  面における  $\tau_{yz}$  の分布 ( $c/a=0.2$ )

の側面でわずかながら引張応力を示している。

図-4 および 図-8 に示されているように、 $\sigma_x$  は上面 ( $z=2h$ ) で圧縮応力の最大値を示すが、荷重の作用する境界で圧縮から引張応力に急変する。図-5 および 図-9 に示されているように、 $\sigma_y$  は上面の中心で圧縮応力の最大値を示し、荷重の作用する境界で急変するがやはり、圧縮応力である。 $\sigma_x$  および  $\sigma_y$  は上面から内部にいくにしたがい急激に減少し、 $z=0.4h$  の面付近で引張から圧縮応力に変わる。 $z=0.4h$  の面の  $\sigma_x, \sigma_y$  の値はほとんど 0 に近く、そのため、この面における応力分布は図には示さなかった。

図-6 および 図-10 に示されているように、せん断応力  $\tau_{xz}$  は上面付近では荷重の作用する境界で最大値を示し、上面から内部にいくにしたがい、 $x=0.5a$  付近で最大値を示す。また  $z=1.8h$  における  $\tau_{xz}$  は側面付近で正から負に変わる。

図-11~図-16 には  $c/a=0.2$  の場合で、 $y=0.5a$  面における応力分布を示した。垂直応力およびせん断応力のいずれも  $y=0$  面における応力値に比較してかなり小さな値である。

(2) 底面が弾性床の上に置かれた立方体の問題

この問題では  $Ka/E$  なる量を決める必要があり、諸係数を次の値とした。

$$K=20 \text{ kg/cm}^2, \quad a=200 \text{ cm}$$

$$E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \frac{Ka}{E}=0.01905$$

級数の項数を 18 項取って計算し、 $c/a=0.5$  の場合の応力分布を 図-17~図-20 に示した。

図-17 と 図-3 を比較すると、 $\sigma_x$  の分布は  $z=0$  を除けば、両者はほとんど一致していることがわかる。

$z=0$  における  $\sigma_x$  の分布は周辺でもはや応力集中の傾向を表わしていないが、このことは、弾性床を縦方向の

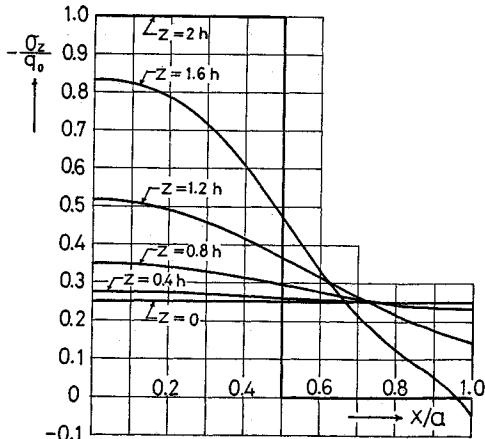


図-17  $y=0$  面における  $\sigma_x$  の分布 ( $c/a=0.5$ )

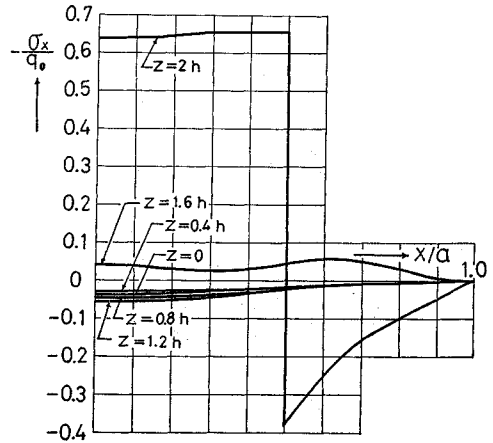


図-18  $y=0$  面における  $\sigma_x$  の分布 ( $c/a=0.5$ )

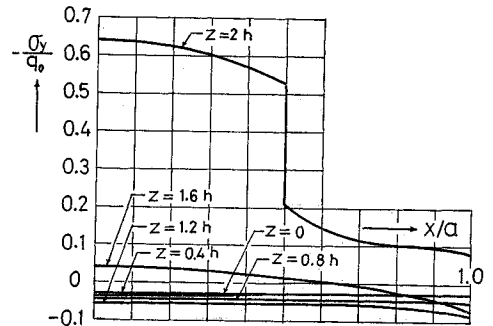


図-19  $y=0$  面における  $\sigma_y$  の分布 ( $c/a=0.5$ )

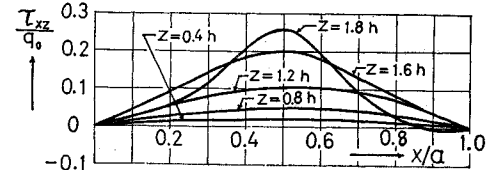


図-20  $y=0$  面における  $\tau_{xz}$  の分布 ( $c/a=0.5$ )

みに抵抗するばねに置き換えて解析を行ったためと思われる。

$\sigma_x$  および  $\sigma_y$  の分布が上面において (1) の問題といくぶん異なっているのは、級数の項数の違いが微妙に影響しているためと思われる。

$z=0$  面における  $\sigma_x$  および  $\sigma_y$  は (1) の問題では圧縮応力であったが、この問題では引張応力に変わっている。また、 $z=0$  で  $x=0$  付近の  $\sigma_x$  および  $\sigma_y$  が  $z=0.4h$  における値より大きくでている。

$z$  方向の変位  $w$  には、立方体の剛體的並進移動が大きく現われる。

(3) 底面がなめらかな剛な床の上に置かれた立方体の問題

級数の項数を 18 項取って計算し、 $c/a=0.5$  の場合の応力分布を 図-21~図-24 に示した。

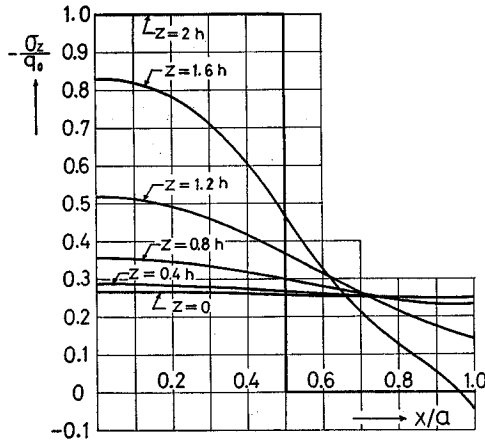


図-21  $y=0$  面における  $\sigma_z$  の分布 ( $c/a=0.5$ )

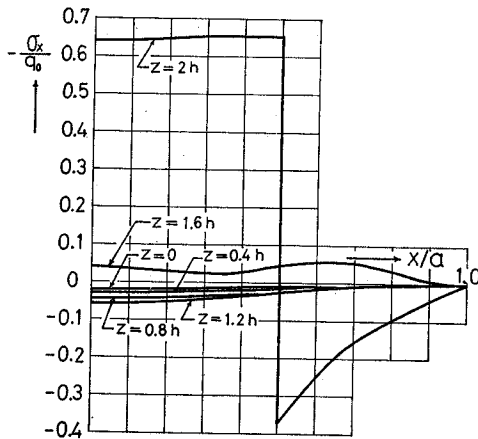


図-22  $y=0$  面における  $\sigma_x$  の分布 ( $c/a=0.5$ )

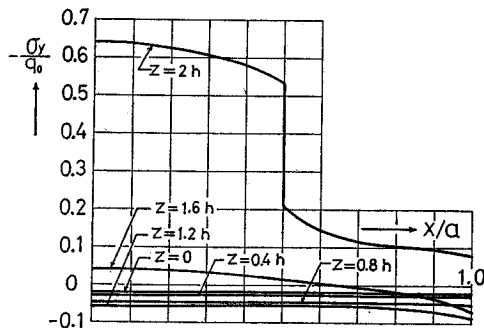


図-23  $y=0$  面における  $\sigma_y$  の分布 ( $c/a=0.5$ )

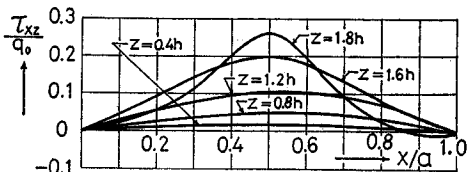


図-24  $y=0$  面における  $\tau_{xz}$  の分布 ( $c/a=0.5$ )

図-21 に示されているように、 $z=0$  面における  $\sigma_z$  の分布はほぼ一様分布に近く、剛な床と立方体とが完全に接触することがわかる。(2) の問題の 図-17 と比較すると  $z=0$  付近を除けば、両者はほぼ一致している。

図-22 に示されているように、 $y=0$  面における  $\sigma_x$  の分布は (2) の問題の 図-18 とほとんど一致しているが、この問題では、 $z=0$  で  $x=0$  付近における値が  $z=0.4h$  における値より小さくなっている。

$\sigma_y$  についても (2) の問題と比較すると、 $\sigma_x$  と同様の傾向を示している。

## 8. 結 語

H. Neuber の解に第3項  $2 \text{rot } \phi$  を付加した一般化された H. Neuber の解を、境界条件がそれぞれ異なる直方体の3つの問題に適用し、第3項が必要となる問題または不要となる問題についての解法を系統的に述べ、立方体で荷重が正方形分布の場合の3次元応力解析を行った。

本文で取り扱った3つの問題を通し、変位および応力の収束は立方体の内部では良く、表面では級数の項数の多少によって微妙な相違が見られた。(1) の問題では収束の遅いことが予測されたので、級数の項数を24項取ったが、それでもまだ、底面では良い収束値が得られなかった。(2) および (3) の問題では、早い収束が期待されたので、級数の項数は18項しか取らなかった。

級数解法による場合には、未知定数を定める多元連立一次方程式を解くことが大きな仕事となるが、これを直接法で解くには、解の精度あるいは計算機の容量などの点でなかなか困難であり、これらの点が級数解法にひとつの制限を設けているように思われるが、本文では0要素を記憶させない反復法により解き、十分な精度の解を得た。

終りに、数値計算にあたって、有益なご助言を賜った北海道大学工学部の芳村 仁教授ならびに秦 謹一教授および大学院博士課程学生小林道明君に深謝の意を表する次第です。

## 参 考 文 献

- 1) 色部 誠・後藤浩一：3次元弾性問題の数値解法，土木学会論文集，第138号，pp. 11~20, 1967-2.
- 2) 岡村宏一・島田 功：3次元弾性問題の1数値解法とその応用，土木学会論文報告集，No. 199, pp. 33~43, 1972-3.
- 3) Yettram, A.L. and K. Robbins: Anchorage zone stresses in axially posttensioned members of uniform rectangular section, Magazine of Concrete Research, Vol. 21, No. 67, pp. 103~112, June, 1969.
- 4) Iyengar, K.T., Sundara Raja and M.K. Prabhakara: A three dimensional elasticity solution for rectangular prism under end loads, Z.A.M.M., Band 49, Heft 6,

- pp. 321~332, Juni, 1969.
- 5) 小林道明・石川博将・秦 謹一：短直方柱の応力解析(一端固定, 上側面に部分的荷重をうける片持はり類似の問題), 日本機械学会東海支部第 23 期総会講演会論文集, No. 743-1, pp. 21~35, 1974-3.
  - 6) 秦 謹一：三次元応力問題の解法について, 北海道大学工学部研究報告, 第 13 号, pp. 13~44, 1955-12.
  - 7) Lur'e, A.I.: Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity, Translated from the original Russian by D.B. McVean edited by J.R.M. Radok, p. 46, John Wiley, 1964.
  - 8) 宮本 博：3次元弾性論, p. 17, 裳華房, 1967.  
(1974.10.1・受付)
-