

接線剛性法による骨組構造物の大変形解析*

TANGENT STIFFNESS METHOD FOR LARGE DEFORMATION ANALYSIS OF FRAME STRUCTURE

後藤 茂夫**・羽根 悟 朗***・田中 達 朗****

By Shigeo GOTO, Goro HANE and Tatsuro TANAKA

要 旨 本論文は、骨組構造において、既知先行状態よりの微小荷重増分と変位増分との関係を表わす、有限変形法の接線剛性方程式を反復使用し、不平衡力を逐次減小せしめる、Newton-Raphson 法と等価な大変形解析手法（接線剛性法）の理論と若干の計算例について述べたものである。

1. ま え が き

構造物の幾何学的非線形問題に関しては、すでに多くの研究論文が発表されており^{1)~16)}、極端な非線形性を有する構造物についても、各種の実用計算法が確立されつつある^{17)~14)~18)}。

一般に、初期変形を考えた、曲げと軸方向力を受ける部材の部材剛性マトリックスの誘導には、エネルギー論的には、有限変位理論の変位-ひずみ式に基づいてはいるが、部材変形に関しては、適当な変位関数を設定する有限要素法の手法が多用されている^{9)~7)}。

しかし、ここでは、棒部材に容認される有限変位理論の変位-ひずみ式より得られる軸方向力と曲げモーメントに関する連立微分方程式の解析解より部材剛性マトリックスを誘導しており、その結果、本論文により作成された大変形解析プログラムは、極端な大変形挙動に対しても、通常の反復法に見られるダンピング・ファクタの導入あるいは、その他の収束加速法の必要のない、きわめて良好な収束性を示している。

また、収束条件さえ満足すれば、荷重増分の大小は、誤差には無関係であり、たとえば、後述のエラスティカの計算例に見るように第 1 回荷重増分として、いきなり Euler の座屈荷重を超える値を与えても確実に収束し、

この解は、荷重増分をさらに細分した場合の計算結果と一致する。

2. 骨組構造における有限変形理論と 大変形理論

本章での有限変形、大変形という呼称は、骨組構造の節点に作用する外力（荷重）ベクトルとそれに対応する節点変位ベクトル（構造変形）の挙動に関するもので、構成部材に発生する応力-ひずみ関係および、剛体変位をのぞいた棒部材に関する部材力、部材変形間の挙動に対するものとは明確に区別すべきもので、以下に著者の考えの概要を述べる。

周知のように、骨組構造解析は、

- 1 a) 部材に発生する応力とひずみの関係（弾性条件）
- 1 b) 部材力と部材変形との関係（部材力式）
- 2) 部材変形と節点変位との関係（広義の適合条件）
- 3) 部材力と外力（荷重）との関係（つり合い条件）

の基本条件より、与えられた外力に対する構造物の挙動すなわち、構造変形と各部材力とを明らかにするものであり、すべての条件が線形であると容認される場合の理論を微小変形理論、1 a) 以外の条件に非線形性が導入される場合を総称して幾何学的非線形理論（弾性的非線形理論と）よぶ。

完成系の吊橋や、長大アーチ橋などは、実用的には、つり合い条件のみが非線形性を有する構造物であると考えてよく、このような場合の構造物の変形を有限変形、この条件のもとでの解析理論を有限変形理論とよび、長柱の弾性座屈解析などもこの範ちゅうに属するものと考えられる。すなわち節点変位を有限の微小量としてつり合い条件に導入する場合である。

これに対し、架設中の未完成吊橋やキャットウォーク・ストームケーブル構造などは、さらに 2) の適合条件も非線形と考えねばならず、微小変形理論的観点から

* 本論文は土木学会第 29 回年次学術講演会にて一部発表

** 正会員 工博 日本構造技術（株）取締役社長

*** 正会員 工修 日本構造技術（株）

**** 正会員 日本構造技術（株）

は、不安定な構造系で、つり合い条件は変形の考慮なしには成立しない場合が多く、線形関係は 1) のみという前提で解析しなければならぬ。このような構造系の変形を大変形、その解析理論を大変形理論とよび、長柱の弾性座屈後の挙動解析、アーチの飛移過程の解析などもこれに含まれる。以上の分類を表にまとめれば、次のようになる。

表一 基本条件と各理論の関係

基本条件	微小変形理論	幾何学的非線形理論	
		有限変形理論	大変形理論
弾性条件	線形	線形	線形
適合条件	線形	線形	非線形
つり合い条件	変形前の骨組	変形後の骨組	変形後の骨組

いま、荷重 D 、部材力 S でつり合っていた構造物が、付加荷重 ΔD により部材変形 Δs を生じ、部材力が $S + \Delta S$ となり、新たな変位 Δd を生じて、ふたたび平衡状態となったとすると、変形後における部材力と荷重とのつり合いは、

$$\frac{\partial \Delta s^T}{\partial \Delta d} (S + \Delta S) = D + \Delta D \quad \dots\dots\dots (1)$$

と表わされる。ここで変位と変形の厳密な適合条件を $\Delta s = \alpha^T \Delta d + \beta \quad \dots\dots\dots (2)$

と表わし、右辺第 1 項を線形項、第 2 項を節点変位 Δd の 2 次以上の高次項を含む非線形項とすれば、

$$\frac{\partial \Delta s^T}{\partial \Delta d} = \alpha + \frac{\partial \beta^T}{\partial \Delta d} = \alpha + \Delta \alpha \quad \dots\dots\dots (3)$$

である。すなわち、 α は先行状態における各部材力を節点荷重方向へと変換する射影マトリックスであるので、 $\partial \beta^T / \partial \Delta d$ はその変化量 $\Delta \alpha$ と考えることができる。部材力と部材変形を線形関係として、部材剛性マトリックスを k とおけば、部材力式および先行状態でのつり合い式は、

$$\Delta S = k \Delta s, \quad \alpha S = D \quad \dots\dots\dots (4)$$

であり、これより、式 (1) は

$$ak\alpha^T \Delta d + ak\beta + \Delta \alpha (S + \Delta S) = \Delta D \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここで

$$ak\alpha^T = K_1 \{\alpha\} = K_1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$ak\beta = \Delta K_1 \{\alpha, \Delta d\} \cdot \Delta d = \Delta K_1 \Delta d \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta \alpha (S + \Delta S) &= (K_2 \{\alpha, S + \Delta S\} \\ &\quad + \Delta K_2 \{\alpha, S + \Delta S, \Delta d\}) \Delta d \\ &= (K_2 + \Delta K_2) \Delta d \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

とおけば、厳密な非線形の剛性方程式は

$$K_A = K_A \{\alpha, S + \Delta S\} = K_1 + K_2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$K_B = K_B \{\alpha, S + \Delta S, \Delta d\} = \Delta K_1 + \Delta K_2 \quad \dots\dots (10)$$

$$K_C = K_C \{\alpha, S + \Delta S, \Delta d\} = K_A + K_B \quad \dots\dots (11)$$

として、次のように表わされることになる。

$$K_C \Delta d = (K_A + K_B) \Delta d = \Delta D \quad \dots\dots\dots (12)$$

以上において、たとえば $K_1 \{\alpha\}$ は K_1 が α の関数であることを表わしており、以下同様な表記を用いる。

式 (12) の剛性マトリックス中の未知変位項を 0 とすれば、非線形剛性マトリックス K_B は 0 となり、みかけ上線形化された基礎式が得られ、この場合が前記の有限変形理論となる。すなわち、部材力式を線形とすれば、剛性マトリックス中の非線形項は、部材力増分 ΔS のみとなり、たとえば膜理論による吊橋解析の非線形項が水平張力の増分 ΔH のみに起因するのと同様である。

なお、式 (8) における二次剛性マトリックス K_2 は、 $\Delta \alpha$ の変位 Δd に関する線形項を $\Delta \alpha'$ とすれば

$$K_2 \Delta d = \Delta \alpha' (S + \Delta S) \quad \dots\dots\dots (13)$$

を満足し、また、線形剛性マトリックス K_A において、とくに $K_A \{\alpha, S\}$ 、 $K_A \{\alpha + \Delta \alpha, S + \Delta S\}$ の形式のものは、接線剛性マトリックスとよばれ、それぞれ、先行状態および変形後の状態よりの微小荷重増分と付加変位の変化量との関係を表わす剛性マトリックスで、いずれも、変位項を含めずに表わすことができる。

以上により、微小変形理論、有限変形理論、大変形理論それぞれの解析過程における剛性方程式、部材力算定式、およびこれらの解が満足すべきつり合い条件式を示せば、表一 2 のようになる。

表二 基本式と各理論の関係

理論	微小変形理論	有限変形理論	大変形理論
剛性方程式	$K_1 \Delta d = \Delta D$	$(K_1 + K_2 \{S + \Delta S\}) \cdot \Delta d = \Delta D$	$(K_1 + K_2 + K_B \{d, d\}) \cdot \Delta d = \Delta D$
部材力式	$\Delta S = K \alpha^T \Delta d$	$\Delta S = K \alpha^T \Delta d$	$\Delta S = K (\alpha^T \Delta d + \beta)$
つり合い条件式	$\alpha \Delta S = \Delta D$	$(\alpha + \Delta \alpha') (S + \Delta S) = D + \Delta D$	$(\alpha + \Delta \alpha) (S + \Delta S) = D + \Delta D$

なお、以上における部材力、部材変形とは単一構成部材を独立した構造物と考えた場合（したがって材端部は構造物としての安定な支点としての拘束条件を有する）の外力およびそれに対応する変位のことであり、それぞれ、部材に発生する全断面力、断面変形を表わし得る必要最少な外力と変位の組合わせである。もちろん、このように考えた場合、部材力式は、剛性方程式の一種（部材剛性方程式ともよぶ）であるので、当然

- 1') 応力とひずみの関係
- 2') ひずみと部材変形の適合条件
- 3') 応力と部材力のつり合い条件

というマイクロな基本条件より誘導されるものであるが、この間の線形、非線形の問題が構造解析の解へ及ぼす影響に比べ、前記 2), 3) の基本条件の影響は、はるかに支配的であり、部材力式の非線形性の有無は、上記の理論区分を左右するものではない。ただ部材力式の非線形化は単一部材が長い場合に有利であり、線形式では、途中に分割節点を設ける必要が生じたり、極端な大変形時

の収束性、精度を悪化させることがある。

3. 大変形解析における接線剛性法

一般に、大変形挙動の著しい構造物の解析には、非線形剛性方程式を単に数学的な多元高次の連立方程式と考へ、Newton-Raphson 法を用いて反復計算をする方法や、有限変形理論の基礎式を用いた荷重漸増法、あるいは、その他の反復手法が用いられている。

ここでは、厳密な非線形剛性方程式の Newton-Raphson 法による反復解法と全く等価な接線剛性法、すなわち接線剛性方程式を反復使用し、その都度、先行状態を修正し、残差不平衡力を逆載荷(除荷)しながら、真の平衡状態に収束させる大変形解析手法について説明する。

構造物に作用する荷重を D 、変位を d として、その増分 ΔD 、 Δd の関係を表わす厳密な非線形剛性方程式を $K_C \Delta d = \Delta D$ 、 $K_C = K_C\{\Delta d\}$ (14) と表わす。式(14)を微分することにより、荷重と変位の微小増分 δd 、 δD に関して

$$\frac{\partial(K_C \Delta d)}{\partial \Delta d^T} \delta d = \delta D \text{(15)}$$

が成立する。ここで

$$\tilde{K} = \frac{\partial(K_C \Delta d)}{\partial \Delta d^T} = \tilde{K}\{\Delta d\} \text{(16)}$$

とおけば、Newton-Raphson 法の反復公式が、 r 回目の近似解を Δd_r として

$$\Delta d_{r+1} = \Delta d_r + \tilde{K}^{-1}\{\Delta d_r\}(\Delta D - K_C\{\Delta d_r\} \cdot \Delta d_r) \text{(17)}$$

のように得られる。しかしながら、一般に K_C のパラメータ Δd のみの関数としての表示は煩雑であり、式(16)より得られる \tilde{K} もまた Δd の高次非線形となることをまぬがれない。

一方、先行状態における部材力式とつり合い式を

$$S = k s, \quad \alpha S = D \text{(18)}$$

と表わせば、 $\alpha = \partial s^T / \partial d$ であるので、つり合い式の微分より

$$\delta \alpha \cdot S + \alpha k a^T \delta d = \delta D \text{(19)}$$

が得られる。したがって

$$\alpha k a^T = K_1 = K_1\{\alpha\} \text{(20)}$$

であり、また $\delta \alpha$ は

$$\delta \alpha = \sum \frac{\partial \alpha}{\partial d} \delta d \text{(21)}$$

のように δd の一次結合で表わせるので

$$\delta \alpha \cdot S = K_2\{\alpha, S\} \cdot \delta d \text{(22)}$$

となり、

$$K_A = K_1 + K_2 = K_A\{\alpha, S\} \text{(23)}$$

とおくことにより、

$$K_A \delta d = \delta D \text{(24)}$$

のように、 \tilde{K} の代わりに K_A を用いた、式(15)と等価な接線剛性方程式が得られる。

すなわち、 K_A は節点変位と部材変形の非線形関係より導入される変位の高次項を全く含まず、 \tilde{K} よりも明解な表示となり、誤差は部材剛性マトリックス k のみに依存することになる。また、曲げと軸方向力が作用する部材では、部材力式は非線形となるが、同様な考察により、接線部材力式

$$\delta S = k_A \delta s \text{(25)}$$

を満足する接線部材剛性マトリックス k_A を用いることとなる。

以上により、接線剛性法による反復公式は、 r 回目の近似解 Δd_r より得られる S, α を S_r, α_r とすれば、不平衡力 δD_r は

$$\delta D_r = \Delta D - K_C\{\Delta d_r\} \cdot \Delta d_r = D - \alpha_r S_r \text{(26)}$$

となるので、

$$\Delta d_{r+1} = \Delta d_r + K_A^{-1}\{\alpha_r, S_r\} \cdot (D - \alpha_r S_r) \text{(27)}$$

のように表わすことができる。ここで D は先行荷重と所要荷重増分を含めた合計値とする。

図-1 に、接線剛性法の収束概念図を示す。添字 0 は初期状態、 f は収束した状態を表わす。

なお、構造物が極端な非線形特性を有する場合、各種の反復解析法において、いわゆるダンピングファクタを導入し、収束を速める方法が考えられているが、一般に経験的な数値であり、物理的な意味も明確でないものが多い。式(26)を用いる接線剛性法の場合、不平衡力 δD の値より、 K_A の部材力のパラメータ S_r を S_f の推定値でおきかえることにより、接線勾配を用いるかわりに、収束解の方へ傾いた割線を利用することとなり、その収束性を加速することが可能であり、また後述のように、アーチの飛移過程の解を求めるときなどに有効である。

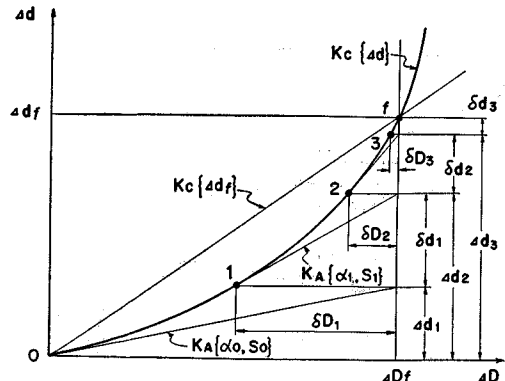


図-1 接線剛性法の収束概念図

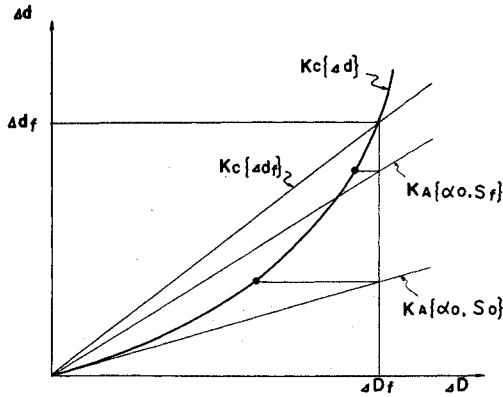


図-2 剛性マトリックスと勾配の関係

4. 二軸曲げ，ねじりおよび軸方向力を受ける部材の接線部材剛性方程式

伸び剛性 EA ，曲げ剛性 EI_y, EI_z ，ねじり剛性 GJ および，曲げねじり剛性 EI_ω が一様な部材 ij の材端力および材端変形を図-3のように考える。

この部材において，仕事をする断面力を次のように定める。

曲げモーメント

$$M_y = -EI_y \frac{d^2\zeta}{d\xi^2}, \quad M_z = -EI_z \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \dots\dots\dots (27)$$

単純ねじりモーメント，曲げねじりモーメント

$$T_s = GJ \frac{d\tau}{d\xi}, \quad M_\omega = EI_\omega \frac{d^2\tau}{d\xi^2} \dots\dots\dots (28)$$

軸方向力

$$\mathfrak{N} = EA \left\{ \frac{de}{d\xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(r \frac{d\tau}{d\xi} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (29)$$

ここで， τ は断面のねじれ角， r は ξ 方向せん断中心軸に関する断面回転二次半径である。

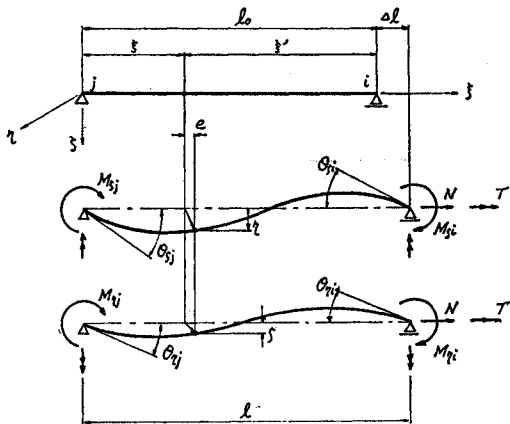


図-3 はりの変形と材端力

この部材の全ポテンシャルエネルギー Π は

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_0^{l_0} \left(\frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} + \frac{T_s^2}{2GJ} + \frac{M_\omega^2}{2EI_\omega} + \frac{\mathfrak{N}^2}{2EA} \right) \\ & \cdot d\xi - M_{y_i} \theta_{y_i} - M_{z_j} \theta_{z_j} - M_{z_i} \theta_{z_i} \\ & - M_{z_j} \theta_{z_j} - T \Delta\tau - M_{\omega_i} \tau_i' - M_{\omega_j} \tau_j' - N \Delta l \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

となる。なお， $\Delta\tau$ は両端のねじれ角の差 $\tau_i - \tau_j$ であり，

$$\tau_i' = \left[\frac{d\tau}{d\xi} \right]_{\xi=l_0}, \quad \tau_j' = \left[\frac{d\tau}{d\xi} \right]_{\xi=0}$$

$$M_{\omega_i} = EI_\omega \left[\frac{d^2\tau}{d\xi^2} \right]_{\xi=l_0}, \quad M_{\omega_j} = -EI_\omega \left[\frac{d^2\tau}{d\xi^2} \right]_{\xi=0}$$

である。 e に関する Π の変分より

$$\delta_e \Pi = \int_0^{l_0} \mathfrak{N} \delta \left(\frac{de}{d\xi} \right) d\xi - N \delta \Delta l = 0$$

$$\therefore \int_0^{l_0} (\mathfrak{N} - N) \delta \left(\frac{de}{d\xi} \right) d\xi = 0$$

$$\therefore \mathfrak{N} - N = 0 \dots\dots\dots (31)$$

η に関する Π の変分より

$$\begin{aligned} \delta_\eta \Pi = & - \int_0^{l_0} M_z \delta \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right) d\xi + \int_0^{l_0} N \frac{d\eta}{d\xi} \delta \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) d\xi \\ & - M_{z_i} \delta \theta_{z_i} - M_{z_j} \delta \theta_{z_j} \\ = & \left[M_z \delta \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) \right]_0^{l_0} - \int_0^{l_0} M_z \delta \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right) d\xi \\ & + \int_0^{l_0} N \frac{d\eta}{d\xi} \delta \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) d\xi \\ = & \int_0^{l_0} \left(\frac{dM_z}{d\xi} + N \frac{d\eta}{d\xi} \right) \delta \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) d\xi \\ = & \left[\left(\frac{dM_z}{d\xi} + N \frac{d\eta}{d\xi} \right) \delta \eta \right]_0^{l_0} \\ & - \int_0^{l_0} \left(\frac{d^2M_z}{d\xi^2} + N \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right) \delta \eta d\xi = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2M_z}{d\xi^2} + N \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0 \dots\dots\dots (32)$$

同様に

$$\frac{d^2M_y}{d\xi^2} + N \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = 0 \dots\dots\dots (33)$$

τ に関する Π の変分より

$$\begin{aligned} \delta_\tau \Pi = & \int_0^{l_0} T_s \delta \left(\frac{d\tau}{d\xi} \right) d\xi + \int_0^{l_0} M_\omega \delta \left(\frac{d^2\tau}{d\xi^2} \right) d\xi \\ & + \int_0^{l_0} r^2 N \frac{d\tau}{d\xi} \delta \left(\frac{d\tau}{d\xi} \right) d\xi \\ & - T \delta \Delta\tau - M_{\omega_i} \delta \tau_i' - M_{\omega_j} \delta \tau_j' = 0 \\ \int_0^{l_0} M_\omega \delta \left(\frac{d^2\tau}{d\xi^2} \right) d\xi = & \left[M_\omega \delta \left(\frac{d\tau}{d\xi} \right) \right]_0^{l_0} \\ & - \int_0^{l_0} \frac{dM_\omega}{d\xi} \delta \left(\frac{d\tau}{d\xi} \right) d\xi \end{aligned}$$

$$T \delta \Delta\tau = \int_0^{l_0} T \delta \left(\frac{d\tau}{d\xi} \right) d\xi$$

$$\therefore \int_0^{l_0} \left\{ (GJ + r^2 N) \frac{d\tau}{d\xi} - \frac{dM_\omega}{d\xi} - T \right\} \delta \left(\frac{d\tau}{d\xi} \right) d\xi = 0$$

$$\therefore (GJ + r^2 N) \frac{d\tau}{d\xi} - \frac{dM_\omega}{d\xi} = T \dots\dots\dots (34)$$

が得られる。ここで、

$$k_\eta^2 = \frac{N}{EI_\eta}, \quad k_\zeta^2 = \frac{N}{EI_\zeta}, \quad k_t^2 = \frac{GJ + r^2 N}{EI_\omega}$$

$$y = k_\eta l_0, \quad z = k_\zeta l_0, \quad \omega = k_t l_0$$

$$a_\eta = \frac{y^2 \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh} y}{y \operatorname{sh} y - 2(\operatorname{ch} y - 1)}$$

$$b_\eta = \frac{y \operatorname{sh} y - y^2}{y \operatorname{sh} y - 2(\operatorname{ch} y - 1)}, \quad c_\eta = a_\eta + b_\eta$$

$a_\zeta, b_\zeta, c_\zeta$ および a_t, b_t, c_t は上式において、それぞれ z, ω を用いたもの

$$d_t = \frac{\omega^3 \operatorname{sh} \omega}{\omega \operatorname{sh} \omega - 2(\operatorname{ch} \omega - 1)}$$

とおけば、基礎微分方程式 (32), (33), (34) の解は、

$$\begin{aligned} z^3 \eta = & -l_0 \{c_\zeta (\operatorname{sh} k_\zeta \xi' - k_\zeta \xi') - b_\zeta z (\operatorname{ch} k_\zeta \xi' - 1)\} \theta_{\zeta j} \\ & + l_0 \{c_\zeta (\operatorname{sh} k_\zeta \xi - k_\zeta \xi) - b_\zeta z (\operatorname{ch} k_\zeta \xi - 1)\} \theta_{\zeta i} \\ & \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^3 \zeta = & -l_0 \{c_\eta (\operatorname{sh} k_\eta \xi' - k_\eta \xi') - b_\eta y (\operatorname{ch} k_\eta \xi' - 1)\} \theta_{\eta j} \\ & + l_0 \{c_\eta (\operatorname{sh} k_\eta \xi - k_\eta \xi) - b_\eta y (\operatorname{ch} k_\eta \xi - 1)\} \theta_{\eta i} \\ & \dots \dots \dots (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^3 \tau = & \{c_t \omega \operatorname{ch} k_t \xi' - d_t (\operatorname{sh} k_t \xi' - k_t \xi')\} \tau_j \\ & + \{c_t \omega \operatorname{ch} k_t \xi - d_t (\operatorname{sh} k_t \xi - k_t \xi)\} \tau_i \\ & - l_0 \{c_t (\operatorname{sh} k_t \xi' - k_t \xi') - b_t \omega (\operatorname{ch} k_t \xi' - 1)\} \tau_j' \\ & + l_0 \{c_t (\operatorname{sh} k_t \xi - k_t \xi) - b_t \omega (\operatorname{ch} k_t \xi - 1)\} \tau_i' \end{aligned} \quad (37)$$

$$\frac{\partial A_\eta}{\partial N} = \frac{l_0}{2} \begin{bmatrix} p & -p' \\ -p' & p \end{bmatrix}_\eta = \frac{l_0}{2y^2} \begin{bmatrix} a-b^2 & 2b-ab+a \\ 2b-ab+a & a-b^2 \end{bmatrix}_\eta \quad \dots \dots \dots (45)$$

$$\frac{\partial A_\zeta}{\partial N} = \frac{l_0}{2} \begin{bmatrix} p & -p' \\ -p' & p \end{bmatrix}_\zeta = \frac{l_0}{2z^2} \begin{bmatrix} a-b^2 & 2b-ab+a \\ 2b-ab+a & a-b^2 \end{bmatrix}_\zeta \quad \dots \dots \dots (46)$$

$$\frac{\partial A_t}{\partial N} = \frac{l_0 r^2}{2 \omega^2} \begin{bmatrix} 2c(a-2b) & c(b-2) & c(b-2) \\ c(b-2) & a-b^2 & 2b-ab+a \\ c(b-2) & 2b-ab+a & a-b^2 \end{bmatrix}_t \quad \dots \dots \dots (47)$$

軸方向力に関しては、式 (29), (30) より $F_0 = EA/l_0$ とおいて

$$N = F_0 \left[\Delta l + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \left\{ \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 + \left(r \frac{d\tau}{d\xi} \right)^2 \right\} d\xi \right] \quad \dots \dots \dots (48)$$

となり、式 (35), (36), (37) を代入し積分をすれば、結局

$$N = F_0 \left\{ \Delta l + \frac{1}{2} \theta_\eta^T \frac{\partial A_\eta}{\partial N} \theta_\eta + \frac{1}{2} \theta_\zeta^T \frac{\partial A_\zeta}{\partial N} \theta_\zeta + \frac{1}{2} \theta_t^T \frac{\partial A_t}{\partial N} \theta_t \right\} \quad \dots \dots \dots (49)$$

のように表わすことができる。したがって軸方向力の微小増分は

$$\delta N = F_0 \{ \delta l + \mathbf{u}_\eta^T \delta \theta_\eta + \mathbf{u}_\zeta^T \delta \theta_\zeta + \mathbf{u}_t^T \delta \theta_t - W \delta N \} \quad \dots \dots \dots (50)$$

となる。ここで W は次式で表わされる。

$$W = W_\eta + W_\zeta + W_t = -\frac{1}{2} \left(\theta_\eta^T \frac{\partial^2 A_\eta}{\partial N^2} \theta_\eta + \theta_\zeta^T \frac{\partial^2 A_\zeta}{\partial N^2} \theta_\zeta + \theta_t^T \frac{\partial^2 A_t}{\partial N^2} \theta_t \right) \quad \dots \dots \dots (51)$$

$$\frac{\partial^2 A_\eta}{\partial N^2} = -\frac{l_0^3}{2 EI_\eta} \begin{bmatrix} q & -q' \\ -q' & q \end{bmatrix}_\eta = -\frac{l_0^3}{4 y^2 EI_\eta} \begin{bmatrix} a+3b^2-2ab(b-1) & 2ab-(c^2-a)(b-1) \\ 2ab-(c^2-a)(b-1) & a+3b^2-2ab(b-1) \end{bmatrix}_\eta \quad \dots \dots \dots (52)$$

$$\frac{\partial^2 A_\zeta}{\partial N^2} = -\frac{l_0^3}{2 EI_\zeta} \begin{bmatrix} q & -q' \\ -q' & q \end{bmatrix}_\zeta = -\frac{l_0^3}{4 z^2 EI_\zeta} \begin{bmatrix} a+3b^2-2ab(b-1) & 2ab-(c^2-a)(b-1) \\ 2ab-(c^2-a)(b-1) & a+3b^2-2ab(b-1) \end{bmatrix}_\zeta \quad \dots \dots \dots (53)$$

$$\frac{\partial^2 A_t}{\partial N^2} = -\frac{l_0^3 r^4}{4 \omega^2 EI_\omega} \begin{bmatrix} 2c(a+4b-bc) & -c(a+4b-bc) & -c(a+4b-bc) \\ -c(a+4b-bc) & a+3b^2-2ab(b-1) & 2ab-(c^2-a)(b-1) \\ -c(a+4b-bc) & 2ab-(c^2-a)(b-1) & a+3b^2-2ab(b-1) \end{bmatrix}_t \quad \dots \dots \dots (54)$$

以上により、空間部材の接線部材剛性方程式は

と表わすことができ、これより部材力を求めれば

$$\begin{bmatrix} M_{\eta i} \\ M_{\eta j} \end{bmatrix} = \frac{EI_\eta}{l_0} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}_\eta \begin{bmatrix} \theta_{\eta i} \\ \theta_{\eta j} \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (38)$$

$$\begin{bmatrix} M_{\zeta i} \\ M_{\zeta j} \end{bmatrix} = \frac{EI_\zeta}{l_0} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}_\zeta \begin{bmatrix} \theta_{\zeta i} \\ \theta_{\zeta j} \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (39)$$

$$\begin{bmatrix} T'_{l_0} \\ M_{\omega i} \\ M_{\omega j} \end{bmatrix} = \frac{EI_\omega}{l_0} \begin{bmatrix} d & -c & -c \\ -c & a & b \\ -c & b & a \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} 4\tau/l_0 \\ \tau_i' \\ \tau_j' \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (40)$$

が得られる。なお、マトリックス記号右下の添字は、各要素全体に付す添字を表わしたものである。式 (38), (39), (40) を次のように略記する。

$$\mathbf{M}_\eta = \mathbf{A}_\eta \boldsymbol{\theta}_\eta, \quad \mathbf{M}_\zeta = \mathbf{A}_\zeta \boldsymbol{\theta}_\zeta, \quad \mathbf{M}_t = \mathbf{A}_t \boldsymbol{\theta}_t \quad \dots \dots \dots (41)$$

これを微分して各部材力の微小増分を表わせば

$$\delta \mathbf{M}_\eta = \mathbf{A}_\eta \delta \boldsymbol{\theta}_\eta + (\partial \mathbf{A}_\eta / \partial N) \boldsymbol{\theta}_\eta \delta N = \mathbf{A}_\eta \delta \boldsymbol{\theta}_\eta + \mathbf{u}_\eta \delta N \quad \dots \dots \dots (42)$$

$$\delta \mathbf{M}_\zeta = \mathbf{A}_\zeta \delta \boldsymbol{\theta}_\zeta + (\partial \mathbf{A}_\zeta / \partial N) \boldsymbol{\theta}_\zeta \delta N = \mathbf{A}_\zeta \delta \boldsymbol{\theta}_\zeta + \mathbf{u}_\zeta \delta N \quad \dots \dots \dots (43)$$

$$\delta \mathbf{M}_t = \mathbf{A}_t \delta \boldsymbol{\theta}_t + (\partial \mathbf{A}_t / \partial N) \boldsymbol{\theta}_t \delta N = \mathbf{A}_t \delta \boldsymbol{\theta}_t + \mathbf{u}_t \delta N \quad \dots \dots \dots (44)$$

ここで各係数マトリックスの微分は、次のようになる。

$$F = \frac{F_0}{1 + F_0 W} \dots\dots\dots(55)$$

とにおいて、式 (42), (43), (44) および式 (50) より

$$\begin{bmatrix} \delta N \\ \delta M_i \\ \delta M_j \\ \delta M_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & Fu_t^T & Fu_\eta^T & Fu_c^T \\ Fu_t & A_t + Fu_t u_t^T & Fu_\eta u_\eta^T & Fu_c u_c^T \\ Fu_\eta & Fu_\eta u_\eta^T & A_\eta + Fu_\eta u_\eta^T & Fu_c u_c^T \\ Fu_c & Fu_c u_c^T & Fu_c u_\eta^T & A_c + Fu_c u_c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l \\ \delta \theta_t \\ \delta \theta_\eta \\ \delta \theta_c \end{bmatrix} \dots\dots\dots(56)$$

となる。なお、 N または $GJ + N$ が負の場合には、 y , z または ω が虚数となるが、Euler の定理を用いて双曲線関数を三角関数へと変換することができる。

5. 平面骨組構造の大変形解析

(1) 接線部材剛性方程式

平面部材の場合は、式 (56) に相当する剛性方程式として

$$\begin{bmatrix} \delta N \\ \delta M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & Fu^T \\ Fu & A + Fuu^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l \\ \delta \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots(57)$$

が得られる。上式の第2行は、式 (43) を表わしており、一軸曲げであるので添字は省略してある。式 (57) は次のように略記する。

$$\delta S_{ij} = k_{Aij} \delta s \dots\dots\dots(57')$$

(2) a, b, p, p', q, q' の級数表示

式 (39), (46), (53) に示されるような、 A, u, W を構成する標記の軸方向力の関数は、 N の正負により、その関数形が異なり、また $|z^2|$ が微小な場合には精度の低下も著しい。したがって実用的には、これらの関数の級数展開式を用いると便利であり、その収束性も良効で N の正負にかかわらず同一式を適用することができる。

$$\left. \begin{aligned} a &= 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \rho^n \\ b &= 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n \rho^n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(58)$$

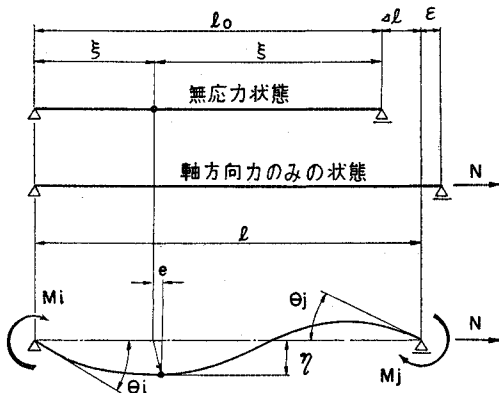


図-4

$$\left. \begin{aligned} p &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p_n \rho^n \\ p' &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p'_n \rho^n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(59)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q_n \rho^n \\ q' &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q'_n \rho^n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(60)$$

$$\rho = z^2 = \frac{Nl_0^2}{EI} \dots\dots\dots(61)$$

のように表わせば、次式が成立する。

$$p_n = 2(n+1)a_{n+1}, \quad p'_n = 2(n+1)b_{n+1} \dots\dots(62)$$

$$\left. \begin{aligned} q_n &= 2(n+1)(n+2)a_{n+2} \\ q'_n &= 2(n+1)(n+2)b_{n+2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(63)$$

また、 a_n, b_n は表-3 のようになる。

図-5 (a), 図-5 (b) に a, b の使用項数による変化を示した。

表-3 級数 a, b の係数

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$30^n a_n$	4	$\frac{11}{7}$	1	$\frac{1527}{2156}$	$\frac{14617}{28028}$	$\frac{153221}{392392}$	$\frac{280767}{952952}$	$\frac{17419904067}{78073451456}$
$30^n b_n$	1	$\frac{13}{14}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{2721}{4312}$	$\frac{27641}{56056}$	$\frac{298183}{784784}$	$\frac{554091}{1905904}$	$\frac{34613373741}{156146902912}$

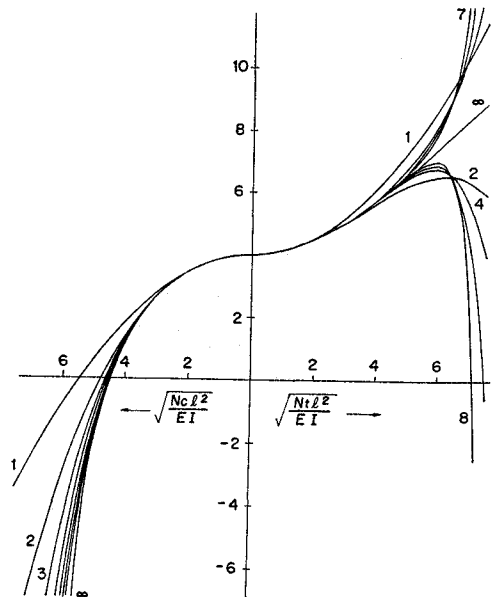


図-5 (a) a の使用項数による変化

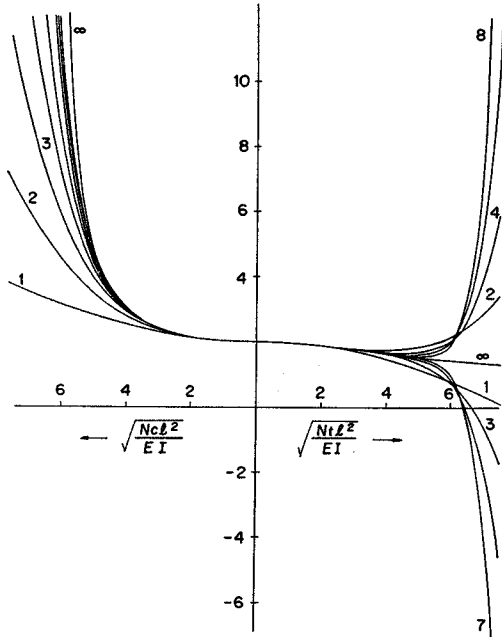


図-5 (b) b の使用項数による変化

なお、無限級数としての a, b の収束領域は $|\rho| < 4\pi^2$

であり、両端固定の柱の Euler 座屈値に一致する。なお ρ が正の上限以上の場合、誤差が急激に増大するので、このような部材に対しては、双曲線関数表示を用いるか、中間に節点を設け、部材を分割することになる。後述の計算例に用いたプログラムでは、 $\rho > 20$ の場合には双曲線関数表示を用い、級数の使用項数は、 $n=7$ としている。

(3) 接線剛性方程式

共通座標系に関する ij 部材 i 端の水平および垂直方向の材端力 U_{ij}, V_{ij} 、材端モーメント M_{ij} と部材力との関係および、部材変形と節点変位の微小増分間の関係は、

$$\begin{bmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ij} \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \alpha l & \beta & \beta \\ \beta l & -\alpha & -\alpha \\ 0 & l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix} \dots\dots\dots(64)$$

$$D_{ij} = \alpha_{ij} S_{ij} \dots\dots\dots(64')$$

$$\begin{bmatrix} \delta l \\ \delta \theta_i \\ \delta \theta_j \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \alpha l & \beta l & 0 \\ \beta & -\alpha & l \\ \beta & -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_i \\ \delta v_i \\ \delta \varphi_i \end{bmatrix} - \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \alpha l & \beta l & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 \\ \beta & -\alpha & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_j \\ \delta v_j \\ \delta \varphi_j \end{bmatrix} \dots\dots\dots(65)$$

$$\delta s_{ij} = \alpha_{ij}^T \delta d_i - \beta_{ij}^T \delta d_j \dots\dots\dots(65')$$

のように表わされる。ここで節点 i の座標を u_i, v_i と

すると、

$$\alpha l = u_i - u_j, \quad \beta l = v_i - v_j \dots\dots\dots(66)$$

であり、 $\delta u, \delta v, \delta \varphi$ は節点の水平、垂直および回転変位の各微小増分である。式 (64') より、材端力微小増分は

$$\delta D_{ij} = \alpha_{ij} \delta S_{ij} + \delta \alpha_{ij} S_{ij} \dots\dots\dots(67)$$

となり、

$$\begin{bmatrix} \delta \alpha \\ \delta \beta \\ \delta l \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \beta^2 & -\alpha \beta \\ -\alpha \beta & \alpha^2 \\ \alpha l & \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_i - \delta u_j \\ \delta v_i - \delta v_j \end{bmatrix} \dots\dots\dots(68)$$

であるので、部材力パラメータ μ, ν およびこれらにより構成されるマトリックス μ_{ij} を

$$\mu = \frac{N}{l}, \quad \nu = \frac{Q}{l} = -\frac{M_i + M_j}{l^2} \dots\dots\dots(69)$$

$$\mu_{ij} = \begin{bmatrix} \mu \beta^2 + 2\nu \alpha \beta & -\mu \alpha \beta - \nu(\alpha^2 - \beta^2) & 0 \\ -\mu \alpha \beta - \nu(\alpha^2 - \beta^2) & \mu \alpha^2 - 2\nu \alpha \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(70)$$

とおけば、式 (57') を用いて、式 (67) は、結局

$$\delta D_{ij} = (\alpha_{ij} k_{Aij} \alpha_{ij}^T + \mu_{ij}) \delta d_i - (\alpha_{ij} k_{Aij} \beta_{ij}^T + \mu_{ij}) \delta d_j \dots\dots\dots(71)$$

のように表わすことができる。

すなわち、これより全節点に関する微小荷重増分と変位増分との関係を表わす接線剛性方程式

$$K_A \delta d = \delta D \dots\dots\dots(72)$$

の誘導は、通常の変形法の手法と同様である。

(4) 非線形の部材力式および適合条件式

接線剛性法では、線形の接線剛性方程式を解き、その解である変位増分を用いて、不平衡力を算出しなければならず、不平衡力の厳密性は最終解の精度と反復回数に大きく影響する。

以下に不平衡力算出のための非線形の部材力式、適合条件式を示すことにする。

先行状態の諸量に $\bar{\quad}$ 、その増分に Δ を付して表わし、 $\Delta M = M - \bar{M}, \Delta N = N - \bar{N}$ を求めれば、

$$\begin{bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{l_0} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{bmatrix} + l_0 \begin{bmatrix} \bar{p} & -\bar{p}' \\ -\bar{p}' & \bar{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_i \\ \bar{\theta}_j \end{bmatrix} \Delta N \dots\dots\dots(73)$$

$$\Delta M = A \Delta \theta + u' \Delta N \dots\dots\dots(73')$$

$$\Delta N = F_0 \left\{ \Delta l + \frac{l_0}{4} [\bar{\theta}_i + \theta_i, \bar{\theta}_j + \theta_j] \begin{bmatrix} p & -p' \\ -p' & p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{bmatrix} - \frac{l_0^3}{4EI} [\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_j] \begin{bmatrix} \bar{q} & -\bar{q}' \\ -\bar{q}' & \bar{q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\theta}_i \\ \bar{\theta}_j \end{bmatrix} \Delta N \right\} \dots\dots\dots(74)$$

$$\Delta N = F_0 \{ \bar{u}^T \Delta \theta - W' \Delta N \} \dots\dots\dots(74')$$

となる。ここで、

$$\rho_0=1, \quad \rho_n = \sum_{m=0}^n \rho^m \bar{\rho}^{n-m}$$

とにおいて

$$\bar{p} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \rho_{n-1}, \quad \bar{p}' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n \rho_{n-1} \dots (75)$$

$$\bar{q} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n \rho_{n-1}, \quad \bar{q}' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n' \rho_{n-1} \dots (76)$$

である。したがって

$$F' = \frac{F_0}{1 + F_0 W'} \dots (77)$$

とおけば、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F' & F' \bar{u}^T \\ F' u' & A + F' u' \bar{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \dots (78)$$

$$\Delta S_{ij} = k_{Cij} \Delta s_{ij} \dots (78')$$

また、先行状態よりの部材変形と節点変位の有限増分に関する適合条件式は、

$$\Delta l = l - \bar{l}, \quad \Delta \theta_i = \Delta \varphi_i - \Delta R, \quad \Delta \theta_j = \Delta \varphi_j - \Delta R \dots (79)$$

であり、 ΔR は部材角の変化量で

$$\Delta R = \tan^{-1} t = \tan^{-1} \frac{\alpha(\Delta v_i - \Delta v_j) - \beta(\Delta u_i - \Delta u_j)}{l - \alpha(\Delta u_i - \Delta u_j) - \beta(\Delta v_i - \Delta v_j)} \dots (80)$$

となる。したがって式 (79) を式 (65) と同様な形式で表わせば、

$$\begin{bmatrix} \Delta l \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} & 0 \\ \psi \beta & -\psi \alpha & 1 \\ \psi \beta & -\psi \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \varphi_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} & 0 \\ \psi \beta & -\psi \alpha & 0 \\ \psi \beta & -\psi \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta \varphi_j \end{bmatrix} \dots (81)$$

$$\Delta s_{ij} = \bar{\alpha}_{ij}^T \Delta d_i - \bar{\beta}_{ij}^T \Delta d_j \dots (81')$$

となる。ただし

$$\bar{\alpha} = \frac{2l\alpha - (\Delta u_i - \Delta u_j)}{l + \bar{l}}, \quad \bar{\beta} = \frac{2l\beta - (\Delta v_i - \Delta v_j)}{l + \bar{l}} \dots (82)$$

$$\psi = \frac{1}{l - \alpha(\Delta u_i - \Delta u_j) - \beta(\Delta v_i - \Delta v_j)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^2}{2n+1} \dots (83)$$

である。

(5) 大変形解析のための簡単な流れ図

次に接線剛性法による大変形解析の簡単な流れ図を示す。なお図中の※, ※※には、線形の式 (65), (57) を用いた方が簡単であるが、微小増分関係を前提として算出された変位増分であっても、有限の大きさを持つため、非線形の $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ および k_C を用いて不平衡力の精度を高めており、ここでの反復は、逆マトリックスを含ま

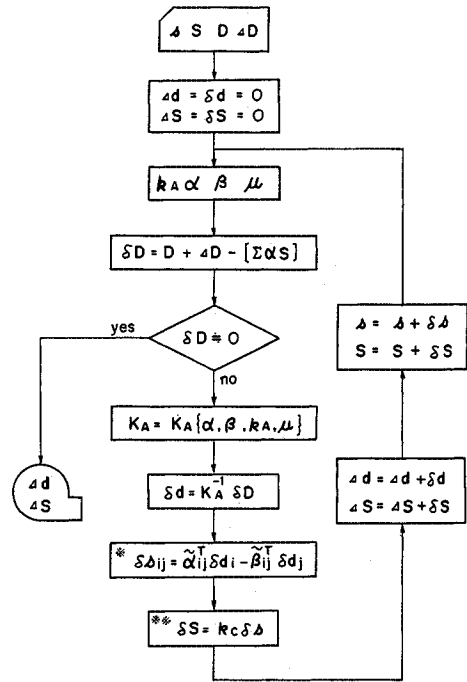


図-6 大変形解析のための簡単な流れ図

ない各部材ごとの計算であるため、演算時間の大半にはほとんど影響を与えない。

(6) 座屈解析および二、三の計算例

構造物における、いわゆる弾性的不安定現象には、荷重が増大してある値に達すると、接線剛性マトリックスのデターミナントが0となり、それ以上の荷重に対しては、連続的なつり合い状態が存在し得なくなる場合（アーチの飛移現象など）と長柱の弾性座屈などのように、初期変位の方向が決まれば、連続的なつり合い状態は必ず存在するが、ある荷重の状態（Eulerの座屈荷重）からは、変形が急激に増大するような場合とがある。

前者のような場合、 $|K_A|=0$ となる ΔD を求めることにより座屈荷重を知ることが可能であるが、後者の場合、接線剛性法で荷重-変位曲線をどこまでも追跡することはできるが、明確な座屈荷重というものには存在しない。ただ有限変形理論の線形剛性マトリックスのデターミナントが0となるという条件より、荷重-変位曲線の勾配が急変する位置を求めることができ、これが Eulerの座屈状態に相当することになる。

したがって複雑な構造物でも、実用的には、基準の荷重状態の接線剛性マトリックスを $K_A = K_1 + K_2$ として、 $|K_1 + \varphi K_2|=0$ となる固有値問題を解き、最小の φ を求めれば、近似的に基準荷重群の φ 倍を座屈荷重と考えることができる。

次に、前節までの理論を用いて作成した任意形平面骨

組構造の大変形解析プログラムによる二、三の計算例を示すことにする。なお、このプログラムでは、前述の割線剛性の利用のため、 K_A 中の部材力パラメータを任意

の時点で修正することが可能で、本計算例では、アーチの飛移過程中へ解を追い込むため(A₀よりC₁へ)1回だけの操作を必要とした。

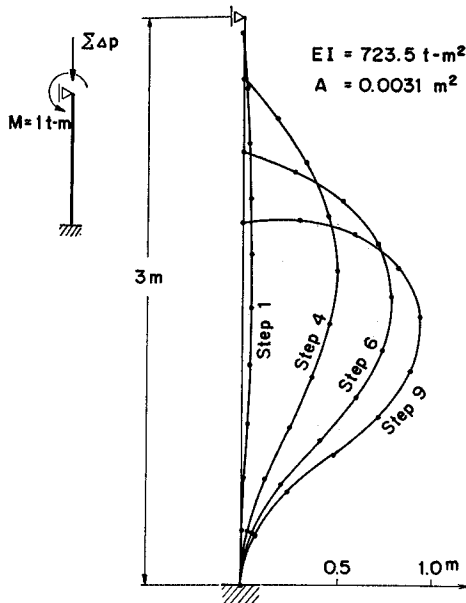


図-7 柱Aの変形

図-7は、初期モーメントのある上端ローラー、下端固定の柱の垂直荷重による変形図である。

荷重は表-4のように Eulerの座屈荷重(1623t)を上まわる1647tより1857tまで9段階とした。Nは反復回数で平均5.8回であり、許容不平衡力は、以下も同様に $\pm 5 \times 10^{-7}t$ としている。

図-8は、上端垂直ローラー、下端ピン固定の長さ6mの柱を20分割し、両端に1t-mの初期モーメントを与え、上端に鉛直荷重を Eulerの座屈荷重198.352tより1808.173tまで10段階の荷重について計算したものである。

図-9は柱Bの中央点の荷重-変位曲線で、荷重が Euler座屈値 $P_{cr} = 198.352t$ となるまでは、ほとんど水平であることが予想され P_{cr} を超えた近傍でその勾配は急激に立上り、垂直に近くなっている。

図-10、図-11は、比較的偏平なアーチの計算結果で、初期状態において、アーチを10分割した直線材よりなるものとし、等分布格点荷重と中央点のたわみおよび水平反力との関係を示したものである。ここで横軸の u は荷重を無次元化したもので $u = \frac{50}{384} \frac{l^3}{EI} \frac{\sum \Delta P}{f}$ で

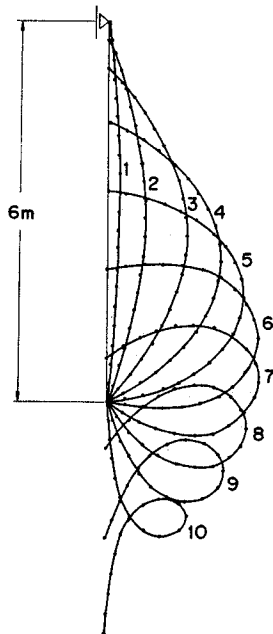


図-8 柱Bの変形

表-4 柱Aの漸増荷重と反復回数

Step	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ΔP_{ton}	1647	20	20	20	40	40	60	5	5
$\sum \Delta P_{ton}$	1647	1667	1687	1707	1747	1787	1847	1852	1857
N 回	5	8	7	6	6	5	6	4	5

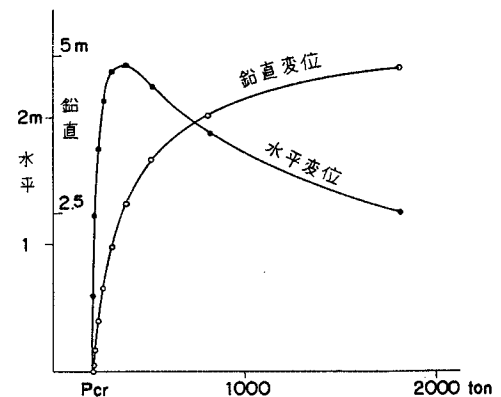


図-9 柱B中央点の荷重-変位曲線

表-5 柱Bの漸増荷重と反復回数

Step	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ΔP_{ton}	198.352	2.975	9.521	17.653	27.968	44.629	72.596	130.317	295.148	1009.014
$\sum \Delta P_{ton}$	198.352	201.327	210.848	228.501	256.469	301.098	373.694	504.011	799.159	1808.173
N 回	9	7	13	9	7	7	8	6	10	8

ある。

計算は、まず、荷重を漸増しながら $A_1 \sim A_9$ までを求め、これより荷重を漸減させて B_9 まで、次に A_9 を先行状態として割線剛性を1回使用して C_1 を得、さらに荷重の漸増減により C, D の各状態を算出した。 $A_1 \sim A_9$ は弾性座屈前、 $B_9 \sim B_1, A_9$ は形状反転後、 C, D は飛移過程中の解である。

図-12、図-13 は、アーチ A のライズを2倍とし、単一集中荷重を作用させたときの荷重変位曲線および変形図である。この場合には、飛移過程中には、静力学的なつり合い状態は存在しないことがわかる。

なお Step 23 は飛移後（形状反転後）における無荷重状態である。

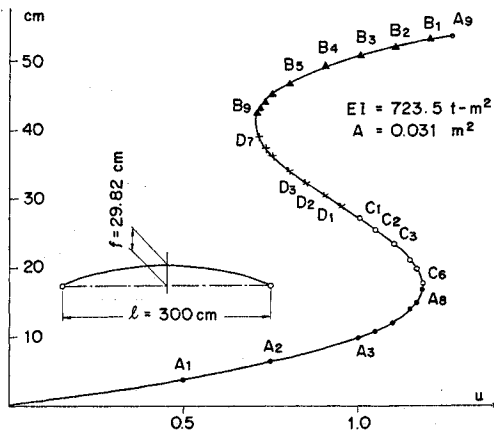


図-10 アーチ A の荷重-変位曲線

最後に、柱 A の上端を開放した場合の本理論による上端の座標の計算値と Timochenko の楕円積分による計算値との比較を示すことにする。

本理論による計算は、変形の向きを定めるための初期モーメント 1 t-m を与えたことと、軸方向力による部材の伸縮の影響が考慮されているため、当然、Timochenko の値とは一致しない。

なお各 Step の荷重は柱 B に用いたものと同じである。

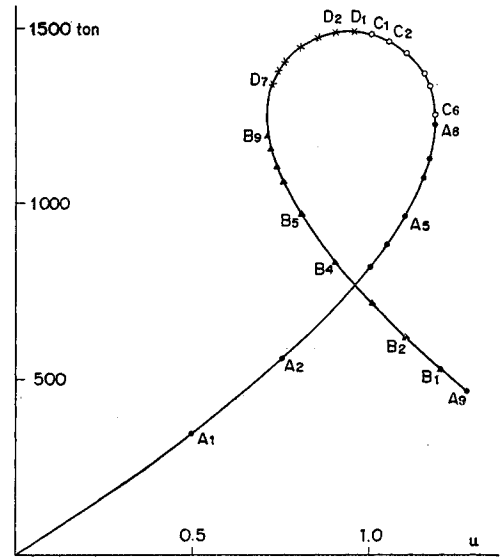


図-11 アーチ A の荷重-水平反力曲線

表-6 アーチ A の漸増荷重と反復回数

Step	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	A-6	A-7	A-8	A-9
ΔP^{ton}	30.684	15.342	15.342	3.068	3.069	3.068	1.023	1.023	5.114
$\Sigma \Delta P^{ton}$	30.684	46.026	61.368	64.436	67.505	70.573	71.596	72.619	77.733
u	0.5	0.75	1.0	1.05	1.10	1.15	1.1667	1.1883	1.2667
N 回	4	4	4	4	4	4	4	7	9

Step	B-1	B-2	B-3	B-4	B-5	B-6	B-7	B-8	B-9
ΔP^{ton}	-4.091	-6.137	-6.137	-6.137	-6.137	-3.068	-1.023	-1.023	-0.512
$\Sigma \Delta P^{ton}$	73.642	67.505	61.368	55.231	49.094	46.026	45.003	43.980	43.468
u	1.2	1.1	1.0	0.9	0.8	0.75	0.7333	0.7167	0.7083
N 回	3	3	4	4	4	4	4	4	4

Step	C-1	C-2	C-3	C-4	C-5	C-6
ΔP^{ton}	-11.251	3.068	3.069	3.068	1.023	1.023
$\Sigma \Delta P^{ton}$	61.368	64.436	67.505	70.573	71.596	72.619
u	1.0	1.05	1.10	1.15	1.667	1.1833
N 回	5	3	3	4	4	7

Step	D-1	D-2	D-3	D-4	D-5	D-6	D-7
ΔP^{ton}	-3.068	-3.069	-3.068	-3.069	-3.068	-1.023	-1.023
$\Sigma \Delta P^{ton}$	58.300	55.231	52.163	49.094	46.026	45.003	43.980
u	0.95	0.9	0.85	0.8	0.75	0.7333	0.7167
N 回	3	3	3	3	4	3	4

表-7 アーチBの漸増荷重と反復回数

Step	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P^{ton}	276.156	276.156	276.156	276.156	276.156	138.078	69.039	13.8078	13.8078
ΣP^{ton}	276.156	552.312	828.468	1104.62	1380.78	1518.86	1587.90	1601.70	1615.51
N	4	4	4	4	5	5	5	4	4

Step	10	11	12	13	14	15	16	17	18
P^{ton}	6.9039	69.039	-138.078	-138.078	-138.078	-138.078	-138.078	-138.078	-138.078
ΣP^{ton}	1622.42	1691.46	1553.38	1415.30	1277.22	1139.14	1001.07	862.988	724.910
N	4	8	3	3	3	3	3	3	3

Step	19	20	21	22	23	24	25	26	27
P^{ton}	-138.078	-138.078	-138.078	-138.078	-172.598	-138.078	-138.078	-138.078	-34.520
ΣP^{ton}	586.832	448.754	310.676	172.598	0	-138.078	-276.156	-414.234	-448.754
N	3	4	4	4	4	4	4	5	5

Step	28	29	30	31	32	33	34
P^{ton}	-13.808	-6.904	-69.039	124.27	138.078	138.078	138.078
ΣP^{ton}	-462.561	-469.465	-538.504	-414.234	-276.156	-138.078	0
N	4	5	8	3	3	3	3

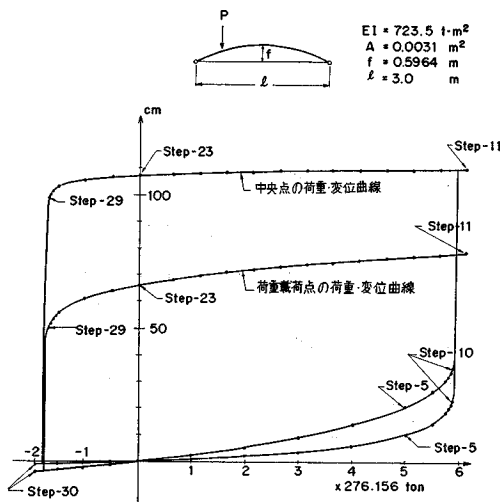


図-12 アーチBの荷重-変位曲線

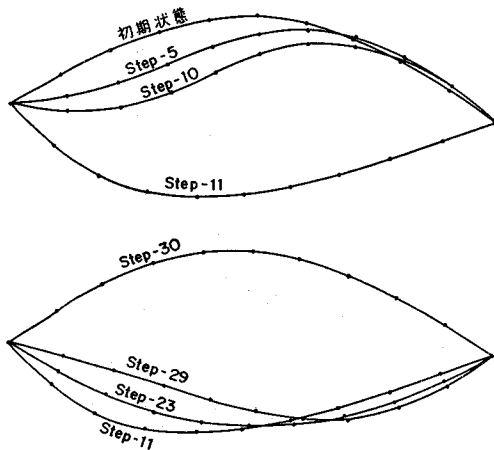


図-13 アーチBの変形図

表-8

Step	x_a		y_a	
	Timoshenko	本計算例	Timoshenko	本計算例
1	0.0	0.164	3.0	2.985
2	0.660	0.607	2.910	2.914
3	1.266	1.238	2.643	2.651
4	1.779	1.768	2.223	2.225
5	2.157	2.150	1.680	1.682
6	2.376	2.372	1.047	1.045
7	2.409	2.409	0.369	0.363
8	2.250	2.252	-0.321	-0.333
9	1.875	1.874	-1.020	-1.046
10	1.263	1.264	-1.731	-1.798

6. 結 言

骨組構造の大変形解析に対する著者の考えを述べ、初期変形を有する骨組部材の接線剛性方程式を解析的に導き、Newton-Raphson 法と数学的には等価な接線剛性法による骨組構造の大変形解析法を示した。

本理論の解析解による接線剛性方程式の厳密性は、弾性座屈点近傍における解の収束性を高め、反復ループ内の非線形式による部材力、不平衡力の算定とあいまって、極端な大変形挙動解析に対して、演算時間の節約と解の高精度化を両立せしめた。

参 考 文 献

- 1) 後藤茂夫：不規則吊材を有する吊橋の解法，第11回橋梁構造工学研究発表会，土木学会・建築学会，pp. 67~75, 1964.
- 2) 後藤茂夫：有限変形法による吊橋の解法，土木学会論文報告集，No. 156, pp. 1~10, 1968.
- 3) 後藤茂夫：有限変形法に関する二、三の考察，土木学会論文報告集，No. 163, pp. 61~66, 1969.
- 4) 後藤・大西・大槻・新材：非線形有限変形法（大変形法）によるトラスの大変形解析とその応用プログラム，土木

- 学会論文報告集, No. 194, pp. 55~69, 1971.
- 5) 堀井・斎藤・川原・森：骨組構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, No. 191, pp. 15~30, 1971.
 - 6) 前田・林・中材：増分法による平面骨組構造の大変形解析の加速計算法, 土木学会論文報告集, No. 223, pp. 1~9, 1974.
 - 7) 篠崎 武：平面骨組の大変形解析, 土木学会論文報告集, No. 224, pp. 47~53, 1974.
 - 8) Brotton, D.M., N.W. Williamson and M. Miller : The solution of suspension bridge problems by digital computers—Part 1, The Structural Engineer, London, England, Vol. 41, No. 4, pp. 121~126, April, 1963.
 - 9) Brotton, D.M. and G. Arnold : The solution of suspension bridge problems by digital computer—Part 2, The Structural Engineer, London, England, Vol. 41, No. 7, pp. 213~221, July, 1963.
 - 10) Poskitt, T.J. : Structural analysis of suspension bridges, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, pp. 49~73, Feb., 1966.
 - 11) Poskitt, T.J. : Numerical solution of nonlinear structures, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, pp. 69~94, Aug., 1967.
 - 12) Saafan, S.A. : Nonlinear behavior of structural plane frames, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 89, pp. 557~579, Aug., 1963.
 - 13) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, pp. 76~82, pp. 305~310, 1961.
 - 14) Dawe, D.J. : A finite-deflection analysis of shallow arches by discrete element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, pp. 529~552, 1971.
 - 15) Oran, C. : Tangent stiffness in plane frames, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, pp. 973~985, June, 1973.
 - 16) Oran, C. : Tangent stiffness in space frames, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, pp. 987~1001, June, 1973.

(1974.11.15・受付)