

## グリーン関数および仮想法による 波力と波の回折計算\*

WAVE FORCE AND WAVE SCATTERING BY GREEN'S FUNCTION  
METHOD AND IMAGINARY PLATE-LOAD APPROXIMATION

日野 幹雄\*\*・宮永洋一\*\*\*  
By Mikio HINO and Yoichi MIYANAGA

**要　旨** 種々の大型海洋構造物の実用化が考えられるようになった現在、任意形状の三次元的構造物に働く波力およびそれによる波の回折の一般的で簡易な計算方法の開発が望まれている。

本論文では、まずグリーン関数法の導入により計算の一般化を行い、この方法を迅速にかつ精度良く計算する方法として“仮想弹性板仮想荷重近似法（仮想法と略省する）”を提案した。後者の方法は単に海洋構造物の波力計算のみではなく、他の分野にも応用しうる数値計算法である。

これらの方法により、二三の構造物に働く波力と構造物のまわりの波高分布を計算した。最後に、平面水槽で模型実験を行い、波力の計算値と実験値とを比較した。

### 1. 序　　論

水中の物体による波の反射透過の問題は、ラプラスの方程式の境界値問題としての理論上の興味からこれまで多くの解析がなされてきており、さまざまな解析法が発表されている（これについては論文 3）に簡単に紹介した）。その後、直立壁型あるいは水平壁型防波堤の効果の解析に、上述の解析法を応用した研究が発表された。

最近大型のまた種々の型の三次元的構造物を対象とした波の変形と波力の問題の一般的解法が要求されるようになったが、これまで提案されている種々の解析法はほとんど二次元問題に関するものであり、三次元の任意形状の物体ということになると Green 関数法が最も便利であり、しかもこれ以外の方法はほとんど考えられない。

波の問題（速度ポテンシャル  $\phi$  に関するラプラスの

方程式の解法）についての Green 関数は、すでにいくつかの理論が主として二次元問題について発表されている。しかし、具体的に種々の問題の解法に応用され出したのは、比較的最近のことである。Mei(1969)<sup>①</sup> は水底の二次元的物体による波の反射を、Holford(1964)<sup>②</sup> は水上ドック（二次元）の運動による表面波の発生を、Fetter(1969)<sup>③</sup> も同様の問題を、Garrison & Berklite(1973)<sup>④</sup> は水中の柱体の付加質量の問題を、日野・藤崎(1973)<sup>⑤</sup> は水面上の物体の波力と波の変形を、井島他(1973)<sup>⑥</sup> は水中の柱体による波の変形を取扱っている。

Green 関数を導入するとき、物体による波の変形の問題は、一般に積分方程式を解くことに帰着される。対象が二次元あるいは二次元化されている場合には、積分は物体を囲む線積分であり、電子計算機による数値解は比較的容易に求まる。これに反し、三次元問題では積分は物体表面についての面積分となり、これを差分化して解くことは、計算機の性能上かなり困難となる。

この点を解決するには、これまでのように積分面を細かく分割し各格子点の値を未知数とすることをやめ、未知数の数を減らす新しい方法が考えられなければならない。最近著しい流行をみている FEM（有限要素法）は、計算領域を必要に応じて細かく分割し、分割要素内の未知量を平面などの単純な内挿関数で近似し、得られる大行列の計算を効率的に行うようにしている。本論文は、FEM とまったく逆に、未知関数領域の分割を少なくし、その要素内を複雑な関数形で近似して、積分方程式を小次元行列の計算に帰着させようとするものである。各要素内の未知関数は弹性板のたわみに対応させ、いくつかの点に（仮想的な）未知の荷重が加わりそれによりたわみ（すなわち未知ポテンシャル）が生じていると考える。このようにして、問題は、仮想弹性板にある変形を生じさせている未知の仮想的荷重を求める問題となる。この方法は未知のたわみそのものではなく、そのたわみを生じさせるであろう未知の荷重を仮想し、これを求めるも

\* 本論文はさきの第 5 回海洋開発シンポジウム（昭和 49 年 5 月 15 日）において発表した論文<sup>⑦</sup>の詳述である。

\*\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

\*\*\* 学生会員 東京工業大学大学院修士課程

のであるから、FEMにおいて shape function に高次の関数を用いる場合とは根本的に異なっている。

これらの未知の仮想荷重は、仮想弾性板のたわみを通して元の積分方程式を満たす必要があり、Collocation 法ないしは Galerkin 法により容易に解くことができる。この方法を“仮想弾性板仮想荷重近似法”ないしは“仮想法”と名づける。

以下、Green 関数法による積分方程式の導入、差分近似による数値解、仮想法による解について述べ、最後に計算結果と実験結果について比較を行う。

## 2. グリーン関数法による一般的解

任意形状の物体が水中に保持されている。座標軸は図-1 のように静止水面に  $x \cdot y$  軸、鉛直上向きに  $z$  軸を探る。なお、水底は水平面と考えるが、凹凸のある場合にはこの部分を水底の物体とみなせば良い。

このような場合に入射波に対して物体による散乱波が発生する。波を微小振幅波と仮定すれば、速度ポテンシャルによりその運動が記述さ

れる。これを入射波ポテンシャル  $\phi_{in}(x, y, z) e^{-i\omega t}$  と散乱波ポテンシャル  $\phi_{sc}(x, y, z) e^{-i\omega t}$  の和と考える。ここに、 $t$  は時間、 $\omega$  は角振動数を表わす。

$$\phi(x, y, z, t) = (\phi_{in} + \phi_{sc}) e^{-i\omega t} \quad (1)$$

入射波ポテンシャル  $\phi_{in}$  は既与であるから、問題は散乱波ポテンシャル  $\phi_{sc}$  を求めることである。以下、簡単のために、 $\phi_{sc}$  を単に  $\phi$  と記する。

運動の基礎方程式は、Laplace の方程式

$$\nabla^2(\phi_{in} + \phi) e^{-i\omega t} = 0 \quad (-h \leq z \leq 0) \quad (2)$$

で表わされる。

$$\nabla^2 \phi_{in} = 0$$

であるから、 $\phi$  の満たすべき方程式は

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (-h \leq z \leq 0) \quad (3)$$

である。

$\phi$  に関する境界条件は、次のようにある。

④ 底面および物体の表面  $S$  での法線方向の速度が

0、すなわち

$$\phi_z = 0 \quad (z = -h) \quad (4a)$$

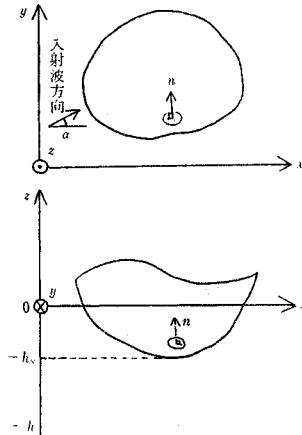


図-1

$$\phi_n = -(\phi_{in})_n \quad (\text{on } S) \quad (4b)$$

⑤ 物体の外部の自由水面で、運動学的条件と力学的条件を満たす。これらをまとめて、 $\phi$  に関して表わせば、

$$\phi_z = \lambda \phi \quad (z = 0) \quad (4c)$$

ここに、 $\lambda$  は  $g$  を重力加速度として

$$\lambda = \sigma^2/g \quad (4d)$$

⑥ 散乱波は無限遠方では物体を中心に放射状に外方に進行してゆく波となり、そのエネルギーは非負であるという条件——すなわち、Sommerfeld の radiation condition を満たす。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{3/2}(\phi_R - ik\phi) = 0 \quad (4e)$$

ここに、

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \quad (4f)$$

なお、入射波の速度ポテンシャルは良く知られているように次のように与えられる。

$$\phi_{in}(x, y, z) = -\frac{i g H}{2 \sigma} \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot \exp\{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)\} \quad (5)$$

ここに、 $H$ : 波高、 $k$ : 波数で次式の実正根で与えられる。

$$k \tanh kh = \lambda \quad (6)$$

式(3)はごく単純な形をしているが、境界条件の一つ(4b)が任意の形、そしてもし与えられるとしても複雑な形であり、解析的に解を求めることが困難である。

波動運動の速度ポテンシャルに関する Green 関数の定義はまちまちであるが、ここでは次の境界条件を満たす Poisson 方程式(7)の解をとる。

$$\nabla^2 G(x, y, z) = -\delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) \quad (7)$$

$$G_z = 0 \quad (z = -h) \quad (8a)$$

$$G_z = \lambda G \quad (z = 0) \quad (8b)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{3/2}(G_R - ikG) = 0 \quad (8c)$$

$$G = \frac{1}{4 \pi r} : \text{正則} \quad (-h < z < 0) \quad (8d)$$

ここに

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \quad (8e)$$

上式の解は、積分形や無限級数形でいくつか求められているが、John(1950)<sup>9)</sup>による次式を用いる。

$$G(x, y, z) = \frac{i}{2} C_0 H_0^{(1)}(kr) \cosh k(h+z) \cdot \cosh k(h+\zeta)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n K_0(\nu_n r) \cos \nu_n(h+z) \cos \nu_n(h+\zeta) \quad (-h < \zeta, z < 0) \quad (9)*$$

\* 文献 4) では source singularity を  $-1/2 \pi r$ 、時間に関する項を  $e^{i\omega t}$  としたため、多少これと異なる形で示したが、意味は同じである。



と表わされる。

$S$  の表面での外向き法線方向の微分をとれば, source  $r$  の分布についての次の積分方程式が得られる。

$$r(x, y, z) = 2 \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial n} + 2 \int_S \dot{r}(x, y, z) \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

(x, y, z : on S) ..... (14b)

上に得られた一対の式 (14a, b) は、前の式 (13a, b) と同じ意味合いをもっている。すなわち、まず積分方程式 (14b) より、source の分布の強さを求め、これが定められるとそれを式 (14a) に代入して領域  $V$  内の任意の点の  $\phi$  を求めることができる。本論文の以下の計算は式 (13a, b) に従って展開するが、まったく同様に式 (14a, b) を用いることもできる。

上に説明した Green 関数による方法の特質は次のようにいうことができよう。

表-1 ポテンシャル問題とグリーン関数

	ポテンシャル	グリーン関数
基礎方程式	簡単 $\rho^2\phi=0$	やや特殊化 $\rho^2G=-\delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$
境界条件	複雑 任意	単純
解	?	$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$

基礎方程式 ( $\nabla^2\phi=0$ ) は単純であるが、これを複雑な、ないしは一般的な境界条件のもとに解かなければならぬとき、直接的に正面から問題を解くかわりに、まず元の基礎方程式をやや特殊化した方程式 ( $\nabla^2G=\delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ ) のきわめて単純な境界条件のもとでの解、すなわち Green 関数を求めて置いて、これを仲介として元の複雑な境界条件の問題を簡単な積分方程式の問題に帰着させて一般的に解くことができる。

### (3) 積分方程式の数値解

式 (13b) は物体の形が単純な場合を除けば、数値的に解く必要がある。物体の表面  $S$  を  $j=1 \sim N$  個の小要素  $4S_j$  に分割し、その要素内の  $\phi$  の値を一定 ( $\phi_j$ )

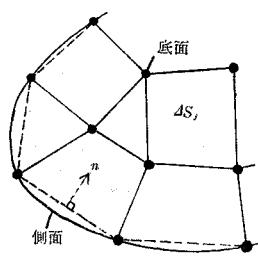


图-3

と近似すれば、積分方程式は  $\psi_j$  に関する連立一次方程式となる。

二三

$$\left. \begin{array}{l} G_{ij} = G\left( \begin{matrix} x_i, y_i, z_i \\ \xi_j, \eta_j, \zeta_j \end{matrix} \right) \quad (i \neq j) \\ G_{n,ij} = G_n\left( \begin{matrix} x_i, y_i, z_i \\ \xi_j, \eta_j, \zeta_j \end{matrix} \right) \quad (i \neq j) \\ \tilde{\Phi}_{n,i} = (\Phi_{in}(x_i, y_i, z_i))_n \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (16)$$

式 (15)において、 $i=j$  は特異点として別項のような計算をする必要がある。式 (15) を整理し行列表示すれば次式となる。

二三

$$G = \begin{bmatrix} 1 + \bar{G}_{n,11}4S_1 & G_{n,21}4S_2 & \dots & G_{n,N1}4S_N \\ G_{n,12}4S_1 & 1 + \bar{G}_{n,22}4S_2 & \dots & G_{n,N2}4S_N \\ \vdots & & & \\ \bar{G}_{n,1N}4S_1 & G_{n,2N}4S_2 & \dots & 1 + \bar{G}_{n,NN}4S_N \\ & & & \dots \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & G_{21} & \dots & G_{N1} \\ G_{12} & \bar{G}_{22} & \dots & G_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{1N} & G_{2N} & \dots & \bar{G}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{n,1} \Delta S_1 \\ \tilde{\phi}_{n,2} \Delta S_2 \\ \vdots \\ \tilde{\phi}_{n,N} \Delta S_N \end{bmatrix} \quad \dots \dots \quad (20)$$

上式における  $\bar{G}_{jj}$  と  $\bar{G}_{n,jj}$  は、特異点として次項のように求める必要がある。

#### (4) 計算上の注意

### a) 特異点の処理

$i=j$ , すなわち  $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$  は Green 関数の特異点で, 関数は発散する<sup>8)</sup> が式 (13a,b) の右辺の積分は有限となる。 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \approx 0$  で Green 関数は

$$G\left(\frac{x}{\xi}, \frac{y}{\eta}, \frac{z}{\zeta}\right) = \frac{1}{4\pi r} + (\text{正則項}) \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる。

さらに、 $z=0$  では

$$G\left(\frac{x}{\xi}, \frac{y}{\eta}, \frac{z}{\zeta}\right) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) - \frac{\lambda e^{2(z+\zeta)}}{2\pi} \ln(r_1 - (z + \zeta)) + (\text{正則項})$$

$$= \frac{1}{2\pi\xi} - \frac{1}{2\pi} \ln R + (\text{正則項}) \quad \dots\dots\dots (22)$$

七

特異点を中心として、半径  $r_0$  の微小円を考えれば、発散項に関する積分は

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left( \frac{1}{4\pi r} \right) r dr d\theta = \frac{r_0}{2} \quad \dots \dots \dots (23)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\zeta \rightarrow z} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{4\pi r} \right) r dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{4\pi} \frac{z-\zeta}{(R^2 + (z-\zeta)^2)^{3/2}} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{z-\zeta}{|z-\zeta|} \quad (r \approx 0) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (24)$$

となる。

したがって、 $i=j$  点での要素積分は  $\int_{AS_j} G_{jj} \tilde{\phi}_{n,j} dS$  について、面素に内接する小円内の発散項の積分  $\left(-\frac{r_0}{2} (\pi r_0^2) \tilde{\phi}_{n,j}\right)$  と非発散項( $G'_{jj} \tilde{\phi}_{n,j} dS_j$ )との和で近似し、

$$\begin{aligned} \int_{AS_j} G_{jj} \tilde{\phi}_{n,j} dS &= \frac{\pi}{2} r_0^3 \tilde{\phi}_{n,j} + G'_{jj} \tilde{\phi}_{n,j} dS_j \\ &= \bar{G}_{jj} \tilde{\phi}_{n,j} dS_j \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (25)$$

また、後者の面要素積分は式 (24) により

$$\begin{aligned} \int_{AS_j} G_{n,jj} \phi_j dS &= \pm \frac{1}{2} \phi_j dS_j \\ &= \bar{G}_{n,jj} \phi_j dS_j \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (26)$$

で近似される。ここに、 $\pm$  の符号は物体表面で物体内部

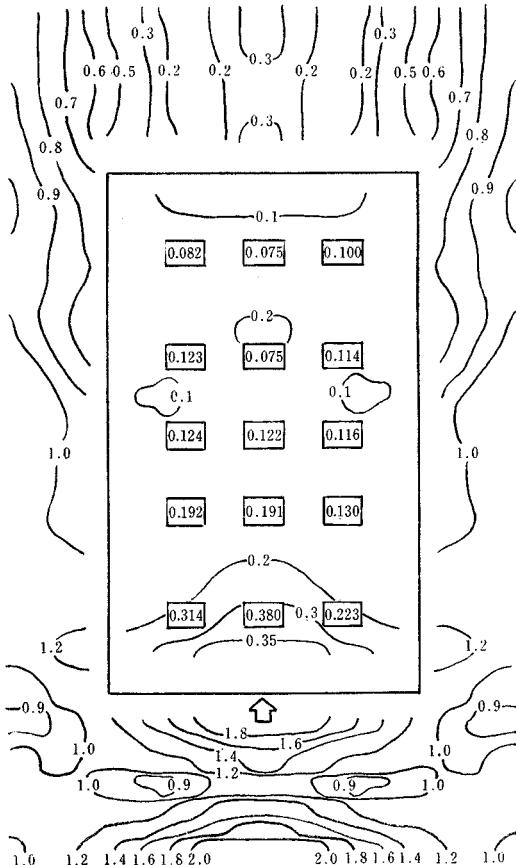


図-4  $L/l=0.57$ ,  $h_s/h=0.26$

へ向かう法線の方向の正負に従う。

#### b) 面素の分割

数値計算の場合、多くは等間隔格子網による定差近似により計算される。しかし、本節の計算では上に述べたように、面要素の形や大きさは、必要に応じて任意に選べる。

c) 任意点の圧力  $p$  は圧力方程式、すなわち一般化された Bernoulli の定理から求められる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= -gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &\equiv -gz + i\sigma(\phi + \phi_{in}) e^{-i\sigma t} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (27)$$

#### d) 物体の周辺での波高分布は

$$\eta = -\frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\}_{z=0} = i \frac{\sigma}{g} (\phi + \phi_{in}) e^{-i\sigma t} \quad (z=0)$$

により、従って入射波高に対する波高比は

$$H = |(\phi + \phi_{in}) / \phi_{in}| \quad (z=0) \quad \dots \dots \dots (28)$$

より計算される。

#### (5) 計算例

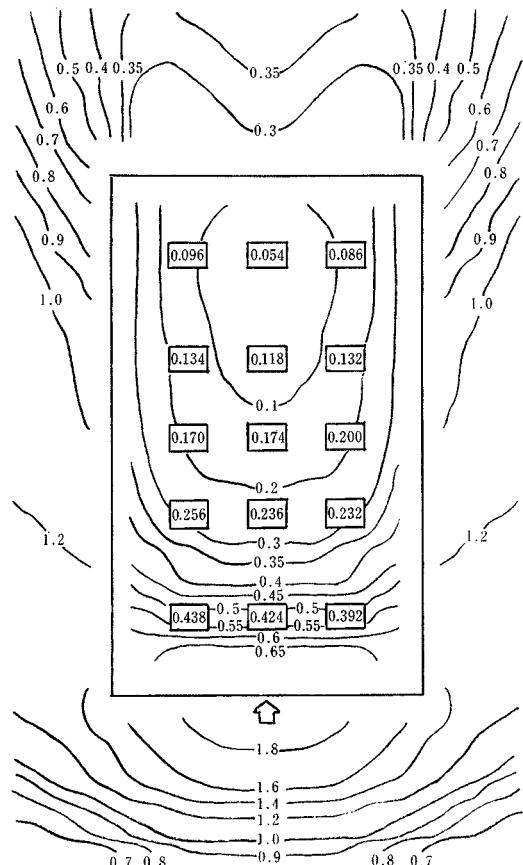


図-5  $L/l=1.24$ ,  $h_s/h=0.26$

上に述べた計算法に従い、底面が水平な任意の断面形をもつ柱体に関する計算プログラムを作成した。上述の Green 関数による計算法は、物体底面が水平とは限らない任意形状の物体に適用しうるが、ここではプログラムの難易度や後の実験との対比を考えて、断面形のみを任意とした。

使用するコンピューター(東工大 HITAC 8700)の性能と使用上の時間制限を考慮して、柱体底面を $8 \times 8$ メッシュに側面を $32 \times 2$ メッシュに分割し、128次元複素係数連立一次方程式(17)を解いた。境界条件に関する入力データを変えて矩形断面の柱体について、入射波長と柱体幅ないしは波の周期の異なるもの3ケース、吃水深と水深比の異なるもの3ケースおよび28角形で近似した円柱1ケースについて、速度ポテンシャルのを求め、これより柱体底面圧力の分布・柱体周辺の波高分布を計算した。計算結果はラインプリンターを利用して直接図化し、等値線をあとから手書きにより記入した。

計算結果は図-4~9に示す。これらの図には後に述べる物体底面圧力の変動幅の実験値も□印内に記入してある。圧力は入射波高に対する無次元ヘッド、物体周辺の波高も入射波高に対する無次元数で示してある。

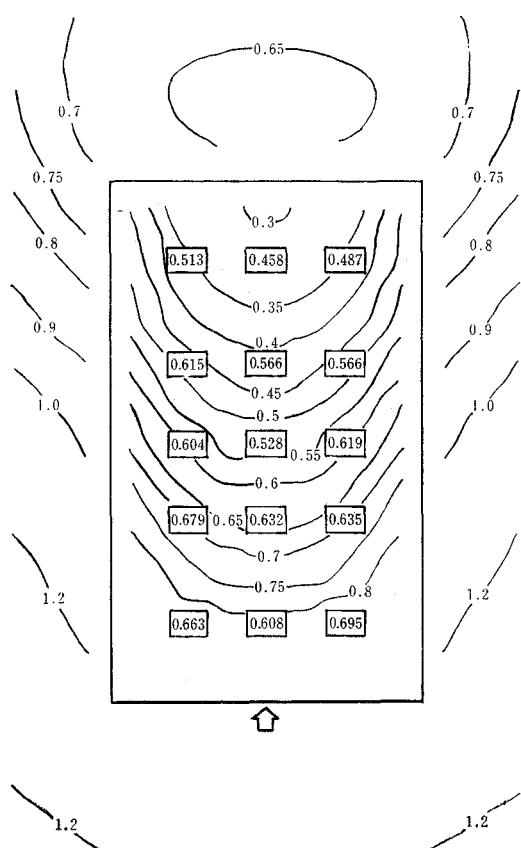


图-6  $L/l=2.45$ ,  $h_s/h=0.26$

図-4,5,6より、物体の吃水  $h_s$  が浅い場合 ( $h_s/h = 3.08/12.0 = 0.26$ ) に、次のことがいえる。入射波長  $L$  が物体長  $l$  に比べて短ければ ( $L/l = 0.57$ ) 物体により入射波は大部分反射され、物体前面に重複波を生じ、物体底面に働く圧力変動幅は大きくならない。しかし、 $L/l$  が大きくなるにつれて、物体前面の重複波は部分重複波となり波高は減少し、逆に物体底面の圧力変動幅は増加する。物体底面の圧力変動幅は一般に物体前部より後部に向かって減少するが、 $L/l$  が増加するにつれて、前後の差は少なくなる。 $L/l$  が小さければ、底面圧力の前部から後部への変化は一様ではなくなる。

また、吃水深が深くなるにつれて、物体前面での反射波が増加し、重複波高が大きくなり、物体底面の変動圧は小さくなる。

円柱の場合は、四角柱の場合に比べて、底面での圧力変動幅の分布がやや複雑になるが、その大きさは対応する角柱にはほぼ等しい値である。

これらの事柄は、波と物体との干渉として定性的に予想されるものであるが、計算により定量的な結果を示すことができた。

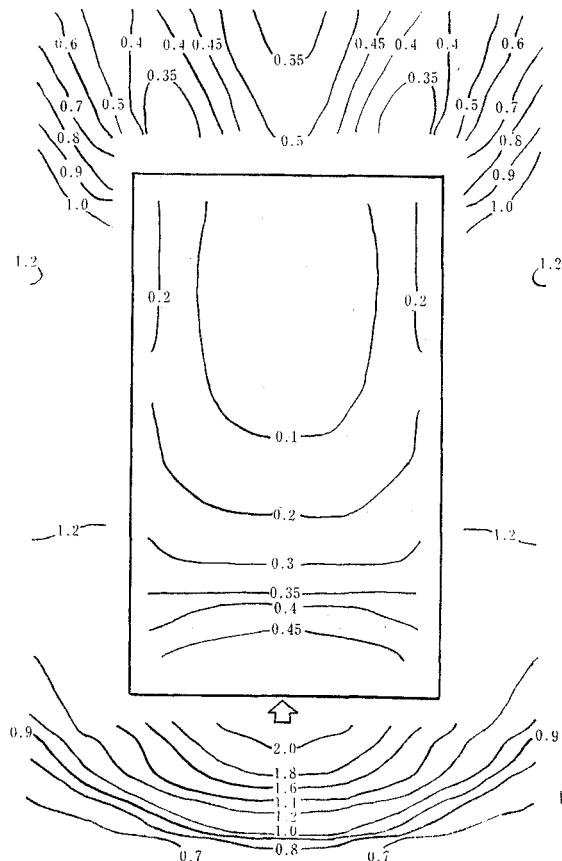


図-7  $L/l=1.24$ ,  $h_s/h=0.5$

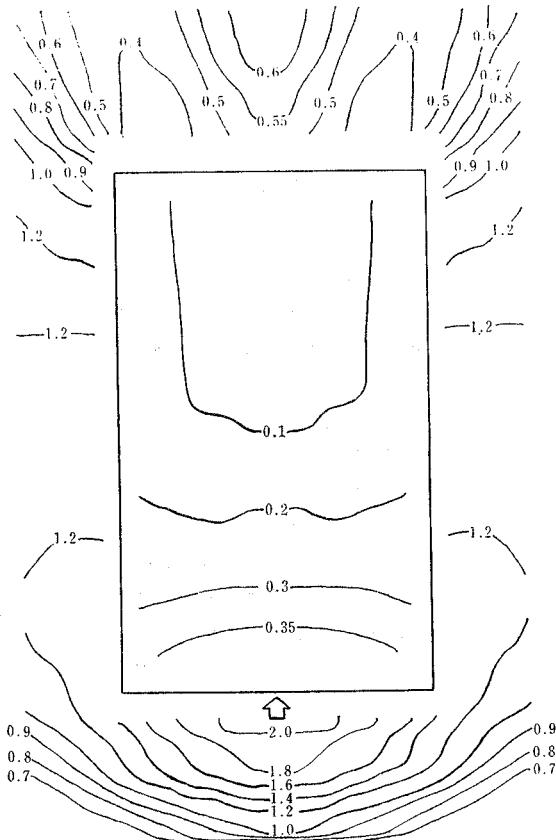


図-8  $L/l=1.24$ ,  $h_s/h=0.75$

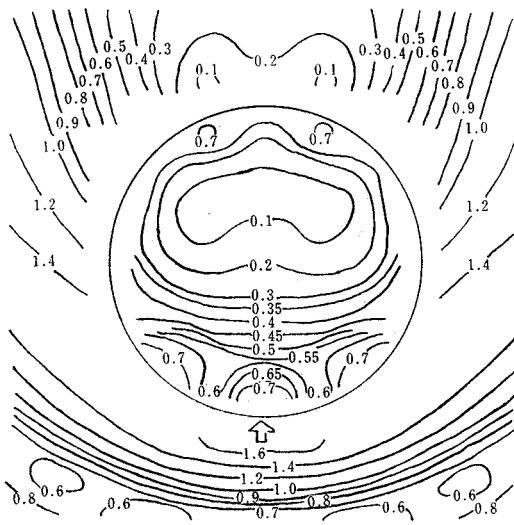


图-9  $L/l=1.24$ ,  $h_s/h=0.26$

### 3. 仮 想 法<sup>13)</sup>

積分方程式 (14) を数値的に解くに際し、前節では領域を多数の小面素に分割したうえ、各面素内の  $G$  およ

び  $\phi$  の値はごく単純に一定と仮定した。したがって、物体の形が複雑な場合や物体の大きさに比べて、波長が短くなるにつれて、計算精度上から面素の大きさを小さくし、その数を増す必要が生じる。このことは、計算機のメモリーや処理時間の増加となり、実用上好ましくはない。

尤も、最近は電子計算機の性能向上と大行列演算法の急速な進歩により、面要素数の増加は大して問題としない向きもあるが、著者は必ずしもこの傾向を是とするものではない。そこで、ここでは FEM(有限要素法)とまったく逆の発想による解法を考えてみた。すなわち、FEM では、面素への分割を必要に応じて細

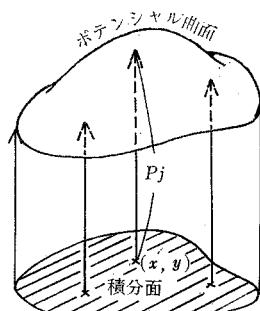


図-10 仮想法の考え方の説明図

を生じさせる数個の仮想荷重を考えることにする。この数個の仮想荷重が求むべき unknown variableである。

表-2 仮想法の考え方

もとの問題		仮想問題
基礎方程式	波の速度ポテンシャル式 $r^2\phi=0$	(仮想) 弹性板のたわみ $\Omega^n u=0 \quad (n=4)$ $\Omega=0/\partial x + 0/\partial y$
変数	速度ポテンシャル $\phi(x, y, z)$	板のたわみ $u(x, y, z)$ $= \sum_j \delta_j(x, y, z) P_j$
未知数	格子点の速度ポテンシャル $\phi_i$	仮想点荷重 $P_j$
解	$\phi(\xi, \eta, \zeta)$ $= - \int [G_n \phi + G \tilde{\phi}_n] dS$	$u \rightarrow \phi$ として左式に代入

以上の考え方を表-2に、元の問題を仮想問題と対比して示してある。 $j$  点  $(\xi_j, \eta_j, \zeta_j)$  に 1 の荷重の働くときの  $(x, y, z)$  点の仮想弾性板のたわみを  $\delta(x, y, z; \xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \delta_j(x, y, z)$  とすれば、任意点  $(x, y, z)$  での仮想弾性板のたわみ  $u(x, y, z)$ 、実は求むべき未知の速度ポテンシャル  $\Phi(x, y, z)$  は

$$u(x, y, z) = \sum_j^m \delta_j(x, y, z) P_j$$

である。これを式 (13b) に代入すれば, collocation

点数  $i=1 \sim M$  個の  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  点について次の関係が成立しなければならない。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \left[ \delta_j(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \right. \\ & + \int_S G_n \left( \frac{x, y, z}{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \right) \delta_j(x, y, z) dS \Big] P_j \\ & = - \int_S G \left( \frac{x, y, z}{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \right) \tilde{\phi}_n(x, y, z) dS \\ & \quad (i=1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad (30)$$

上式を行列表示すれば、次のようになる。

$$D \mathbf{p} = \mathbf{d} \quad (31)$$

ここに

$$\mathbf{p} = [P_1, P_2, \dots, P_m]^T \quad (32)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \dots D_{1m} \\ D_{21} & D_{22} \dots D_{2m} \\ \vdots & \vdots \\ D_{M1} & D_{M2} \dots D_{Mm} \end{bmatrix} \quad (M \times m \text{ 行列}, M \geq m) \quad (33)$$

ここに

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \delta_j(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \\ &+ \int_S G_n \left( \frac{x, y, z}{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \right) \delta_j(x, y, z) dS \end{aligned} \quad (33a)$$

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_M]^T \quad (34)$$

$$d_i = - \int_S G \left( \frac{x, y, z}{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \right) \tilde{\phi}_n(x, y, z) dS \quad (34a)$$

一般に、仮想荷重点の数 ( $j=1 \sim m$ ) より、式 (30) の関係を成立させるべき点の数 ( $i=1 \sim M$ ) を多く選ぶのが良い。式 (30) あるいは式 (31) はいくつかの点 ( $i=1 \sim M$ ) で、式 (13b) の関係が成立することを要求しており、いわゆる Collocation 法といわれるものである。

これに対し、式 (29) を式 (13b) に代入した残差 ( $\xi, \eta, \zeta$  の関数) を未知関数  $u$  の展開関数  $\delta_j(\xi, \eta, \zeta)$  ( $j=1 \sim m$ ) に対して直交させれば、いわゆる Galerkin 法で、これにより仮想荷重  $P_j$  ( $j=1 \sim m$ ) を次式より求めることができる。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \left[ \int_S \delta_i(\xi, \eta, \zeta) \delta_j(\xi, \eta, \zeta) dS \right. \\ & + \int_S G_n \left( \frac{x, y, z}{\xi, \eta, \zeta} \right) \delta_j(x, y, z) \delta_i(\xi, \eta, \zeta) dS dS \Big] P_j \\ & = - \int_S G \left( \frac{x, y, z}{\xi, \eta, \zeta} \right) \tilde{\phi}(x, y, z) \delta_i(\xi, \eta, \zeta) dS dS \\ & \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (35)$$

あるいは、行列表示により

$$\bar{D} \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{d}} \quad (36)$$

ここに、

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \dots \bar{D}_{1m} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} \dots \bar{D}_{2m} \\ \vdots & \vdots \\ \bar{D}_{m1} & \bar{D}_{m2} \dots \bar{D}_{mm} \end{bmatrix} \quad (m \times m \text{ 行列}) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{ij} &= \int_S \delta_i(\xi, \eta, \zeta) \delta_j(\xi, \eta, \zeta) dS \\ &+ \int_S \int_S G_n \left( \frac{x, y, z}{\xi, \eta, \zeta} \right) \delta_j(x, y, z) \\ &\cdot \delta_i(\xi, \eta, \zeta) dS dS \end{aligned} \quad (37a)$$

$$\bar{\mathbf{p}} = \{P_i\}^T \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}} &= - \left\{ \int_S \int_S G \left( \frac{x, y, z}{\xi, \eta, \zeta} \right) \tilde{\phi}(x, y, z) \right. \\ &\left. \cdot \delta_i(\xi, \eta, \zeta) dS dS \right\}^T \end{aligned} \quad (39)$$

仮想荷重法による計算を行う際の注意事項を二、三述べる。

#### a) 仮想弾性板の弾性係数

本法は仮想弾性板を仲介として、基礎方程式を満たす小数個  $m$  の仮想荷重を求めるもので、ひとたび仮想荷重が求まるときより波の速度ポテンシャルに変換される。式 (29) と式 (31) あるいは式 (36) との関係は、常に仮想弾性板の Green 関数  $\delta_j$  と仮想荷重  $P_j$  の積の形で現われ、最終的には式 (29) で  $\phi$  を求めるものである。したがって、仮想弾性板の弾性係数は解  $\phi$  に無関係となる。

#### b) 仮想弾性板の Green 関数

仮想弾性板は、いわゆる弾性体 ( $\nabla^4 u = 0$ ) のみならずより高次の橿円型偏微分方程式の解でも良く、特に関数形を限定する必要はない。以下に示す計算例では、四周単純支持の場合の Green 関数、式 (40) を用いた。

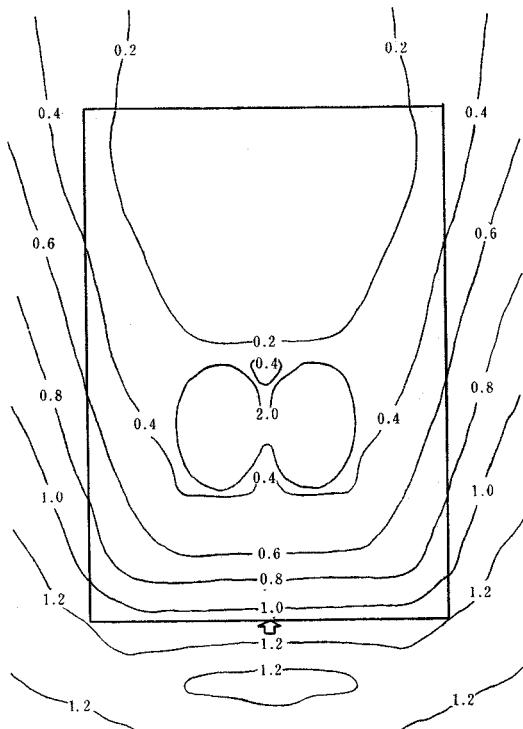
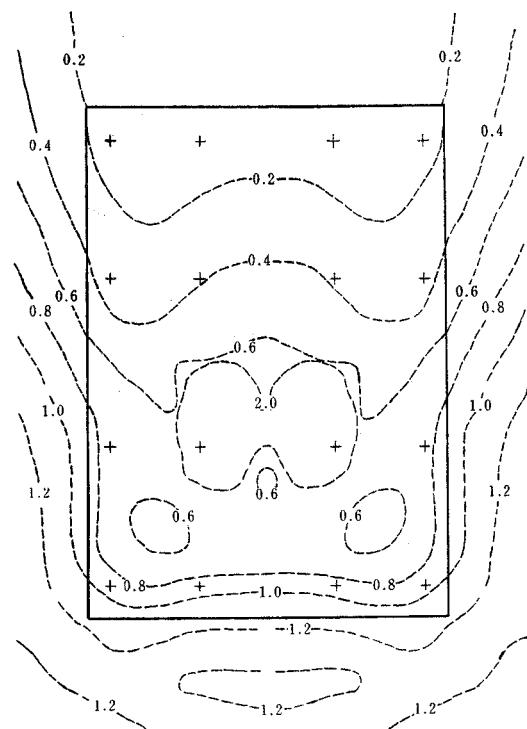
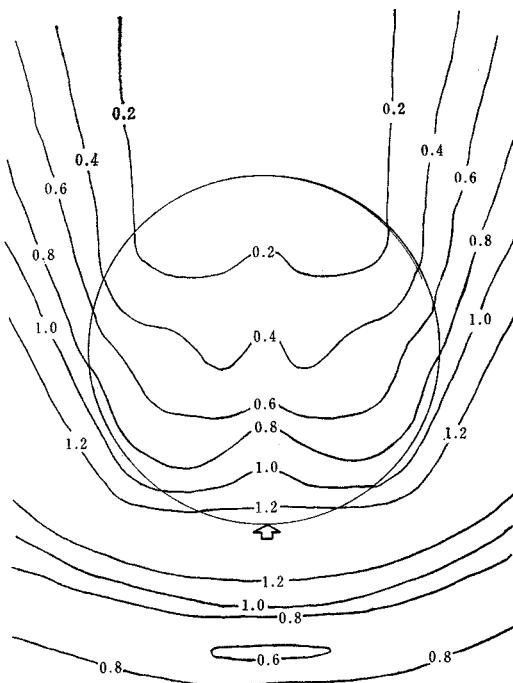
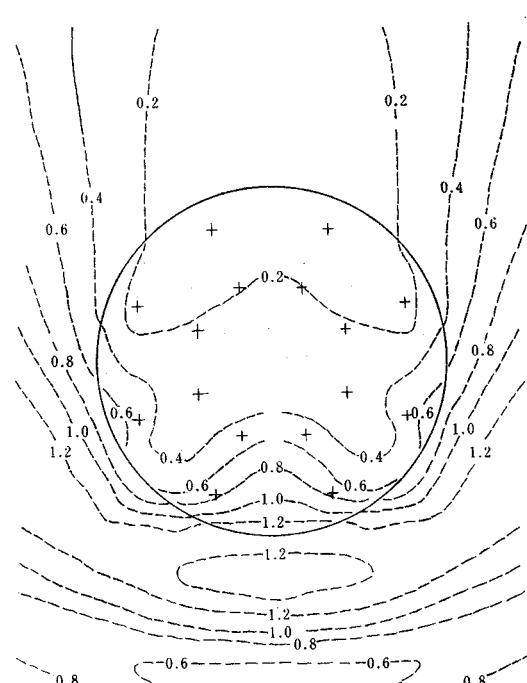
$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{x, y}{\xi, \eta} \right) &= \frac{4}{\pi^4 abD} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \\ &\cdot \frac{\sin(k\pi x/a) \sin(l\pi y/b) \sin(k\pi \xi/a) \sin(l\pi \eta/b)}{\left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2} \end{aligned} \quad (40)$$

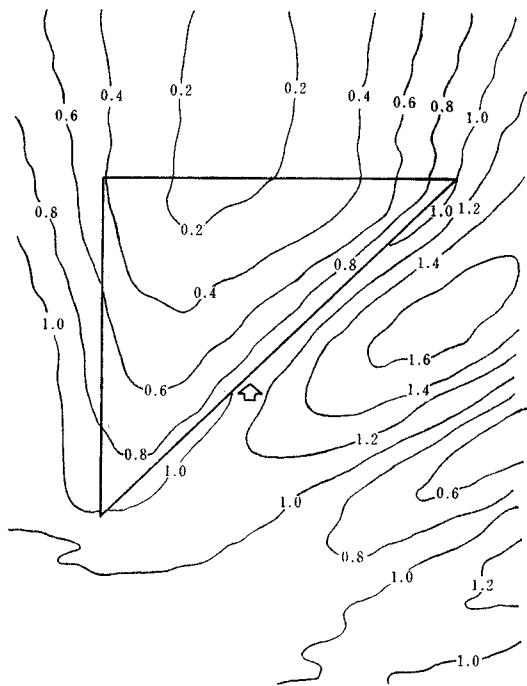
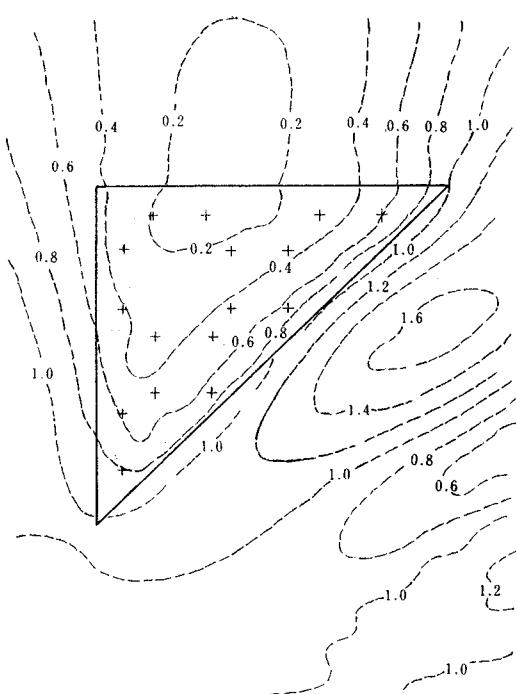
ここに、 $a \cdot b$  は平板の 2 辺の長さ、 $D (= Et^3/12(1-\nu^2))$ 、 $E$ ：弾性係数、 $t$ ：板厚、 $\nu$ ：ポアソン比）は曲げ剛性。上述のように、 $D$  の値は結果に無関係で勝手に選んで良い。

#### c) 数値計算上の注意

仮想荷重法では波に関する速度ポテンシャルの Green 関数  $G$  と、仮想弾性板のたわみの Green 関数  $\delta$  の 2 種の Green 関数が必要である。これらの Green 関数は、計算の最初の段階で一度計算すればすむものであるから、dimension をとってメモリーに store して置く。これらは計算の過程で繰返し使用されるからそのたびに改めて計算すると膨大な計算時間を必要とする。仮想荷重法は、いわば計算時間を計算機メモリーであがなう方法であるといえる。計算機使用料は CPU time に対して課せられるから、この点有利である。

仮想法は、また細分格子点を小数の仮想荷重点の荷重

図-11 (a) (直接法),  $L/l=1.24$ , メッシュ数 56図-11 (a') (仮想荷重法),  $L/l=1.24$ , 仮想荷重点数 16, +印: 仮想荷重点図-11 (b) (直接法),  $L/l=1.24$ , メッシュ数 60図-11 (b') (仮想荷重法),  $L/l=1.24$ , 仮想荷重点数 16, +印: 仮想荷重点

図-11 (c) (直接法),  $L/l=1.24$ , メッシュ数 60図-11 (c') (仮想荷重法),  $L/l=1.24$ , 仮想荷  
重点数 16, +印: 仮想荷重点

の値に埋め込んで(imbedして), 大次元行列の逆行列演算を小次元行列のそれに変換して, 計算時間の短縮を計っている。計算時間の短縮度は未知数の減小度(細分格子点数と仮想荷重点の比)と, 式(31)あるいは式(36)の行列要素の計算時間長によっている。以下に述べる計算例は, 物体の形が単純で前の方針による計算時間の3~5割の短縮である。物体が大形複雑になるにつれて両者の差は大きくなる。

#### d) 仮想弾性板の数

次に述べる計算例では, 物体の全表面  $S$  全体をおおう矩形板の仮想弾性板で近似した。複雑な問題では, 物体表面を2枚以上の仮想弾性板でおおう必要が生じ, その際には仮想弾性板どうしの接続の条件も考慮することが必要である。

#### 計算例

前節に述べた積分方程式の普通の数値解法による解と本節の仮想弾性板近似法による解とを数種の形状の場合

について 図-11 に示す。図中の等値線は物体底面の圧力( $p/\rho g$ )と物体周辺波高( $\eta$ )を示す。物体底面は水面と一致している場合の計算例では, 両者の値は物体の辺上で連続している。なお, 直接法の計算結果でも, また仮想荷重法の結果でも物体(浮体)の中央部に  $p/\rho g=2.0$  というきわめて大きな波圧が生じていることに注意されたい。これは,  $L/l=1.24$  の条件により中央部で物体前辺からの透過波と物体後辺よりの反射波との干渉の結果と考えられる。物体後辺での  $p/\rho g=\eta<0.2$  と低い波圧・波高もこの考えを裏付けている。直接法の未知数はメッシュ数と同じ 60, 仮想法の未知数は 16 である。

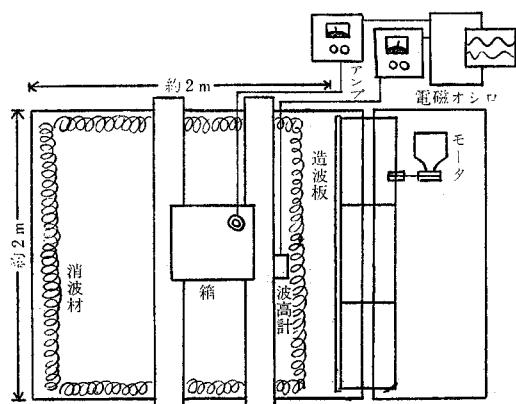


図-12 実験装置概念図

表-3 実験波の同期・波長

	A	B	C
周期 (sec)	0.332	0.479	0.782
波長 (cm)	17.2	37.2	73.6
波長 / 物体長	0.57	1.24	2.45
メッシュ長 波長 / 長 度	0.218	0.101	0.051
受压板径 / 波長	0.21	0.097	0.049

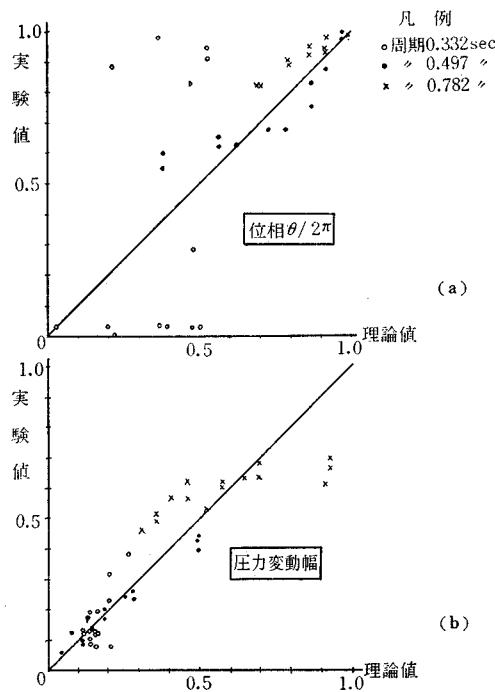


図-13 (a) 波力変動の位相の理論実験の比較  
(b) 波力変動振幅の理論実験の比較

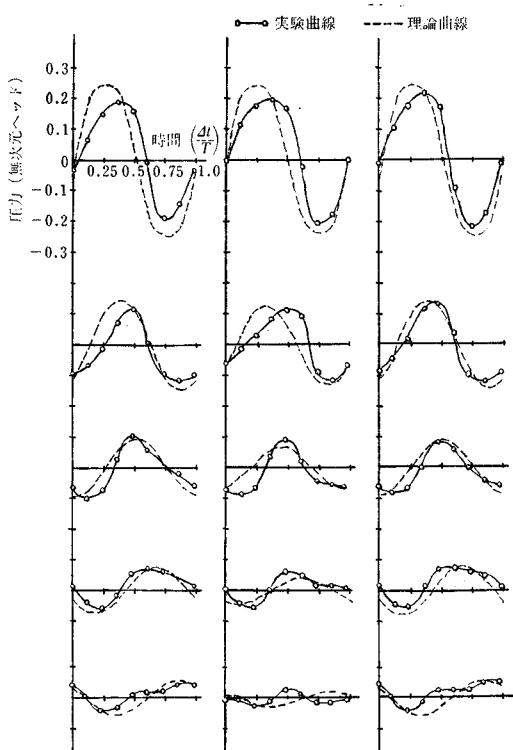


図-14 各測定点での圧力の時間変動  
( $L/l=1.24$   $h_s/h=0.26$ )

計算結果は矩形板の場合に両者の間に多少の差異がみられるが、円形および三角形板については両者は大略一致する。これは、仮想荷重点の配列によると思われるが、ここでは簡略計算法の提案にとどめ、本方法の数学的基礎付けは別の機会にゆずる。

#### 4. 実験

上に述べた理論計算結果の妥当性を調べるために、小型の平面水槽により模型実験を行った。

平面水槽は  $2\text{m} \times 2\text{m}$  の大きさを持ち、水深は  $12\text{cm}$  である。周囲に消波材を置き、一端にバタフライ式の造波機をもつ。

海洋構造物模型は、底面が  $20\text{cm} \times 30\text{cm}$ 、深さ  $30\text{cm}$  のアルミ製の箱で、底面には圧力変換器取付け用の直径  $36\text{mm}$  の穴があけている。使用できる圧力変換器は 1 個だけなので、使用しない取付け穴はアルミ板でふさいだ。

波高計は水深が浅いため、Capacitance 型を用いた。この波高計は wire の材質の関係で波面の上昇下降時の追随性に問題があり、波高分布の詳細な測定は行い得なかった。

実験波は表-3 に示す周期・波長を持つ 3 種類を選んだ。次に、実験結果について説明する。

図-4~6 に各測定点の圧力を □ 内に記し計算値と比較して示してある。図-13 は物体底面の圧力変動の振幅と位相について、それぞれ横軸に理論値・縦軸に実験値をとってプロットしたものである。単位は、変圧力動はヘッドを入射波高により無次元化した値、位相は  $\theta/2\pi$  をとった。圧力変動については、各ケースとも理論と実験は比較的良好く一致している。また、位相については、ケース B・C で両者の一致は良いが、ケース A の実験（短波長入射波）で両者のずれが大きい。これは、短波長の波では（波長／メッシュ間隔）が小さくなっているため、数値計算の精度が低くなる反面、実験的には（圧力計受圧板の直径／波長）が大きくなり、したがって測定の信頼度がわるくなること、波圧計や波高計の感度の点から入射波波高をある限度以上小さくできないから、短波長波では微小振幅波の条件が満たされなくなるなどのためである。

図-14 は、構造物底面の各受圧計で測定された圧力-時間曲線と理論値との比較である。両者は大略一致する。

#### 5. 結語

任意形状の海洋構造物に働く波力とそれによる波の散乱を求めるには、Green 関数を用いて問題を積分方程式に帰着させる方法が最も汎用性が高いことを示した。

次に、この積分方程式を直接数値的に解く方法と、新たに“仮想法（仮想弹性板仮想荷重法）”を提案し、両者による解を比較した。“仮想法”はこの問題に限らず、数値計算法の一手法として、他の問題にも応用しうる。

最後に、計算結果と室内模型実験とを比較し、実験の信頼度の程度で両者は一致することを示した。

### 【補 遺】仮想法による計算時間の短縮

電子計算機による計算時間の長短は、プログラミングの巧拙やちょっとした工夫によっても異なるが、ここでは仮想法による標準的計算時間の短縮率について付記する。

グリーン関数による直接法の計算式(13b)とグリーン関数仮想法の計算式(30)を比較すると、 $\int_S \phi \cdot G_n dS$  と  $\int_S G_n \cdot \delta dS$  などの数値積分に計算時間を要することがわかる。仮想平板のたわみのグリーン関数  $\delta_f(x, y, z)$  は一度計算すれば良く、最初の計算結果をメモリーに記憶してそれ以後の計算により出すことにすれば、両法の数値積分の要素は同一の計算時間とみなせる。直接法ではこの単位の計算を  $(\xi, \eta, \zeta)$  の各格子点の総数  $N$  回必要とする。仮想荷重法では 1 つの Collocation 点について面  $S$  に関する積分の面素数は  $L$  回、 $\Sigma$  の回数（すなわち、仮想荷重点の数）は  $m$  回で、さらにこの計算を Collocation 点数  $M$  だけ、都合  $L(m+1)M$  回の要素計算が必要である。

こうしてできた連立一次方程式の行列は、直接法では  $(N \times N$  行列) であり、仮想法では  $(M \times m$  行列) となる。また、仮想法では、 $S$  上の  $\phi$  の値を求めるのに  $Lm$  回の掛算が必要である。一度  $(\phi)_s$  が求まると式(13)により必要な  $T$  個の  $\phi$  を計算する。したがって、仮想荷重法による計算時間の短縮率は次のように推定される。

#### 仮想荷重法による計算時間

直接法による計算時間

$$= \frac{L(m+1)M \cdot t_p + M^2 \cdot t_i + mL \cdot t_p + 2LT \cdot t_p}{N^2 \cdot t_p + N^2 \cdot t_i + 2NT \cdot t_p} \\ \approx \left(\frac{M}{N}\right)^2 \quad (t_i \gg t_p \text{ ならば})$$

ここに、 $t_p$ ：掛算の処理時間、 $t_i$ ：逆行列解の基本時間。

#### 参考文献

- 1) Fetter, A.L. : Transmission and reflection of surface waves by a movable dock, Phys. of Fluids, Vol. 12, No. 4, 741~751 (1969).
- 2) Garrison, C.J. and Berklite, R.B. : Impulsive hydrodynamics of submerged rigid bodies, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 99, No. EM 1, 99~120 (1973).
- 3) 日野幹雄・山崎丈夫：垂直板による波の反射率・透過率およびエネルギー損失、土木学会論文報告集, No. 190, 75~80 (1971).
- 4) 日野幹雄・藤崎治男：固定された海上構造物による波の反射と透過—Green 関数による理論解、第 20 回海岸工学講演会論文集, 101~106 (1973).
- 5) 日野幹雄・宮永洋一：任意形状の海洋構造物に作用する波力—Green 関数による解、第 5 回海洋開発シンポジウム講演集, 7~12 (1974).
- 6) Holford, R.L. : Short surface waves in the presence of a finite deck I, II, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 60, 957~1011, (1964).
- 7) 井島武士・周宗仁・湯村やす・田淵幹修：任意形状の透過および不透過防波堤による波の散乱と波力、第 20 回海岸工学講演会論文集, 79~87 (1973).
- 8) 大井鉄郎：偏微分方程式とその応用、応用数学講座、第 9 卷、コロナ社, 252~254.
- 9) John, F. : On the motion of floating bodies, II. Simple harmonic motions, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 3, 45~101 (1950).
- 10) Mei, C.C. : Weak reflection of water waves by bottom obstacles, J. Eng. Mech. Divison, ASCE, Vol. 95, No. EM 1, 183~194 (1969).
- 11) Wehausen, J.V. and Laitone, E.V. : Surface waves, Encyclopedia of Physics, Vol. IX, 446~778, Springer Verlag, (1960).
- 12) Wehausen, J.V. : The motion of floating bodies, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol., 237~268 (1971).
- 13) 日野幹雄：仮想法の提案と解説、東工大・土木工学科研究報告 No. 18 (1975)

(1974.8.20・受付)