

## 波状曲面上の層流振動流れの理論

A SOLUTION OF OSCILLATORY VISCOUS FLOW OVER A WAVY WALL

宇多高明\*・日野幹雄\*\*

By Takaaki UDA and Mikio HINO

## 1. まえがき

海底面近くの流体運動は、他の場所における運動と比較して次の際立った特徴を持っている。すなわち、流体運動が周期的であり、また多くの場合底面は平坦ではなく、砂連による波状形をなしていることである。

Lyne<sup>1)</sup> は波状形底面上の層流振動流れに関して、波状境界上に二次流が存在することを理論的に明らかにした。また乱流の場合には、堀川・渡辺<sup>2)</sup> は電解式乱流計によって波運動のものと砂漣上の乱れ強度の分布を実験的に求めており、また日野・大西<sup>3)</sup> は熱線式乱流計によって乱れの発生のメカニズムとその変形、伝播を調べている。さらに日野・高須<sup>4)</sup> は振動流中における非等方性乱流の構造の理論的解析を行っている。

一方、底面における砂漣の発生の問題に関して、波運動によるリップルについては主に次元解析を用いて研究されてきた。また一方向流れの場合について Kennedy・林<sup>3)</sup>は、ポテンシャル流れを仮定し、流砂量を局所流速の関数と考え、遅れ距離  $\delta$  を導入して砂漣波高の時間的変化を安定・不安定問題として取扱った。

Benjamime<sup>6)</sup> はこの問題の本質を論ずるために一応底面を固定波状曲面と考え、この波状曲面上のせん断応力・圧力を計算し、それらが波状曲面と位相がずれるこことを示し、風波の不安定的成長の理論的根拠を示した。

以上の点から明らかなように、波状曲面上の流れと砂漣砂州の発生とは密接に関連していると考えられる。ただし、ここでいう波状曲面とはカルマン渦が発生しないような、波高/波長の値が小さい状態を意味する。本論文は上記の点より、波状曲面上の単振動流れについて曲面上のせん断応力・圧力を計算することによって、これ

らの問題を調べようとするものである。

まず理論的考察を進めていくための物理的条件は、①波動運動、②波状境界（移動性）、③粘性流体である。これらの各条件は次のように単純化される。①は波運動のもとでも底面付近では流体はほぼ往復運動を行うことから、往復運動とする。②については、流体の運動の時間スケールに対して砂面の変化は準定常状態にあるといえるので、固定境界とする。最後に③は、理論的解明の第1段階として層流状態を考える。

波状境界を扱い易くするため曲線座標系を用い、Navier-Stokes 方程式と連続式を基礎式とし、流れ関数を導入した。また解析を容易にするために次の条件を考えた。

- (1) 壁面から離れた点での流体粒子の振動の振幅は壁面の波長に比較して小さい。
  - (2) 曲面の波高は境界層の代表的長さに対して小さい。

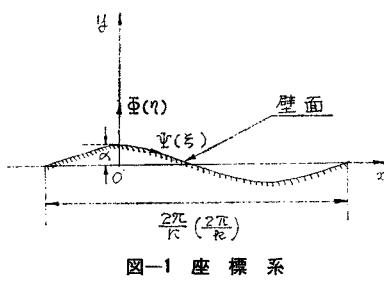
この二条件によって、方程式を摂動法を用いて線型化した。線型方程式より Orr-Sommerfeld 方程式を導き、これを解いて流れ関数の解を求め、境界面上のせん断応力・圧力等を与える式を導いた。次に数値計算を行い、波状曲面上の流体運動について考察し、また波状曲面上の時間平均せん断応力・圧力の分布を調べた。さらに底質移動を考慮した結果、波状曲面が自励的に成長する可能性があることを示した。

## 2. 理論計算

まず初めに、(1) 単振動流れ、(2) 波状境界、(3) 層流を仮定する。そして (2) の条件を満足するように壁面を式 (1) で与える。

\* 正会員 工修 建設省土木研究所海岸研究室

\*\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科



### 図-1 座 標 系

式(1)は、壁面の波高が $2\alpha$ 、波長が $2\pi/\kappa$ であることを示している(図-1参照。ただし図中のかっこ内の値はおのおのの値を無次元化したものである)。次に条件(2)の取扱いを簡単化するために、等角写像を用いて座標系を直交曲線座標に変換する。等角写像は、

$$\zeta = \psi + i\phi = z - iae^{ikz} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

とする。式(2)の実部・虚部を取ると、

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= x + ae^{-\kappa y} \sin \kappa x, \\ \Phi &= y - ae^{-\kappa y} \cos \kappa x \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

となり、さらにヤコビアンを  $(\psi, \phi)$  座標で表わせば、

$$J = 1 + 2\alpha e^{-k\psi} \cos k\psi + o(\alpha^2) \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

となる。変換座標面において、式(1)を式(3)へ代入すれば  $\phi = o(\alpha^2)$  であり、 $\alpha$  の二次の項を省略すると、壁面は  $\phi = 0$  で表わされる。

次に、運動方程式は Navier-Stokes 方程式を用いて、

である。ただし  $\mathbf{u} = (u, v)$  は曲線座標軸上の流速ベクトルを示す。また連続式は、

であって、 $u, v$  を使えば次のように書ける。

$$J \left[ \frac{\partial}{\partial \Psi} (J^{-1/2} u) + \frac{\partial}{\partial \Phi} (J^{-1/2} v) \right] = 0 \dots \dots \dots (7)$$

さらに式(7)を満足する流れ関数  $X$  を次式で定義する。

$$u = J^{1/2} \frac{\partial X}{\partial \Phi}, \quad v = -J^{1/2} \frac{\partial X}{\partial \Psi} \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

次に式(5)の両辺のCurlを取って圧力項を消去し、式(8)で定義したXを導入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} (D^2 X) - \frac{\partial(X, JD^2 X)}{\partial(\Psi, \Phi)} = \nu D^2(JD^2 X) \quad \dots \dots \dots (9)$$

となる。ただし  $D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\psi}^2}$  とする。

境界条件は、(1) 壁面上で流速が零、(2) 壁面から離れた場所での流体運動は単振動流れである、という条件であり、流れ関数を使えば次のように表わせる。

$$\left. \begin{array}{l} \phi=0 \text{において } X=X_\phi=0 \\ \phi \rightarrow \infty \quad \sim \quad X_\phi \rightarrow U_\infty \cos \omega t \\ X_\psi \rightarrow 0 \end{array} \right\} \dots\dots(10)$$

主流の運動が時間に関して周期的であるとし、境界が平らであれば（これは  $J=1$  に相当する）、式 (9) の解は、

$$X = U_{\infty} \left\{ \phi \cos \omega t + \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \left[ e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\phi} \sin \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\phi + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

となる（後にこの式より計算した流速分布を図に示す）。波型境界の場合は、解は波高  $\alpha$  が小さい場合には式(11)に対する摂動解として求められる。式(9)の形では、物理的な意味が不明確なので無次元化を行う。まず粘性が境界層において重要な働きをすることを念頭におけば、代表長さには  $\nu$  が含まれる。さらに viscosity の伝播距離は (Rayleigh problem より)  $\sqrt{\nu t}$  であって、一周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  あたりにすれば、 $\sqrt{2\pi\nu/\omega}$  となる。したがって、代表長さには  $\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$  を選ぶことができ、これを使って変数を無次元化する。

$$X = U_\infty \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \chi, \quad \psi = \xi \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \quad \phi = \eta \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \\ \tau = \omega t, \quad a = a \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \quad \kappa = k \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}, \\ R = \frac{U_\infty \sqrt{2}}{\sqrt{\omega\nu}} : \text{レイノルズ数} \quad \dots \quad (12)$$

式(4),(9),(10)は式(12)によって次の無次元方程式になる。

$$\frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} D^2 \chi - \frac{\partial(\chi, JD^2 \chi)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{1}{R} D^2(JD^2 \chi) \quad (13)$$

$$I = 1 + 2 \alpha k e^{-k\eta} \cos k\xi + o(\alpha^2) \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

次に波状曲面の半波高は代表長さに対して小さいと仮定する。これは式(12)で定義した  $a$  を使えば  $a \ll 1$  である。式(13)を解くには擾動法を用い、 $a$  を微小パラメーターとして既知関数  $x_0$  に対して  $x$  を次式のように展開する。

ここで  $\chi_0$  は式 (11) 式を無次元化したものであり、

$$\chi_0 = \eta \cos \tau + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ e^{-\eta} \sin \left( \tau - \eta + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$



$$\begin{aligned} D &= -A - B - C \\ E &= \sigma A + (\sigma + 1 - i)B + (k + 1 - i)C + kD \\ &\dots \end{aligned} \quad | \quad (35)$$

と与えられる。次に  $f_2(\eta)$  も同様に

$$\begin{aligned} f_2(\eta) &= A'e^{-k\eta} + B'e^{-\sigma\eta} + C'e^{-\sigma\eta} \\ &+ D'e^{-k\eta-\eta-i\eta} \end{aligned} \quad (36)$$

ただし

$$p^2 = k^2 + 4i,$$

また係数  $A' \sim D'$  は、

$$\left. \begin{aligned} A' &= -B' - D' - E', \\ B' &= [(\sigma - k)D' + (1+i)E']/(k-p), \\ C' &= \frac{\sqrt{2}}{16}(\sigma+k)e^{\pi/4-i}, \\ D' &= \frac{1+i}{8(2k+1+i)(k+ki-i)(\sigma-k)}e^{\pi/4-i} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

となる。流れ関数の解が求められたので、次に圧力を計算する。これには、まず式(5)の成分表示を求め、さらに式(12)を使って無次元化を行う。ただし圧力は  $P = \rho U_{\infty} p$  によって無次元化する。その結果のうち  $\partial p / \partial \xi$  の項だけ書くと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= \frac{1}{R} \left[ J^{1/2} \frac{\partial}{\partial \eta} (JD^2 \chi) - 2J^{1/2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right) \right] \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} [J\chi_{\eta}^2 + J\chi_{\xi}^2] + J^{1/2} \chi_{\xi} \cdot JD^2 \chi \end{aligned} \quad (38)$$

となる。さらに式(16)の関係を式(38)へ代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= \frac{1}{R} \left[ U'' - 2 \frac{\partial U}{\partial \tau} \right] + \frac{a}{R} \left[ U'' k e^{-k\eta+i\kappa\xi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} (2kU'e^{-k\eta+i\kappa\xi} + D^2 \chi_1) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \chi_{1\eta} - 2k \frac{\partial}{\partial \tau} U e^{-k\eta+i\kappa\xi} \right] \\ &- \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} [2k\chi_{0\eta}^2 e^{-k\eta+i\kappa\xi} + 2\chi_{0\eta}\chi_{1\eta}] \\ &+ aU'\chi_{1\xi} + o(a^2) \end{aligned} \quad (39)$$

と変形される。ここで  $p$  を微小パラメータ  $a$  について展開する。

$$p = p_0 + ap_1 + a^2p_2 + \dots \quad (a \ll 1) \quad (40)$$

ただし、 $p_0$  は主流の圧力である。

$p_1$  を求めるために、式(40)を式(39)へ代入して  $o(a)$  の項を集め、また  $\chi$  に対する式(20)の関係を利用すると、

$$\begin{aligned} p_1 &= \left\{ \frac{1}{ikR} \left[ F''' - k^2 F' + U''' e^{-k\eta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \frac{\partial}{\partial \tau} (F' + U'e^{-k\eta}) \right] + D'F - UF' \right\} e^{i\kappa\xi} \end{aligned} \quad (41)$$

となる。もちろん  $p_1$  は式(41)の実部を考えるものと

する。

次にせん断応力を求める。一般に無次元化された直角座標  $x', y'$  に対して、圧力と同様に無次元化したせん断応力は、

$$\tau = \frac{1}{R} (\chi_{y'} y' - \chi_{x'} x') \quad (42)$$

で与えられる。式(42)を  $F$  と  $U$  で表わすと、

$$\tau = \frac{1}{R} [U' + a(F'' + k^2 F + U'' e^{-k\eta}) e^{i\kappa\xi}] \quad (43)$$

となる。以上の計算によって、圧力・せん断応力は求まった。流れ関数は求められているので、流速分布も決まる。 $(x, y)$  方向の流速  $(u, v)$  は

$$\left. \begin{aligned} u &= J^{-1/2} \frac{\partial X}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + J^{-1/2} \frac{\partial X}{\partial \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v &= -J^{-1/2} \frac{\partial X}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - J^{-1/2} \frac{\partial X}{\partial \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

と表わされる。

圧力は  $o(a)$  まで取れば、 $p_0$  と  $ap_1$  の和である。

ただし  $p_0$  は、

$$\frac{\partial p_0}{\partial \xi} = \frac{2}{R} \sin \tau \quad (45)$$

の関係を満足する。これは圧力勾配が時間的に（場所的には独立）変化することによって単振動流れが生ずることを示している。しかし圧力勾配以外の方法によって単振動流れを起こすことも可能であるから（たとえば、ケット流れのようにして上板を振動させる），この項は 0 と置いても良い。この時は基礎方程式に余分な項が一つ加わるだけである。

最後に壁面上の時間平均せん断応力、圧力を定義する。まず圧力の時間平均値は、

$$\bar{p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a p_1 d\tau \quad (46)$$

と定義され、周期的なものは 0 となる。式(41)を式(46)へ代入して整理すると、

$$\bar{p} = \Re [a \{f_1'''(0) + \bar{f}_1'''(0)\} e^{i\kappa\xi}] \quad (47)$$

となる。せん断応力の時間平均値も同様に定義すると、

$$\bar{\tau}_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_s d\tau \quad (48)$$

であり、式(43)を式(48)へ代入すると

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_s &= \Re [i a k e^{i\kappa\xi} (f_1''(0) + \bar{f}_1''(0)) \\ &\quad + k^2 f_1(0) + k^2 \bar{f}_1(0)] \end{aligned} \quad (49)$$

となる。

### 3. 数値計算結果と考察

波状境界上のせん断応力・圧力を計算する目的で、前節では流れ関数を導入し、摂動法を用いて Navier-Stokes 方程式を解いた。計算の過程で流れ関数は二つの微小パ

ラメーターによって級数展開されているので、数値計算を行う場合には満足されるべき条件が伴う。この条件は、

- (1)  $kR \ll 1$
- (2)  $a \ll 1$

であり、以下の計算では(1),(2)の条件を満足する範囲内でパラメーターの値を変化させることにする。

### (1) 流速分布(水平方向)

図-2は平らな面上の振動層流の流速分布であり、これは式(17)から計算したものである。図上の曲線は、 $\frac{2\pi}{15}$ ラジアンの位相間隔で描かれている。縦軸は底面か

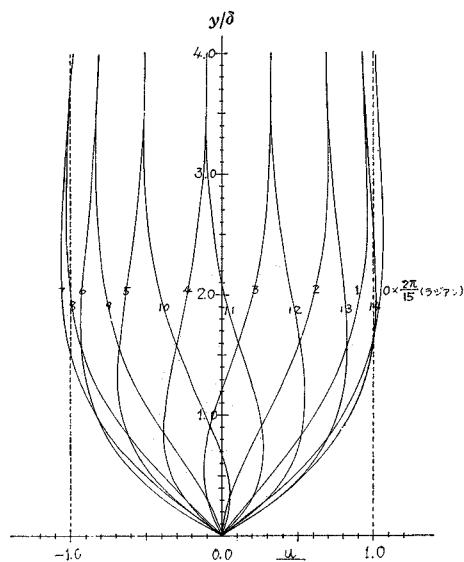


図-2 平らな境界面上の水平流速分布

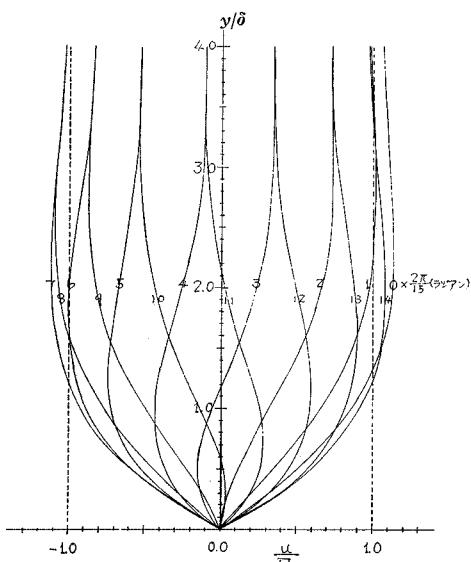


図-3 波状曲面、頂上の水平流速分布

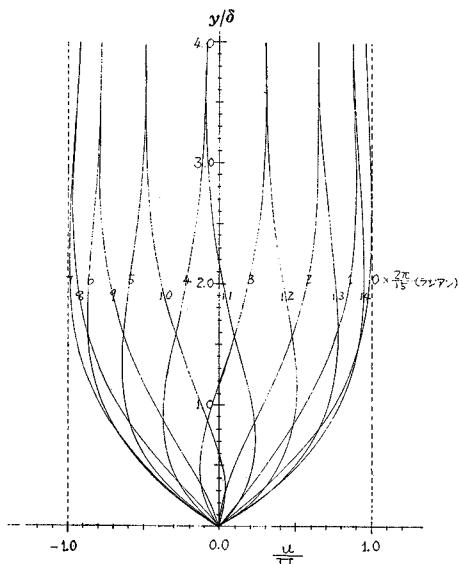


図-4 波状曲面、谷上の水平流速分布

ら鉛直軸に沿って測った高さを無次元化したものである。この図は波状境界上の流速分布の基本形であり、壁面が波状になると各瞬間ににおける流速分布は平らな場合から変化するが、その変化は図-2に与えられる流速分布に、小さな流速変化を加え合わせた形となる。次に図-3,4はおのおの波状曲面の頂上、谷上の流速分布である。ただし、パラメーターは、 $a=0.28$ ,  $kR=0.3$ である。図-2と比較すると、各図の流速の絶対値は頂と谷の中間より谷側で小さく、頂側では大きい。また頂と谷の中間では平らな面上の流速分布と一致する。さらに頂の位置では絶対値が最大であり、谷の位置で最小となってい

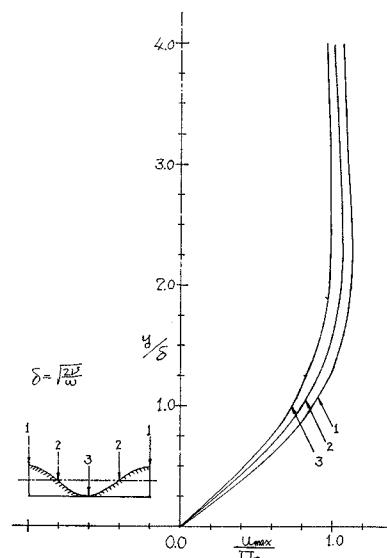


図-5  $u_{max}$  の分布

。これは、流線が頂上では密、谷上では粗になったためである。図-2を見ると流速は  $y/\delta \sim 4$  付近で 99% まで単振動流れの流速と重なっている。図-3,4 は  $y/\delta$  が大きい所では図-2 の各瞬間の流速分布に重なるはずであるが、図-5を見れば明らかのように、 $y/\delta \sim 4$  付近では差が生じている。波状曲面の頂上において  $y/\delta$  を大きく変えて計算した結果によれば、99%まで一致するのは  $y/\delta \sim 9$  程度である。波状曲面を wavy、平らな面を flat の添字で書き、上の  $y$  を  $\delta'$ （境界層厚とよぶ）とおけば、またこの計算時、 $\alpha=0.28\delta$ としたことを考え合わせると、

$$\left. \begin{array}{l} \alpha/\delta'_{\text{flat}} \sim 0.1 \\ \delta'_{\text{wavy}}/\delta'_{\text{flat}} \sim 2.0 \end{array} \right\} \dots \quad (50)$$

となる（図-6 参照）。この式は次のことを意味している。すなわち、底面が平らなものから波型に変わると、曲面波高が平らな境界の境界層厚のごくわずかな割合であっても、渦度が粘性によって拡散される領域である境界層の厚さは、それに比べて大きな割合で変化する。壁面のわずかな変化が流れには大きな影響を及ぼす。

## (2) 流速分布 (鉛直方向)

図-1 は 図-2 と同様にして  $v$  をプロットしたものである。 $v$  の大きさは、 $|v_{\max}/u_{\max}| \sim 3.4 \times 10^{-2}$  程度である。 $v$  が  $u$  に対して小さい理由は、波状境界が平らなものに対する摂動として計算されたためであり、微小パラメーターの値が大きくなれば、 $v$  はさらに大きくなる。これは壁面の波高/波長の値が大きくなると、鉛直流速が大きくなることを意味する。しかし重要な点は鉛直流速の大小よりも、その存在自体である。これにより、後に述べるように鉛直方向の運動

量輸送が可能となるからである。

図-7 は頂と谷の中間点の分布を示しているが、頂・谷上での  $\psi$  は 0 である。しかし、次報に述べるようにこれらの断面では鉛直方向

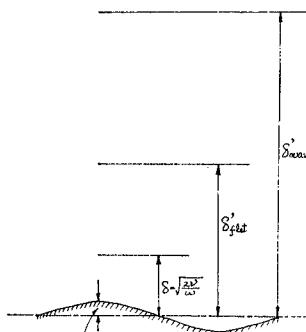


図-6 境界層厚の定義

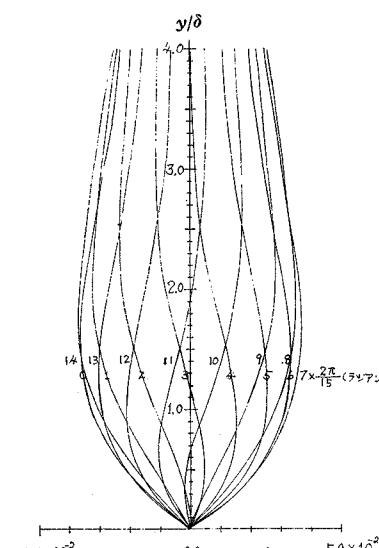


図-7 波状曲面、頂と谷の中間点における鉛直流速分布

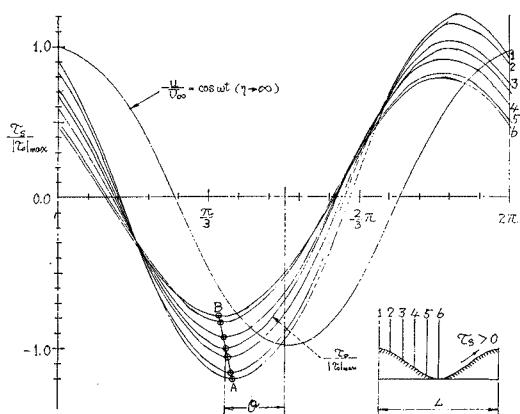


図-8 壁面せん断応力の時間的変化

の二次流が生じている。

### (3) 壁面せん断応力の時間分布

流体の密度と代表長さで壁面せん断応力を無次元化したものとし、 $\tau_0$ を境界面が平らな場合のせん断応力、 $a\tau_1$ を変動分とすれば、図-8 の縦軸は、 $|\tau_0|$  の最大値で  $\tau_0$  を割った値をとっている。また応力は図に示された向きを正とする。まず第一に明らかなことは、絶対値最大の応力が生ずるのは波状曲面の頂上である。これは、絶対値最大の流速の起こる点と同じであり、この点で瞬間に場所的な速度勾配が最大になることを示している。しかし長い時間スケールで考えた場合の平均的なせん断応力の分布は、後に述べるように、図-8 に与えられるものとはまったく異なる。

第二には、 $y \rightarrow \infty$  における流速変化と壁面せん断応力の間には、位相差 ( $\theta$ ) が存在する。

谷と頂の中間点での位相差は  $\theta = \frac{\pi}{4}$  で  
あり、また図上 AB で示されるよう  
に場所により流速と応力の位相差は変  
化し、山から谷へその位相差は次第に  
大きくなっている。

#### (4) 壁面せん断応力の場所分布

位相角をパラメーターとしてせん断応力の場所分布を求めて図示したのが、図-9, 10である。図上中央右半分に破線で示してあるのは、中央線に関して左半分を対称移動したものであり、中央線に関してせん断応力の分布が非対称であることがわかる。次に破線と実線の位置を比較して、 $\theta=0$ ,  $\frac{1}{15}$

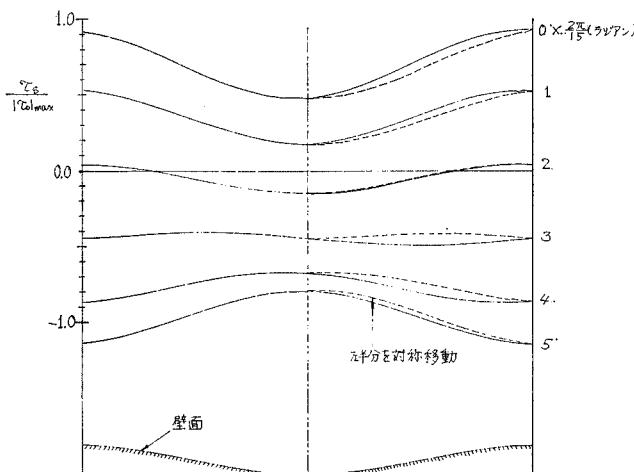


図-9 同一時刻における壁面せん断応力の場所分布

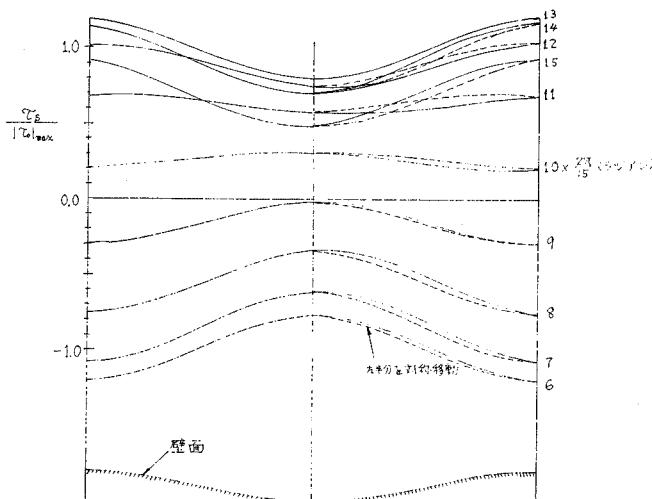


図-10 同一時刻における壁面せん断応力の場所分布

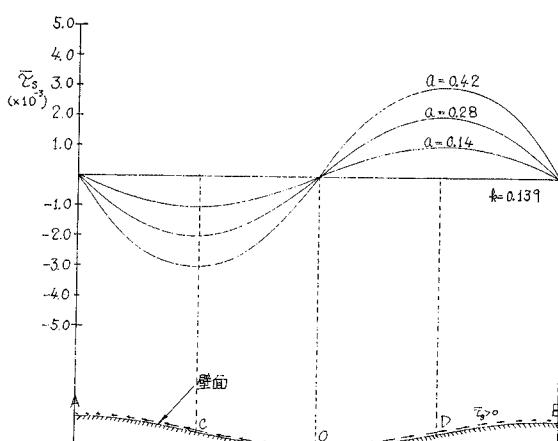


図-11 時間平均せん断応力の場所分布

$\times 2\pi, \frac{6}{15} \times 2\pi$  ラジアン (図-9),  $t = \frac{6}{15} \times 2\pi, \frac{7}{15} \times 2\pi, \frac{8}{15} \times 2\pi, \frac{14}{15} \times 2\pi, 2\pi$  ラジアン (図-10) では破線が実線より下に位置し、他の位相角のときは逆である。この理由は各場所で応力の絶対値が最大になる位相角にずれつまり位相差があるためであり、これは図-8 の直線 AB で示されている。結局、波型境界はその運動の位相に影響を及ぼすといえる。また波状境界のせん断応力は平らなものに対して変動分を加え合わせたものであるが、図より変動分は場所的に余弦分布に近い形をしており、場所的に最大・最小は波状曲面の頂上で生ずる。

#### (5) 時間平均圧力、せん断応力の場所分布

さて、 $\bar{\tau}_s, \bar{p}$  の計算において最も重要なパラメーターは  $k$  と  $a$  である。 $k$  は波状曲面の波数  $\kappa$  を、また  $a$  は半波高  $\alpha$  を無次元化したものである。図-11 は  $\bar{\tau}_s$  の場所分布を示したものであり、計算に用いた  $k, a$  の値も図に示してある。この図は次の特徴を持っている。

- ①  $a$  の値が増加すると、すなわち曲面の波高が増大すると、 $\bar{\tau}_s$  の絶対値が増す。
- ② 図上 A～C, D～B 間では  $\bar{\tau}_s$  は減少し、C～D 間で増加する。また頂、谷上では  $\bar{\tau}_s=0$  である。

次に図-12 は時間平均圧力の場所分布を示す。ただしこの場合は静水圧を考える必要がある。静水圧は図の A と O 点を比較すると、O 点の方が高い。一方、平均的圧力は頂で負、底では正の分布をしているが、このため平均的にみると頂では圧力がより低く、谷ではより高くなる傾向がある。この結果、谷から頂へ向かう平均流が生ずる。さらに  $\bar{\tau}_s$  と同様に、 $a$  の値が増加すると平均圧力の絶対値が増大しており、壁面の波高が高いほど平均流の強さも大であることがわかる。

一方、 $k$  を変化させた場合の圧力・せん断応力の最大値の変化が図-13 に示されている。図中、 $\bar{p}_{\max}^*$ ,  $\bar{\tau}_{s\max}^*$  はおのおの圧力・せん断応力が無次元化される以前の値の最大値であり、 $\bar{p}, \bar{\tau}_s$  を使えば、

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_{\max}^* &= \rho U_\infty^2 \bar{p}_{\max}, \\ \bar{\tau}_{s\max}^* &= \rho U_\infty^2 \bar{\tau}_{s\max} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (51)$$

である。また横軸は  $k$  の値をとっているが  $k < 10^{-2}$  の場合は  $\bar{p}_{\max}^*$ ,  $\bar{\tau}_{s\max}^*$  ともに単調に減少し  $k=0$  では

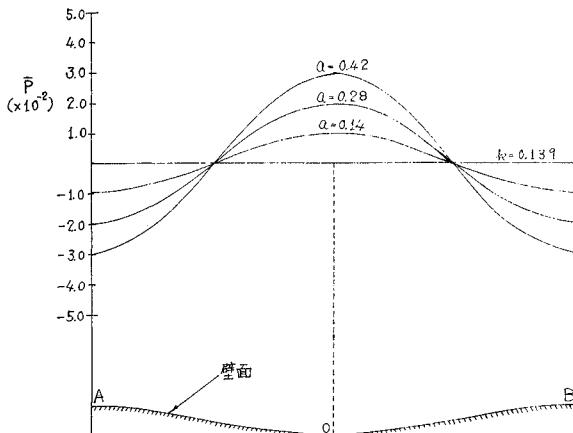


図-12 時間平均圧力の場所分布

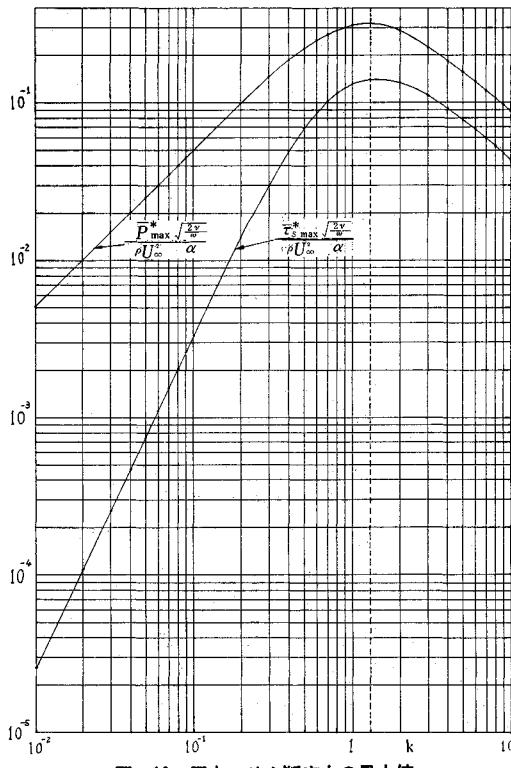


図-13 圧力・せん断応力の最大値

両者とも 0 に等しい。この図の特徴は次の通りである。

①  $\tau_s^*_{\max}$ ,  $\bar{P}_{\max}^*$  は無次元波数  $k=1.3$ において最大値を持つ。したがってこの  $k$  は  $\tau_s^*_{\max}$ ,  $\bar{P}_{\max}^*$  を最大にする卓越波数であり、この波数に対応する波長を持った波状曲面上において、平均圧力・せん断応力及び平均流が最大になる。

② この波長は長さの次元を持つ  $U_\infty/\omega$  に独立であり、流体粒子の振幅に無関係に決定される。ただしせん断応力（圧力）そのものは、式（51）で与えられるように  $U_\infty$  に依存し、 $U_\infty$  が大きいほど大である。

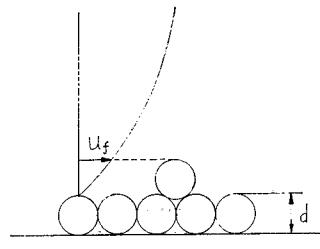


図-14

し、底面境界は固定されていると考えても良い。この場合に前節の結果を応用してみる。

まず第一に砂粒が運動を起こすための条件を調べる。図-14 のように平らな面上に粒径  $d$  の砂粒が並び、その上に一つの砂粒が載った場合、この粒子が動くための条件を考える。代表流速を  $u_f$  とすれば、 $u_f$  は式（11）より、

$$u_f = U_\infty \left[ \cos \omega t - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} d} \cos \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} d \right) \right] \quad (53)$$

である。静的つり合いを考えれば、主流の流速が最大となる  $\omega t=0$  で砂の運動は起こる。したがって式（52）で  $\omega t=0$  とおき、さらに  $\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} d$  が小さな値であることを考慮すれば、

$$u_f = U_\infty \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} d \quad (53)$$

となる。一方、この瞬間に流体の加速度は 0 と考えて良く、砂粒に働く流体力は抗力と揚力である。これらの力と重力のモーメントのつり合い条件<sup>7)</sup>を考えると、

$$\begin{aligned} & \rho_f C_D \frac{\pi d^2}{8} u_f^2 \left( \frac{d}{2} + \frac{d}{2} \cos \phi_s \right) \\ & + \rho_f C_L \frac{\pi d^2}{8} u_f^2 \frac{d}{2} \sin \phi_s \\ & = (\rho_s - \rho_f) g \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d}{2} \right)^3 \frac{d}{2} \sin \phi_s \end{aligned} \quad (54)$$

となる。

ここに  $\rho_f$  : 流体の密度  $C_D$  : 抗力係数  
 $\rho_s$  : 砂粒の密度  $C_L$  : 揚力係数  
 $\phi_s$  : 安息角

である。実験によれば  $C_L=0.85 C_D$  であり、また  $\tan \phi_s=1.3$  とおける。さらに  $C_D$  は次の式で与えられる。

$$C_D = \frac{19.2 \nu}{u_f d} \quad (55)$$

式（53）、（55）を式（54）へ代入し、また  $\rho_s/\rho_f=r$  とおけば、砂粒が動くための条件は、

$$U_\infty > 3.39 \times 10^{-2} (r-1) \frac{g p}{\sqrt{\omega \nu}} \quad (56)$$

と表わされる。

第二の条件として、 $k$  は計算条件 ( $kR \ll 1$ ) を満足しなければならない。この条件は変形すると、

## (6) 底質移動と波状曲面

流体と底質の応答性を比較すると、底質は応答が遅いので砂面の変化は準定常状態にあると

$$U_\infty \ll \frac{\sqrt{\omega\nu}}{\sqrt{2}k} \dots \quad (57)$$

となる。ゆえに式 (56), (57) より  $k$  は次の条件を満足する必要がある。

さて、底質の移動量がせん断応力に比例するところから、時間平均的にみると、図-11でAC, DB間では底質が貯えられて高さが増し、CD間では逆である。また谷から頂へ向かう平均流によって浮遊した底質は頂の方向へ輸送される。結局、平均的圧力・せん断応力は波状曲面の波高を増大させる。また波高が増大すると、図-11より明らかのように圧力・せん断応力の絶対値も大きくなる。このことから波状曲面の変形はますます著しくなり、曲面の波高は自励的に成長する。

一方、曲面成長は図-13を参照すれば波数が  $k = 1.3$  で最も著しい。しかし  $k$  は式(58)を満足しなければならない。したがって式(58)を満足する  $k$  の最大値 ( $k_L$ ) が 1.3 より小さいときは、波状曲面の成長について本論文の結果の適用範囲外であり、何も言えないが、 $k_L \geq 1.3$  の条件を満す時は  $k=1.3$  の波数の曲面の成長が最も著しい。また  $k$  の値が小さくなると  $\bar{\tau}_s^* \max$ ,  $\bar{p}^* \max$  は減少し、それゆえ曲面の成長速度は遅くなる。しかし、曲面が成長するという性質には変化がない。ところでこれらの  $k$  の値に対応する曲面波長は定義にしたがって、

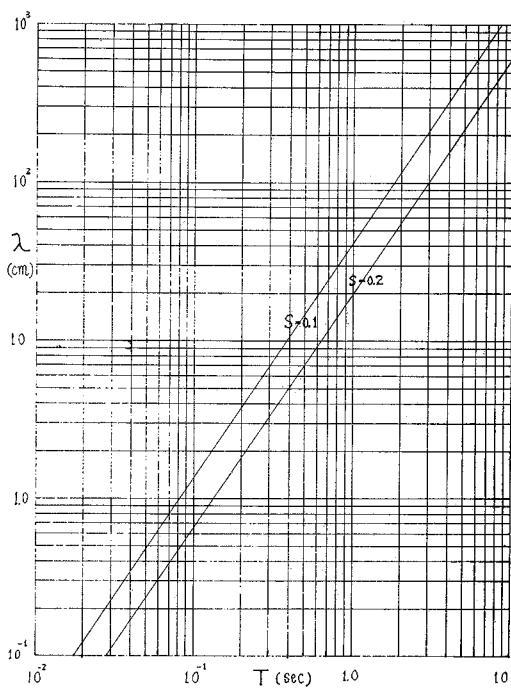


図-15 周期と波長の関係

より計算できる。

たとえば、 $d=0.01\text{ cm}$ ,  $r=2.6$ ,  $\nu=0.01\text{ cm}^2/\text{sec}$  とし  
 式(58)の右辺に対する左辺の比を  $S \left( k/20.9 \frac{\nu}{(r-1)gd} \right)$   
 $\cdot \omega \right)$  とおけば、 $S=0.1$  と  $0.2$  に対する周期 ( $T$ ) と波  
 長 ( $\lambda$ ) の関係を示したのが 図-15 である。この線よ  
 り上が本理論の厳密な適用範囲で、かつ砂の動く領域で  
 ある。実際問題では、 $\nu$  の代りに eddy viscosity  $\epsilon$  を用  
 い、また乱流レイノルズ数  $R_e = U_\infty h/\epsilon = 0(10^2)$  を考慮  
 する必要がある。このとき、

$$\lambda = \frac{2\sqrt{\pi}}{k} \sqrt{\frac{U_\infty h T}{R_s}} = 0 \text{ (10~10^2 cm)} \dots \dots \dots (60)$$

となる。

### (1) 平均流速分布(二次流)

図-16 は時間平均した流速分布を示している。ただし  $\bar{u}$  は水平流速である。この流れの生ずる原因是、(5) 節で述べたように、波状曲面の山と谷で場所的に圧力勾配があるためであると考えられる。この流れは、 $y/\delta \sim 2.0$  附近を境にして流向が逆となり、 $y/\delta < 2.0$  では斜面を上昇する方向であり、 $2.0 < y/\delta$  では逆である。また谷と山の中間で流速の絶対値の最大が現れ、 $|d\bar{u}/dy|$  も最大となる。

### (8) 相乘流速分布

密度を  $\rho$ , 水平・鉛直流速を  $u, v$  とすれば,  $\rho uv$  は単位時間, 単位面積当たり, 鉛直方向に運ばれる  $x$  方向の運動量の輸送量である。 $u, v$  は時間とともに変化するので,  $u, v$  の相乗を一周期平均すると, これは平均の運動量輸送となる。この分布を 図-17 に示す。 $\overline{\rho uv}$  が存

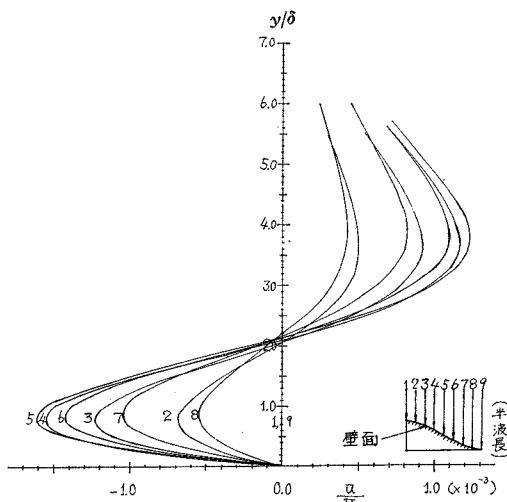


図-16 時間平均流速  $\bar{u}$  (二次流)

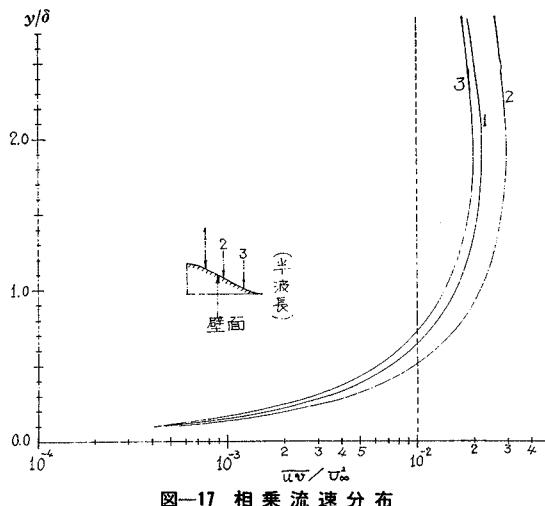


図-17 相乘流速分布

在する理由は、粘性の作用により流れの場が時間的非対称あるいは位相遅れが生じたためである。そしてこの結果平均的応力場が形成される。 $\rho u v$  を乱流における  $-\rho w' v'$  との比較よりレイノルズ応力とよぶことになると、二次流はこのレイノルズ応力によって起こされた平均的流れの場である。

#### (9) 壁面圧力の場所分布

静水圧を除いた圧力分布が位相角をパラメーターとして図-18に示されている。圧力の時間変化の最大・最小は頂と谷の中間点で起こる。また壁面から離れた点における流速と比較すれば、位相が  $\theta = \frac{2}{15} \times 2\pi$  ラジアンだけ遅れている。このことは、図上流体が左から右方向へ流れる時、流速の減速期にはほぼ区間 A~O で圧力が高く、O~B 間では圧力が低い。増速期は逆である。これは剥離と同じ意味を持つと考えられる。

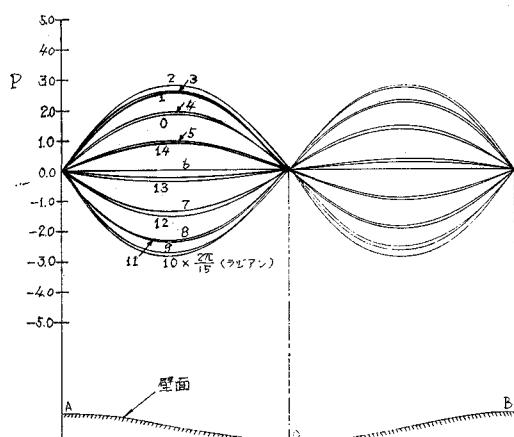


図-18 (瞬間) 壁面圧力の場所分布

## 4. 結　　び

波状曲面上の流れと砂渦の発生の問題は相互に密接に関連していると考えられる。本論文は波状曲面上の単振動流れについて曲面上のせん断応力・圧力を計算することによってこれらの問題について考察した。

まず物理条件として①波動運動、②波状境界(移動性)、③粘性流体を考えた。次にこれら条件を現象の基本的特質を失わずに単純化し、①単振動流れ、②波状境界(固定)、③層流とした。これら条件のもとで流れ関数を導入し、Navier-Stokes 式を、摂動法によって解いた。これより波状曲面上のせん断応力・圧力およびそれらの時間平均値を数値計算によって求めた結果次のことが明らかになった。

(1) 波状曲面の波高が増大すると、壁面上の時間平均せん断応力( $\bar{\tau}_s$ )、圧力( $\bar{P}$ )の絶対値が増す。

(2)  $\bar{\tau}_{max}$ 、 $\bar{P}_{max}$  を最大にする無次元卓越波数 ( $k=1.3$ ) が存在する。

(3) 卓越波数に対応する有次元の卓越波長は流体粒子の振幅に無関係に決まる。

また底質移動について考慮した結果次の結論を得た。

(1) 波状曲面上の  $\bar{\tau}_s$ 、 $\bar{P}$  は波状曲面の波高を増大させ、また波高の増大は  $\bar{\tau}_s$ 、 $\bar{P}$  の値を大きくさせる。かくして波状曲面は自励的に成長しうる。

(2) すべての波数の波状曲面が同じ割合で成長するのではない。実際の場合には乱流粘性係数を考慮し、また波と流れの場について上述のような計算をする必要がある。

なお上に得られた結論は波状曲面の波長に対して流体粒子の振幅が小さい場合に適用されるものである。今後この逆の場合についても同じように式を適用させ、卓越波数が存在しうるかを検討しようと考えている。

謝辞：本論文は、著者の一人（宇多）が東京工業大学大学院修士論文（昭和48年度）として行った研究である。東京工大土木工学科水工研究室の方々の指導・討議・協力に感謝したい。

#### 参 考 文 献

- 1.) Lyne, W.H.: Unsteady viscous flow over a wavy wall, J. Fluid Mech., Vol. 50, part I, pp. 33~48, 1971.
- 2.) 堀川清司・渡辺晃：波運動に伴う乱れと底質の浮遊、第17回海岸工学講演会論文集、1970。
- 3.) 日野幹雄・大西亮：浅水表面波の粗底上の乱流構造、第18回海岸工学講演会論文集、1971。
- 4.) 日野幹雄・高須修二：Tidal Basinにおける乱れと拡散、第19回海岸工学講演会論文集、1972。
- 5.) 林泰造：河川蛇行の成因についての研究、土木学会論文報告集第180号、1970。
- 6.) Benjamine, T., Brooke: Shearing flow over a wavy wall, J. Fluid Mech., 6, pp. 161~205, 1958.
- 7.) 井島武士：海岸工学、pp. 240~242, 1970.

(1974.4.27・受付)