

# 一軸曲げと軸方向力を受ける棒の有限変位理論

FINITE DISPLACEMENT BEAM THEORY

西野文雄\*・倉方慶夫\*\*・後藤芳顕\*\*\*  
By Fumio NISHINO, Yoshio KURAKATA and Yoshiaki GOTO

## 1. まえがき

平面曲げと軸方向力を受ける棒の幾何学的非線型性を取り扱う問題は古くから研究者の注目を集めてきた。この問題の最も古典的な理論はいわゆるはり-柱の理論<sup>1)</sup>であり、曲げ変形による形状の変化に伴って軸方向力を作る付加モーメントの影響が考慮されている。

計算機の発達に伴って数値計算が容易になるとともに幾何学的非線型性を考慮した平面骨組の解析が関心を集め、Livesley<sup>2)</sup>, Argyris<sup>3)</sup>, Saafan<sup>4)</sup>, Jennings<sup>5)</sup>, Powell<sup>6)</sup>, Oran<sup>7)</sup>, 後藤<sup>8), 9)</sup>などによって多くの研究成果が報告されている。これらの研究では、一部<sup>3), 5)</sup>微小変位理論によるつり合い式が基本式として用いられているほかは、はり-柱の理論式を基本式とし、これを発展させて幾何学的な形状の変化による付加モーメントのほかに、圧縮、引張り変形や曲げ変形による軸方向変位が考慮された基本式が用いられている<sup>2), 4)~8)</sup>。回転変位は一般に小さいものと仮定されることが多いが<sup>2)</sup>、回転変位が大きい場合には回転変位成分を剛体変位成分として取り除いて解析し、節点での変位でこれを考慮することによって大きな回転変位を取り扱う方法が広く用いられている<sup>3)~9)</sup>。

一方エネルギー原理に基づくマトリックス解析の進歩と共に、よく知られたはり-柱の式を用い、エネルギー原理を用いて直接剛性マトリックスを求め、これを基本式として非線型問題を解析する方法を用いた研究もConnor・Logcher と Chang<sup>10)</sup>, Mallet と Marcal<sup>11)</sup>, 堀井・斎藤・川原と森<sup>12)</sup>らによって報告されている。これらの報告ではひずみエネルギーの評価において、棒軸方向への変位成分の二乗項は通常微小項として無視されている<sup>13)</sup>。この結果、基本式の誘導過程は異なっている

ものの、本質的にははり-柱の理論を発展させたものと同じ程度の微小項を考えた非線型理論といえるであろう。わが国の土木工学関係の文献では、このような解析は一般に平面骨組構造の大変形解析<sup>12), 14), 15)</sup>、あるいは有限変形解析<sup>8), 9)</sup>とよばれている。

はり-柱の理論が比較的変位の小さい場合を考えているに対し、大変位を扱った理論に古典的な Elastica の問題がある<sup>1)</sup>。Baron と Venkatesan<sup>16)</sup>は Elastica の問題を出発点として平面骨組の解析を行っている。この報告では従来からよく知られた非線型の曲率と変位の関係を用いることによって大変位の問題を扱い得ると考えている。

平面骨組構造のように比較的簡単な構造の解析について、はり-柱の理論やこれに相当すると思われるエネルギー原理に基づく理論、あるいは Elastica に用いられる曲率と変位の関係を用いて数多くの研究成果が報告されているが、非線型な微小項を取り扱う上の基準が明確にされていないため、報告相互間での理論的な関係は必ずしも明瞭でない。

この報告では平面骨組に用いられる一主軸回りの曲げモーメントと軸方向力を受ける棒を取り上げ、棒理論の仮定の範囲内で幾何学的な非線型性を厳密に考慮して支配方程式を作り、これをもとに弾性棒の有限変位理論について考察を加える。構造要素としては最も簡単で比較的理屈の簡単な棒の有限変位理論に考察を加えることによって、他のより複雑な構造要素、あるいは構造物についての幾何学的非線型問題に対する理解を深めるための一助とすることも、本報告の一つの目的である。

支配方程式は各種の方法によって導かれるが、本報告では幾何学的な考慮にたよらず、理論的な仮定が数学的な表現によって簡単に理論展開のなかに組み入れられることと、統一のとれた支配方程式が求まる二つの理由で、仮想仕事の原理を用いて支配方程式を導く。仮想仕事の原理に基づくと、変位場を仮定すればすべての支配方程式が数学的な演算のみで求まる。このことから

\* 正会員 Ph.D 東京大学助教授 工学部総合試験所

\*\* 正会員 工修 新日本技研(株)

\*\*\* 正会員 工修 住友金属工業(株)

支配方程式の精度はすべて変位場の仮定によって決まり、変位場に対する検討がもっとも重要となる。同じ仮想仕事の原理を用いても、本報告と逆の演算をすることも可能である。Reissner<sup>17)</sup>は幾何学的考察をもとに求めた棒理論としては最も厳密なつり合い式、境界条件式から出発し、仮想仕事の原理を用いて対応する変位場を求めていた。本報告では Green のひずみテンソルと変位との関係を従来から棒理論で用いられている。①断面は変形しないとする仮定と、②オイラー・ベルヌイの仮定（せん断ひずみは無視できる）とを用いて一次元の関係に変換し、棒に適用される厳密な有限変位場を求める。

## 2. 変 位 場

ラグランジュの方法（ラグランジュ座標）<sup>18),19)</sup>を用いて物体内の点を表わす。変形前の基準状態で直交直線座標を構成する ( $x, y, z$ ) 座標を選ぶと Green のひずみテンソルと変位の関係は

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \\ e_{yz} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\ e_{zx} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.1 \cdot a \sim f)$$

と表わされる<sup>18)</sup>。ここに、 $u, v, w$  は変位ベクトル  $\mathbf{u}$  の成分であり、基準状態での直交直線座標軸 ( $x, y, z$ ) に平行で座標軸の正の方向を向く単位ベクトル  $i_x, i_y, i_z$  を用いると

$$\mathbf{u} = u i_x + v i_y + w i_z \quad (2.2)$$

と表わされる。

基準状態でまっすぐな一定断面の棒を考え、棒軸に平行に  $z$  軸を選ぶ。変位は  $yz$  平面内のみ生じ、しかもその変位が  $x$  座標と無関係な、いわゆる平面問題を取り扱う。したがって問題の設定から

$$u=0, v=v(y, z), w=w(y, z) \quad \dots (2.3 \cdot a \sim c)$$

断面が変形しないとする仮定とオイラー・ベルヌイの仮定を数式で表わすと、それぞれ次のようになる。

$$e_{yy}=0, e_{yz}=0 \dots (2.4 \cdot a, b)$$

式 (2.1·b,e) を式 (2.4) に代入して得られる変位に関する微分方程式の解は、代入して明らかなように

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + y(\cos \alpha - 1) \\ w &= w_0 - y \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.5 \cdot a, b)$$

と表わされる。ここに  $v_0, w_0$  は積分定数であり断面内の任意の点に選んだ  $y$  座標の原点での変位成分を表わす  $z$  のみの関数である。 $\alpha$  は同じく  $y=0$  での  $yz$  面内の回転角で、次のように表わされる。

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{v_0'}{1+w_0'} \quad (2.6 \cdot a)$$

ここにプライムは  $z$  に関する微分を表わす。式 (2.5), (2.6·a) を用いると、

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{v'}{1+w'} \quad (2.6 \cdot b)$$

の関係が求まり、 $\alpha$  は断面内で一定であることがわかる。

変位前に棒軸と平行な微小線素ベクトルを  $d\mathbf{r}$ 、変位後の量を上付きの山形で表わすものとし、変位後の同じ点を結ぶ線素ベクトルを  $d\hat{\mathbf{r}}$  とすると、これらは式 (2.2) の変位ベクトルを用い式 (2.3·a) に注意すると次のように表わされる。

$$d\mathbf{r} = dz i_z \quad (2.7 \cdot a)$$

$$d\hat{\mathbf{r}} = d\mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz = \frac{\partial v}{\partial z} dz i_y + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz i_z \quad (2.7 \cdot b)$$

ピタゴラスの定理を用い、 $\alpha$  が断面内で一定になることに注意すると式 (2.7) から

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{v'}{\sqrt{g}} = \frac{v_0'}{\sqrt{g_0}} \\ \cos \alpha &= \frac{1+w'}{\sqrt{g}} = \frac{1+w_0'}{\sqrt{g_0}} \end{aligned} \right\} \quad (2.8 \cdot a, b)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} g &= (1+w')^2 + (v')^2 \\ g_0 &= (1+w_0')^2 + (v_0')^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.9 \cdot a, b)$$

同じくピタゴラスの定理から線素の長さ  $|d\mathbf{r}|$ ,  $|d\hat{\mathbf{r}}|$  と  $g$  との間には、次の関係があることが容易にわかる。

$$|d\hat{\mathbf{r}}| = \sqrt{g} |d\mathbf{r}| \quad (2.10)$$

式 (2.9·a) に式 (2.5) を代入し、式 (2.9·b) を用いると

$$g = (1+\kappa y)^2 g_0 \quad (2.11)$$

の関係が求まる。ここに

$$\kappa = - \frac{d\alpha}{\sqrt{g_0} dz} \quad (2.12 \cdot a)$$

式 (2.7·a), (2.10) から明らかのように  $\sqrt{g_0} dz$  は  $y=0$  での線素  $dz$  の変形後の長さを表わす。これから、こ

の  $\kappa$  は変位した状態での  $y=0$  での曲率を表わすことがわかる。式 (2.6-a) を用いると

$$\kappa = -\frac{(1+w_0')v_0''-v_0'w_0''}{g_0^{3/2}} \dots\dots\dots(2.12\cdot b)$$

ひずみテンソルの 6 成分のうち、 $e_{xx}$ ,  $e_{xy}$ ,  $e_{zx}$  は式 (2.3) によって、 $e_{yy}$ ,  $e_{yz}$  は式 (2.4) によってすべて零となる。したがって本報告で取り扱う棒では、 $e_{zz}$  のみが唯一の零とならないひずみ成分である。

式 (2.1-c) に式 (2.3-a), (2.9) を代入すると

$$e_{zz} = \frac{1}{2}(g-1), e_{z20} = \frac{1}{2}(g_0-1) \dots(2.13\cdot a, b)$$

ここに  $e_{z20}$  は  $y=0$  でのひずみであり、この点での変位成分を用いると

$$e_{z20} = w_0' + \frac{1}{2}\{(w_0')^2 + (v_0')^2\} \dots\dots\dots(2.14)$$

と表わされる。式 (2.9-a) のかわりに式 (2.5) を代入すると、 $e_{zz}$  は  $y=0$  での変位成分によって次のように表わされる。

$$\begin{aligned} e_{zz} &= w_0' + \frac{1}{2}\{(w_0')^2 + (v_0')^2\} \\ &- y\sqrt{g_0}\alpha' + \frac{1}{2}(y\alpha')^2 \dots\dots\dots(2.15) \end{aligned}$$

### 3. つり合い式と境界条件

#### (1) 一般の有限変位のつり合い式と境界条件

分布して作用する外力（体積力）と両端断面に作用する表面力を受け、つり合っている棒を考える。分布外力として基準状態での  $y$ ,  $z$  方向への成分のみを持つものを考え、これを

$$\mathbf{p}_d = p_{yd}\mathbf{i}_y + p_{zd}\mathbf{i}_z \dots\dots\dots(3.1)$$

と表わす。ここに  $\mathbf{p}_d$  は分布外力ベクトルの変形前の単位体積当たりの値であり、 $p_{yd}$ ,  $p_{zd}$  はそれぞれ  $\mathbf{p}_d$  の  $i_y$ ,  $i_z$  方向への成分である。棒の両端に作用する表面力を

$$\mathbf{p}_s = p_{ys}\mathbf{i}_y + p_{zs}\mathbf{i}_z \dots\dots\dots(3.2)$$

と表わす。 $\mathbf{p}_s$  は表面力ベクトルの変形前の単位面積当たりの値であり、 $p_{ys}$ ,  $p_{zs}$  はそれぞれ  $\mathbf{p}_s$  の  $i_y$ ,  $i_z$  方向への成分である。ただし、この報告では断面は変形しないとしているので変形前後の断面積に変化はない。

すでに述べたように  $e_{zz}$  以外のひずみテンソルの成分はすべて零である。したがってこれらの条件のもとでつり合い状態にある棒に対する仮想仕事の原理は Kirchhoff の応力テンソルの成分  $\sigma^{zz}$  を用いて、次のように表わされる<sup>18)</sup>。

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_A g^{zz} \delta e_{zz} dA dz - \int_{z_1}^{z_2} \int_A (p_{yd} \delta v + p_{zd} \delta w) dA dz$$

$$- \left[ n_z \int_A (p_{ys} \delta v + p_{zs} \delta w) dA \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \dots\dots\dots(3.3)$$

ここに、 $z_1$ ,  $z_2$  は棒の両端での  $z$  座標、 $A$  は変形前の断面積、 $dA = dx dy$  である。 $n_z$  は変形前の状態における両端断面の外向き単位法線ベクトルと  $z$  軸間の方向余弦である。断面は  $z$  軸に直交しているので  $z_1 < z_2$  のとき

$$n_z = \begin{cases} -1 & z=z_1 \\ 1 & z=z_2 \end{cases} \dots\dots\dots(3.4)$$

式 (2.5), (2.6), (2.15) から変分量を求め、式 (2.8), (2.11) を用いて整理すると

$$\left. \begin{aligned} \delta v &= \delta v_0 - y \sin \alpha \delta \alpha \\ \delta w &= \delta w_0 - y \cos \alpha \delta \alpha \\ \delta e_{zz} &= \sqrt{g_0} (\cos \alpha \delta w_0' + \sin \alpha \delta v_0' - y \delta \alpha') \\ \delta \alpha &= \frac{1}{\sqrt{g_0}} (\cos \alpha \delta v_0' - \sin \alpha \delta w_0') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.5\cdot a\sim d)$$

式 (3.5) を式 (3.3) に代入し、部分積分すると

$$\begin{aligned} &- \int_{z_1}^{z_2} \left[ \left( N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha \right)' + p_y \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (m_{yy} \sin \alpha + m_{zy} \cos \alpha) \frac{\cos \alpha}{\sqrt{g_0}} \right\}' \right] dv_0 dz \\ &- \int_{z_1}^{z_2} \left[ \left( N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha \right)' + p_z \right. \\ &\quad \left. - \left\{ (m_{yy} \sin \alpha + m_{zy} \cos \alpha) \frac{\sin \alpha}{\sqrt{g_0}} \right\}' \right] \delta w_0 dz \\ &+ \left[ \left\{ N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha \right. \right. \\ &\quad \left. + (m_{yy} \sin \alpha + m_{zy} \cos \alpha) \frac{\cos \alpha}{\sqrt{g_0}} - n_z V \right\} \delta v_0 \\ &+ \left\{ N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha \right. \\ &\quad \left. - (m_{yy} \sin \alpha + m_{zy} \cos \alpha) \frac{\sin \alpha}{\sqrt{g_0}} - n_z N \right\} \delta w_0 \\ &- \left. \left\{ M - n_z (\bar{M}_{yy} \sin \alpha + \bar{M}_{zy} \cos \alpha) \right\} \delta \alpha \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(3.6)$$

式 (3.6) では表示を簡単にするため次の記号を定義した。

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_A \sigma_z dA, & \bar{N} &= \int_A p_{zs} dA, \\ M &= \int_A \sigma_z y dA, & \bar{V} &= \int_A p_{ys} dA \\ \bar{M}_{yy} &= \int_A p_{ys} y dA, & \bar{M}_{zy} &= \int_A p_{zs} y dA, \\ p_y &= \int_A p_{yd} dA, & p_z &= \int_A p_{zd} dA \\ m_{yy} &= \int_A p_{yd} y dA, & m_{zy} &= \int_A p_{zd} y dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.7\cdot a\sim j)$$

ここに

であり、応力テンソルの成分  $\sigma^{zz}$  が変形前の微少立方体について定義され、変形後の同じ立方体について応力密度を表わす<sup>18)</sup>のに対し、仮定から断面形が変化しないことに注意すると、長さの変化分を  $\sqrt{g}$  で補正した  $\sigma_z$  は単位面積に作用する力の面に垂直な成分、すなわち普通の意味での直応力になっている。上付きの棒はそれらが両端での表面力による量であることを示す。

式 (3.6) より次のつり合い式と境界条件を得る。変形前の基準状態での  $y, z$  方向の力のつり合い式として

$$\left. \begin{aligned} & \left( N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha \right)' + p_y \\ & + \left\{ (m_{yy} \sin \alpha + m_{zy} \cos \alpha) \frac{\cos \alpha}{\sqrt{g_0}} \right\}' = 0 \\ & \left( N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha \right)' + p_z \\ & - \left\{ (m_{yy} \sin \alpha + m_{zy} \cos \alpha) \frac{\sin \alpha}{\sqrt{g_0}} \right\}' = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (3.9-a, b)$$

両端  $z=z_1, z_2$  での境界条件は

$v_0 = c_1$  または

$w_0 = c_2$  または

$$n_z \bar{N} = N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha$$

$$-(m_{yy} \sin \alpha + m_{zy} \cos \alpha) \frac{\sin \alpha}{\sqrt{g_0}}$$

.....(3.10.b)

$\alpha = c_3$  または

$$n_z(\bar{M}_{yy} \sin \alpha + \bar{M}_{zy} \cos \alpha) = M \quad \dots \dots (3.10\text{-c})$$

ここに  $c_1 \sim c_3$  は定数である。式 (3.9) の  $m_{yy}, m_{zy}$  を零とおくと Reissner<sup>17)</sup> が幾何学的な考察から求めたつり合い式と一致する。

棒中間部  $z=z_c$  の断面に式 (3.2) で表わされる集中荷重が作用する場合には、この荷重による仕事を式(3.3)に追加することにより、式 (3.10) と同様の境界条件が次のように求まる。

$$\begin{aligned} [v_0]_{z_c^-}^{z_c^-} &= 0, \\ \bar{V} &= \left[ N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha \right. \\ &\quad \left. + (m_{yy} \sin \alpha + m_{zy} \cos \alpha) \frac{\cos \alpha}{\sqrt{g_0}} \right]_{z_c^+}^{z_c^-}, \\ [w_0]_{z_c^+}^{z_c^-} &= 0, \\ \bar{N} &= \left[ N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & - (m_{yy} \sin \alpha + m_{zy} \cos \alpha) \frac{\sin \alpha}{\sqrt{g_0}} \Big|_{z_c+} \\ & [a]_{z_c+}^{z_c-} = 0, \\ & (\bar{M}_{yy} \sin \alpha + \bar{M}_{zy} \cos \alpha) = [M]_{z_c+}^{z_c-} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (3.11 \cdot a \sim f)$$

$z_c$  の上付きの正負の符号は、それぞれ荷重作用点  $z_c$  の正負の側を示す。

## (2) 微小ひずみを前提とした解析

これまでひずみの大きさに特に制限をもうけず取り扱ってきた。しかしながら鋼やコンクリートのような材料で作られた構造物に生じるひずみが1に比べて無視できないほど大きな量になることはほとんどないと考えてよいであろう。ここではひずみが1に比べて十分に小さく無視できる場合、すなわち微小ひずみの有限変位理論の範囲で、つり合い式と境界条件を求める。ここでの基本的な仮定は次のように表わされる。

式 (3.12) の条件のもとでは式 (2.13) から

が成り立つ。したがって式 (2.8) から

式 (3.13), (3.14) を用いると、式 (3.5) の変分量は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \delta v &= \delta v_0 - y v_0' \delta \alpha \\ \delta w &= \delta w_0 - y(1 + w_0') \delta \alpha \\ \delta e_{zz} &= (1 + w_0') \delta w_0' + v_0' \delta v_0' - y \delta \alpha' \\ \delta \alpha &= (1 + w_0') \delta v_0' - v_0' \delta w_0' \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3.15\text{-a-d})$$

式(3.3)に式(3.15)を代入し、演算を続けると式(3.9)に対応するつり合い式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \{Nv_0' + M'(1+w_0')\}' + p_y \\ & + [\{m_{yy}v_0' + m_{zy}(1+w_0')\}(1+w_0')]' = 0 \\ & \{N(1+w_0') - M'v_0'\}' + p_z \\ & - [\{m_{yy}v_0' + m_{zy}(1+w_0')\}v_0']' = 0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (3.16-a,b)$$

式 (3.10) に対応する境界条件は

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= c_1 \text{ または} \\ n_z \bar{V} &= N w_0' + M'(1+w_0') \\ &\quad + \{m_{yy}w_0' + m_{zy}(1+w_0')\}(1+w_0') \\ w_0 &= c_2 \text{ または} \\ n_z \bar{N} &= N(1+w_0') - M'w_0' \\ &\quad - \{m_{yy}w_0' + m_{zy}(1+w_0')\}w_0' \\ a &= c_3 \text{ または} \\ n_z \{\bar{M}_{yy}w_0' + \bar{M}_{zy}(1+w_0')\} &= M \end{aligned} \right\} \quad (2.17 \text{ a) } )$$

式 (3.17-c) の変位の境界条件は式 (2.6-a) を用いれ

ば  $v_0'$ ,  $w_0'$  で表わすこともできる。式 (3.11) に対応する境界条件も式 (3.17) と同様に求まる。式 (3.16), (3.17) は式 (3.9), (3.10) に式 (3.13), (3.14) の条件を用いることによって直接求めることもできる。微小ひずみの条件のもとでは式 (3.8), (3.13) から明らかのように直応力  $\epsilon_z$  と応力テンソルの成分  $\sigma^{zz}$  とは同じものと考えて取り扱うことができる。

### (3) 比較的変位の小さい場合の有限変位解析

これまで変位については特に制限をつけず扱ってきました。したがって式 (3.9)～(3.11) あるいは (3.16), (3.17) のつり合い式、境界条件は大きな変位を受ける棒に対しても適用できる。しかし実際の構造物を対象とすると、この報告で考えている棒でも、それほど変位の微係数が大きくなることはまれで、一般には変位の微係数は比較的小さい場合が多いと思われる。また変位の微係数が、それほど大きくならない問題では、同時にひずみも十分に小さいと考えてよいであろう。変位の  $z$  に関する 1 階の微係数が 1 に比べて小さく無視できるるとすると、線形の微小変位理論となる。したがってここでは微小ひずみの有限変位理論のうち、非線型次数の最も低い範囲で基本式を求めるために、式 (3.12) の微小ひずみの仮定のほかに、変位の  $z$  に関する微係数の二乗は 1 に比べて十分に小さく、無視できるものと仮定する。

式 (2.14) を  $w_0'$  について解くと

$$w_0' = \pm \sqrt{1 + 2e_{zz0} - (v_0')^2} - 1 \quad \dots(3.18\text{-a})$$

この 2 根の内、 $w_0' \approx -2$  の無意味な根を捨て、残りの  $w_0' \approx 0$  の根について、式 (3.18-a) の右辺の第一項をテーラー展開し、式 (3.12) の条件および変位の微係数の二乗項を 1 に比べて小さいとしてひずみと変位の微係数の高次項を無視すると

$$w_0' = e_{zz0} - \frac{1}{2}(v_0')^2 \quad \dots(3.18\text{-b})$$

式 (3.18-b) から  $w_0'$  は一般に  $e_{zz0}$  および  $(v_0')^2$  と同程度の量、あるいはどちらか大きいほうと同程度の量と考えられ、1 に対して  $e_{zz0}$ ,  $(v_0')^2$  が無視できる場合には  $w_0'$  も無視してよいことがわかる。したがって、微小ひずみで、かつ変位の比較的小さい有限変位理論として、非線型次数の最も低い理論を考えるものとすると、その基本的仮定は次のように表わされる。

$$(v_0')^2 \ll 1, |w_0'| \ll 1 \quad \dots(3.19\text{-a,b})$$

式 (3.19) の条件を用いると式 (3.5) は次のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} \delta v &= \delta v_0 - y v_0' \delta v_0' + y(v_0')^2 \delta w_0' \\ \delta w &= \delta w_0 - y \delta v_0' + y v_0' \delta w_0' \\ \delta e_{zz} &= \delta w_0' + v_0' \delta v_0' - y \delta \alpha' \\ \delta \alpha &= \delta v_0' - v_0' \delta w_0' \end{aligned} \right\} \quad (3.20\text{-a-d})$$

式 (3.20) を式 (3.3) に代入し演算を進めると、式 (3.9) に対応するつり合い式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (Nv_0' + M')' + p_y + (m_{yy}v_0' + m_{zy})' &= 0 \\ (N - M'v_0')' + p_z - \{m_{yy}v_0' + m_{zy}\}v_0' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots(3.21\text{-a,b})$$

境界条件は

$$v_0 = c_1 \text{ または } n_z \bar{V} = Nv_0' + M' + m_{yy}v_0' + m_{zy} \quad \dots(3.22\text{-a})$$

$$w_0 = c_2 \text{ または } n_z \bar{N} = N - M'v_0' - (m_{yy}v_0' + m_{zy})v_0' \quad \dots(3.22\text{-b})$$

$$v_0' = c_3 \text{ または } n_z (\bar{M}_{yy}v_0' + \bar{M}_{zy}) = M \quad \dots(3.22\text{-c})$$

式 (2.6-a) をテーラー展開して式 (3.19) の条件を用いると

$$\alpha = v_0' \quad \dots(3.23)$$

の関係が求まる。式 (3.22-c) の幾何学的境界条件は  $\alpha = c_3$  となったものを、式 (3.23) の関係を用いて  $v_0'$  で表わしたものである。

式 (3.10), (3.17), (3.22) のどれにも見られるように、変位の境界条件は  $y=0$  での  $i_y, i_z$  方向への変位  $v_0, w_0$  と断面の回転角であり、応力の境界条件はこの変位に対応して表面力と内力の間での  $i_y, i_z$  方向の力のつり合いとモーメントのつり合い式となっている。

## 4. 断面力と変位の関係

### (1) 一般の有限変位の場合の関係

応力テンソルの成分とひずみテンソルの成分とが直線関係にあるとする一般化されたフックの法則にしたがう弾性体でできた棒を考える。仮定した変位場では  $e_{zz}$  以外のひずみ成分はすべて零となるので、 $\sigma^{zz}$  と  $e_{zz}$  の関係は比例係数を  $\bar{E}$  とすると

$$\sigma^{zz} = \bar{E} e_{zz} \quad \dots(4.1)$$

と表わされる。一方棒理論では棒軸方向の直応力に比べて、これに直交する方向の直応力は小さいことから、棒軸方向の直応力成分と直ひずみ成分はヤング率を定数とする比例関係にあるとする仮定が一般に用いられている。この応力-ひずみ関係の仮定は

$$\sigma^{zz} = E e_{zz} \quad \dots(4.2)$$

と表わされる。ここに  $E$  はヤング率である。式 (4.1) と、(4.2) の比例関係の間にはポアソン比を  $\nu$  として次の関係がある。

$$\bar{E} = \frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} E \quad \dots(4.3)$$

仮定した変位場に対応する式 (4.1) の関係を用いれば

理論的な統一はとれるが、ここでは棒理論そのものは歴史的な検証を受けていることを考えて、従来から仮定されている式(4.2)の応力-ひずみ関係を仮定することとする<sup>19)</sup>。

式(2.12-a), (2.14), (2.15), (4.2)を式(3.8)に代入し、式(2.11), (2.13-b)を用いると

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E \sqrt{g_0} \left\{ e_{zz0} + (1+3e_{zz0})\kappa_y \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2}(1+2e_{zz0})(\kappa_y)^2 + \frac{1}{2}(1+e_{zz0})(\kappa_y)^3 \right\} \end{aligned}\quad (4.4)$$

式(4.4)を式(3.7-a,c)に代入し、 $e_{zz0}$ ,  $\kappa$ を変位で表わすと断面力と変位の関係を得る注1)。このとき任意に選ぶことのできるy座標の原点を

$$\int_A y dA = 0 \quad (4.5)$$

が成り立つよう選び、z軸と重心軸を一致させると断面力の表示が簡単になる。式(4.5)が成り立つように選んだとき、断面力は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}N &= E \sqrt{g_0} \left\{ A e_{zz0} \right. \\ &\quad \left. + (1+2e_{zz0}) \left( \frac{3}{2} I_{yy} \kappa^2 + \frac{1}{2} I_{yyy} \kappa^3 \right) \right\} \\M &= E \sqrt{g_0} \left\{ (1+3e_{zz0}) I_k \right. \\ &\quad \left. + (1+2e_{zz0}) \frac{3}{2} I_{yy} \kappa^2 + \frac{1}{2} I_{yyy} \kappa^3 \right\} \end{aligned}\quad (4.6-a,b)$$

ここに

$$\begin{aligned}A &= \int_A dA, \quad I = \int_A y^2 dA, \\I_{yy} &= \int_A y^3 dA, \quad I_{yyy} = \int_A y^4 dA\end{aligned}\quad (4.7-a-d)$$

$g_0$ ,  $\kappa$ ,  $e_{zz0}$ を式(2.9-b), (2.12-b), (2.14)を用いて変位 $v_0$ ,  $w_0$ で表わし式(4.6)に代入すると、断面力と変位の関係が求まる。

一方一次元の棒理論の弾性応力-ひずみ関係として、変形した状態で単位面積当たりに作用する力の面に垂直な成分を表わす式(3.8)で定義された直応力 $\sigma_z$ と、伸びで定義される通常のひずみ $\epsilon_z$ との間にヤング率 $E$ を定数とする比例関係があると仮定すると

$$\sigma_z = E \epsilon_z \quad (4.8)$$

ここに $\epsilon_z$ は式(2.7)で定義された $dr$ ,  $d\hat{r}$ を用いて次のように定義される。

注1) ここではひずみの大きさについて特に制限をつけていない。しかしながら、弾性体の仮定のもとでも、ひずみが微小と考えられない状態において一般化されたフックの法則が成り立つと考えることには無理がある。したがって、ここでの議論は一般化されたフックの法則の成り立つ仮想の材料についての議論と考えなければならない。

$$\epsilon_z = \frac{|d\hat{r}| - |dr|}{|dr|} \quad (4.9)$$

式(2.10)を用いると

$$\epsilon_z = \sqrt{g} - 1, \quad \epsilon_{z0} = \sqrt{g_0} - 1 \quad (4.10-a,b)$$

ここに $\epsilon_{z0}$ は $y=0$ での伸びひずみである。式(4.10)に式(2.11)を用いると

$$\epsilon_z = \epsilon_{z0} + \sqrt{g_0} \kappa y \quad (4.11)$$

式(4.11)を式(4.8)に代入すると

$$\sigma_z = E(\epsilon_{z0} + \sqrt{g_0} \kappa y) \quad (4.12)$$

式(4.12)を式(3.7-a,c)に代入すると断面力とひずみの関係が求まる。このときz軸を重心軸に一致させるように選ぶと

$$N = EA \epsilon_{z0}, \quad M = EI \sqrt{g_0} \kappa \quad (4.13-a,b)$$

を得る。 $\epsilon_{z0}$ ,  $g_0$ ,  $\kappa$ を変位 $v_0$ ,  $w_0$ で表わし、式(4.13)に代入すると断面力と変位の関係が求まる。式(4.6), (4.13)のいずれにおいても程度の差はあるものの断面力と変位との関係式は高次の非線型式となっている。

## (2) 微小ひずみおよび微小ひずみで比較的変位の小さい場合の関係

式(2.13-a)を変形し、式(4.10-a)を代入すると次の関係を得る。

$$e_{zz} = \frac{1}{2} (\sqrt{g} + 1) \epsilon_z \quad (4.14)$$

式(3.12)で表わされる微小ひずみの仮定のもとでは式(3.13)の条件が成り立つ。したがって式(3.8), (4.14)から明らかのように、応力テンソルの成分 $\sigma_{zz}$ と通常の応力 $\sigma_z$ 、およびひずみテンソルの成分 $e_{zz}$ と伸びひずみ $\epsilon_z$ は同じ量として取り扱える。この結果、式(4.2)と(4.8)の仮定は一致したものとなる。

式(2.11)を $\kappa y$ について解き、式(2.13)を代入してひずみについてテーラー展開し、式(3.12)の条件を用いると次の関係が求まる。

$$\kappa y = e_{zz} - e_{zz0} \quad (4.15)$$

また式(2.12)に式(3.13)の条件を用いると微小ひずみの範囲では

$$\kappa = -\alpha' = -(1+w_0')v_0'' + v_0'w_0'' \quad (4.16)$$

式(4.2), (4.15)を式(3.8)に代入し、式(3.13)の条件を用いると応力-ひずみ関係は次のように表わされる。

$$\sigma_z = E(e_{zz0} + \kappa y) \quad (4.17)$$

式(4.17)を式(3.7-a,c)に代入し、式(2.14), (4.16)を用いると微小ひずみの範囲での断面力と変位の関係が次のように求まる。

$$\begin{aligned}N &= EA e_{zz0} = EA \left[ w_0' + \frac{1}{2} \{(w_0')^2 + (v_0')^2\} \right] \\M &= EI \kappa = -EI \{(1+w_0')v_0'' - v_0'w_0''\}\end{aligned}\quad (4.18-a,b)$$

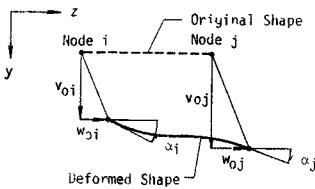
微小ひずみで、かつ変位の比較的小さい場合には、式(3.19)の条件を用いることによって式(4.18)の関係はさらに簡単化され、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} N &= EA \left\{ w_0' + \frac{1}{2} (v_0')^2 \right\} \\ M &= -EI(v_0'' - v_0' w_0') \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (4.19 \cdot a, b)$$

## 5. 数 値 解

### (1) 基本式の積分表示

すでに求めた支配方程式から明らかなように、ひずみと変位に制限条件のない一般の有限変位の問題は高次の非線型の問題となり、解を求めるのはきわめて困難である。困難さの一つは分布して作用する荷重に起因し、他の一つは式(4.6)と(4.13)を比較して明らかに式(4.2)で表わされる応力-ひずみ関係に起因する。したがってここでは解析的に解が求まる問題として、応力-ひずみ関係として式(4.8)を仮定し、分布荷重が作用せず、集中荷重のみを受ける棒について解を求める。棒中の任意の一点での状態量、すなわち境界条件として表われるすべての断面力と変位をパラメータとして与え、棒内の他の任意の点での断面力と変位を、この与えられた状態量の関数として求める。**Fig. 1** に示す棒要素について、*j* 点での諸量を *i* 点での状態量で表わす。



**Fig. 1** Displacements of Beam Element

式(3.9)の荷重項を零とおくことによってつり合い式は

$$\left. \begin{aligned} \left( N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha \right)' &= 0 \\ \left( N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha \right)' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (5.1 \cdot a, b)$$

式(2.12-a), (4.10-b)を式(4.13)に代入すると

$$N = EA(\sqrt{g_0} - 1), \quad M = -EI\alpha' \quad \dots \dots \dots \quad (5.2 \cdot a, b)$$

$g_0, \alpha$  は式(2.9-b), (2.12-b)で明らかなように変位によって決まるパラメーターであり、したがって式(5.2)は断面力と変位の関係を表わす。*i, j* 点での変位を下添字 *i, j* をつけて表わし、節点力を *ij, ji* をつけて表わすと境界条件式(3.10)から *i* 点で

$$v_0 = v_{0i}, \quad N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha = -\bar{V}_{ij} \quad |$$

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= w_{0i}, \quad N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha = -\bar{N}_{ij} \\ \alpha &= \alpha_i, \quad M = -(\bar{M}_{yyij} \sin \alpha + \bar{M}_{zyij} \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (5.3 \cdot a-f)$$

同じく *j* 点で

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= v_{0j}, \quad N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha = \bar{V}_{ji} \\ w_0 &= w_{0j}, \quad N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha = \bar{N}_{ji} \\ \alpha &= \alpha_j, \quad M = \bar{M}_{yyji} \sin \alpha + \bar{M}_{zyji} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (5.4 \cdot a-f)$$

式(5.1)を積分すると

$$\left. \begin{aligned} N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha &= c_1 \\ N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (5.5 \cdot a, b)$$

ここに  $c_1, c_2$  は積分定数であり、*i* 点での境界条件式(5.3-b,d)を用いると

$$c_1 = -\bar{V}_{ij}, \quad c_2 = -\bar{N}_{ij} \quad \dots \dots \dots \quad (5.6 \cdot a, b)$$

式(5.6)を式(5.5)に代入して  $N, M'$  について解くと

$$\left. \begin{aligned} N &= -(\bar{N}_{ij} \cos \alpha + \bar{V}_{ij} \sin \alpha) \\ M' &= \sqrt{g_0} (\bar{N}_{ij} \sin \alpha - \bar{V}_{ij} \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (5.7 \cdot a, b)$$

式(5.7)を式(5.2)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} -EI\alpha'' &= \sqrt{g_0} (\bar{N}_{ij} \sin \alpha - \bar{V}_{ij} \cos \alpha) \\ \sqrt{g_0} &= 1 - \frac{1}{EA} (\bar{N}_{ij} \cos \alpha + \bar{V}_{ij} \sin \alpha) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (5.8 \cdot a, b)$$

式(5.8-b)を式(5.8-a)に代入し、両辺に  $d\alpha/dz$  を乗じて  $z$  について積分すると

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{2} (\alpha')^2 &= \frac{1}{EA} \left\{ \frac{\bar{N}_{ij} \bar{V}_{ij}}{2} \sin 2\alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{N}_{ij}^2 - \bar{V}_{ij}^2}{4} \cos 2\alpha \right\} - \bar{N}_{ij} \cos \alpha \\ &\quad - \bar{V}_{ij} \sin \alpha + c_3 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (5.9)$$

ここに  $c_3$  は積分定数である。式(5.3-e)を考慮し、式(5.3-f)の境界条件を用いてこの定数を決定すると、式(5.9)は次のように書かれる。

$$\alpha' = f(\alpha, \alpha_i, \bar{N}_{ij}, \bar{V}_{ij}, \bar{M}_{ij}) \quad \dots \dots \dots \quad (5.10)$$

この関数  $f$  は

$$\begin{aligned} f &= \pm \left[ \left( \frac{\bar{M}_{ij}}{EI} \right)^2 + \frac{2 \bar{N}_{ij}}{EI} (\cos \alpha - \cos \alpha_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \bar{V}_{ij}}{EI} (\sin \alpha - \sin \alpha_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{AIE^2} \left\{ \bar{N}_{ij} \bar{V}_{ij} (\sin 2\alpha - \sin 2\alpha_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\bar{N}_{ij}^2 - \bar{V}_{ij}^2}{2} (\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_i) \right\} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (5.11)$$

ここに

$$\bar{M}_{ij} = \bar{M}_{yyij} \sin \alpha + \bar{M}_{zyij} \cos \alpha \quad \dots \dots \dots \quad (5.12)$$

式(5.11)の符号は式(5.2.b)から明らかのようにモーメントの正負に応じてそれぞれ負と正の値をとる。

$j$  点での変位を  $i$  点での変位と節点力の関数として求める。式 (5.11) の逆数を  $\alpha$  について積分すると

$$z_j - z_i = l_{ij} = \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{1}{f} d\alpha \quad \dots \dots \dots \quad (5.13)$$

ここに  $l_{ij}$  は節点  $i, j$  間の変形前の長さである。式 (5.13) は  $a_j$  と  $i$  点での諸量との陰なる関係式であり、この式から未知の量  $a_j$  が決まる。式 (2.8・b) を式 (5.2・a) に代入すると

$$\frac{dw_0}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dz} = \frac{N+EA}{EA} \cos \alpha - 1 \quad \dots \dots \dots (5.14)$$

式(5.14)に式(5.7-a),(5.10),(5.11)を代入し $\alpha$ について積分すると

$$w_{0j} = w_{0i} + \int_{a_i}^{a_j} \frac{1}{f} \cdot \left\{ \left( 1 - \frac{\bar{N}_{ij} \cos \alpha + \bar{V}_{ij} \sin \alpha}{EA} \right) \cos \alpha - 1 \right\} d\alpha$$

式 (2.8・b) のかわりに式 (2.8・a) を用いて同じ演算を行ふと

$$v_{0j} = v_{0i} + \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{1}{f} \left( 1 - \frac{\bar{N}_{ij} \cos \alpha + \bar{V}_{ij} \sin \alpha}{EA} \right) \cdot \sin \alpha d\alpha \quad \dots \dots \dots \quad (5.15-b)$$

式 (5.4・b,d) の境界条件を用いて式 (5.5) の積分定数を決定し、式 (5.6) と比較すると、 $j$  点での節点力  $\bar{N}_{ji}$ ,  $\bar{V}_{ji}$  はそれぞれ次のように表わされる。

$$\bar{N}_{ji} = -\bar{N}_{ij}, \quad \bar{V}_{ji} = -\bar{V}_{ij} \dots \dots \dots \quad (5.16 \text{-a,b})$$

式 (5.7・b) に式 (5.8・b) を代入し,  $z$  について積分すると

$$\bar{M}_{ji} = -\bar{M}_{ij} - \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \left( \frac{\bar{N}_{ij} \sin \alpha - \bar{V}_{ij} \cos \alpha}{f} \right) \cdot \left( 1 - \frac{\bar{N}_{ij} \cos \alpha + \bar{V}_{ij} \sin \alpha}{EA} \right) d\alpha \quad (5.16.c)$$

$i$  点での変位と節点力が与えられたとき、式 (5.13), (5.15), (5.16) を評価することによって任意の点  $j$  での変位と節点力を決定することができる。このことを考慮すれば集中荷重を受ける棒を、荷重集中点に節点を選び、節点でのつり合い式を用いることによって還元法の手法を用いて数値解析することができる。

微小ひずみの範囲では式(3.13)の関係がある。これを式(5.7・b)に代入して計算すると式(5.11)の  $f$  は次のように表わされる。

$$f = \pm \left\{ \left( \frac{\bar{M}_{ij}}{EI} \right)^2 + \frac{2 \bar{N}_{ij}}{EI} (\cos \alpha - \cos \alpha_i) + \frac{2 \bar{V}_{ij}}{EI} (\sin \alpha - \sin \alpha_i) \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (5.17)$$

微小ひずみの場合の基本式は式(5.17)の  $f$  を用いて

次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} l_{ij} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{1}{f} d\alpha, \\ w_{0j} &= w_{0i} + \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{1}{f} \\ &\quad \cdot \left\{ \left( 1 - \frac{\bar{N}_{ij} \cos \alpha + \bar{V}_{ij} \sin \alpha}{EA} \right) \cos \alpha - 1 \right\} d\alpha \\ v_{0j} &= v_{0i} + \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{\sin \alpha}{f} d\alpha, \quad \bar{N}_{ji} = -\bar{N}_{ij}, \quad \bar{V}_{ji} = -\bar{V}_{ij} \\ \bar{M}_{ji} &= -\bar{M}_{ij} - \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{\bar{N}_{ij} \sin \alpha - \bar{V}_{ij} \cos \alpha}{f} d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (5.18-a-f)$$

微小ひずみでかつ変位が比較的小さく、式(3.13)、(3.19)の条件の成り立つときには式(3.23)の関係がある。式(5.17)、(5.18)中の $\alpha$ に関する正弦、余弦関数をテーラー展開し、式(3.19)、(3.23)を用いると、この条件のもとでの関数 $f$ および基本式は次のように表わされる。

$$f = \pm \left\{ \left( \frac{\bar{M}_{ij}}{EI} \right)^2 + \frac{\bar{N}_{ij}}{EI} (\alpha_i^2 - \alpha_j^2) + \frac{2\bar{V}_{ij}}{EI} (\alpha_i - \alpha_j) \right\}^{1/2} \dots \dots \dots (5.19)$$

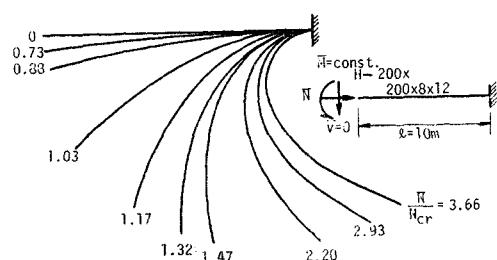
$$\left. \begin{aligned} l_{ij} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{1}{f} d\alpha \\ w_{0j} &= w_{0i} - \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{1}{f} \left( \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\bar{N}_{ij} + \bar{V}_{ij}\alpha}{EA} \right) d\alpha \\ v_{0j} &= v_{0i} + \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{\alpha}{f} d\alpha, \quad \bar{N}_{ji} = -\bar{N}_{ij}, \quad \bar{V}_{ji} = -\bar{V}_{ij} \\ \bar{M}_{ji} &= -\bar{M}_{ij} - \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{\bar{N}_{ij}\alpha - \bar{V}_{ij}}{f} d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (5.20 \cdot a-f)$$

## (2) 数値計算例

仮定の違いによる解の比較をするために最も積分の簡単な問題として、端部に集中荷重を受ける Fig. 2 の片持はりについて数値計算する。中間部に荷重が作用していないないので両端のみに節点を設ける。

境界条件は  $z=l$  の埋込端での節点 2 で

$z=0$  の自由端での節点 1 に図示の向きの外力  $\vec{N}$ ,  $\vec{V}$ ,  $\vec{M}$



**Fig. 2** Displacements of Cantilever

が作用するとき

$$\bar{N}_{12} = \bar{N}, \quad \bar{V}_{12} = \bar{V}, \quad \bar{M}_{12} = \bar{M} \dots \dots \dots \quad (5.21 \cdot d-f)$$

式 (5.21) を式 (5.13), (5.15), (5.16) に代入すると

$$0 = w_{01} + \int_{\alpha_1}^0 \frac{1}{f} \left\{ \left( 1 - \frac{\bar{N} \cos \alpha + \bar{V} \sin \alpha}{EA} \right) \cos \alpha - 1 \right\} d\alpha$$

$$0 = v_{01} + \int_{\alpha_1}^0 \frac{1}{f} \left( 1 - \frac{\bar{N} \cos \alpha + \bar{V} \sin \alpha}{EA} \right) \sin \alpha d\alpha$$

$$\bar{N}_{21} = -\bar{N}, \quad \bar{V}_{21} = -\bar{V},$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{21} &= \bar{M} - \int_{\alpha_1}^0 \left( \frac{\bar{N} \sin \alpha - \bar{V} \cos \alpha}{f} \right) \\ &\quad \cdot \left( 1 - \frac{\bar{N} \cos \alpha + \bar{V} \sin \alpha}{EA} \right) d\alpha \end{aligned} \quad \dots \quad (5.22 \text{-a-f})$$

微小ひずみ、あるいは微小ひずみでかつ変位が比較的小さい場合も同様に基本式が求まる。

数値計算は式(5.22-a)を満たす $\alpha_1$ を試算法により決定すれば、残りの諸量はこの $\alpha_1$ を用いて直接数値積分することによって求まる。 $l=10\text{ m}$ の $200\times 200\times 8\times 12\text{ mm}$ のH形鋼について行った数値計算結果をFig. 2, 3に示す。 $\bar{M}$ としては降伏点応力 $2500\text{ kg/cm}^2$ としたときの断面の全塑性モーメントの20%の値を加え、せん断力 $\bar{V}$ は零とし、軸方向力 $\bar{N}$ の値を種々変

化させた。

**Fig. 2** は軸方向力の値を変化させ、ひずみ、変位の大きさに制限のない場合の基本式 (5.22) を用いて計算したたわみ曲線である。図中軸方向力の値は片持はりに対するオイラー荷重  $N_{cr}$  で無次元化して表示している。等段階の荷重の変化に対して  $\bar{N}/N_{cr}=1$  近辺でたわみ曲線が大きく変化するのがみられる。**Fig. 3** は式(5.22)による計算結果を厳密解として、微小ひずみの条件、および微小ひずみでかつ変位が比較的小さい条件での二つの計算結果から得られた自由端での変位の値を、軸方向力を変化させて比較した図である。微小ひずみを仮定したときと仮定しないときの解には、軸方向力の値にかかわらずほとんど差がない。 $\bar{N}/N_{cr}=1$  近辺で極くわずかの差がみられるのは、数値計算に当って数値積分による誤差が問題とならないよう分割数を十分に大きくしたが (500 分割)、この荷重の近辺では棒の剛性が極度に低下するために数値計算が本質的に不安定となり、多少の誤差が入ったためではないかと思われる。変位が比較的小さいとしたときの解は軸方向力が小さい範囲では厳密解とよく一致しているが、軸方向力が大きくなるにつれて差が大きくなり、 $\bar{N}/N_{cr}=1$  で発散する。しかしながら自由端での変位の誤差は  $\bar{N}/N_{cr}=0.7$  程度の軸方向力のもとでは 1% 以下、 $\bar{N}/N_{cr}=0.9$  程度になって始めて 10% 程度に達する。この荷重が作用したときの自由端での鉛直たわみはそれぞれ支間長の 5/100, 15/100 に達している。**Fig. 3** から明らかなように、変位が比較的小さい条件のもとで求まる自由端の変位は、軸方向力の値にかかわらず常に厳密解よりも大きくなっている。ここで取り上げた片持はりでは、変位にともなって軸方向力が作用する付加モーメントは変位と直接結びついてる。したがって変位について得られた結果は曲げモーメントについてもそのまま当てはまると考えてよい。

ここでは鋼材でできた単一棒について唯一の数値計算をしたにすぎないが、変位、断面力ともに微小ひずみの制限を用いたときと、用いないときの数値結果の差は十分に小さく、その差が問題となることはないと考えてよいと思われる。微小ひずみのほかに変位にも条件をついたときの解には、変位がきわめて大きくなったときに厳密解との間に大きな差がみられるようになる。しかし実用上許される程度の鉛直変位が生じている状態ではその差は十分に小さいと考えてよい。

6. 者 察

### (1) 幾何学的考察によるつり合い式の誘導

本報告では三次元のひずみ-変位関係を棒理論の仮定

**Fig. 3** Comparison of Displacements at Free End

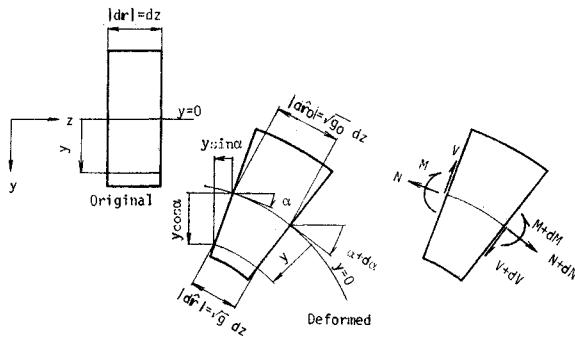


Fig. 4 Geometry and Stress Resultants in Deformed Infinitesimal Element

を用いて一次元に変換し、棒理論で用いられる変位場を求め、仮想仕事の原理よりすべての支配方程式を求めた。この支配方程式のうちつり合い式は幾何学的な考察によって容易に導くことができる所以以下にこれを示す。

変形後の棒の微小要素と、これに作用する荷重と断面力とを Fig. 4 に示す。変形前に微小長さ  $dz$  の要素の線素の変形後の長さは式 (2.10) から明らかなように  $\sqrt{g_0} dz$  となり、 $y=0$  での長さは  $\sqrt{g_0} dz$  と表わされる。これにともない、外力ベクトルの成分の変形前の単位体積当たりの値が  $p_{yd}$ ,  $p_{zd}$  と定義されているので変形後の実単位体積当たりの値は  $p_{yd}/\sqrt{g_0}$ ,  $p_{zd}/\sqrt{g_0}$  となる。棒内の任意の点 ( $y, z$ ) に作用する荷重の  $i_y, i_z$  方向の力の成分および ( $y=0, z$ ) 点のまわりに作用するモーメントはそれぞれ実単位体積当たり  $p_{yd}/\sqrt{g_0}$ ,  $p_{zd}/\sqrt{g_0}$ ,  $(p_{yd}/\sqrt{g_0}) y \sin \alpha + (p_{zd}/\sqrt{g_0}) y \cos \alpha$  と表わされる。仮定から断面は変形しないので、変形後の微小要素の実体積は  $\int_0^{dz} \int_A \sqrt{g_0} dA dz$  と表わされることに注目すると、変形後の微小要素に作用する力の  $i_y, i_z$  方向のつり合い式は次のように求まる。

$$d(N \sin \alpha) + d(V \cos \alpha) + \left( \frac{p_y}{\sqrt{g_0}} \right) (\sqrt{g_0} dz) = 0 \quad (6.1 \cdot a)$$

$$d(N \cos \alpha) - d(V \sin \alpha) + \left( \frac{p_z}{\sqrt{g_0}} \right) (\sqrt{g_0} dz) = 0 \quad (6.1 \cdot b)$$

同様にモーメントのつり合い式も容易に求まり、微小項  $d\alpha$ ,  $dN$ ,  $dV$  の高次項を無視すると次のように表わされる。

$$V(\sqrt{g_0} dz) - dM - \left( \frac{m_{yy} \sin \alpha + m_{zy} \cos \alpha}{\sqrt{g_0}} \right) \cdot (\sqrt{g_0} dz) = 0 \quad (6.1 \cdot c)$$

式 (6.1) から  $V$  を消去し整理すると式 (3.9) のつり合い式が求まる。

## (2) Elastica およびはり-柱理論との比較

Elastica の問題やはり-柱の理論を始めとし、数多く

発表されている軸方向力と曲げモーメントを受ける棒理論の基本式と、本報告の結果とを比較し考察を加える。

Elastica の基本式との比較をするため、 $z=0$  で固定支持され、 $z=l$  の自由端に軸方向力  $-N$ 、せん断力  $V$  の作用する片持はりを考える。固定端での境界条件は

$$w_0=0, v_0=0, \alpha=0 \quad (6.2 \cdot a \sim c)$$

自由端での境界条件は  $z=l$  で  $n_z=1$  に注意すると式 (3.10) から

$$\begin{aligned} \bar{V} &= N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha \\ \bar{N} &= N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha, \quad 0=M \end{aligned} \quad (6.2 \cdot d \sim f)$$

自由端での境界条件、式 (6.2·d,e) を用いると、つり合い式は式 (5.7) を求めたと同様にして次のように求まる。

$$\begin{aligned} N &= \bar{V} \sin \alpha - \bar{N} \cos \alpha, \\ \frac{M'}{\sqrt{g_0}} &= \bar{V} \cos \alpha + \bar{N} \sin \alpha \end{aligned} \quad (6.3 \cdot a, b)$$

応力-ひずみ関係として式 (4.8) を用いると、断面力と変位の関係は式 (5.2·a,b) で表わされる。変形した状態で棒の重心軸にそって測った座標を  $s$  とする。EA の値の大きな棒を考え、重心軸の不伸張性を仮定する。すると  $g_0=1$  となり、式 (2.10) から  $ds=dz$  となる。軸線の不伸張性を仮定したことから式 (5.2·a), (6.3·a) は無意味となる。 $z$  に関する微分を  $s$  に関する微分とおきかえ得ることに注意すると、残った基本式、式 (5.2·b), (6.2·a,b,c,f), (6.3·b) は Elastica の問題の基本式<sup>1)</sup> と一致する。したがって Elastica の問題は軸線の不伸張性と式 (4.8) の応力-ひずみ関係を仮定した有限変位の理論であることがわかる。このとき軸線以外の点に曲げによって生じるひずみは微小である必要はない。応力-ひずみ関係として式 (4.2) を仮定し、さらに微小ひずみの条件をつけると式 (4.2) と式 (4.8) の区別はなくなるので、Elastica の問題は不伸張性と微小ひずみおよび式 (4.2) の応力-ひずみ関係を仮定した理論と考えることもできる。

不伸張性を仮定した Elastica の解とひずみに制限をつけない解との数値的な比較をするため、Fig. 2 に示した片持はりについての基本式 (5.22) の  $1/EA$  を零とおいて数値計算をおこなった。この結果得られた自由端での変位を式 (5.22) による厳密解と比較した結果を Fig. 3 に一点鎖線で示す。不伸張性を仮定した結果得られた自由端での棒軸直角方向の変位と厳密解との間にはほとんど差がみられない。軸方向変位についても荷重がオイラー荷重を上回ると両者の結果はほとんど一致す

るが、オイラー荷重に達しない領域では、不伸張性を仮定した理論の結果得られた軸方向変位は厳密解よりも小さく、荷重が小さくなるにつれてその差は大きくなっている。このことは荷重が小さな段階では軸方向変位は主として軸圧縮力によって生じ、軸圧縮力が大きくなるにつれて曲げ変形による軸方向変位が大きくなり、オイラー荷重を越える領域では後者が主体となっていることを示している。

式(3.12)で表わされる微小ひずみの仮定を用いると  
式(2.9-b), (3.13)から

と表わされる。この条件を用いると式 (2.12-b) は次のようなになる。

一方式 (2.12・b) で

$$w_0 \equiv 0 \quad \dots \dots \dots \quad (6.6)$$

とすると

$$\kappa = - \frac{v_0''}{\{1 + (v_0')^2\}^{3/2}} \quad \dots \dots \dots \quad (6.7)$$

となり、Elastica に関する従来からよく知られ、Baron et al<sup>16)</sup> や堀井等<sup>12)</sup> が大変位を扱うための基本式の一つとして用いた曲率と変位との非線形関係が得られる。微小ひずみの仮定は比較的妥当なものと思われるのに対し、曲げのみによっても軸方向変位が生じることを考えると、軸方向変位を零とする式(6.6)の仮定には疑問の余地があり、大変位の問題を扱うための基本式として用いるには式(6.7)よりも式(6.5)の関係の方が理論的には好ましいと思われる。またオイラーの方法(オイラー座標)<sup>19)</sup>によって曲率と変位の関係を求める式(6.7)が得られる注<sup>22)</sup>ことから、この式を基本式とすることはラグランジュの方法とオイラーの方法とを混同

注 2) 同一の直交直線座標を用いて変形前後の物体を表わすものとする。変形前に  $(y=0, z)$  に位置した点に  $v_0, w_0$  なる変位を生じた結果その点の変形後の位置は山形を付して区別すると

$$\begin{aligned} \hat{y} &= v_0, \quad \hat{z} = z + w_0 \\ \text{される。オイラーの方法を用い変形} \\ \text{すると、この } \hat{y}, \hat{z} \text{ が独立変数とな} \\ 1 + \frac{d w_0}{d z} &= \frac{d \hat{z}}{d z} \quad \frac{d^2 w_0}{d z^2} = \frac{d^2 \hat{z}}{d z^2} \\ \frac{d v_0}{d z} &= \frac{d \hat{y}}{d \hat{z}} \quad \frac{d^2 v_0}{d z^2} = \frac{d^2 \hat{y}}{d \hat{z}^2} \end{aligned}$$

これらの関係を式(2.12-b)に代入し、 $dv_0 = d\hat{y}$   $d^2v_0 = d^2\hat{y}$  に留意すると次の関係が求まる。

$$K = - \frac{\frac{d^2 v_0}{d z^2}}{\left\{ 1 + \left( \frac{d v_0}{d \hat{z}} \right)^2 \right\}^{3/2}}$$

この曲率と変位との関係は変形後の状態で定義された直交直線座標  $(\bar{x}, \bar{y})$  を用いると幾何学的考察によっても簡単に導ける。

しているとの解釈も可能である。

次にはり-柱の理論<sup>1)</sup>との比較をする。式(2.1)のひずみ-変位の関係式で  $w$  の微係数は他の変位の微係数に比べて小さいものと仮定し、 $w$  の微係数の2次項を無視する。変位が式(2.3)で表わされる問題では式(2.1-a, d, f)の右辺は常に零となる。したがって式(2.3), (2.4)の条件のもとでは式(2.1)は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} c_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = 0 \\ c_{yz} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} = 0 \\ c_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (6.8.a-c)$$

式 (6.8-a,b) を満足する解は代入して明らかに

と表わされる。式 (6.9) を式 (6.8.c) に代入すると

式 (6.9), (6.10) から変分量を計算すると

$$\left. \begin{array}{l} \delta v = \delta v_0, \quad \delta w = \delta w_0 - y \delta v_0' \\ \delta e_{zz} = \delta w_0' - y \delta v_0'' + v_0' \delta v_0' \end{array} \right\} \dots \dots \quad (6.11 \cdot a-c)$$

式 (6.11) を式 (3.3) に代入して演算を進めると、つり合い式と境界条件が求まる。 $i_y, i_z$  方向へのつり合い式は、それぞれ

$$\left. \begin{array}{l} (Nv_0' + M')' + p_y + m_{zy}' = 0 \\ N' + p_z = 0 \end{array} \right\} \dots (6.12\text{-a, b})$$

境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = c_1 \text{ または } n_z \bar{V} = N v_0' + M' + m_{zy} \\ w_0 = c_2 \text{ または } n_z \bar{N} = N \\ v_0' = c_3 \text{ または } n_z \bar{M}_{zy} = M \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (6.13-a-c)$$

式(6.10)を式(3.7),(3.8),(4.2)に代入し、式(3.13)の微小ひずみの条件を用いると、次の断面力と変位の関係が求まる。

$$N = EA \left\{ w_0' + \frac{1}{2} (v_0')^2 \right\}, \quad M = -EI v_0''$$

.....(6.14-a b)

式(6.12), (6.13), (6.14)で表わされる問題ははりの大変位の問題<sup>⑧</sup>とよばれ、このうち軸方向力に関する部分を無視した式(6.12-a), (6.13-a,c), (6.14-b)で表わされる問題ははり-柱の問題<sup>⑨</sup>と古くからよばれていふ。

式 (3.12), (3.19) の仮定で求めたつり合い式 (3.21-b) と、境界条件式 (3.22-b) に含まれている  $M'v_0'$  が式 (6.12-b), (6.13-b) では落ちているほか、荷重項にも差がみられる。同様に断面力と変位の関係式 (4.19-b)

にみられる  $EIv_0'w_0''$  の項も式 (6.14・b) では落ちている。式 (3.21), (3.22), (4.19) は微小ひずみを仮定し、かつ有限変位理論としては最低次数の非線型項を含む仮定のもとで得られたものである。したがって、微小項の取り扱いに統一性のとれた棒の有限変位理論として最低次数の基本式であり、この基本式中の項の一部が落ちている式 (6.12), (6.13), (6.14) は最低次数の非線型性を残した有限変位理論としても必ずしも満足なものではない。一般論として断面力  $N$  と  $M'$  を同じ程度の量とすると、 $i_y$  方向へのつり合い式で  $M'$  に対して  $Nv_0'$  を残しながら、 $i_z$  方向へのつり合い式で  $N$  に比して  $M'v_0'$  を無視している点に微小量の取り扱いに統一性の欠けているのがみられる。このような不統一が生じた理由は、式 (2.1) の  $w$  の微係数の2次項をはっきりとした理由もなく他の項に比して微小であるとして無視したことによる。式 (2.1・b) と比較して式 (6.8・a) では

$$\left| \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 / \left\{ 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \right| \ll 1 \quad \dots \dots \dots (6.15)$$

として左辺が 1 に対して無視されている。式 (2.5) を式 (6.15) の左辺に代入すると

$$\left| \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 / \left\{ 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \right| = 1 \quad \dots \dots \dots (6.16)$$

これから式 (6.15) の仮定を設けることが適切でないことがわかる。

一般に軸方向とこれに垂直な方向の両方向への荷重が作用する棒では、せん断力が原因で崩壊することは少なく、崩壊は軸方向力と曲げモーメントの組み合せによると考えてよい。断面の寸法に比して十分に長さの大きい棒が崩壊する状態を考えると、崩壊の原因となる大きな断面力の作用する断面では、軸方向力に比して曲げモーメントの影響がはるかに大きくなり、この結果、軸方向力と曲げモーメントを受ける棒の設計に対しては、曲げモーメントの算定が最も重要な要素となる。つり合い式として式 (6.12) を用いた場合の結果と、式 (3.21) を用いた場合の結果を比較するために、これらの式それぞれから  $N, M$  を分離して表わす。式 (3.21) を  $z$  について積分した後、 $N, M$  を分離し、式 (3.19・a) の条件を用いると、つり合い式は  $z > z_1$  の領域について次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} N + \int_{z_1}^z p_z dz + v_0' \int_{z_1}^z p_y dz - \bar{N}_1 - \bar{V}_1 v_0' &= 0 \\ M' - v_0' \int_{z_1}^z p_z dz + \int_{z_1}^z p_y dz + \bar{N}_1 v_0' - \bar{V}_1 \\ &\quad + m_{yy} v_0' + m_{zy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (6.17 \cdot a, b)$$

同様に式 (6.12) のつり合い式は次のように書かれる。

$$N + \int_{z_1}^z p_z dz - \bar{N}_1 = 0 \quad |$$

$$\left. \begin{aligned} M' - v_0' \int_{z_1}^z p_z dz + \int_{z_1}^z p_y dz + \bar{N}_1 v_0' - \bar{V}_1 + m_{zy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (6.18 \cdot a, b)$$

ここに  $\bar{N}_1, \bar{V}_1$  は境界  $z=z_1$  での節点力である。式 (6.17), (6.18) を比較すると、主として  $p_y, p_z$  で表わされる荷重が作用し、 $m_{yy}, m_{zy}$  で表わされる分布モーメント荷重の値が小さいときには、式 (6.12) のつり合い式を用いても、式 (3.21) のつり合い式を用いた結果に比して軸方向力  $N$  の精度は低下することがあっても、曲げモーメント  $M$  の精度はほとんど影響を受けないであろうと考えられる。式 (3.22) と式 (6.31) の境界条件についても同様のことがいえる。はり柱の理論で用いられる断面力と変位の関係式 (6.14・b) には式 (4.19・b) にみられる  $v_0'w_0''$  が落ちている。式 (3.18) で明らかのように  $w_0'$  と  $(v_0')^2$  とは同じ程度に微小な項であり、さらにその変化率のオーダーも同程度であると仮定すると、 $v_0'w_0''$  はオーダー的には次の関係がある。

$$\begin{aligned} O(v_0'w_0'') &= O(v_0' \{(v_0')^2\}') \\ &= O(2(v_0')^2 v_0'') \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (6.19)$$

式 (6.19) を考慮し、式 (3.19・a) の条件を用いると、式 (4.19・b) の右辺から内第2項を第1項に比して無視することも可能であろう。これらのことが、微小項の取り扱いに統一性の欠ける点があるにしても、式 (6.12), (6.13), (6.14) の基本式が古くから実用され、経験的にもはりの応力解析に対して有効なものであることが知られている理由であろう。このことを数値的に調べるために、式 (6.12), (6.13), (6.14) を用いて Fig. 2 に示す片持はりを解いて得た自由端の変位と微小ひずみ

Table 1 Comparison of Free End Displacements of Cantilever

(a) $\bar{M}=\text{const.}, \bar{V}=0, \bar{N}=\text{variable}$				
$\bar{N}/N_{cr}$	$w_0/(w_0)_{\text{exact}}$		$v_0/(v_0)_{\text{exact}}$	
	SS and RSD	Beam-Column	SS and RSD	Beam-Column
0.147	0.9996	1.0004	1.0000	1.0000
0.220	1.0007	1.0004	1.0000	1.0005
0.440	1.0006	0.9998	1.0004	1.0004
0.586	1.0013	1.0009	1.0011	1.0013
0.733	1.0065	1.0069	1.0040	1.0042
0.879	1.0738	1.0738	1.0399	1.0399

(b) $\bar{M}=\text{const.}, \bar{V}=\text{variable}, \bar{N}=0$				
$\bar{V}/V_{cr}$	$w_0/(w_0)_{\text{exact}}$		$v_0/(v_0)_{\text{exact}}$	
	SS and RSD	Beam-Column	SS and RSD	Beam-Column
0.03	1.0610	1.0628	1.0365	1.0376
0.05	1.1580	1.1605	1.0925	1.0932
0.10	1.5652	1.5686	1.3064	1.3074
0.12	1.7818	1.7856	1.4102	1.4112

Note : SS and RSD = Small-Strain and Relatively Small Displacement; Beam-Column = Solutions from Eqs. (6.12), (6.13) and (6.14)

でかつ変位が比較的小さい場合の基本式を解いて得た結果との比較をひずみ、変位に条件をつけない場合の解で無次元化して **Table 1** に示す。せん断力が零の場合と零以外の場合の両者について比較するために、荷重条件としては降伏応力  $2500 \text{ kg/cm}^2$ としたときの全塑性モーメントの 20% に当る一定のモーメントを作用させた後、せん断力  $V$  を零として軸方向力  $N$  を変化させた場合と、 $N$  を零として  $V$  を変化させた場合の両者について計算を行った。表の数値を比較して明らかなように両者の解はほとんど一致し、たかだか  $10^{-3}$  の桁にわずかの差がみられるにすぎない。二主軸回りの曲げとねじりモーメントおよび軸方向力を受ける棒の解析においても、式 (2.1) の  $w$  の微係数の 2 次項を無視して支配方程式を誘導することが行われているが<sup>20)</sup>、軸方向力の値を除き実用上十分な精度の解が得られることが予想される。

マトリックス解析の進歩と共に、非線型項を残した平面骨組の有限要素法による解析が数多く発表されている。これらの研究で最も多く用いられているのは式(6.8)を基本とした解析であり、Connon et al.<sup>10)</sup>, MalletとMarcal<sup>11)</sup>、大地<sup>14)</sup>は式(6.8・c), (6.9)をもとに剛性マトリックスを求めてる。これらの解析はすでに指摘したようにはり-柱の理論と等価なものである。堀井等<sup>12)</sup>はこれと同じ解析のほかに、式(6.8・c)を  $w$  の微係数の2次項を無視しないもの式(2.1・c)でおきかえた式を基本とした解析も行い、前者を有限変形、後者を大変形解析と区別してよんでいる。後者の解析から求まるつり合い式を荷重項を除いて微分方程式の形で表示すると

$$\left. \begin{array}{l} (Nv_0' + M')' = 0 \\ \{N(1+w_0')'\}' = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (6.20\text{-a,b})$$

となる。式(3.21)と比較して明らかなように式(6.20-b)では $M'v_0'$ が落ちており、一般的にいって微小ひずみの範囲では $w_0'$ と $(v_0')^2$ と同じ程度の微小量であることを考えると、 $v_0'$ の1次項のかかった $M'v_0'$ を落としながら $Nw_0'$ を残しておくのは意味がないといえる。式(3.16)と比較すると、式(6.20-b)では1に対し $w_0'$ が残されているにもかかわらず式(6.20-a)ではこれが無視されており、 $w_0'$ に関する取り扱いにも統一性が欠けている。このような不統一が生じたのは式(6.8-b)では

$$\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| \ll 1 \quad \dots \dots \dots \quad (6.21)$$

として、この項を無視しながら、式(6.8-c)のかわりにこの項を含んだ式(2.1-c)を用いてひずみエネルギーを評価していることによる。式(2.5-b)、(2.8-b)、(2.12-a)を代入し、式(3.12)、(4.15)を用いると式(6.21)は次のように表わされる。

$$\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| = |(w_0' + e_{zz} - e_{zz0})| \ll 1 \quad \dots \dots \dots (6.22)$$

したがって、式 (6.3・b) と式 (2.1・c) を基本式とすることは式 (3.19・b) の  $w_0'$  を 1 に比べて微小であるとして無視する取り扱いを部分的に採用したことになる。

### (3) 変分および微分計算における注意

微小ひずみ、あるいは比較的変位の小さい場合の条件のもとでの支配方程式を求めるとき、式(3.12)、(3.19)で表わされるこれらの条件を仮想仕事式(3.3)の段階で用いた。すなわち式(2.1)を満たす変位場、式(2.5)、(2.15)を求め、変分演算を行った結果得られた式(3.5)にこれらの条件を適用している。こうして得られた支配方程式は、最も一般的な条件に対して得られた支配方程式、式(3.9)、(3.10)、(4.6)に直接これらの条件を用いて得られる結果と一致している。この演算に反し、変位場の段階で式(3.12)、(3.19)の条件を用いその結果に変分演算をすると微小項の一部が失われ、式(3.20)とは異なる結果が得られる。その結果、支配方程式も式(3.9)、(3.10)、(4.6)にこれらの条件を直接用いたものと異なることになる。これから明らかなように仮想仕事の原理、あるいはこれと等価なエネルギー原理を用いて微小ひずみ、あるいは比較的小さな変位の条件のもとで成り立つ支配方程式を誘導するとき、一般的には最も一般的な変位場に対し変分演算を行った後にこれらの条件を用いなければならぬ。

有限要素法の手法を用いて剛性マトリックスを求めるときに多く用いられているように、式(6.8)を基本式としてエネルギー原理を用いる解析では、すでに式(6.8)の段階で不十分な形ではあるが微小ひずみと比較的小さな変位の条件が用いられている。この基本式を満足する変位場、すなわち式(6.9)、(6.10)に変分演算を行うので、このとき微小項の一部が再び失われて、最終的な支配方程式の段階で式(3.21)、(3.22)、(4.19)と比較して差の出る原因の一つとなっている。

変分演算と同様の注意は微分演算についても必要であり、微分前に微小ひずみ、あるいは比較的変位が小さいとする条件を適用し、単位の値に対しひずみ、あるいは変位の微係数を無視すると、変分演算で失われたと同様に一部の項が失われる。式 (3.16), (3.21) のつり合い式では微分を受けるかっこ内の量のなかで、単位の値に対しひずみおよび変位の微係数の一部が無視された表式になっており、前記の微分演算上の注意に反する。実際に式 (3.16), (3.21) を解く場合には、これらの式を積分して式 (3.17) あるいは (3.22) の境界条件を用いればよく、微分演算は行ななくてすむ。このため式(3.16), (3.21) では微分を受けるかっこの中の微小ひずみ、

あるいは比較的変位が小さいとする条件を用いても問題は起らない。

#### (4) 有限変位理論の分類と呼称

本報告では弾性棒の問題を一般的な有限変位の問題、微小ひずみの有限変位問題、および微小ひずみでかつ変位の比較的小さい場合の有限変位問題の三つに分けて取り扱った。第一の問題はひずみ、変位ともに、その大きさについては制約がないので大変位、大変形の問題とよんでもよいであろう。一般に変位と変形が混同されて使用されることが多いが、変位は位置が変わる現象、変形は形が変化する現象という意味で理解すると、大変位が生じても剛体変位のようにひずみの生じないことがあるのに対し、形が変化すれば必ずひずみが生じる。したがって後者はひずみに関する現象と考えることができ、この二つを区別して使うことが適切と思われる。式(6.8)をもとに導かれるはり一柱の理論や有限要素法の手法による支配方程式、あるいはこれに近い式(6.20)で表わされる問題ははりの大たわみ<sup>18)</sup>、大変形<sup>12), 14), 15), 21)</sup>、有限変形<sup>8), 9), 12)</sup>の理論等と名づけられているが、これらの理論は本質的には式(3.12), (3.19)の仮定の範囲内で成り立つ理論であることを考慮すると、このような呼称は必ずしも適切ではないと思われる。本報告のように微小ひずみで比較的変位の小さい範囲での有限変位理論、あるいは単に有限変位理論といったより名が適切と思われる。

最後に軸方向力と曲げモーメントを受ける棒の有限変

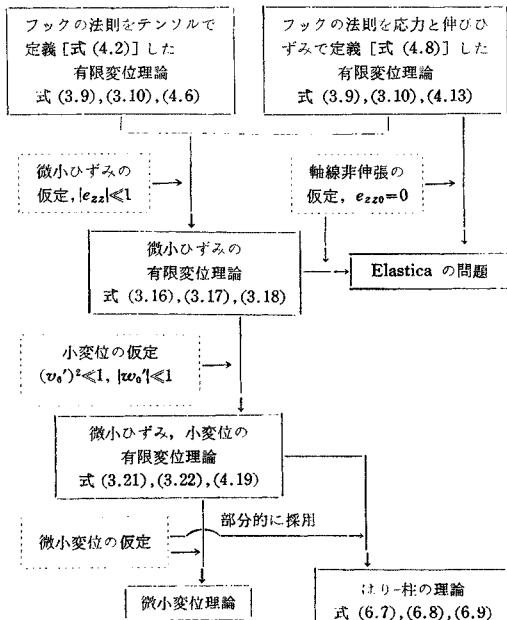


Fig. 5 Elastic Beam Theories and Their Relationship

位理論を用いられている条件に応じて分類した結果とその条件をまとめて、本報告での式番号と共に Fig. 5 に示す。

## 7. 結 語

幾何学的非線型性を考慮した構造物の解析に関する報告は数多く発表されている。エネルギー原理に基づいた構造解析理論が急速に発達しつつあるが、その場合ひずみ-変位関係式中の非線型項を適宜残し、適当な変位場を仮定してひずみエネルギーを評価し、非線型のつり合い式を求めることが一般に行われている。しかしエネルギー原理に基づいてつり合い式を求めるとき、ひずみ-変位関係も含めた変位場の仮定が最も重要であり、得られたつり合い式の精度は、この仮定によってすべて決まることに対する認識は必ずしも広まっていないよう思われる。このようなことから構造要素としては最も簡単な棒を取り上げ、棒理論の仮定の範囲で厳密に取り扱って変位場を求め、これをもとに仮想仕事の原理を用いて有限変位理論による最も一般的な支配方程式を求めた。また、これと合わせて微小ひずみの有限変位理論、および微小ひずみでかつ変位が比較的小さく、非線型理論としては最低次数の理論としての支配方程式を求めた。これらの結果、およびその誘導過程をもとに既発表の棒材に対する有限変位理論との比較検討を行い、理論的な相互関係を明らかにした。

この研究を通して次のようなことが明らかとなった。

- (1) ひずみに制約をつけない一般的な有限変位理論は棒理論の場合にもきわめて高次の非線型問題となり、実用的ではない。
- (2) エネルギー原理によって支配方程式を求めるとき、微小ひずみ、あるいは変位が小さいなどの変位場に対する仮定は、変位場の変分量の計算を行った後に用いなければ、微小項の一部が失われる恐れがある。
- (3) はり一柱の理論は最低次数の有限変位理論として必ずしも統一のとれたものではないが、主として曲げモーメントを受ける棒に対する理論として実用的には妥当なものであろう。

この報告のような変位場に対する取り扱いは棒のように比較的簡単な構造要素に対して始めて可能であり、他の構造要素の解析に直接用いられるとは思われないが、このような厳密な取り扱いをすることによって有限変位の問題一般に対する理解を深めるという所期の目的の一部は達成できたと考える。

謝 辞：本研究を行うにあたり、東京大学の奥村敏恵教授、埼玉大学の秋山成興助教授、名古屋工業大学の

長谷川彰夫講師から貴重な指導と助言を頂いた。ここに記して感謝の意を表わす。

## 記 号

$A$  : 断面積

$c_1, c_2, c_3$  : 定数, 積分定数

$\{e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}\}$  : ひずみテンソルの成分  
 $e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$

$e_{zz0}$  :  $y=0$  での  $e_{zz}$

$E$  : ヤング率

$\bar{E}$  : 式 (4.3) で定義される定数

$f$  : 式 (5.10) で定義される関数

$g, g_0$  : 式 (2.9) で定義される量

$i_x, i_y, i_z$  : 基準状態での  $x, y, z$  方向への単位ベクトル

$I$  : 断面 2 次モーメント

$I_{yy}, I_{yyy}$  : 式 (4.7・c,d) で定義される断面量

$l$  : 棒の長さ

$l_{ij}$  :  $ij$  間の棒要素の長さ

$n_z$  : 断面の外向き法線ベクトルと  $z$  軸との方向余弦

$N$  : 軸方向力

$N_{cr}$  : オイラー荷重

$\bar{N}$  : 棒端もしくは節点に作用する  $i_z$  向きの外力

$M$  : 曲げモーメント

$\bar{M}$  : 棒端もしくは節点に作用する外力モーメント

$\bar{M}_{yy}, \bar{M}_{zy}$  : 式 (3.7・e,f) で定義される外力モーメント

$m_{yy}, m_{zy}$  : 式 (3.7・i,j) で定義される分布モーメント

$p_y, p_z$  : 単位長さ当たりに作用する  $i_y, i_z$  向きの分布荷重

$p_{yd}, p_{zd}$  : 単位体積当たりに作用する  $i_y, i_z$  向きの分布荷重

$p_{ys}, p_{zs}$  : 単位面積当たりに作用する  $i_y, i_z$  向きの表面力

$p_d$  : 単位体積当たりに作用する分布荷重ベクトル

$p_s$  : 単位面積当たりに作用する表面力ベクトル

$r, \hat{r}$  :  $z$  軸に平行な線上の点の変形前, 変形後の位置ベクトル

$u, v, w$  : 変位ベクトルの成分

$u$  : 変位ベクトル

$v_0, w_0$  :  $y=0$  上の点の変位ベクトルの  $i_y, i_z$  方向成分

$\bar{V}$  : 棒端もしくは節点に作用する  $i_y$  向きの力

$(x, y, z)$  : 基準状態で直交直線座標を構成する座標

$z_c$  : 棒中間部の集中荷重の作用点の  $z$  座標

$z_1, z_2$  : 棒端の  $z$  座標

$\alpha$  : 断面の回転角

$\epsilon_z$  : 伸びひずみ

$\epsilon_{z0}$  :  $y=0$  での伸びひずみ

$\kappa$  : 曲率

$\sigma_z$  : 直応力

$\sigma^{zz}$  : 応力テンソルの成分

$\nu$  : ポアソン比

上付  $\wedge$  : 変形後の諸量

上付  $-$  : 棒の両端もしくは節点に作用する外力

上肩付  $+$ ,  $-$  : 節点の正, 負の側の諸量

上肩付' :  $z$  に関する微分

下付  $0$  :  $y=0$  での諸量

下付  $1, 2, i, j$  : 節点  $1, 2, i, j$  での変位もしくは座標

下付  $ij, ji$  : 要素  $ij$  の  $i, j$  端での節点力

下付 exact : ひずみ, 変位に条件をつけない場合の諸量

前付  $d$  : 微分量

前付  $\delta$  : 仮想変位にともなう量

## 参考文献

- Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., McGraw-Hill, 1961.
- Livesley, R.K. : Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, 1964.
- Argyris, J.H. : Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, 1964.
- Saafan, S.A. : Nonlinear behavior of structural plane frames, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 95, No. ST 12, Proc. Paper 3615, pp. 557~579, August 1963.
- Jennings, A. : Frame analysis including change of geometry, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST 3, Proc. Paper 5839, pp. 627~644, March 1968.
- Powell, G.H. : Theory of nonlinear elastic structures, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 95, No. ST 12, Proc. Paper 6943, pp. 2687~2701, December 1969.
- Oran, C. : Tangent stiffness in plane frames, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST 6, Proc. Paper 9810, pp. 973~985, June 1973.
- 後藤茂夫 : 有限変形法による吊橋の解析, 土木学会論文集, No. 156, pp. 1~10, 1968-8.
- 後藤茂夫 : 有限変形法に関する二, 三の考察, 土木学会論文報告集, No. 163, pp. 91~86, 1969-3.

- 10) Connon, J.J., R.D. Logcher and S.C Chan : Nonlinear analysis of elastic framed structures, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST 6, Proc. Paper 6011, pp. 1525~1547, June 1968.
- 11) Mallet, R.H. and P.V. Marcal : Finite element analysis of nonlinear structures, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST 9, Proc. Paper 6115, pp. 2081~2103, September 1968.
- 12) 堀井健一郎・斎藤 進・川原睦人・森 繁：骨組構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, No. 191, pp. 15~30, 1971-7.
- 13) Gallagher, R.H. : Finite element analysis of geometrically nonlinear problem, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, Proc. of 1973 Tokyo Seminar of Finite Element Analysis, University of Tokyo Press, 1973.
- 14) 大地羊三：構造解析とコンピューター, 産業図書, 1971.
- 15) 前田幸雄・林 正・中村 守：増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法, 土木学会論文報告集, No. 223, pp. 1~9, 1974-3.
- 16) Baron, F. and M.S. Venkatesan : Nonlinear formulation of beam-column effects, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST 4, Proc. Paper 8080, pp. 1305~1340, April 1971.
- 17) Reissner, E : On one-dimensional finite-strain beam theory, ZAMP, Vol. 23, pp. 795~804, 1972.
- 18) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968.
- 19) Fung, Y.C. : Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, 1965; 大橋義夫・村上澄男・神谷紀夫訳, 固体の力学/理論, 培風館, 1970.
- 20) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏憲：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, No. 225, pp. 1~15, 1974-5.
- 21) 後藤茂夫・太田俊昭：構造物の非線形挙動の解析, 土木学会誌, Vol. 58, No. 3, pp. 95~107, 1973-3.

(1974.9.18・受付)