

薄肉開き断面を有するらせんはりの変形解析

DEFLECTION ANALYSIS OF THIN-WALLED OPEN
SECTION HELICAL BEAMS

築地 恒夫* ・ 神代 律子**

By Tsuneo TSUIJI, Ritsuko KUMASHIRO,

金子 芳久*** ・ 清水 幸治****

Yoshihisa KANEKO and Kōji SHIMIZU

1. ま え が き

最近自動車交通量の増加とともに道路橋が各地で建設され、しかも立地条件による制約のため立体的な曲線道路橋が使用されている。このような立体曲線橋の代表例としてらせん橋があり、実際に設計・施工されている。道路橋に使用されるらせんは、そのピッチ角が小さいため、設計ではピッチ角によって生ずる初期ねじれの影響を無視して、平面曲線橋として取り扱われることが多い。しかし、初期ねじれの影響も考慮した解析を行うことができるなら、さらに一層厳密な設計が可能となるであろうし、またピッチ角の影響を無視してもさしつかえないという、数値的根拠を明らかにすることも無意味でないと思われる。

らせんはりの研究は、Love¹⁾ が流動座標を用い中実断面の曲線はりを対象に基礎方程式を誘導して以来、もっぱら中実断面らせんはりが取り扱われてきた。すなわち、Holmes²⁾ が対称荷重下での長方形断面を有するらせんはりの解析を行い、Young³⁾ も長方形断面らせんはりの集中荷重による変形の解析を行うとともに、plexiglas 模型での実験結果と比較している。また、Abdul-Baki⁴⁾ は連続らせんはりの解析法を提案している。さらに、一般三次元たわみ角式を用いて、らせんはりからなる格子桁の解法を示した山崎ら⁵⁾ の研究がある。

しかし、道路橋などは薄肉の断面をなす場合が多く、従来の中実断面曲線はり理論を適用することはできない。さらに、道路橋などは一般に曲率半径に比較して断

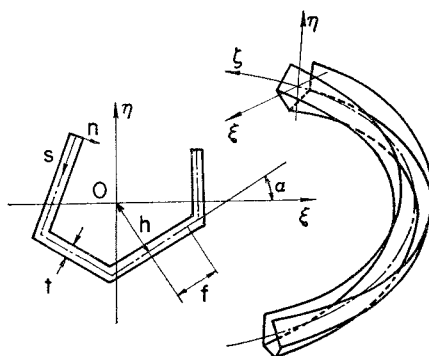
面寸法が小さくなく、曲率半径方向の断面の拡がりを考慮した理論による解析が必要である。このような断面のそり変形、および断面の曲率半径方向拡がりを考慮したらせんはりの理論的または実験的研究はまったく行われていない。

そこで本報告では、先に発表した薄肉断面を有する立体曲線はりの変形に関する基礎方程式⁶⁾を用い、伝達マトリックス法によるらせんはりの変位および応力の解析法を示す。変形・応力におよぼすらせんピッチ角の影響を検討するとともに、はり断面の曲率半径方向拡がりが、解析結果にどのような影響を与えるかも調べる。さらに、代表的な荷重による解析結果を示し、らせんはりの力学的特性を明らかにし、設計の基礎資料を提示する。

最後に、アクリル樹脂板により模型を製作し、両端固定の条件で集中荷重による変位およびひずみを測定し、理論値との比較検討を行う。

2. 解析に必要な基礎式⁶⁾

本報告で取り扱うらせんはりは、薄肉開き断面を有



図一1 らせんはりの座標軸

* 正会員 長崎大学助教授 工学部構造工学科
** 長崎大学 工学部構造工学科
*** 浪速設計事務所
**** 奥村組 関

し、断面は長さ方向に一定である。図-1 に座標軸を示す。変形は微小であるとする。

(1) 変位

断面図心の ξ, η, ζ 方向変位を u, v, w, ζ 軸まわりの断面回転角を θ とすると、断面内任意点の ξ, η, ζ 方向変位 U, V, W は、

$$U = u - \eta\theta, \quad V = v + \xi\theta, \quad W = w - \xi\Gamma_u - \eta\Gamma_v + \omega\Gamma_\theta \quad \dots\dots\dots(1\cdot a, b, c)$$

と表わされる。 ω は図心に関する断面のそり関数で、薄肉開き断面に対して、次のように定義される。

$$\omega = \sqrt{g} \left[\frac{1}{A} \int_A \left(\int_0^s \frac{h}{g_0} ds \right) dA - \int_0^s \frac{h}{g_0} ds \right] \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 A は断面積、 \sqrt{g} 、 h は次式で表わされる。

$$\sqrt{g} = 1 - \xi K_\eta + \eta K_\xi, \\ h = \xi_0 \sin \alpha - \eta_0 \cos \alpha \quad \dots\dots\dots(3\cdot a, b)$$

ここで、 α は断面を構成する各辺の s 軸が ξ 軸となす角であり、 $\sqrt{g_0}$ 、 ξ_0 、 η_0 は s 軸上の \sqrt{g} 、 ξ 、 η の値である。

式 (3・a) の K_ξ 、 K_η は、らせんはりが変形前に有する曲率 (初期曲率) を $1/R$ 、 ζ 軸の主法線が ξ 軸となす角を β とすると、

$$K_\xi = \frac{1}{R} \sin \beta, \quad K_\eta = \frac{1}{R} \cos \beta \quad \dots\dots\dots(4\cdot a, b)$$

で表わされる。

また式 (1・c) の Γ_u 、 Γ_v 、 Γ_θ は

$$\Gamma_u = \frac{du}{d\zeta} - K_\zeta v + K_\eta w, \\ \Gamma_v = \frac{dv}{d\zeta} + K_\zeta u - K_\xi w, \\ \Gamma_\theta = \frac{d\theta}{d\zeta} + K_\xi \Gamma_u + K_\eta \Gamma_v \\ \dots\dots\dots(5\cdot a, b, c)$$

であり、 K_ζ はらせんはりが変形前に有するねじれ率 (初期ねじれ率) である。

(2) 断面合応力

変形により生ずる断面合応力は、変位成分により次のように表わされる。

$$M_\xi = E(C_\eta \Gamma_w - C_{\xi\eta} \varrho_u - C_{\eta\eta} \varrho_v + C_{\eta\omega} \varrho_\theta) \\ M_\eta = -E(C_\xi \Gamma_w - C_{\xi\xi} \varrho_u - C_{\xi\eta} \varrho_v + C_{\xi\omega} \varrho_\theta) \\ M_\omega = E(-C_{\xi\omega} \varrho_u - C_{\eta\omega} \varrho_v + C_{\omega\omega} \varrho_\theta) \\ M_\zeta = E \left(C_{\xi\omega} \frac{d\varrho_u}{d\zeta} + C_{\eta\omega} \frac{d\varrho_v}{d\zeta} - C_{\omega\omega} \frac{d\varrho_\theta}{d\zeta} \right) \\ + GC_J \Gamma_\theta \quad \dots\dots\dots(6\cdot a \sim d)$$

ここで、 E 、 G は材料の縦弾性係数、横弾性係数であ

り、 M_ξ 、 M_η 、 M_ζ は ξ 、 η 、 ζ 軸まわりのモーメント、 M_ω はそりモーメントである。また、 Γ_w 、 ϱ_u 、 ϱ_v 、 ϱ_θ は変位に関する幾何学的量で、次式で表わされる。

$$\Gamma_w = \frac{dw}{d\zeta} - K_\eta u + K_\xi v, \\ \varrho_u = \frac{d\Gamma_u}{d\zeta} - K_\zeta \Gamma_v - K_\xi \theta \\ \varrho_v = \frac{d\Gamma_v}{d\zeta} + K_\zeta \Gamma_u - K_\eta \theta, \\ \varrho_\theta = \frac{d\Gamma_\theta}{d\zeta} \quad \dots\dots\dots(7\cdot a \sim d)$$

ξ 、 η 、 ζ 方向断面力 P_ξ 、 P_η 、 P_ζ は、

$$P_\xi = -\frac{dM_\eta}{d\zeta} - K_\zeta M_\xi + K_\xi M_\zeta, \\ P_\eta = \frac{dM_\xi}{d\zeta} - K_\zeta M_\eta + K_\eta M_\zeta \\ P_\zeta = E(C\Gamma_w - C_\xi \varrho_u - C_\eta \varrho_v) \\ \dots\dots\dots(8\cdot a, b, c)$$

である。

式 (6)、(8) 中の断面定数は次の定義にしたがう。

$$C = \int_A \frac{1}{\sqrt{g}} dA, \quad C_\xi = \int_A \frac{\xi}{\sqrt{g}} dA, \\ C_\eta = \int_A \frac{\eta}{\sqrt{g}} dA, \quad C_{\xi\xi} = \int_A \frac{\xi^2}{\sqrt{g}} dA, \\ C_{\eta\eta} = \int_A \frac{\eta^2}{\sqrt{g}} dA, \quad C_{\xi\eta} = \int_A \frac{\xi\eta}{\sqrt{g}} dA, \\ C_{\xi\omega} = \int_A \frac{\xi\omega}{\sqrt{g}} dA, \quad C_{\eta\omega} = \int_A \frac{\eta\omega}{\sqrt{g}} dA, \\ C_{\omega\omega} = \int_A \frac{\omega^2}{\sqrt{g}} dA, \\ C_J = \frac{1}{3} \int_0^b \frac{t^3}{\sqrt{g_0}} \left(1 - \frac{f}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} \right)^2 ds, \\ f = \xi_0 \cos \alpha + \eta_0 \sin \alpha \quad \dots\dots\dots(9\cdot a \sim k)$$

式 (9・j) は薄肉開き断面に対するねじり剛性係数で、 t は断面肉厚、 b は s 軸に沿って測った断面の全周長である。

(3) 平衡方程式

らせんはりの変形に関する平衡方程式は次式のとおりである。

$$-\frac{dP_\xi}{d\zeta} + K_\zeta P_\eta - K_\eta P_\zeta = \sqrt{g_1} \left[p_\xi^* \right. \\ \left. + (\xi_1 - \omega_1 K_\xi) \frac{dp_\xi^*}{d\zeta} - (\eta_1 - \omega_1 K_\eta) K_\zeta p_\xi^* \right] \\ -\frac{dP_\eta}{d\zeta} - K_\zeta P_\xi + K_\xi P_\zeta = \sqrt{g_1} \left[p_\eta^* \right. \\ \left. + (\eta_1 - \omega_1 K_\eta) \frac{dp_\eta^*}{d\zeta} + (\xi_1 - \omega_1 K_\xi) K_\zeta p_\eta^* \right] \\ -\frac{dM_\xi}{d\zeta} - K_\xi M_\eta + K_\eta M_\zeta = \sqrt{g_1} \left(\xi_1 p_\eta^* \right. \\ \left. - \eta_1 p_\xi^* - \omega_1 \frac{dp_\zeta^*}{d\zeta} \right)$$

$$-\frac{dP_\xi}{d\zeta} + K_\eta P_\xi - K_\xi P_\eta = \sqrt{g_1} p_\zeta^* \dots\dots\dots(10\cdot a\sim d)$$

ここで、 (ξ_1, η_1) は分布荷重 $(\xi, \eta, \zeta$ 方向成分, $p_\xi^*, p_\eta^*, p_\zeta^*$) が作用する点の座標であり、 ω_1 はその点のそり関数の値、 $\sqrt{g_1}$ はその点の \sqrt{g} の値である。

(4) 応 力

変形によってはりに生ずる垂直応力 σ_ζ , St. Venant のせん断応力 $s^r s_\zeta$, 垂直応力 σ_ζ とのつり合によって生ずるせん断応力 $t^r s_\zeta$ は、それぞれ次式により計算される。

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta &= \frac{E}{\sqrt{g}} (\Gamma_\omega - \xi \Omega_u - \eta \Omega_v + \omega \Omega_\theta) \\ s^r s_\zeta &= -\frac{2n}{\sqrt{g_0}} G \left(1 - \frac{f}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} \right) \Gamma_\theta \\ t^r s_\zeta &= -\frac{1}{g_0 t} \left[\int_0^s \frac{\partial}{\partial \zeta} (\sigma_\zeta^* t \sqrt{g_0}) ds \right. \\ &\quad \left. + K_\zeta \int_0^s \sigma_\zeta^* t h \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} ds \right] + \frac{1}{\sqrt{g_0}} K_\zeta h \sigma_\zeta^* \end{aligned} \dots\dots\dots(11\cdot a, b, c)$$

式 (11・c) で、 σ_ζ^* は曲げ変形およびそり変形によ

て生じた垂直応力で、

$$\sigma_\zeta^* = -\frac{E}{\sqrt{g}} (\xi \Omega_u + \eta \Omega_v - \omega \Omega_\theta) \dots\dots\dots(12)$$

である。

式 (12) を式 (11・c) に代入すると

$$\begin{aligned} t^r s_\zeta &= \frac{E}{g_0 t} \left[S_\xi \frac{d\Omega_u}{d\zeta} + S_\eta \frac{d\Omega_v}{d\zeta} - S_\omega \frac{d\Omega_\theta}{d\zeta} \right. \\ &\quad \left. + K_\zeta \{ (F_\xi - \xi h t) \Omega_u + (F_\eta - \eta h t) \Omega_v \right. \\ &\quad \left. - (F_\omega - \omega h t) \Omega_\theta \} \right] \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

となり、式中各定数は次の定義にしたがう。

$$\begin{aligned} S_\xi &= \int_0^s \xi t ds, \quad S_\eta = \int_0^s \eta t ds, \quad S_\omega = \int_0^s \omega t ds, \\ F_\xi &= \int_0^s \xi h \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} t ds, \quad F_\eta = \int_0^s \eta h \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} t ds, \\ F_\omega &= \int_0^s \omega h \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} t ds \dots\dots\dots(14\cdot a\sim f) \end{aligned}$$

(5) 無次元表示

数値計算の都合上次の無次元化を行う。ただし、 a はらせんはり断面の最大寸法、 l ははりの1スパン長さである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{C} &= \frac{C}{a^2}, \quad \bar{C}_\xi = \frac{C_\xi}{a^3}, \quad \bar{C}_\eta = \frac{C_\eta}{a^3}, \quad \bar{C}_{\xi\xi} = \frac{C_{\xi\xi}}{a^4}, \quad \bar{C}_{\xi\eta} = \frac{C_{\xi\eta}}{a^4}, \quad \bar{C}_{\eta\eta} = \frac{C_{\eta\eta}}{a^4}, \quad \bar{C}_{\xi\omega} = \frac{C_{\xi\omega}}{a^5}, \quad \bar{C}_{\eta\omega} = \frac{C_{\eta\omega}}{a^5}, \\ \bar{C}_{\omega\omega} &= \frac{C_{\omega\omega}}{a^6}, \quad \bar{S}_\xi = \frac{S_\xi}{a^3}, \quad \bar{S}_\eta = \frac{S_\eta}{a^3}, \quad \bar{S}_\omega = \frac{S_\omega}{a^4}, \quad \bar{F}_\xi = \frac{F_\xi}{a^3}, \quad \bar{F}_\eta = \frac{F_\eta}{a^3}, \quad \bar{F}_\omega = \frac{F_\omega}{a^4} \\ \xi &= \frac{\xi}{a}, \quad \eta = \frac{\eta}{a}, \quad n = \frac{n}{t}, \quad \bar{h} = \frac{h}{a}, \quad L = \frac{\zeta}{l}, \quad \bar{a} = \frac{a}{l}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{a^2}, \quad \bar{t} = \frac{t}{a} \\ \bar{U} &= \frac{u}{a}, \quad \bar{V} = \frac{v}{a}, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{F}_u = \frac{F_u}{\bar{a}}, \quad \bar{F}_v = \frac{F_v}{\bar{a}}, \quad \bar{F}_\theta = l F_\theta, \quad \bar{F}_\omega = \frac{F_\omega}{\bar{a}}, \quad \bar{\Omega}_u = \frac{l \Omega_u}{\bar{a}}, \\ \bar{\Omega}_v &= \frac{l \Omega_v}{\bar{a}}, \quad \bar{\Omega}_\theta = l^2 \Omega_\theta \\ \bar{P}_\xi &= \frac{P_\xi l^3}{EC_{\eta\eta} a}, \quad \bar{P}_\eta = \frac{P_\eta l^3}{EC_{\eta\eta} a}, \quad \bar{P}_\zeta = \frac{E_\zeta l^3}{FC_{\eta\eta} a}, \quad \bar{M}_\xi = \frac{M_\xi l^2}{EC_{\eta\eta} a}, \quad \bar{M}_\eta = \frac{M_\eta l^2}{EC_{\eta\eta} a}, \quad \bar{M}_\zeta = \frac{M_\zeta a l^2}{EC_{\omega\omega}}, \\ \bar{M}_\omega &= \frac{M_\omega l^2}{EC_{\omega\omega}}, \quad \bar{Q}_\xi = \frac{p_\xi^* l^4}{EC_{\eta\eta} a}, \quad \bar{Q}_\eta = \frac{p_\eta^* l^4}{EC_{\eta\eta} a}, \quad \bar{Q}_\zeta = \frac{p_\zeta^* l^4}{EC_{\eta\eta} a}, \quad \Phi_\xi = l K_\xi, \quad \Phi_\eta = l K_\eta, \quad \Phi_\zeta = l K_\zeta, \\ \bar{G} &= \frac{G}{E} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

3. 1 階連立微分方程式および伝達マトリックス

伝達マトリックス法に必要な1階の連立微分方程式は、2. 節で示した関係式を無次元化して得られる。

まず、式 (5) より変位の1階微分は、

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{U}}{dL} &= \bar{F}_u + \Phi_\zeta \bar{V} - \Phi_\eta \bar{W}, \\ \frac{d\bar{V}}{dL} &= \bar{F}_v - \Phi_\zeta \bar{U} + \Phi_\xi \bar{W}, \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dL} = -\Phi_\xi \bar{a} \bar{F}_u - \Phi_\eta \bar{a} \bar{F}_v + \bar{F}_\theta \dots\dots\dots(16\cdot a, b, c)$$

である。

$\bar{F}_u, \bar{F}_v, \bar{F}_\theta$ および \bar{W} の1階微分は、式 (6・a, b, c) と式 (8・c) より次のように求まる。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d\bar{F}_u}{dL}, \frac{d\bar{F}_v}{dL}, \frac{d\bar{F}_\theta}{dL}, \frac{d\bar{W}}{dL} \right\} \\ = D^{-1} E T = K T \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

ここで、 $K = D^{-1} E$

ここで、 k_{ij} ($i=1, \dots, 4, j=1, \dots, 9$) は式 (18・a) で定義された \mathbf{K} マトリックスの i, j 要素であり、 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{M}, \bar{Z}$ は荷重項要素で、

$$\bar{X} = \sqrt{g_1} \left[\bar{Q}_\xi + (\bar{\xi}_1 - \bar{\omega}_1 \phi_\xi \bar{a}) \bar{a} \frac{d\bar{Q}_\xi}{dL} - (\bar{\eta}_1 - \bar{\omega}_1 \phi_\eta \bar{a}) \bar{a} \phi_\zeta \bar{Q}_\zeta \right]$$

$$\bar{Y} = \sqrt{g_1} \left[\bar{Q}_\eta + (\bar{\eta}_1 - \bar{\omega}_1 \phi_\eta \bar{a}) \bar{a} \frac{d\bar{Q}_\eta}{dL} + (\bar{\xi}_1 - \bar{\omega}_1 \phi_\xi \bar{a}) \bar{a} \phi_\zeta \bar{Q}_\zeta \right]$$

$$\bar{M} = \sqrt{g_1} \frac{\bar{C}_{\eta\eta}}{\bar{C}_{\omega\omega}} \bar{a} \left(\bar{\xi} \bar{Q}_\eta - \bar{\eta}_1 \bar{Q}_\xi - \bar{\omega}_1 \bar{a} \frac{d\bar{Q}_\zeta}{dL} \right)$$

$$\bar{Z} = \sqrt{g_1} \bar{Q}_\zeta \dots\dots\dots(24 \cdot a \sim d)$$

である。

式 (21) は \mathbf{G} が定数要素のマトリックスの場合には積分できて、

$$\mathbf{U}(L) = \mathbf{A}\mathbf{U}_0 \dots\dots\dots(25)$$

と表される。ここに、 \mathbf{U}_0 は $L=0$ 断面での状態量ベクトルを示し、 \mathbf{A} は伝達マトリックスで次式で表される。

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \mathbf{G}L + \frac{1}{2!} (\mathbf{G}L)^2 + \dots\dots\dots + \frac{1}{n!} (\mathbf{G}L)^n + \dots\dots\dots(26)$$

ここで、 \mathbf{I} は単位マトリックスである。

4. 数値計算式

薄肉開き断面を有するらせんはりの、静荷重による基礎的な力学的特性を調べるために、取り扱うらせんはりは1スパンで、荷重は代表的な等分布荷重または集中荷重とする (図-2 参照)。多スパン、中間に弾性支持がある一般の場合は、文献 8) に詳しく述べられている方法にしたがえばよい。

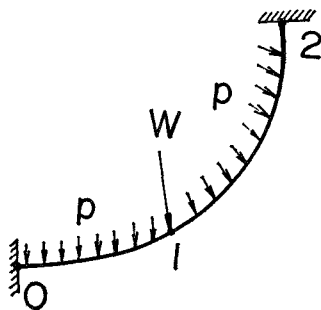


図-2 1スパンらせんはりの節点

(1) 拘束条件

1スパンのはりの場合拘束条件としては、はり両端の

支持条件、はり中間に作用する集中荷重による荷重条件がある。

0 節点での未知状態量からなるベクトルを \mathbf{X}_0 、これを指定するマトリックスを \mathbf{L} とすると、 \mathbf{X}_0 と 0 節点の状態量ベクトル \mathbf{U}_0 の間には次の関係がある。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{U}_0 \dots\dots\dots(27)$$

節点2で、境界条件として与えられた状態量を作るベクトルを \mathbf{X}_2 、これを指定するマトリックスを \mathbf{N} とすると、 \mathbf{X}_2 と節点2の状態量ベクトルの間には、

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{N}\mathbf{U}_2 \dots\dots\dots(28)$$

の関係がある。

節点1の断面内の点 ($\bar{\xi}_p, \bar{\eta}_p$) に集中荷重が作用すると、節点1前後では、荷重に相当する力学的状態量の飛躍がある。したがって、節点1前後の状態量ベクトル $\mathbf{U}_{1-\epsilon}, \mathbf{U}_{1+\epsilon}$ の間には、次の関係が存在する。

$$\mathbf{U}_{1+\epsilon} = \mathbf{H}\mathbf{U}_{1-\epsilon} \dots\dots\dots(29)$$

ここで、 \mathbf{H} は次に示すマトリックスである。

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{W} \\ \mathbf{O} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(30)$$

式 (30) で、 \mathbf{O} は 0 マトリックスであり、 \mathbf{W} は集中荷重ベクトルである。

$$\mathbf{W} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad -\bar{W}_{M\eta} + (\bar{\xi}_p - \bar{\omega}_p \bar{a} \phi_\xi) \bar{a} \bar{W}_{p\zeta}, \\ -\bar{W}_{p\zeta}, \quad 0, \quad 0, \\ -\bar{W}_{M\xi} - (\bar{\eta}_p - \bar{\omega}_p \bar{a} \phi_\eta) \bar{a} \bar{W}_{p\zeta}, \\ -\bar{W}_{p\eta}, \quad 0, \quad 0, \\ -\bar{W}_{M\zeta} - \bar{a} \frac{\bar{C}_{\eta\eta}}{\bar{C}_{\omega\omega}} (\bar{\xi}_p \bar{W}_{p\eta} - \bar{\eta}_p \bar{W}_{p\xi}), \\ -\bar{\omega}_p \bar{a} \frac{\bar{C}_{\eta\eta}}{\bar{C}_{\omega\omega}} \bar{W}_{p\zeta}, \quad 0, \quad -\bar{W}_{p\zeta} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

ここで、 $\bar{\omega}_p$ は荷重点 ($\bar{\xi}_p, \bar{\eta}_p$) の無次元化されたそり関数の値である。また、 $\bar{W}_{p\xi}, \bar{W}_{p\eta}, \bar{W}_{p\zeta}$ は ξ, η, ζ 方向集中荷重、 $\bar{W}_{M\xi}, \bar{W}_{M\eta}, \bar{W}_{M\zeta}$ は ξ, η, ζ 軸まわりの荷重モーメントで、いずれも式 (15) に準じて無次元を行った値である。

(2) 伝達方程式および解

節点0,1間および節点1,2間の伝達マトリックスをそれぞれ $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ とすると、節点0の未知状態ベクトル \mathbf{X}_0 と、節点2の既知状態ベクトル \mathbf{X}_2 の間には次の関係がある。

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{N}\mathbf{A}_2\mathbf{H}\mathbf{A}_1\mathbf{L}^T \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = [\mathbf{F}_1 | \mathbf{F}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(32)$$

ここで、

$$F = NA_2 HA_1 L^T \dots\dots\dots(33)$$

である。

式(32)を解くと、節点0での未知状態量が求まる。

$$X_0 = F_1^{-1}(X_2 - F_2) \dots\dots\dots(34)$$

節点0の状態量がすべて決まると、はり任意断面の状態量は、節点0,1間には式(25)により、また節点1,2間には式(25)右辺の0節点状態量ベクトル U_0 の代りに、節点1直後の状態量ベクトル U_{1+} を用いて、式(25)より計算できる。

(3) 応力計算式

(2)によりらせんはり任意断面の状態量が求まると、その断面内の応力は次式によって計算される。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\xi &= \frac{\sigma_\xi}{E} = \frac{\bar{a}}{\sqrt{g}} [\bar{F}_w - \bar{a}\bar{\xi}\bar{Q}_u - \bar{a}\bar{\eta}\bar{Q}_v \\ &\quad + \bar{a}\bar{\omega}\bar{Q}_\theta] \\ \bar{s}^r s_\xi &= \frac{s^r s_\xi}{E} = -2\bar{G}\bar{n}\bar{i}\bar{a} \frac{1}{\sqrt{g_0}} \left[1 - \frac{\bar{a}}{\sqrt{g_0}} \right. \\ &\quad \times (\bar{\xi}_0 \cos \alpha + \bar{\eta}_0 \sin \alpha)(\Phi_\xi \sin \alpha \\ &\quad \left. - \Phi_\eta \cos \alpha) \right] \bar{F}_\theta \\ \bar{s}^r s_\xi &= \frac{s^r s_\xi}{E} = \frac{\bar{a}^3}{g_0 \bar{l}} \left[\bar{S}_\xi \frac{d\bar{Q}_u}{dL} + \bar{S}_\eta \frac{d\bar{Q}_v}{dL} \right. \\ &\quad \left. - \bar{S}_\omega \frac{d\bar{Q}_\theta}{dL} + \Phi_\xi \left\{ (\bar{F}_\xi - \bar{\xi}\bar{h}\bar{i}) \bar{Q}_u \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\bar{F}_\eta - \bar{\eta}\bar{h}\bar{i}) \bar{Q}_v - (\bar{F}_\omega - \bar{\omega}\bar{h}\bar{i}) \bar{Q}_\theta \right\} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots(35\cdot a, b, c)$$

式(35)は、式(11・a, b)および式(13)を無次元表示したもので、式(35・b)は特に式(11・b)のsによる微分を行い、fに式(9・k)を代入し書き直した形となっている。

5. 数値解析

解析の対象とするらせんはりは、図-3に示す薄肉H型断面を有し、中心角90°、両端固定である。

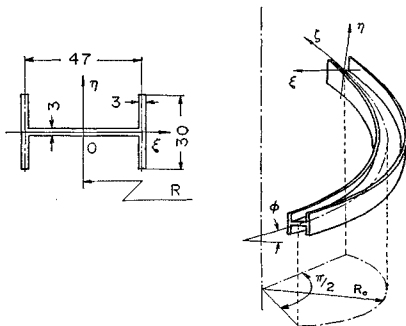


図-3 H型断面らせんはり

らせんはりの初期曲率 $1/R$ 、初期ねじれ率 K_ζ は、ピッチ角 ϕ 、らせんの半径 R_0 (図-3 参照) により、それぞれ次のように表わされる。

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} \cos^2 \phi, \quad K_\zeta = \frac{1}{R_0} \sin \phi \cos \phi \dots\dots(36)$$

(1) 断面定数

断面定数は式(9)に示すように、曲率 (R_0 および ϕ 、式(36)参照) に依存する量 \sqrt{g} の関数である。まず、 $R_0=500$ mm とし、ピッチ角 ϕ を変えて、断面定数の変化の状態を示したのが表-1である。 ϕ が大きく

表-1 断面定数—ピッチ角の影響 (H 断面)

ϕ	0°	10°	20°	30°
\bar{C}	1.415×10^{-1}	1.414×10^{-1}	1.414×10^{-1}	1.414×10^{-1}
\bar{C}_ξ	2.332×10^{-3}	2.262×10^{-3}	2.059×10^{-3}	1.748×10^{-3}
$\bar{C}_{\xi\xi}$	2.481×10^{-2}	2.481×10^{-2}	2.480×10^{-2}	2.479×10^{-2}
$\bar{C}_{\eta\eta}$	2.793×10^{-2}	2.793×10^{-2}	2.792×10^{-2}	2.790×10^{-2}
$\bar{C}_{\omega\omega}$	7.009×10^{-4}	7.003×10^{-4}	6.988×10^{-4}	6.968×10^{-4}
$\bar{C}_{\eta\omega}$	-1.306×10^{-4}	-1.266×10^{-4}	-1.152×10^{-4}	-9.776×10^{-5}
\bar{C}_J	1.985×10^{-4}	1.984×10^{-4}	1.982×10^{-4}	1.980×10^{-4}

$$\bar{C}_\eta = \bar{C}_{\xi\eta} = \bar{C}_{\xi\omega} = 0.$$

なるにしたがって、断面定数はいずれも小さくなる。しかし、ピッチ角 30° の場合の値と 0° の値を比較すると、 \bar{C}_ξ 、 $\bar{C}_{\eta\omega}$ は約 25% も小さくなるのに対して、他の断面定数は 1% 以下であり、ほとんどピッチ角の影響を受けないことがわかる。 \bar{C}_η 、 $\bar{C}_{\xi\eta}$ 、 $\bar{C}_{\xi\omega}$ は、 ξ 軸対称断面のためすべて 0 である。

次に、ピッチ角を 20° とし、 R_0 の大きさを変えて得られた各断面定数の値を示したのが表-2 である。当然

表-2 断面定数— a/R_0 の影響 (H断面)

a/R_0	0.	0.05	0.094	0.2	0.3
\bar{C}	1.412×10^{-1}	1.413×10^{-1}	1.414×10^{-1}	1.420×10^{-1}	1.430×10^{-1}
\bar{C}_ξ	0.	1.094×10^{-3}	2.056×10^{-3}	4.405×10^{-3}	6.666×10^{-3}
$\bar{C}_{\xi\xi}$	2.476×10^{-2}	2.477×10^{-2}	2.480×10^{-2}	2.494×10^{-2}	2.516×10^{-2}
$\bar{C}_{\eta\eta}$	2.787×10^{-2}	2.788×10^{-2}	2.792×10^{-2}	2.809×10^{-2}	2.836×10^{-2}
$\bar{C}_{\omega\omega}$	6.916×10^{-4}	6.937×10^{-4}	6.988×10^{-4}	7.246×10^{-4}	7.678×10^{-4}
$\bar{C}_{\eta\omega}$	0.	-6.113×10^{-5}	-1.152×10^{-4}	-2.482×10^{-4}	-3.797×10^{-4}
\bar{C}_J	1.973×10^{-4}	1.975×10^{-4}	1.982×10^{-4}	2.005×10^{-4}	2.065×10^{-4}

$$\bar{C}_\eta = \bar{C}_{\xi\eta} = \bar{C}_{\xi\omega} = 0.$$

のことながら、 R_0 が大きくなる (a/R_0 は小さくなる) にしたがって、断面定数の値は、直線はり ($a/R_0 = 0$) の断面定数値に近づく。しかも \bar{C}_ξ 、 $\bar{C}_{\eta\omega}$ の変化が大きいことは、ピッチ角を変えた場合と同様であるが、これら以外に $\bar{C}_{\omega\omega}$ 、 \bar{C}_J も a/R_0 の影響を受け易いことがわかる。

(2) 伝達マトリックスの収束判定

数値計算では、式(26)を有限項で近似するため、式

(26) の収束判定基準を決める必要がある。

いま、式 (26) が n 項で収束したと仮定し、 n 項のマトリックス要素を $(A_{ij})_n$ ($i, j=1, \dots, 15$) と表わす。式 (26) の 1 項より $(n-1)$ 項までのマトリックスを作る $(n-1)$ 個の (i, j) 要素のうち、絶対値最大の要素を $(A_{ij})_{\max}$ ($i, j=1, \dots, 15$) とし、

$$\frac{|(A_{ij})_n|}{|(A_{ij})_{\max}|} < \epsilon, \quad (i, j=1, \dots, 15) \quad \dots (37)$$

が満たされる n 項までの和をもって、式 (26) を近似する。ここに、 ϵ は収束判定基準値である。

図-3 の断面を持ち、 $R_0=500$ mm, 中心角 90° の円弧はりに、等分布荷重 $\bar{Q}_y = -1$ が ζ 軸に沿って作用する場合について、解析結果におよぼす収束判定基準値 ϵ の影響を示したのが表-3 である。表中 n は項数、 L は支間上の点の位置を表わす。

表-3 解析結果におよぼす ϵ の影響 ($\bar{Q}_y = -1$)

L	n	ϵ	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-6}	1.0×10^{-7}	1.0×10^{-8}
			20	22	23	25
\bar{V}	0.5	-3.81196×10^{-3}	-3.81299×10^{-3}	-3.81307×10^{-3}	-3.81306×10^{-3}	
	1.0	1.96623×10^{-6}	1.16794×10^{-7}	-2.66889×10^{-8}	-1.22963×10^{-9}	
\bar{M}_ζ	0	1.01924×10^{-1}	1.01939×10^{-1}	1.01940×10^{-1}	1.01940×10^{-1}	
	1.0	1.01963×10^{-1}	1.01942×10^{-1}	1.01940×10^{-1}	1.01940×10^{-1}	
\bar{P}_y	0	-4.99958×10^{-1}	-4.99998×10^{-1}	-5.00001×10^{-1}	-5.00000×10^{-1}	
	1.0	5.00042×10^{-1}	5.00002×10^{-1}	4.99999×10^{-1}	5.00000×10^{-1}	
$\bar{\theta}$	0.5	1.62022×10^{-3}	1.62045×10^{-3}	1.62047×10^{-3}	1.62047×10^{-3}	
	1.0	-7.23910×10^{-8}	-4.29563×10^{-9}	9.35580×10^{-10}	4.31391×10^{-11}	
\bar{M}_τ	0	-5.96238×10^{-3}	-5.96375×10^{-3}	-5.96386×10^{-3}	-5.96384×10^{-3}	
	1.0	5.96815×10^{-3}	5.96409×10^{-3}	5.96378×10^{-3}	5.96384×10^{-3}	
\bar{M}_ω	0	-3.83384×10^{-2}	-3.83525×10^{-2}	-3.83536×10^{-2}	-3.83536×10^{-2}	
	1.0	-3.84680×10^{-2}	-3.83602×10^{-2}	-3.83519×10^{-2}	-3.83534×10^{-2}	

荷重条件・はりの支持条件より、はり両固定端の力学的状態量の間には、次の関係が存在しなければならない。

$$(\bar{M}_\zeta)_0 = (\bar{M}_\zeta)_1, \quad (\bar{P}_y)_0 = -(\bar{P}_y)_1, \\ (\bar{M}_\tau)_0 = -(\bar{M}_\tau)_1, \quad (\bar{M}_\omega)_0 = (\bar{M}_\omega)_1$$

また、はり中間点では、

$$(\bar{P}_y)_{0.5} = (\bar{P}_\theta)_{0.5} = 0$$

となるべきである。

$\epsilon = 1 \times 10^{-8}$ とすることにより、工学的に上記条件が満足されることが表-3 よりわかる。以後の解析では収束判定基準値として、 1×10^{-8} を用いる。

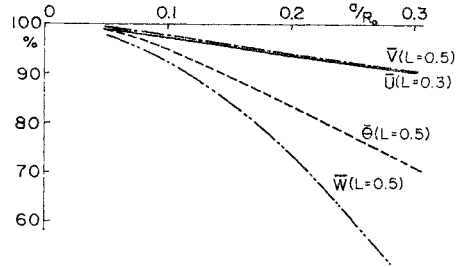
なお計算は FACOM 230-60 で行い、有効桁数は 18 桁である。

(3) 断面の曲率半径方向拡がりの影響

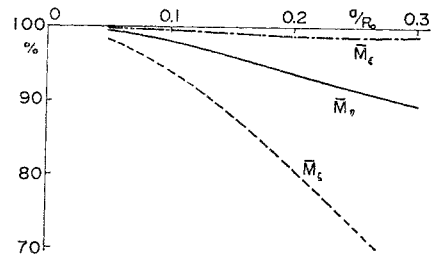
断面の曲率半径方向拡がりが、解析結果におよぼす影響を調べるため、図-3 に示す H 型断面を有し、ピッチ

角 20° のらせんはりで、 R_0 の大きさを変えて解析を行った。荷重は図心軸に沿って作用する等分布荷重 $\bar{Q}_y = -1$ である。

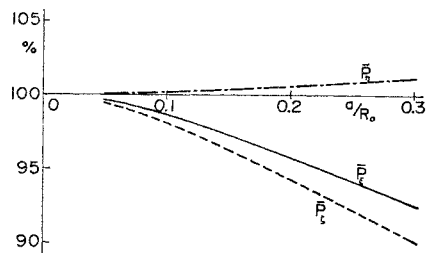
図-4 (a) は、断面の拡がりを無視 ($\sqrt{g} \approx 1$) して得



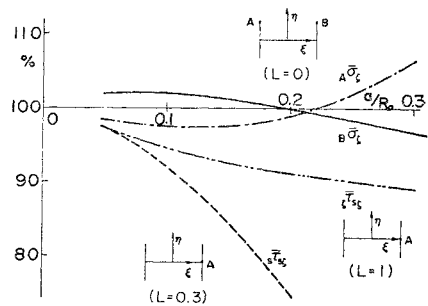
(a) 変位



(b) 断面モーメント ($L=0$)



(c) 断面力 ($L=0$)



(d) 応力

図-4 a/R_0 の影響 ($\bar{Q}_y = -1$)

られた変位を、断面の拡がりを考慮した場合の変位の百分率で表わしたものである。また、図-4 (b), (c) は断

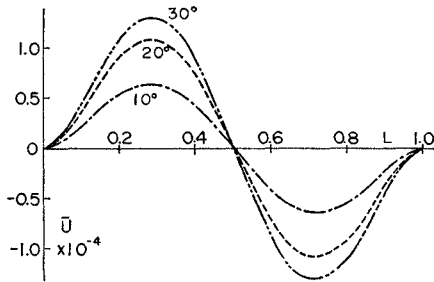
面モーメント，断面力を，図-4 (d) は図中に示された A, B 点の応力を同様に示したものである。いずれも図中 () 内に示した断面での値である。 a/R_0 が 0.1 以下では両者の差はほぼ 10% 以内であり，工学的には断面の拡がりを無視してもさしつかえないであろう。 a/R_0 の値が 0.1 より大きくなるにしたがい，両者の差は拡大

し，特にねじり変形に関係する諸量にその差が著しい。

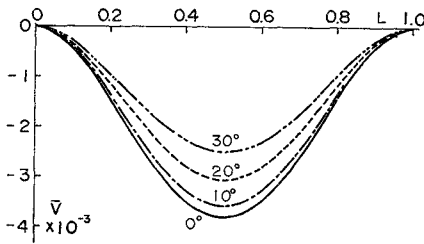
(4) ピッチ角の影響

中心角 90° ，らせんの半径 $R_0=500$ mm の両端固定はりに， $\bar{Q}_\eta=-1$ の荷重が ζ 軸に沿って作用する場合を考える。

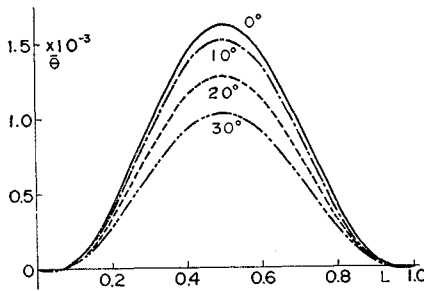
図-5, 6 にピッチ角 ϕ をパラメータとして，変位および図中の点 A の応力分布を示す。ピッチ角が大きくなるにしたがって， η 方向変位 \bar{V} および断面回転角 $\bar{\theta}$ が小さくなるが，これに反し，ピッチ角が 0 の場合には生じない ξ, ζ 方向変位 \bar{U}, \bar{W} が生じ，ピッチ角の増加とともに大きくなる。応力は円弧はりと類似した傾向を示すが，ピッチ角が大きくなるにしたがい，各応力の最大値は減少する。またピッチ角の増大に伴って，はり中



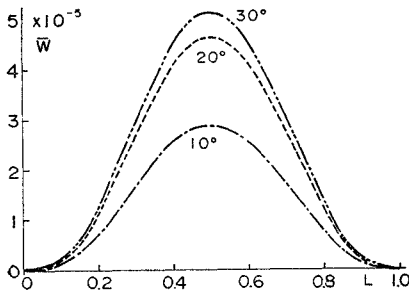
(a) ξ 軸方向変位



(b) η 軸方向変位

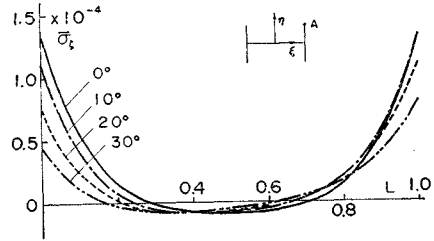


(c) ζ 軸まわり断面回転角

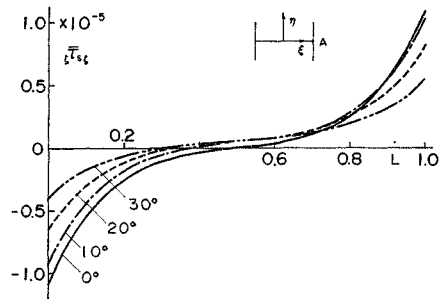


(d) τ 軸方向変位

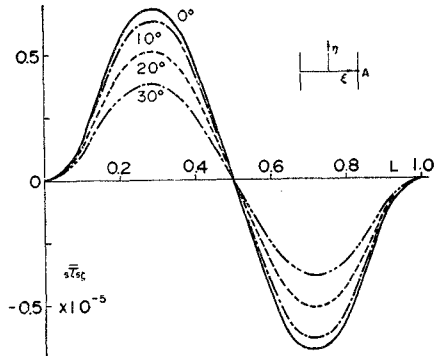
図-5 変位:ピッチ角の影響 ($\bar{Q}_\eta=-1$)



(a) 垂直応力



(b) 垂直応力とのつりあいによって生ずるせん断応力



(c) St. Venant のせん断応力

図-6 応力:ピッチ角の影響 ($\bar{Q}_\eta=-1$)

間点 ($L=0.5$) に関して、垂直応力 $\bar{\sigma}_\zeta$ は対称分布が、せん断応力 ${}_\zeta\bar{r}_{s\zeta}$ は逆対称分布が崩れる。ここで、St. Venant のせん断応力 ${}_s\bar{r}_{s\zeta}$ は、はり表面 ($\bar{\eta}=-0.5$) の値であり、以後の St. Venant せん断応力もすべてこれに準ずる。

(5) 等分布荷重による変形

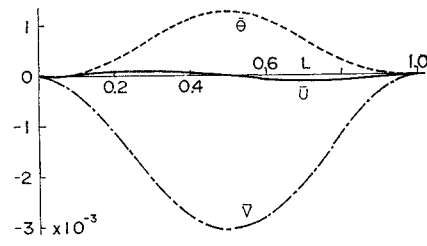
図-3 に示す断面を有し、 $R_0=500$ mm、ピッチ角 20° の両端固定らせんはりに、次に示す等分布荷重が作用した場合の、変位・断面合応力・応力の解析結果を示す。

a) ζ 軸に沿って作用する η 軸方向等分布荷重

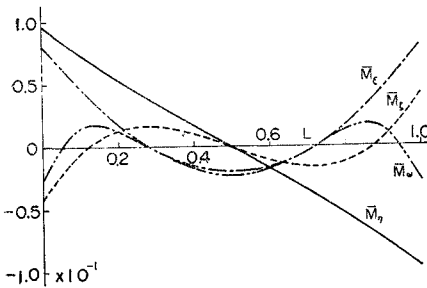
($\bar{Q}_\eta = -1$)

図-7 (a) に変位 \bar{U} , \bar{V} , \bar{W} 、および断面の ζ 軸まわり回転角 $\bar{\theta}$ を示す。 η 軸方向荷重のため、 \bar{U} , \bar{W} は \bar{V} , $\bar{\theta}$ に比較して小さい。

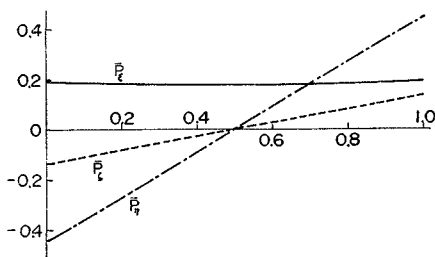
図-7 (b), (c) はモーメント、断面力の ζ 方向分布である。初期ねじれの影響で、曲げモーメント \bar{M}_η 、せん断力 \bar{P}_ξ 、軸力 \bar{P}_ζ が生じている。



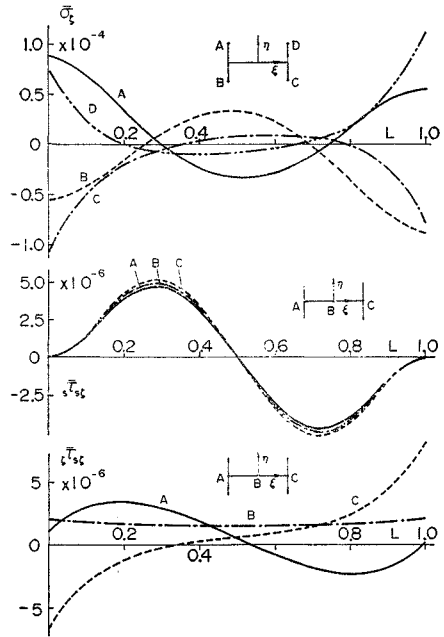
(a) 変位



(b) 断面モーメント



(c) 断面力



(d) 応力

図-7 理論解析結果：等分布荷重 $\bar{Q}_\eta = -1$

図-7 (d) に、図中に示す断面内の点の垂直応力、せん断応力の ζ 方向分布を示す。曲げモーメント \bar{M}_ξ による曲げ変形、および断面のそり変形によって、断面内には ξ 軸に関し逆対称分布の垂直応力を生ずるが、 \bar{M}_η による垂直応力分布が ξ 軸に関して対称となるため、これらの合垂直応力は、断面が ξ 軸に関し対称であるにもかかわらず、逆対称分布となっていない。曲げモーメント \bar{M}_η の存在は、垂直応力の ζ 軸方向分布にも影響を与え、 $\bar{\sigma}_\zeta$ は、はり中間点 ($L=0.5$) に関して対称分布とならない。

St. Venant のせん断応力 ${}_s\bar{r}_{s\zeta}$ が A, B, C 3点で異なるのは、断面の曲率半径方向拡がりを考慮したためである。

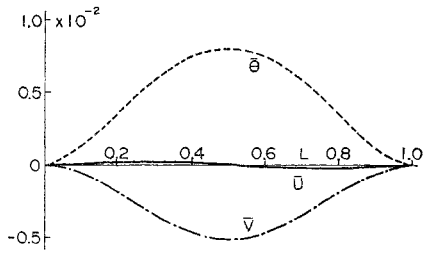
円弧はりの場合、荷重 $\bar{Q}_\eta = -1$ による断面内 B 点のせん断応力 ${}_\zeta\bar{r}_{s\zeta}$ は 0 である。しかし、らせんはりでは初期ねじれの影響により、 \bar{P}_ξ が存在するため、B 点のせん断応力は 0 となっていない。

b) ζ 軸まわりの等分布ねじりモーメント荷重

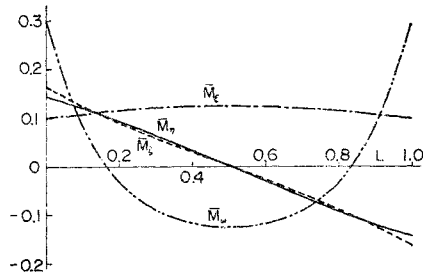
($\bar{Q}_m = 1$)

解析結果を図-8 に示す。変位は荷重の性質上、断面の ζ 軸まわり回転角 $\bar{\theta}$ が大きく、初期曲率のため η 軸方向変位 \bar{V} が生じ、さらに初期ねじれ率のため ξ 軸方向変位および ζ 軸方向変位 \bar{U} , \bar{W} もわずかながら生じている。

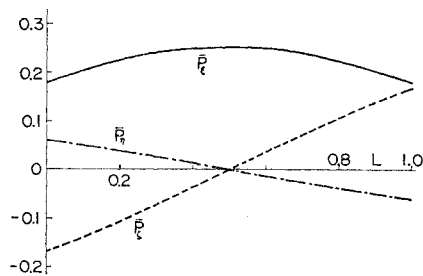
ピッチ角による初期ねじれ率の影響で、曲げモーメント \bar{M}_η 、せん断力 \bar{P}_ξ 、軸力 \bar{P}_ζ が生じ、しかもその大



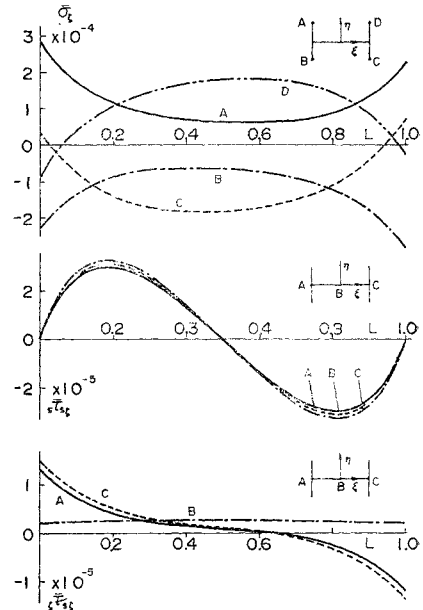
(a) 変位



(b) 断面モーメント



(c) 断面力



(d) 応力

図-8 理論解析結果: 等分布軸まわりねじりモーメント荷重 $Q_m=1$

6. 実験

薄肉断面を有するらせんはりの実験的研究は、模型製作が困難なためほとんど行われていない。本報告では、曲線橋模型実験などに使用されている⁷⁾ アクリル樹脂で実験用模型を製作し、垂直集中荷重による実験を行い、理論結果と比較する。

(1) 実験模型

図-3 に示す H 型断面を有し、らせん半径 $R_0 = 500$ mm, らせん中心角 90° , ピッチ角 20° のらせんはり模型である。

材料は厚さ 3 mm のアクリル樹脂板で、内・外フランジ、ウェーブ部を別々に木型により曲げ加工し、アルダイトで接着し規定の寸法に仕上げたものである。

(2) 実験方法

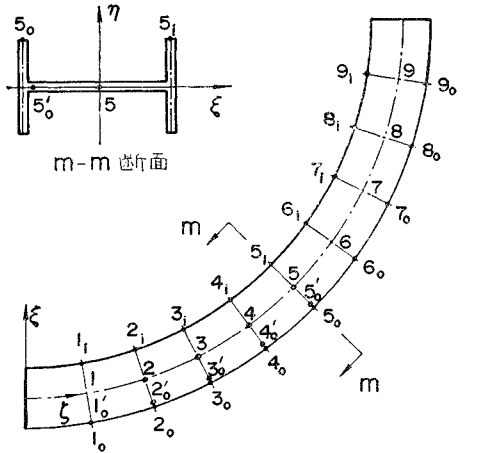
高分子材料であるため、模型実験に際して種々問題がある。たとえば、粘弾性材料のため、応力レベルが高いとクリープ変形が大きくなり、除荷後残留ひずみを生ずるし、応力レベルが低い場合でも、載荷後ある時間を過ぎないとひずみが整定しない。これは除荷の際も同じで、除荷後ひずみが回復するにはある時間が必要である。また弾性係数が小さいため、ひずみ測定に際して、ひずみゲージが模型に対して補強材となる可能性がある。さら

きは他の断面合応力と同程度である。

図-8 (d) は応力分布である。図-8 (b) からわかるように、 \bar{M}_x ははり長さ方向にほぼ一定であり、したがってこの曲げモーメントによる垂直応力も ξ 軸に沿ってほぼ一定となるが、そり変形による垂直応力が固定端に近づくにつれ大きくなるため、これらの合垂直応力も図に示すように固定端に近づくにつれ大きく変化している。

断面の扭がりを考慮したため、A, B, C 3 点の St. Venant せん断応力 $s\bar{\tau}_{xz}$ の値に差が生じている。

せん断力 \bar{P}_x が存在するため、断面内点 B のせん断応力 $s\bar{\tau}_{xz}$ は 0 とならず、また A, B 点のせん断応力が、はりの長さ方向に $L=0.5$ の点に関して逆対称分布にならないのも、これに起因している。



たわみ測り定尺 1₀~9₀, 1_i~9_i の 18 尺
 ひずみ測り定尺 1₀~9₀ の 9 尺
 荷重尺 2~5, 2'₀~5'₀ の 8 尺

図-9 測定点および荷重点

に、材料の機械的特性が温度により変わりやすい。

以上の点を考慮して、次の方法にしたがって実験を行う。

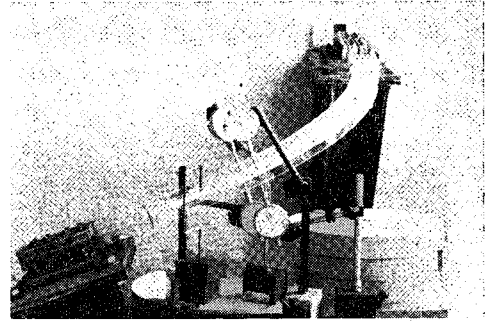


図-10 たわみ測定状況

a) ひずみ・たわみ測定は載荷後 3 分経過してから行い、除荷後 6 分して残留ひずみ、残留たわみを測定する。除荷後 6 分でひずみ、たわみとも完全に回復し、残留ひずみ、残留たわみは測定誤差範囲内であった。

b) ひずみ測定にはプラスチック用ひずみゲージ（東京測器研究所製 GFLA-6、ゲージ長さ 6mm、抵抗 120Ω、ゲージ率 2.2）を用い、各アクチブゲージに対しておのおの温度補償用のダミーゲージを用い、2ゲージ法でひずみ測定を行う。

c) たわみは、らせんはり軸に垂直に上下よりダイヤ

表-4 内・外フランジのたわみ (Load No. 1)

測定点	2			3			4			5		
	$A \times 10^4$	$B \times 10^4$	$\frac{A-B}{B} \times 100$	$A \times 10^4$	$B \times 10^4$	$\frac{A-B}{B} \times 100$	$A \times 10^4$	$B \times 10^4$	$\frac{A-B}{B} \times 100$	$A \times 10^4$	$B \times 10^4$	$\frac{A-B}{B} \times 100$
1 _i	-4.62	-4.01	+15.2	-6.17	-5.23	+18.0	-6.94	-5.60	+23.9	-6.17	-5.15	+19.8
2 _i	-12.0	-11.1	+8.1	-18.1	-16.1	+12.4	-21.2	-16.8	+26.2	-19.3	-16.8	+14.9
3 _i	-15.8	-15.5	+1.9	-26.6	-26.1	+1.9	-33.1	-31.2	+6.1	-32.0	-30.3	+5.6
4 _i	-15.4	-16.7	-7.8	-30.4	-30.4	0.	-40.9	-40.3	+1.5	-41.6	-41.4	+0.5
5 _i	-12.3	-15.4	-20.1	-32.4	-29.2	+11.0	-42.4	-41.1	+3.2	-48.6	-46.0	+5.7
6 _i	-10.0	-12.3	-18.7	-23.1	-24.0	-3.8	-35.1	-34.9	+0.6	-41.6	-41.4	+0.5
7 _i	-6.94	-8.38	-17.2	-15.8	-16.6	-4.8	-26.2	-24.7	+6.1	-32.4	-30.3	+6.9
8 _i	-3.85	-4.24	-10.0	-8.48	-8.90	-4.7	-14.3	-13.4	+6.7	-18.8	-16.8	+12.5
9 _i	-0.77	-0.95	-18.4	-2.70	-2.14	+26.2	-5.01	-4.08	+30.1	-6.17	-5.15	+19.8
1 ₀	-6.94	-5.87	+18.2	-8.48	-7.02	+20.8	-8.09	-6.66	+21.5	-6.55	-5.36	+22.2
2 ₀	-19.3	-17.2	+12.2	-26.2	-24.0	+9.2	-28.9	-24.8	+16.5	-24.3	-21.3	+14.1
3 ₀	-25.8	-24.6	+4.9	-41.6	-40.8	+2.0	-49.7	-47.1	+5.5	-45.1	-43.4	+3.9
4 ₀	-23.9	-26.0	-8.1	-47.8	-47.9	-0.2	-63.2	-62.9	+0.5	-62.4	-63.3	-1.4
5 ₀	-23.1	-22.7	+1.8	-47.0	-44.5	+5.6	-68.6	-63.7	+7.7	-74.8	-71.8	+4.2
6 ₀	-16.2	-16.6	-2.4	-30.1	-34.0	-11.5	-50.9	-51.7	-1.5	-63.2	-63.3	-0.2
7 ₀	-8.09	-9.88	-18.1	-19.7	-20.9	-5.7	-34.7	-33.3	+4.2	-46.2	-43.4	+6.5
8 ₀	-5.01	-4.45	+10.1	-9.63	-9.36	+2.9	-17.7	-15.5	+14.2	-24.7	-21.3	+16.0
9 ₀	-0.77	-1.34	-42.5	-2.31	-2.69	-14.1	-4.62	-3.70	+24.9	-6.17	-5.36	+15.1

A: 実験値 B: 理論値

ルゲージをフランジに当て、 η 軸方向変位を測定する。

d) ひずみおよびたわみの測定点を図-9 に示す。

e) 1028 g の荷重を垂直に作用させる。作用点により、荷重を次の2種類に分ける。

Load No. 1: 図心軸上の点 2, 3, 4, 5 の4点

Load No. 2: 外フランジに近い点 2', 3', 4', 5' の4点

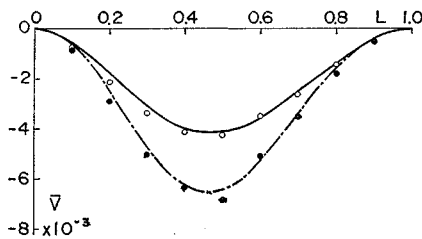
f) はりの両端は固定

g) 実験は室温 (13°C~14°C) で行い、同室温で使用材料の縦弾性係数を測定する。

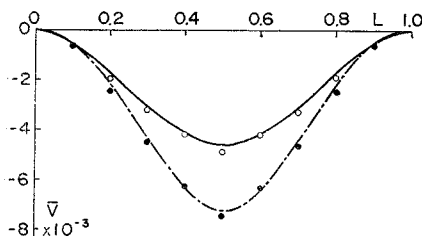
図-10 に載荷状態およびたわみ測定状況を示す。

(3) 実験結果および解析値との比較

実験室温における使用アクリル樹脂の縦弾性係数は



(a) 荷重点 4



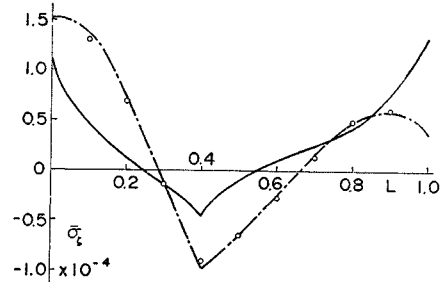
(b) 荷重点 5

図-11 内・外フランジたわみ (Load No. 1)

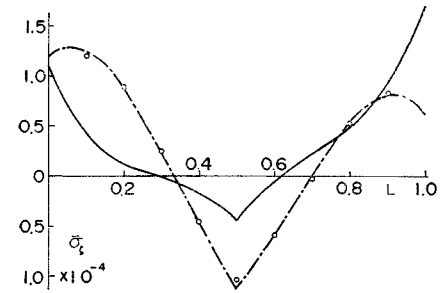
$3.4 \times 10^2 \text{ kg/mm}^2$ であった。解析にはポアソン比を0.35とした。

Load No. 1 による η 軸方向たわみの実験結果を解析値と比較して表-4 に示す。値は解析値との比較のため、理論垂直荷重 $\bar{W} = 1$ に対応する無次元たわみに換算してある。表にはまた、両者の差を解析値に対する百分率で示してある。これらを図示したのが 図-11 で、実線および鎖線が内・外フランジの理論たわみ、○・●印がそれぞれの実験値である。

表からわかるように、固定端付近のたわみが小さい点



(a) 荷重点 4



(b) 荷重点 5

図-12 内・外フランジ先端の垂直ひずみ (Load No. 1)

表-5 外フランジ先端の垂直ひずみ (Load No. 1)

測定点	2			3			4			5		
	$A \times 10^5$	$B \times 10^5$	$\frac{A-B}{B} \times 100$	$A \times 10^5$	$B \times 10^5$	$\frac{A-B}{B} \times 100$	$A \times 10^5$	$B \times 10^5$	$\frac{A-B}{B} \times 100$	$A \times 10^5$	$B \times 10^5$	$\frac{A-B}{B} \times 100$
1 _o	8.71	9.73	-10.5	15.1	16.5	-8.8	16.5	18.2	-9.1	14.7	15.9	-7.4
2 _o	-5.08	5.67	-10.3	4.54	4.90	-1.2	10.3	10.8	-4.4	11.8	12.2	-3.6
3 _o	-2.90	-2.93	-0.8	-8.16	-9.17	-11.0	0.54	0.04	—	5.26	5.24	+0.5
4 _o	-0.91	-1.01	-9.7	-4.72	-8.63	-3.0	-10.7	-12.3	-13.0	-5.08	-3.84	+23.4
5 _o	0.36	0.36	0.	-1.45	-1.36	+6.4	-5.81	-5.89	-1.4	-12.2	-13.8	-12.0
6 _o	1.27	1.27	0.	1.09	1.41	-22.7	-0.91	-0.32	+183.0	-5.44	-4.94	+10.2
7 _o	1.81	1.81	0.	3.27	3.39	-3.6	3.45	4.11	-16.2	2.00	2.70	-26.1
8 _o	2.54	2.00	+27.0	5.99	4.42	+35.4	6.35	6.92	-8.2	7.44	8.26	-9.9
9 _o	1.45	1.75	-16.8	3.81	4.17	-8.5	6.89	7.33	-6.0	10.3	10.5	-1.5

A: 実験値 B: 理論値

以外では、理論値と実験値の差はほぼ 10% 以内である。図-11 から理論値と実験値の傾向も良く一致していることがわかるが、特に点5に作用する荷重によって理論たわみは、点5に関して対称分布をなすが、実験値も良くこの傾向を示している。

表-5 は Load No. 1 による外フランジ先端での垂直ひずみを実験値と理論値とを比較して示したものである。値はたわみの場合と同様、 $\bar{W}=1$ の荷重のひずみに換算されている。図-12 はこれを図示したもので、図中○印が実験値である。絶対値が大きな点では両者の差はほぼ 10% 以内であり、はり軸に沿ったひずみ分布の

傾向も良く一致している。垂直荷重のため、はりには η 方向荷重ばかりでなく、 ζ 方向軸荷重が作用することになり、このため荷重点が5の場合でも、ひずみ分布は同点に関して対称とならないことが、実験結果からも良くわかる。

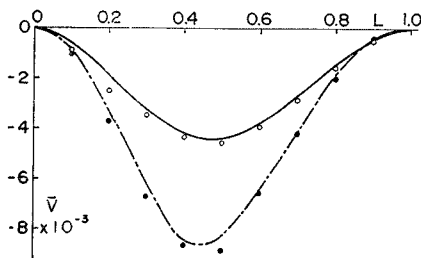
Load No. 2 は、はりに η, ζ 軸方向の力ばかりでなく、 ζ 軸および η 軸まわりのモーメント荷重が作用する場合である(式(31)参照)。

表-6 に内・外フランジでの η 方向変位を解析値と比較して示し、図-13 はこれをグラフにしたものである。解析値と実験値の差は、Load No. 1 の場合と比較

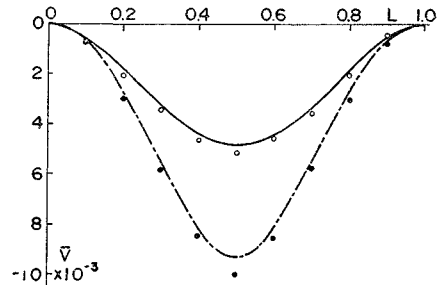
表-6 内・外フランジのたわみ (Load No. 2)

荷重点 測定点	2'			3'			4'			5'		
	$A \times 10^4$	$B \times 10^4$	$\frac{A-B}{B} \times 100$	$A \times 10^4$	$B \times 10^4$	$\frac{A-B}{B} \times 100$	$A \times 10^4$	$B \times 10^4$	$\frac{A-B}{B} \times 100$	$A \times 10^4$	$B \times 10^4$	$\frac{A-B}{B} \times 100$
1 _i	-3.86	-3.15	+22.7	-6.56	-4.97	+32.0	-7.72	-5.84	+32.1	-6.95	-5.59	+24.3
2 _i	-11.2	-9.23	+21.2	-17.8	-15.4	+15.2	-22.4	-18.7	+19.9	-20.8	-18.2	+14.5
3 _i	-13.1	-14.2	-7.5	-27.0	-25.4	+6.2	-34.4	-32.4	+6.0	-34.7	-32.7	+6.4
4 _i	-15.1	-16.2	-7.3	-30.9	-30.9	0.	-43.2	-41.7	+3.6	-46.3	-44.1	+5.0
5 _i	-12.4	-15.4	-19.6	-30.9	-30.5	+1.1	-45.6	-43.4	+4.8	-51.7	-48.5	+6.6
6 _i	-9.65	-12.4	-22.1	-24.3	-25.5	-4.4	-39.4	-37.6	+4.6	-45.9	-44.1	+4.1
7 _i	-5.79	-8.41	31.1	-17.8	-17.7	+0.5	-28.6	-26.9	+6.2	-35.9	-32.7	+9.9
8 _i	-3.86	-4.44	-13.1	-8.49	-9.46	-10.2	-15.8	-14.6	+8.1	-20.5	-18.2	+12.3
9 _i	-0.77	-1.34	-42.3	-3.09	-2.85	+8.4	-5.02	-4.44	+13.0	-4.63	-5.59	-17.2
1 _o	-10.8	-8.76	+23.4	-4.25	-9.82	-56.7	-10.4	-8.76	+19.0	-7.72	-6.61	+16.9
2 _o	-28.2	-24.9	+4.8	-37.4	-33.0	+13.3	-37.1	-32.6	+13.5	-30.1	-26.7	+13.0
3 _o	-33.2	-33.0	+0.7	-58.8	-55.1	+6.5	-67.2	-62.1	+8.2	-58.3	-55.1	+5.7
4 _o	-30.5	-32.6	-6.3	-63.7	-62.0	+2.7	-86.5	-82.4	+5.0	-84.9	-81.7	+4.0
5 _o	-25.5	-26.6	-4.1	-58.7	-55.1	+6.5	-88.8	-81.7	+8.7	-101.5	-93.3	+8.8
6 _o	-14.3	-18.2	-21.4	-39.0	-40.3	-3.3	-65.6	-64.4	+1.8	-85.7	-81.7	+4.9
7 _o	-6.56	-10.1	-34.7	-22.4	-23.7	-5.5	-41.7	-40.3	+3.4	-57.9	-55.1	+5.0
8 _o	-3.47	-4.02	-13.5	-10.0	-10.1	-0.4	-20.1	-18.2	+10.1	-30.1	-26.7	+13.0
9 _o	-0.77	-0.80	-3.1	-2.32	-2.17	+7.0	-4.25	-4.21	+1.0	-7.72	-6.61	+16.9

A:実験値 B:理論値



(a) 荷重点 4'



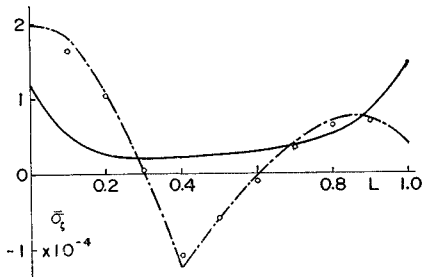
(b) 荷重点 5'

図-13 内・外フランジのたわみ (Load No. 2)

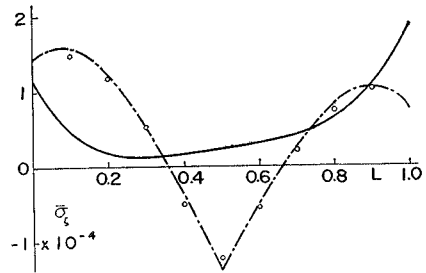
表一7 外フランジ先端の垂直ひずみ (Load No. 21)

測定点	2'			3'			4'			5'		
	$A \times 10^5$	$B \times 10^5$	$\frac{A-B}{B} \times 100$	$A \times 10^5$	$B \times 10^5$	$\frac{A-B}{B} \times 100$	$A \times 10^5$	$B \times 10^5$	$\frac{A-B}{B} \times 100$	$A \times 10^5$	$B \times 10^5$	$\frac{A-B}{B} \times 100$
1.	6.16	6.92	-11.0	11.1	12.0	-7.5	13.0	13.7	-5.1	12.0	12.5	-4.0
2.	-3.08	-3.24	-4.9	2.90	3.14	-7.6	6.88	7.32	-6.0	8.88	8.67	+2.4
3.	-3.26	-2.92	+11.6	-5.98	-6.64	-9.9	-1.45	-1.28	-13.3	2.54	2.39	+6.3
4.	-1.81	-2.04	-11.3	-5.07	-5.24	-3.2	-9.06	-9.75	-7.1	-4.53	-4.80	-5.6
5.	-0.72	-0.97	-25.2	-2.90	-2.98	-2.7	-6.52	-6.51	+0.2	-10.3	-11.2	-8.0
6.	0.18	0.08	+123.0	-0.73	-0.52	+59.4	-2.72	-2.36	+15.3	-5.80	-5.77	+0.5
7.	1.09	0.97	+11.9	1.63	1.69	-3.6	1.45	1.70	-14.7	-0.13	-0.26	-30.7
8.	1.99	1.59	+25.2	3.44	3.25	+5.8	4.89	4.79	+2.1	5.25	5.37	-2.2
9.	2.17	1.73	+25.4	3.99	3.68	+8.4	6.16	5.96	+3.4	8.33	8.02	+3.9

A: 実験値 B: 理論値



(a) 荷重点 4'



(b) 荷重点 5'

図一14 内・外フランジ先端の垂直ひずみ (Load No. 2)

すると多少大きくなっているが、やはり両固定端付近以外では、10%以内である。κ軸まわりのねじりモーメント荷重が作用するため、大きな断面回転角を生じ、その結果内・外フランジのたわみの差が Load No. 1 の場合より大きくなっている。

表一7は Load No. 2 での外フランジ先端の垂直ひずみの実験値を解析値と比較したもので、これを図示したのが 図一14 である。理論値と比較すると、荷重断面ではその差が 10% を越えているが、ひずみ分布の傾向は両者良く一致している。

7. むすび

薄肉開き断面を有するらせんはりの変形および応力解析を行い、らせんはりの基礎的な力学特性を示すとともに、模型実験を行い、理論解析結果と比較した。得られた結果は次のとおりである。

(1) 式 (9) で定義された断面定数のうち、 $\sqrt{g}=1$ と近似すると 0 となる \bar{C}_ξ , $\bar{C}_{\eta\omega}$ は、らせんのピッチ角および断面寸法とらせん半径の比 a/R_0 により、その値

が大きく変わる。また、 $\bar{C}_{\omega\omega}$, \bar{C}_J も比較的 a/R_0 の影響を受けやすい。

(2) 断面の曲率半径方向 ねじりを無視 ($\sqrt{g} \approx 1$) したために生ずる解析値の誤差は、 a/R_0 が 0.1 以下の場合には、ほぼ 10% 以下である。 a/R_0 が 0.1 を越えると、ねじれ変形に関連した量 $\bar{\theta}$, \bar{M}_ξ , $\bar{s}_{\xi\zeta}$ の誤差が急増する。

(3) η軸方向分布荷重 $\bar{Q}_\eta = -1$ による変形は、ピッチ角の増加によって、η方向変位 \bar{V} , κ軸まわり断面回転角 $\bar{\theta}$ は減少し、ξ, η方向変位 \bar{U} , \bar{W} は増加する。しかし、 \bar{U} , \bar{W} の絶対値は、 \bar{V} , $\bar{\theta}$ に比べてはるかに小さい。また応力の最大値も、ピッチ角の増加とともに減少する。

(4) らせんはりは初期曲率・初期ねじれ率を有するため、いかなる荷重に対しても、 \bar{U} , \bar{V} , \bar{W} , $\bar{\theta}$ の全変位、 \bar{M}_ξ , \bar{M}_η , \bar{M}_ζ , \bar{M}_ω の全断面モーメント、および \bar{P}_ξ , \bar{P}_η , \bar{P}_ζ の全断面力が生ずる。

(5) アクリル樹脂製試験片による実験結果は、変位・垂直ひずみとも理論解析結果と良く一致し、本報告に示した解析法による結果が妥当なものであることが確か

られた。

本報告では、開き断面、1スパンのらせんはりのみを対象としているが、断面定数さえ与えられれば、閉じた断面らせんはりの解析も、同様に行うことができる。また、連続らせんはりの変形解析も、本報告で示した方法を拡張することにより可能である。

参 考 文 献

- 1) Love, A.E.H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge at the University Press, 4th ed., 1927.
- 2) Holmes, A.M.C.: Analysis of Helical Beams under Symmetrical Loading, Jour. of the Struct. Div., Proc. of ASCE, ST 6, paper 1437, 1957.
- 3) Young, Y.F. and Scordelis, A.C.: Analytical and Experimental Study of Helical Girders, Trans. of ASCE, paper 3013, 1958.
- 4) Abdul-Baki A. and Shukair, A.: Continuous Helicoidal Girders, Jour. of the Struct. Div., Proc. of ASCE, ST 10, paper 10108, 1973.
- 5) 山崎徳也・太田俊昭・後藤栄一: 連続ヘリコイド桁およびヘリコイド格子桁の解法, 九大工学集報, 39巻, 3号, pp. 387~395, 昭 41.
- 6) 築地恒夫: 初期曲率, ねじれ率を有する薄肉断面曲線はりの基礎方程式, 土木学会論文報告集, 230号, pp. 11~22, 1974.
- 7) Aneja, I.K. and Roll, F.: Model Analysis of Curved Box-Beam Highway Bridge, Jour. of the Struct. Div., Proc. of ASCE, ST 12, paper 8603, 1971.
- 8) 遠田良喜: 『伝達マトリックス法による薄肉開断面曲線はりの有限変位理論の解析, 土木学会論文報告集, 199号, pp. 11~20, 1972.

(1974. 9. 10・受付)