

弾性状態にある砂の構成式

CONSTITUTIVE EQUATION OF COHESIONLESS
SAND IN ELASTIC STATE

村 山 朔 郎*

By Sakuro MURAYAMA

1. 緒 言

(1) 土の構成式

材料の構成式(constitutive equation)は、材料に与えられた外部からの作用とその応答との関係を示す条件式であって、材料を形成する物質の物性と構成から定まる材料の外作用に対する特異性をあらわしているものといえよう。材料を仮りに電気機器にたとえれば、機器の構成部品とそれらを結ぶ配線によって決定される入出力特性に似ている。通常土に与えられる外作用は種々の温度のもとで与えられる応力や変形またはその時間的変量であるから、土の構成式は stress-strain-time-temperature 関係として示されることが多い。

従来土質力学の分野では地盤の安定問題が主に扱われ、そのため塑性時における力のつり合いを論じたものが多く、変形や時間を扱った理論には圧密理論くらいしかみられなかった。しかし土質力学の問題は安定問題だけではない。土の各種の力学的問題を解明するには変形・時間の要素が必要であり、土質力学を完全な体系の材料力学に仕上げるには土の普遍的な構成式の確立から出発せねばならない。

もし土の構成式が明らかになれば、これを土の mass である地盤に適用して地盤内の応力・ひずみの解析、破壊の予知、動的特性などを解析することができよう。土の構成式の地盤への適用法には種々あるが1960年 Clough が開発した有限要素法 (finite element method) は最近のコンピューターの進歩にともない非常に有力なものの一つであろう。その際土の構成式はコンピューターの in put となるものであるから、地盤の応力、ひずみ分布などの out put の正確を期するためには、正しくかつ普遍性のある土の構成式の解明が望まれる。

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

土質力学では従来から土の stress-strain 関係は種々実験され、またこれより応力・ひずみの実験式を求めたものもあるが、とかく特定条件下の関係であって普遍性は必ずしも十分とはいえない。一方構成式を種々の立場から理論的に解明しようとする試みが最近みられるようになってきつつあるがまだ土の構成特性を stress-strain の広い範囲にわたって示すほどにはなっていないようである。

土の構成式を理論的に求めるには、おおむね次のような方法がある。第1の方法は、土の内部構成にはあまり立入らず、巨視的な土の特性について普遍的な関係を求めようとするいわば現象論的な立場からの方法である。第2の方法は、土の微視的な内部構成を考慮して、それに基づいた微視的な局所特性を求め、その累積として土の巨視的な構成関係を誘導しようとする物性論的な方法である。第1の方法には弾性理論や塑性理論などの体系化された既成理論を導入する余地が多く、この手法に属する研究はすでにいくらか報告されている。第2の方法では、従来土のような材料を扱った材料力学がほとんどなかったため、土質力学のためにはそれに適合した新たな手法を案出していかねばならない困難があるが、それだけ土の内部構成の本質に近づくことができる可能性が多い。本文は、第2の方法の立場をとり、その解明のためには統計力学的な手法を導入したものである。

(2) 砂の力学特性に関する従来の理論的研究

砂の力学特性を理論的に研究しようとする試みは、せん断時の強度特性を解明することに主眼をおいた研究に多くみられるが、せん断時の応力・ひずみ特性までも研究したものはきわめて少ない。

そのため筆者は、1964年に砂の粒子構成における不規則性を考慮して、せん断時の粒子状態を統計力学的に解明し、弾性状態にある砂の構成式の誘導を試み、ついで1969年にはこれを拡張して塑性状態および破壊状態

にある砂の構成関係を報告した¹⁾。

その頃の前後に発表された砂の力学的特性に関する理論的な研究では、それらの内容ははじめにのべたようであるが、それらの考察の方法は、せん断時の巨視的特性に対する現象論的な考察によるものが多く、砂内部の微視的粒子構成に立脚した物性論的な考察によるものはきわめて少ない。ここでは、それらの研究のうち、粒子レベルの微視的考察に立脚しているものを紹介する。

P.L. Newland and B.H. Allely (1957)²⁾ は、砂中の各粒子は、せん断時には粒子どうしの接触面をいわゆる摩擦斜面として滑動するとして、砂のせん断強度と残留強度のちがいを、粒子接点の移動時における摩擦斜面の傾斜角の差異から説明しようとした。さらに砂のダイラタンシー特性と摩擦斜面の傾斜角とを関係づけ、砂の主応力比とダイラタンシーの関係を考察した。

P.W. Rowe (1962)³⁾ は、等大径の丸棒または等大径の球が規則配列をしている集合体を想定し、その主応力比・ダイラタンシー関係を求めるために、摩擦斜面の要素である粒子間摩擦や粒子どうしの接触面の傾斜角のほかに、粒子の幾何学的配列を示す係数を加えて、粒子間の力のつり合いからこの集合体のせん断強度・ダイラタンシー特性を求めた。さらに不規則な粒子配列の場合に対しては、粒子間のすべりによって生ずる内部仕事量が最小になるように粒子どうしの接触面が再配列されるとして、規則配列に対して求めた関係を拡張した。

最上 (1965, 1969)⁴⁾ は、砂の粒子状態の解明に統計力学的な手法を導入して砂の力学特性を求めた。すなわち砂の力学特性を支配するものは砂の間げき比とその分布であるとして、砂の間げき比を確率変量とする相空間と考え、このような状態確率をもつ体系において外部仕事が入部エントロピーの生成になるときを砂の降伏条件として、降伏時における力学特性を求め、またエントロピーの推移に対応する砂の状態変化を考察した。

上述の Newland and Allely や Rowe の研究結果には実際の砂の特性と十分に一致しないところがあるが、その理由は実際の砂にみられるような粒子構成における不規則性が導入されていないためと思われる。

その後、村山・松岡 (1970, 1971, 1973)⁵⁾ は、さきに筆者が確率変量に採用した内部摩擦の最大稼働面に対する粒子接面の方向角や粒子間力を、各種径の丸棒を混合した集合体やその他の粒子からなる試料をせん断変形をさせた状態で実測し、その実測結果を基礎にして砂の応力・ひずみ特性を誘導した。これは粒子レベルでの微視的実測をもとにした一つの特性式であって、実験事実と合致する部分も少なくないが、実験条件における一般性や確率変量の見方についていくらか十分と思われない点があるのでなお検討したいと思っている。

(3) 解の方針

砂は、種々の形状・寸法をもつあまり微小でない独立した鉱物粒子が不規則配置に構成された集合体である。また乾燥砂や水で飽和した砂では、不飽和砂のように粒子間に水の表面張力が作用しないから、粒子間に働く力は、外力と自重によって粒子相互の接触点に発生する圧力と摩擦力のみである。

本文では、さきに発表した報告¹⁾と同様に、乾燥砂や飽和砂のような粘着力のない砂を対象とし、砂は形、大きさ、配置が at random な摩擦性粒子の集合体すなわち摩擦性粒子の random assembly であるとした。ゆえに粒子どうしの接点の方向や接点に作用する粒子間力の大きさ、方向も at random となり、さらに粒子の挙動もまた at random となる。

このような摩擦性粒子の random assembly を前提とした砂の挙動を解明するには確率論的な考察が必要であるので、統計力学的な手法を導入することとした。さらにこれに用いる確率変量の選択は解の目標に対してきわめて重要であるが、せん断挙動の解析には粒子の形、大きさに無関係な量が便利であると考えて、粒子相互が滑動するとき滑動点となる接点すなわち滑動接点における次の2つの無次元量を採択した。 β_i : 滑動接点に作用する粒子間力の基準面よりの方向角 (添字 i は個々の粒子の意)、 θ_i : 滑動接点における滑動面の基準面よりの方向角。また基準面としては任意のものが用いられて差支えないが、ここでは 3.(2) に後述する内部摩擦の最大稼働面を採用した。

本文では、上述のように粒子の移動機構を基礎にして粘着力のない砂に平均有効主応力一定のもとで偏差応力を与えたときの応力・ひずみ特性を解明するが、それには筆者がさきに発表した粒子間力と粒子移動に対する統計力学的な方法¹⁾をさらに補足・発展させる形でのべることとする。

2. 砂の弾性状態とその実例

(1) 砂の弾性状態

通常弾性とは、(a) 載荷・除荷のいずれの過程でも Hooke の法則が成立し、(b) したがって除荷時には残留ひずみがないことをいう。しかし砂の場合には加圧時と減圧時の応力・ひずみ曲線は一般に一致せず、(a) の条件は満足されない。そこで砂の場合には (b) の条件をみたせば弾性的であるということにする。

(2) 弾性状態の砂の実例

このような砂の弾性状態は砂のくり返し排水三軸圧縮試験によってつくることができる。その一例を図-1に示す。三軸圧縮試験においては軸圧 σ_1 、側圧 σ_2, σ_3 (いずれも有効応力表示) の関係は $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ である。図-1 は平均有効主応力 $\sigma_m = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$ をつねに一定値 4 kg/cm^2 に保ち、偏差応力 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ のみを $0 \sim 4.5 \text{ kg/cm}^2$ の範囲にくり返したときの軸ひずみ ϵ_1 と偏差応力 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ の関係で、くり返し回数 n が $n=23$ にいったとき残留ひずみがみとめられなくなり弾性状態に到達したものとしている。

図-1 の実験に用いた砂は角ばった粒形のもので、真比重は 2.73, 均等係数は 1.85 である。試験前の粒径加積曲線 (図-2 (a)) は試験後も変化がみられなかったので成形中および試験中に粒子が破碎されたおそれはない。供試体は高さ約 8 cm, 直径約 3.5 cm の円柱状に成形用モールドを介して水中で充填, 締固めをかるく行い, ゴムスリーブ中に 50 mmHg の真空をかけつつ試験機内に飽和状態でセットした。セット時の初期間げき比は 0.75 であった。なお試験では, 応力, 軸方向変位を測定した。

(3) 実験結果

図-1 の実験結果から次の特性がみとめられる。

(a) 残留ひずみ: 各一对の加圧曲線と減圧曲線は hysteresis loop を作り, 減圧して主応力差を再びゼロにもどすと残留ひずみが残るが, 残留ひずみは載荷回数 n とともに減少する。軸方向の残留圧縮変位 $4h_n$ とくり返し回数 n との関係は図-2 (b) のようである。この試験では $n=23$ 回に達すると残留ひずみは認められなくなり, n をこれ以上増加しても hysteresis loop は同一経路を反復するのみとなったので, 前述のように $n=23$ において砂は弾性状態に達したものとみとめた。このときの加圧曲線はほぼ直線となり直線 AB で示される。

(b) 加圧曲線: 加圧曲線の様相は 1 回目と 2 回目とは図のようにならかなり異なる。2 回目以後の加圧曲線は偏差応力 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ の小さい間は直線に近いが, $(\sigma_1 - \sigma_3)$ が大きくなるにつれて曲線に移行する。上述の直線に近い部分の長さは, くり返し回数 n とともに長くなり, 終局的には $n=23$ の場合にみられるように, 加圧曲線の全区間 AB がほぼ直線となる。

(c) 減圧曲線: 減圧曲線は加圧曲線と一致せず曲線形をなすが, 各減圧曲線はほとんど同形でかつ互いに平行である。

上述の弾性状態時の砂の弾性係数は, 図-1 の直線 AB の傾斜角の正切で与えられ, この値はせいぜい 10^8

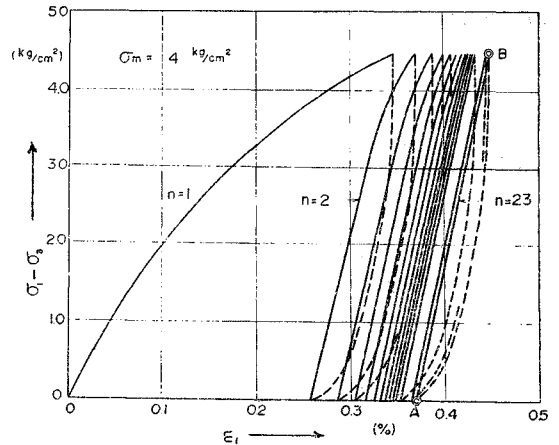


図-1

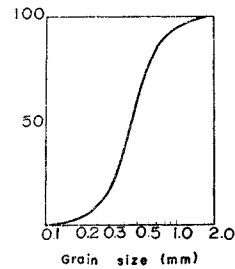


図-2 (a)

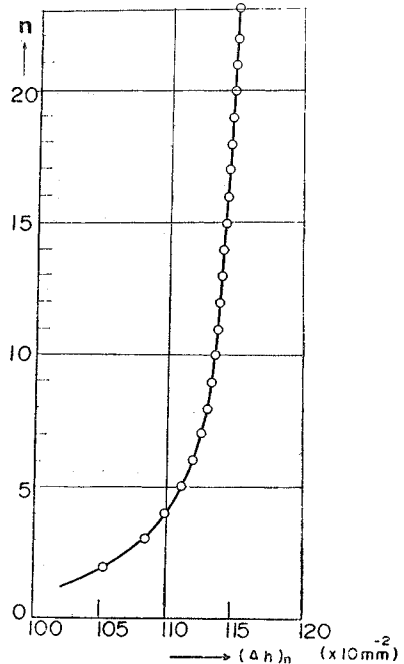


図-2 (b)

kg/cm^2 のオーダーである。これは砂粒子の等方圧を受けたときの弾性係数の 10^6 kg/cm^2 のオーダー⁶⁾ に比して非常に小さい。ゆえに砂全体すなわち砂質土としての弾性は砂粒子自身の弾性とは別な原因によるものと考え

ねばならない。

3. 砂質土における粒子間力

(1) 砂粒子相互の接触状況

水で飽和した砂質土を非排水状態にして、その表面に全応力 $\bar{\sigma}$ を加えたとき砂粒子間に伝えられる有効応力を σ 、間げき水圧を u 、単位面積当りの粒子相互の接触面積の和を A_c とすると次式が成立つ。

$$\bar{\sigma} = \sigma + (1 - A_c) \cdot u$$

一方実験によると、実際の土では砂質土でも粘質土でも $\bar{\sigma}$ は、高度の近似をもって次式で示されるといわれている⁷⁾。

$$\bar{\sigma} = \sigma + u$$

ゆえに A_c の大きさはきわめて小さく $A_c \approx 0$ と仮定しても差支えない。また Bishop および Eldin (1950)⁸⁾によれば、粗粒土 (coarse grain soil) が圧接により破壊した場合でも破砕による A_c の増大は、 $(1 - A_c)$ の中で A_c が占める率は1%にもならないとのべている。

以上のことから、砂は乾燥時にも、また不飽和時にも粒子相互の接触は飽和時と同様に点で接していると考えても差支えないであろう。

(2) 砂粒子接点の活動

砂が有効主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (ただし $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) によって三軸圧縮を受けたとき、砂全体としてみたとき砂粒子のせん断応力による相対移動が最大に活発化する面は、その面への有効垂直応力 σ とせん断応力 τ とが、 $\tan^{-1}(\tau/\sigma)$ を、したがって (τ/σ) を最大にする方向の面である。 $\tan^{-1}(\tau/\sigma)_{\max}$ を ϕ とすれば、 ϕ は図-3 (a) のように Mohr の応力円への原点からの切線が σ -軸となす角で与えられる。ゆえに σ_1 と σ_3 を含む面内に対しては、

$$\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)_{\max} = \sin^{-1} \left(\frac{AB}{OA} \right) \\ &= \sin^{-1} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \right) \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

またこの $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面は図-3 (b) の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面のよりに最大主応力面 I-I と $\{(\pi/4) + (\phi/2)\}$ の傾きをなしている。

ここに角 ϕ は、三軸方向に有効主応力 ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) をうけた砂が $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面にそってせん断変形をするとき、砂のもつ内部摩擦角のうちこの面で稼働している内部摩擦角であって、この ϕ を稼働内部摩擦角 (mobilized internal frictional angle) といい、また $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面は、せん断応力による粒子の相対移動が最も活発化する面であり、また内部摩擦の稼働も最大になる面である

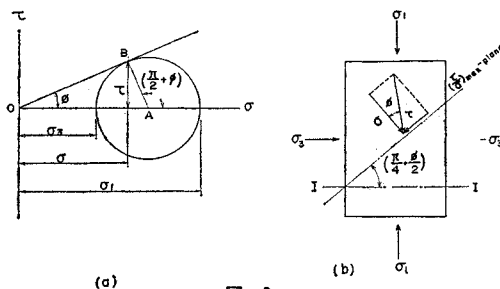


図-3

から、 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面を内部摩擦の最大稼働面 (plane of maximum mobilization) ということにする。

通常の三軸圧縮試験では、有効主応力は $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ であるから、 σ_1 と σ_2 を含む面内でも式 (1) と同様の関係や $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面が存在するが、 σ_2 と σ_3 を含む面内では $\sigma_2 = \sigma_3$ であるからこのような関係や $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面は存在しない。

上述のように、せん断応力によって稼働 (mobilized) された砂粒子は $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面にそって最も多く集結しているが、 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面にそって存在する稼働粒子個々の移動方向を微視的にみれば、それらの粒子はそれぞれの隣接粒子の表面にそっておのおの独自の方向にすべりな

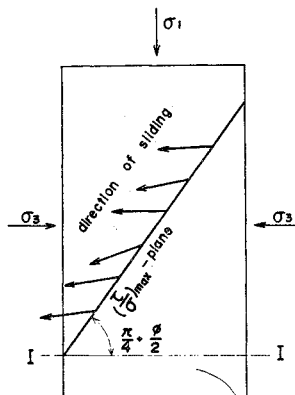


図-4

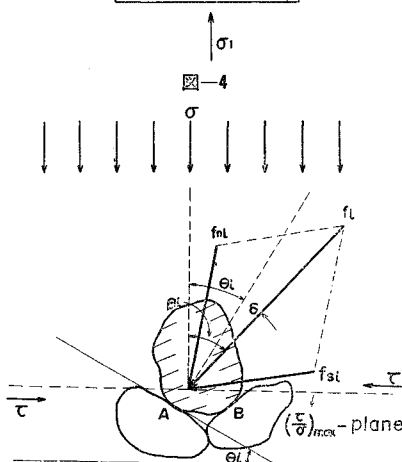


図-5

から移動する (図-4 参照)。

いま図-5 のように $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面にそって存在する一個の砂粒子 (たとえば斜線をつけた粒子) に注目しよう。この粒子は $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面の上方にある隣接粒子の接点群を通じて合力 f_i を受け、 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面以下では2接点 A, B によって外力 f_i を支持している。 f_i が $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面の法線となす角を β_i とし、これを粒子間力の方向角ということにする。 f_i, β_i は粒子ごとで異なり一定ではない。なお添字 i は個々の粒子 (individual particle) の値を意味するものとする。

有効垂直応力 σ を一定に保ち、せん断応力 τ を増加していくと接点 B における接触圧は減少し、ついに接点 B は接触を断ち、粒子は接点 A のみで下方粒子に接しながら左方にすべり動くにいたる。ここで下方粒子表面は滑動接点 A の摩擦斜面となる。この斜面の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面に対し、滑動接点の移動方向に測った傾斜角を θ_i と記し、これを接点方向角ということにする。角 θ_i の値もまた粒子ごとでそれぞれ異なり一定ではない。摩擦斜面における摩擦角すなわち砂粒子相互の摩擦角を δ_i とする。摩擦角 δ_i は砂粒子の鉱物成分、表面の粗らさなどによっていくらか不同があるであろうが、滑動または不動の粒子群についてみれば、それら群に属する粒子は at random に選ばれたものであるから、各群の粒子数が多いときは、各群の粒子の δ_i の平均値 δ は粒子全体の δ_i の平均値 δ に等しい。ゆえにここでは平均的にみて各接点とも一ように δ であると仮定する。

上記のように、 β_i, θ_i は各接点ごとに at random の値が生起するから砂粒子が静止の状態から滑動に移るための条件は次式で与えられる。

$$\theta_i - \beta_i + \delta \equiv y \leq 0 \dots\dots\dots(2)$$

β_i ならびに θ_i の値は砂とその粒子状態が定まれば、ある確率分布をなすものと推定される。砂の単位面積中にある粒子の数を N とし、 β_i, θ_i の平均値をそれぞれ β, θ とすれば、

$$\beta = \frac{1}{N} \sum \beta_i, \theta = \frac{1}{N} \sum \theta_i \dots\dots\dots(3)$$

面積の単位を粒子の大きさに比べて十分大きくして、 N を十分大きくとれば、均質な砂では β, θ の値はこの単位面積でも一定値となる。

砂全体を巨視的にみたと、 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面には図-3(a) のように有効垂直応力 σ とせん断応力 τ が作用しているが、個々の粒子の滑動接点に作用する力 f_i は前述のようにその大きさ、方向ともに接

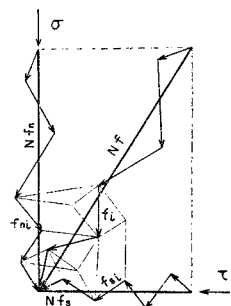


図-6

点ごとに区々である。いま f_i を σ に起因する力 f_{ni} と τ に起因する力 f_{si} とに分解する。 f_{ni}, f_{si} も各粒子ごとで方向・大きさは一定でないが、 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面にその単位面積中の多数の粒子の各 f_{ni} と f_{si} を図-6 のようにベクトルの順次加え合わせた合力は、面積の単位を大きくして、 N を十分大きくとれば、それぞれ σ, τ と大きさ・方向とも一致するはずである。いまこれらのベクトルの合力を N で除した平均値を f_n, f_s とすれば、 f_n, f_s はそれぞれ σ または τ と方向を同じくし、かつそれらの大きさはそれぞれ σ または τ の $1/N$ となる。すなわち $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面に対して

$$\left. \begin{aligned} f_n &= \frac{1}{N} \sum f_{ni} \cdot \cos(\widehat{f_{ni} \sigma}) = \frac{\sigma}{N} \\ f_s &= \frac{1}{N} \sum f_{si} \cdot \cos(\widehat{f_{si} \tau}) = \frac{\tau}{N} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

また N が十分大きくとれていれば、各粒子に働く f_{ni} と f_{si} の合力 f_i の大きさ、方向は、 f_n と f_s の合力 f の左右に均等な確率で対称に分布するとみて差支えないであろう。そうすれば個々の f_i が $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面の法線となす角すなわち f_i の方向角 β_i の平均値 β は f が $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面の法線となす角に等しくなるから、

$$\tan^{-1}\left(\frac{f_s}{f_n}\right) = \beta$$

上式と式 (1), (4) より

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{f_s}{f_n}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)_{\max} = \phi \dots\dots\dots(5)$$

砂が弾性状態にある場合は、その偏差応力-ひずみ関係が固定した hysteresis loop をえがくことおよび加圧曲線に塑性的な様相がみられないことなどから、その粒子構造は外力に対して安定な状態にあることがみとめられる。ゆえに砂が弾性状態にある場合は、粒子の一部が偏差応力によって隣接粒子の摩擦斜面にそって移動するが、ある距離だけ滑動するとその摩擦斜面の途中で停止し、斜面頂点を越えてまでも次の安定位置に移動するような活性化 (activate) した移動は発生しないと考えられる。ついでここで偏差応力を除荷すれば、滑動した粒子はその停止位置より当初の位置に復帰し、弾性状態では載荷と除荷によっては除荷時の砂の粒子構造には変化が生じないこととなる。なお除荷のときの関係は、

$$\beta_i + \delta < \theta_i \dots\dots\dots(6)$$

このようにして弾性状態における砂の載荷と除荷過程にみられる偏差応力-ひずみ曲線の可逆的な特性は上述のような粒子の同一傾斜角の摩擦斜面内の往復運動によって理解することができる。ゆえに砂が弾性状態にあ場合には、粒子自身の形状が破砕などによって変化しない限り粒子配列は偏差応力によって不変であり、したがって粒子の接点方向角 θ_i の確率分布も偏差応力によって変化しないこととなる。

4. 砂粒子の滑動確率

前述のように各砂粒子の滑動接点における角 β_i, θ_i の値は粒子ごとで異なり, まったく at random であるが粒子全体についてみればある確率分布をしているとみられる。特に砂が弾性状態にある場合には角 β_i, θ_i それぞれは平均値 β, θ に近いものほど多く, それを中央値としてその前後に両側有限の対称分布をすると考えられる。

これらの確率分布を示す関数には種々のものが考えられるが, ここでは計算の便宜上, 両側有限ではないが, 近似的に正規確率分布 (Gaussian distribution) で近似できると仮定する。すなわち β_i (これを x_1 と記す) については, $m_1(=\beta)$ を平均値とする正規確率関数 $f(x_1)$ を, また $(\theta_i+\delta)$ (x_2 と記す) については $m_2(=\theta+\delta)$ を平均値とする正規確率関数 $\varphi(x_2)$ を仮定する。すなわち

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho_1} \exp\left\{-\frac{(x_1-m_1)^2}{2\rho_1^2}\right\} \\ &\equiv N(m_1, \rho_1^2) \\ \varphi(x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho_2} \exp\left\{-\frac{(x_2-m_2)^2}{2\rho_2^2}\right\} \\ &\equiv N(m_2, \rho_2^2) \end{aligned} \right\} \dots(7)$$

ここに $N(\)$ は正規確率関数を示す記号, ρ_1, ρ_2 は標準偏差であり, また

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \beta_i, & x_2 &= \theta_i + \delta \\ m_1 &= \beta, & m_2 &= \theta + \delta \end{aligned} \right\} \dots(8)$$

上式を図示すれば 図-7 (a) のようになる。なお標準偏差 ρ_1, ρ_2 (または分散 ρ_1^2, ρ_2^2) は砂粒子の配列状態と外圧の載荷条件に関係するとみられる。

前述のように, 砂質土が弾性状態にある場合には平均有効主応力 σ_m を一定に保ちつつ偏差応力を加除しても砂粒子は隣接砂粒子の頂点を越えて他の安定位置に移動

しないから, 粒子相互の配列構造は常に不変である。ゆえに個々の砂粒子に対する $x_2(=\theta_i+\delta)$ は粒子ごとに異なっているが, 全体としての分布 $\varphi(x_2)$ したがって m_2, ρ_2 は常に一定である。一方 $x_1(=\beta_i)$ は外圧の大きさで変わり, その平均値 $m_1(=\beta)$ は式 (5) によって一義的に与えられるが, x_1 の分布形は弾性状態においては粒子の配列構造がかわらないから外圧の載荷条件が一定であれば外圧の大きさに無関係に一定とみられる。したがって標準偏差 ρ_1 は一定となる。

砂粒子が偏差応力によって滑動する条件は式 (2) で与えられ, これを式 (8) の記号でかけば次式となる。

$$x_2 - x_1 = y \leq 0 \dots\dots\dots(9)$$

x_1, x_2 は互いに独立 (independent) な正規確率変数であるから, それらの一次結合である y の確率密度関数 $p(y)$ は次式のように, m を平均値, ρ を標準偏差とする正規確率関数で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} p(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho} \exp\left\{-\frac{(y-m)^2}{2\rho^2}\right\} \equiv \frac{dP}{dy} \\ \text{ここに } \rho &= \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}, \quad m = m_2 - m_1 = \theta - \beta + \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

ゆえに砂質土中の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面にそって存在する全砂粒子のうち滑動粒子が発生する確率 P は式 (10) の確率分布曲線 $p(y)$ の $y \leq 0$ の範囲の面積によって与えられる。ここに P を滑動確率 (probability of sliding particles) ということにする。 P の値は

$$P = \int_{-\infty}^0 p(y) dy \dots\dots\dots(11)$$

いま $(y-m)/\rho = t$ とおけば,

$$dy/\rho = dt,$$

$y=0$ では $t = -m/\rho$, $y = -\infty$ では $t = -\infty$,

$$\therefore P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-m/\rho} e^{-t^2/2} dt \equiv F\left(-\frac{m}{\rho}\right) \left. \begin{aligned} \text{ここに } t &= (y-m)/\rho \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

$F(-m/\rho)$ は $N(0, 1) \equiv (1/\sqrt{2\pi}) \cdot \exp(-t^2/2)$ で示される 1 単位の標準偏差をもつ正規確率関数の累積分布曲線で示されるものであって, その数値は正規確率関数の確率積分表で求められる。

次に, m_1 の増加による P の変化をみるため dP/dm_1 を検討する。 t は m_1 の値のいかんにかかわらず任意の値をとることができるから, t と m_1 とは互いに独立な変数である。ただし積分範囲の上限 m は m_1 の関数であるから, dP/dm_1 は,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dm_1} &= \frac{d}{dm_1} \int_{-\infty}^{-m/\rho} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-t^2/2}]_{t=-m/\rho} \cdot \frac{d}{dm_1} \left(-\frac{m}{\rho}\right) \end{aligned}$$

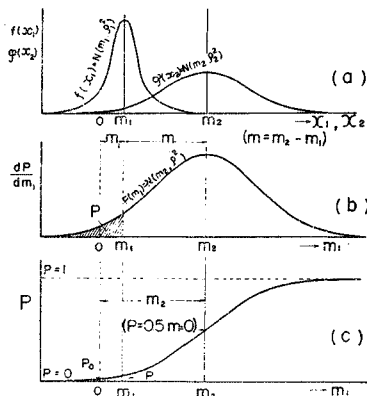


図-7

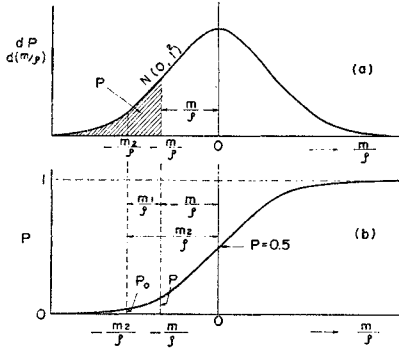


図-8

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{m^2}{2\rho^2}\right\} \cdot \frac{d}{dm_1}\left(\frac{-m}{\rho}\right)$$

$m = -(m_1 - m_2)$ であるから

$$\frac{dP}{dm_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \rho} \cdot \exp\left\{-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2\rho^2}\right\} \equiv p(m_1) \quad \dots\dots\dots(13)$$

ゆえに弾性状態にある砂に m_1 で示される偏差応力を載荷することによって生ずる滑動確率 P は

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho} \int_{-\infty}^{m_1} \exp\left\{-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2\rho^2}\right\} dm_1 \quad \dots\dots\dots(14)$$

式 (13), (14) の P はそれぞれ式 (10), (11) の P の m_1 による変化を明らかにしたものである。すなわち式 (13), (14) は m_2 を平均値, ρ を標準偏差, m_1 を確率変数とする正規確率関数で示したもので, それぞれ図-7 の (b), (c) のようになる。

また式 (13), (14) の確率変数 m_1 を m/ρ にかえれば標準偏差=1 をもつ次式となり, これらを図示するとそれぞれ図-8 (a), (b) のようになる。ここに m は, $m = m_2 - m_1$ 。これらの数値は m/ρ を変数とみて正規確率関数の数表から求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{d(m/\rho)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\rho}\right)^2\right\} \\ &\equiv g\left(-\frac{m}{\rho}\right) \\ P &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-m/\rho} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\rho}\right)^2\right\} d\left(\frac{m}{\rho}\right) \\ &\equiv F\left(-\frac{m}{\rho}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

5. 弾性状態にある砂のせん断ひずみ

前節 3. では 図-5 において接点Aを例にとり, これが滑動接点になる経過をのべたが, このような滑動接点が形成されるためには砂にわずかの偏差応力が加えられることが必要である。偏差応力の載荷初期に最初の滑動接点が砂中に形成されるために要する偏差応力の大きさ

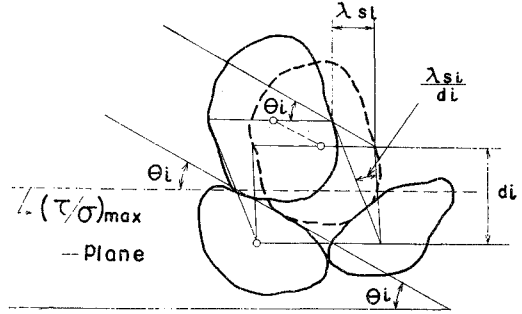


図-9

を粒子間力の方向角であらわして $m_0 (= \beta_0)$ とする。式 (15) は m_1 で示される偏差応力を砂に加えたときの粒子の滑動確率 P を与えるから, 粒子の滑動開始時の粒子の滑動確率を P_0 とすると, P_0 は $m_1 = m_0$ を式 (15) に代入して求められる。しかし m_0 はきわめて小さい量であるから, 近似的に $m_0 \div 0$ (等方圧状態) とおいても大差がない。ゆえに P_0 は

$$P_0 = F\left(-\frac{m_2}{\rho}\right) \quad \dots\dots\dots(16)$$

ゆえに等方圧状態にあった砂に m_1 で示す偏差応力を加えたときの滑動確率の増加は,

$$P - P_0 = F\left(-\frac{m}{\rho}\right) - F\left(-\frac{m_2}{\rho}\right) \quad \dots\dots\dots(17)$$

偏差応力によって粒子の一部は隣接粒子表面を滑動するが, 砂が弾性状態にある間は隣接粒子の斜面頂点を越えてまでは移動しないから, 粒子の移動距離には限度がある。このときある滑動粒子について $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面の方向にはかった移動距離を λ_{si} , その粒子の隣接粒子との間の距離を d_i とすれば, この粒子の隣接粒子に対する角変位は図-9 のように λ_{si}/d_i となる。滑動粒子の個々の移動距離や粒子間距離はそれぞれの粒子の粒径や配列などが不同であるから一定ではないが, 粒子の滑動は全粒子のうちから at random に生起するから, 滑動粒子群の各 λ_{si}/d_i の平均値は, かりに全粒子が滑動とした場合の全粒子の λ_{si}/d_i の平均値に等しいはずである。ゆえにこの砂の全粒子についての粒子間距離の平均を d , 滑動する場合の粒子移動距離の平均を λ_s とすると, 滑動粒子の平均角変位は λ_s/d となる。

$$\frac{\lambda_s}{d} = \frac{1}{N} \sum \frac{\lambda_{si}}{d_i} \quad \dots\dots\dots(18)$$

角変位 λ_s/d は砂粒子の形状, 寸法, 配列などできまめるが, 平均有効主応力や偏差応力の大きさには無関係とみられる。また1個の滑動粒子に生じる平均角変位 λ_s/d は, 砂全体に生じる $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面におけるせん断ひずみ r_β に, $c \cdot \lambda_s/d$ だけの寄与を与えるものとする。ここに c は寄与係数 (contribution factor) であって, 粒子の滑動が全粒子に対して at random に生起することか

ら, c は一定の定数とおくことができる。

砂の単位面積中には N 個の粒子があり, また等方圧のもとにあった砂に m_1 で示される偏差応力を加えたために生ずる滑動確率の増加は式 (17) のように $(P - P_0)$ であるから, これら滑動粒子の角変位の結果, 砂に生ずる $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面のせん断ひずみ r_β は次式で与えられる。

$$r_\beta = (c \cdot \lambda_s / d) (P - P_0) N \dots\dots\dots (19)$$

6. 弾性状態にある砂のダイラタンシー

粒子が隣接粒子の表面を滑動すると, 図-9 のように滑動粒子は $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面から角 θ_i だけ上方にそれて動くから, 1 個の粒子の滑動によって粒子間隔 d_i は $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面に垂直な方向に $\lambda_{si} \cdot \tan \theta_i / d_i$ の割合で広がる。このような 1 粒子の垂直方向の移動成分が, 砂全体の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面と直角な方向の膨張ひずみ $-\epsilon_n$ (ϵ_n は圧縮ひずみを正で示す) に寄与する効果は, この滑動粒子がせん断ひずみ r_β に寄与する効果と同一と考えられるから, λ_i, d_i に関する式 (18) の関係および式 (19) に用いた寄与係数 c がここにも適用できる。ゆえに滑動確率が P から ΔP だけ増加したときの $-\epsilon_n$ の増加を $-\Delta\epsilon_n$ とすると, $-\Delta\epsilon_n$ は,

$$-\Delta\epsilon_n = (c \cdot \lambda_s / d) \frac{N(P + \Delta P)}{\sum NP} \tan \theta_i$$

$$= (c \cdot \lambda_s / d) N \cdot \Delta P \cdot \tan \theta_e$$

ここに $\tan \theta_e$ は全粒子接点のうち P において生ずる滑動接点の $\tan \theta_i$ の平均値である。 θ_i は通常小さいから θ_e は θ_i の平均値とすることができる。すなわち

$$\theta_e \doteq \frac{N(P + \Delta P)}{\sum NP} \theta_i / (N \cdot \Delta P)$$

式 (19) から, P が ΔP 増加したことによる r_β の増加 Δr_β は,

$$\Delta r_\beta = (c \lambda_s / d) N \cdot \Delta P$$

ゆえに上述の $-\Delta\epsilon_n$ と Δr_β の関係を微分形で記すと

$$-\Delta\epsilon_n = \tan \theta_e \cdot \Delta r_\beta \dots\dots\dots (20)$$

次に θ_e を求めよう。いま式 (8) の x_1, x_2 を次式のような t_1, t_2 で示す。

$$t_1 = (x_1 - m_1) / \rho_1, \quad t_2 = (x_2 - m_2) / \rho_2 \dots\dots\dots (21)$$

式 (21) を式 (2), (7) に代入するとそれぞれ

$$t_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} t_1 - \frac{m - y}{\rho_2} \dots\dots\dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) \cdot dx_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{t_1^2}{2}\right) dt_1 \equiv Z_1 \\ \varphi(x_2) \cdot dx_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{t_2^2}{2}\right) dt_2 \equiv Z_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

t_1, t_2 を同一縮尺の水平な直交 2 軸とし, それらに直交

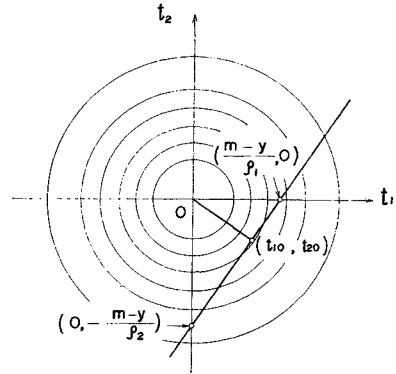


図-10

する鉛直軸を Z 軸とする。 t_1, t_2 には互いに相関がなく, また $Z_1 = Z_2$ であるから式 (23) をこれら 3 軸にプロットすると, $Z (Z_1 = Z_2)$ の面は Z 軸に対称な正規確率曲面となる。ゆえにこの曲面上の等確率線を (t_1, t_2) -平面に投影すると図-10 のような原点を中心とする同心円であらわされる。この平面に式 (22) をえがくと同図の右上りの直線となる。またこの直線を底辺にもつ鉛直面と確率曲面との交線は, 正規確率曲線に似た極大点をもつ曲線となり, この極大点の (t_1, t_2) -面への投影を座標 (t_{10}, t_{20}) で示そう。この投影点は, 前記直線上にあり, またこの投影点と原点 O とを結ぶ直線は前記直線と直交しなければならないから, 原点と投影点を結ぶ直線は次式で表わされる。

$$t_2 = -(\rho_2 / \rho_1) t_1 \dots\dots\dots (24)$$

ゆえにこの投影点の座標の値は式 (22) と式 (24) の 2 直線の交点の座標として次式で与えられる。

$$t_{10} = \frac{\rho_1(m-y)}{\rho^2}, \quad t_{20} = -\frac{\rho_2(m-y)}{\rho^2} \dots\dots\dots (25)$$

上式の t_{10}, t_{20} はある y の値を満足するような鉛直平面と Z 曲面との交線の mode (最確値) を与えるものである。また t_{10}, t_{20} はそれぞれ y を満足するような t_1 - Z 面上の t_1 の分布曲線の mode および t_2 - Z 面上の t_2 の分布曲線の mode の値を与えるものとなる。そこでいまこの $y (= x_2 - x_1)$ を満足するような x_1 -群および x_2 -群におけるそれぞれの mode の値を x_{10}, x_{20} とすれば, これらはそれぞれ t_{10}, t_{20} に対応するから, 式 (25) を式 (21) に代入したときの x_1, x_2 の値として与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= (m_1 \rho_2^2 + m_2 \rho_1^2 - y \rho_1^2) / (\rho_1^2 + \rho_2^2) \\ x_{20} &= (m_1 \rho_2^2 + m_2 \rho_1^2 + y \rho_2^2) / (\rho_1^2 + \rho_2^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

また x_{10}, x_{20} は y のある値を満たす x_1 -群, x_2 -群の mode であるとともに, それぞれの群における平均値を与えている。

一方 m_1 で示される偏差応力をうけている砂において, m_1 を dm_1 だけ増加するとき, それに対応する y の

変化は、同一標準偏差をもつ式 (11) と式 (14) の対比からもわかるように、 $y=0$ にある y を dy だけ増加することに対応している。ゆえに m_1 に対応する y の値は $y=0$ である。また式 (26) の x_{20} は、上述のように、ある y の値を満足する x_2 -群の平均値であり、 $y=0$ を満足する x_2 -群の平均値 x_{20} は、はじめにのべたように $x_{20}=\theta_e+\delta$ にほかならない。

ゆえに $(\theta_e+\delta)$ は式 (26) に $y=0$ を代入した次式で与えられる。

$$\theta_e+\delta=(m_1\rho_2^2+m_2\rho_1^2)/(\rho_1^2+\rho_2^2)$$

上式両辺の正切を求めると、

$$\tan(\theta_e+\delta)=\tan\{(m_1\rho_2^2+m_2\rho_1^2)/(\rho_1^2+\rho_2^2)\} \dots\dots\dots(27)$$

また上式左辺は 2 角の和の正切であるから、

$$\tan(\theta_e+\delta)=\{1+\tan(\theta_e+\delta)\cdot\tan\delta\}\tan\theta_e+\tan\delta$$

上式に式 (20), (27) を代入すると、

$$\lambda\left(-\frac{d\varepsilon_n}{d\tau_\beta}\right)+\tan\delta=\tan\{(m_1\rho_2^2+m_2\rho_1^2)/(\rho_1^2+\rho_2^2)\}$$

ここに

$$\lambda=1+\tan(\theta_e+\delta)\cdot\tan\delta, \\ m_1=\beta=\tan^{-1}(\tau/\sigma)_{\max}, \quad m_2=\theta+\delta \dots\dots\dots(28)$$

λ は θ_e と δ の関数であるが、 θ_e が通常小さいので θ_e の影響が比較的少ないから、粒子間摩擦角 δ に多く関係し、また δ は砂が一定であれば一定であるから λ は近似的に一定定数の係数とみなしても大差がない。

7. 接点方向角と粒子間力方向角の分布

滑動粒子の接点方向角 θ_i や粒子間力の方向角 β_i の分布は、前述のような統計力学的手法を土質力学の場に導入する際、確率論的な土の物性量の一つとして非常に重要なものである。しかしあらたな概念の量であるから、この特性に関し必要とする知見は従来まったくみられない。それゆえここでは、種々の観点から推論によって考察を行ってみたが、そのうち弾性状態の砂に対して考えた事項を簡単に提示する。なお詳細な説明は、塑性状態にある砂の内部機構とも関係があるから、塑性状態を扱う別の機会にゆずることとする。

前述のように、砂の弾性状態は一定の平均有効主応力 σ_m のもとで、一定の偏差応力 $(\sigma_1-\sigma_3)$ を砂にくり返し載荷することで得られ、また弾性状態に達した砂はこの偏差応力以下の応力のもとでは粒子の配列構造が不変であるから、粒子の接点方向角の分布は一定となり、したがって $\theta+\delta(=m_2)$ 、 ρ_2 も一定となる。一方弾性状態の砂では、個々の粒子の粒子間力の大きさは偏差応力の大

きさによって変化するが、粒子間力の方向角 β_i の分布形は粒子間力による粒子の変形係数が無視されるほど小さく、かつ載荷条件が一定であれば、偏差応力の大きさには無関係であり、したがって β_i の標準偏差 ρ_1 は前述のように一定と推定される。

次に一定の σ_m のもとで、くり返し載荷する偏差応力の値を大きくすれば、砂はそれだけ高い弾性限界をもつ弾性状態が得られる。弾性限界が高くなると、粒子の接触がより密になり、粒子相互の固定度が増すので、粒子間力の伝達性が高まり、 β_i の分布も変化するようにも思われる。しかし弾性状態にあるときは粒子が変形しないかぎり粒子相互の配列関係が不変であるから β_i の分布幅すなわち標準偏差 ρ_1 は砂の弾性限界の値にはほとんど影響されずほぼ一定であると考えられる。すなわち一定の材質・形状をもつ変形しにくい粒子の集合体において、それを拘束する σ_m が一定であり、かつその集合体が同一偏差応力のくり返し載荷で作られた弾性状態にあるときは、 β_i 、 θ_i の標準偏差 ρ_1 、 ρ_2 は弾性限界の値に無関係にそれぞれ一定とみても差支えない。

またこのような粒子からなる砂の弾性状態が、偏差応力の多数の回数のくり返し載荷の結果得られるた場合においては、 ρ_2 は ρ_1 に等しいと推定される。すなわち

$$\rho_1=\rho_2 \\ \therefore \rho=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}=\sqrt{2}\cdot\rho_2 \dots\dots\dots(29)$$

この解析では、 θ_i や β_i の分布として両側無限の正規確率分布を近似的に適用し、それらから導いた $N(m, \rho^2)$ の確率積分によって滑動確率 P を求めた。一般に正規確率関数では平均値の両側に標準偏差の 3 倍の値の点をとれば、この 2 点で定まる区間に確率変数の値が存在する確率は周知のように 99.73% となり、実際の見地からみれば、平均値の両側にとったこれら 2 点 (たとえば $3\rho, -3\rho$) は確率関数の有限の限界と考えても差支えない。ここではこれら 2 点を $\pm 3\rho$ 以上にとって $\pi\rho, -\pi\rho$ とすることにする。 θ_i の分布やその標準偏差 ρ_2 についても上記と同様である。すなわち θ_i (または $\theta_i+\delta$) は $-\pi\rho_2$ から $\pi\rho_2$ までの有限範囲に分布しているとみられる。ゆえに

$$\pi\rho_2=m_2-m_{-\infty}=m_{\infty}-m_2 \dots\dots\dots(30)$$

ここに $m_{-\infty}$ および m_{∞} は m_2 の座標原点からはかった $(\theta_i+\delta)$ の分布の下限および上限を示す点の座標の値である。

また一定の σ_m のもとで、一定の $(\sigma_1-\sigma_3)$ のくり返し載荷によって得られる弾性状態の砂の弾性限界は、弾性状態の生成される過程からも推論されるように、加えた $(\sigma_1-\sigma_3)$ の応力強度に等しい。たとえば図-1 では点 B がこの砂の弾性限界を示していることとなる。

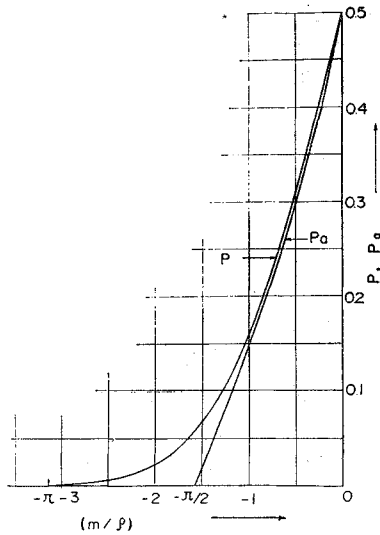


図-11

8. 内部摩擦の最大稼働面上の応力・ひずみ特性

(1) $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面上のせん断ひずみ： $r\beta$

m_1 で示す偏差応力を m_2 で示す弾性状態の砂に加えたときの滑動確率 P は式 (15) で示され、その値は数表から求められるが、簡単に式示できない不便がある。そのため演算の便宜上 P を次式の正切関数 P_a で近似する。

$$P_a = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2\rho}\right), \text{ここに } m = m_2 - m_1 \dots\dots\dots(31)$$

P, P_a の様相は図-11 に示すように m/ρ が大きい部分では誤差が大きい、 $0 < m/\rho < \pi/3$ の範囲ではよく一致し、その範囲では、最大の誤差は $\pi/3$ のところでも 10% である。等方圧下の砂の滑動確率 P_{a0} は、5. にのべたように $m_1=0$ を上式に代入して求められるから、等方圧下の砂に m_1 で示す偏差応力を加えたときの滑動確率の増加 $(P-P_0)$ は、式 (31) を用いて次の (P_a-P_{a0}) で近似する。

$$P_a - P_{a0} = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2\rho}\right) - \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m_2}{2\rho}\right) \\ = \frac{1}{2} \left[\left\{ 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m_2}{2\rho}\right) \right\} \tan\frac{m_1}{2\rho} \right] / \\ \cdot \left\{ 1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m_2}{2\rho}\right) \cdot \tan\frac{m_1}{2\rho} \right\}$$

上式中 $(1/2) \cdot \tan\{(\pi/4) - m_2/(2\rho)\}$ は等方圧下の滑動確率 P_{a0} の値であるから 1 に比べてかなり小さい。ゆえに $\tan\{(\pi/4) - m_2/(2\rho)\}$ の 2 乗の項およびこれと $\tan(m_1/2\rho)$ との積の項を無視すると、上式の $P_a - P_{a0}$ は

近似的に

$$P_a - P_{a0} \doteq \frac{1}{2} \tan\frac{m_1}{2\rho}$$

上式右辺を $\tan m_1$ の項で表わすため次のように変形する。ここに α' は両辺を等置するための補正項である。

$$\tan\frac{m_1}{2\rho} = \frac{1}{2\rho} \tan m_1 + \alpha'$$

α' は $m_1=0$ では $\alpha'=0$ となるが、 m_1 が増すにつれて増加し、 m_1 が m_2 に達すると最大となる。この最大の α' を α'_0 とすると

$$\alpha'_0 = \tan\{m_2/(2\rho)\} - \tan m_2/(2\rho)$$

補正項は α' は他の項に比べて比較的小さい値であるから、 $\tan m_1$ が 0 から $\tan m_2$ に変わる間の α' の変化を近似的に直線変化と仮定すると

$$\alpha' = \alpha'_0 \cdot \tan m_1 / \tan m_2$$

これらの関係を前式に入れて $\tan\{m_1/(2\rho)\}$ を示すと

$$\tan\frac{m_1}{2\rho} = \left\{ \frac{1}{2} \tan\frac{m_2}{2\rho} / \tan m_2 \right\} \cdot \tan m_1$$

上式を前記の $P - P_0$ の近似式 $P_a - P_{a0}$ に入れると

$$P - P_0 \doteq P_a - P_{a0} = W_e \cdot \tan m_1$$

ここに $W_e = (1/2) \cdot \tan\{m_2/(2\rho)\} / (\tan m_2)$

.....(32)

前節で式 (18) を求めるときのべたように、 λ_s はある載荷応力のもとで粒子が隣接斜面上を滑動し始めてからその斜面の potential 障壁に当たって滑動を停止するまでの移動距離の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面への投影長さである。ゆえに λ_s は粒子の形状、寸法や配列が同一であっても、滑動粒子群が滑動する斜面の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面からの平均傾斜角 θ_s や粒子間摩擦角 δ によって変化する。一方弾性状態にある砂の粒子構造は外力によって変わらないから、粒子の滑動可能な距離の平均値は、その砂の粒子性状や粒子配列によってのみ定まり、外力の大きさや θ_s, δ に無関係な固有な値が存在するものと推定される。この滑動可能な一定の距離を A とする。 λ_s から θ_s と δ の影響を除くため、滑動粒子が実際に滑動する平均傾斜角 θ_s の斜面の代わりに $(\theta_s + \delta)$ の傾斜角の斜面を仮想し、摩擦のない粒子がこの仮想斜面を滑動するとする。仮想斜面に対する力のつり合い条件は実際斜面のそれと変わらないから、 λ_s に含まれている θ_s と δ の影響を除いた関係としては、 λ_s は仮想斜面にそう A の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面への投影長さに等しいという関係が用いられる。滑動粒子は仮想斜面上では粒子間力とつり合うので仮想斜面の $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面からの傾斜角はその粒子に作用する粒子間力の方向角に等しく、またこの粒子間力の方向角の滑動粒子に対する平均値は β にほぼ等しい。ゆえに λ_s と A の関係は近似的に

$$\lambda_s = A \cdot \cos(\theta_s + \delta) \doteq A \cdot \cos \beta$$

なお上式の $\cos \beta$ は式 (1), (5) より

$$\cos \beta = \cos \phi = 1/\sqrt{1+z^2}$$

上の2式と式(32)を式(19)に代入すると

$$r_\beta (= A \cdot P_e / \sqrt{1+z^2}) = A \cdot W_e \cdot z / \sqrt{1+z^2}$$

ここに

$$P_e (= P - P_0) = W_e \cdot z$$

$$A = c \cdot A \cdot N / d,$$

$$W_e = (1/2) \tan \{ \tan^{-1} s_{el} / (2\rho) \} / s_{el}$$

$$z = \tan m_1 (= \tan \beta = \tau/\sigma), \quad s_{el} = \tan m_2$$

.....(33)

上式は弾性状態にある砂が、有効主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) をうけたとき、 σ_1 と σ_2 または σ_1 と σ_3 の2主応力によって生成される内部摩擦の最大稼働面上のせん断ひずみ r_β とその面上の応力比 τ/σ との関係を示す式である。ここに A は弾性状態にある粒子の変位に関する係数で、変位係数 (displacement factor) と名付け、その砂に固有な定数、 W_e (添字 e は弾性状態の意) は粒子の配列に支配されるから弾性状態における構造係数 (structural factor) と称することとする。 W_e は弾性限界 s_{el} と ρ の関数であるが、 ρ は前述のように一定の砂ではほぼ一定とみられるから、 W_e は s_{el} によって変化する。通常 ρ は $2\rho(\text{rad}) < 1$ と推定されるので、 s_{el} が増大すると W_e はいくらか減少するが、 s_{el} の変動範囲は通常あまり大きくないから、 W_e はその砂に固有なほぼ一定の定数とみなすことができる。 z は内部摩擦の最大稼働面 ($(\tau/\sigma)_{\max}$ -面) 上の垂直応力とせん断応力の比である。

(2) $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面上の体積ひずみ: ϵ_n

砂の弾性状態が一定荷重の繰り返し载荷によって得られた場合を想定して、式(29)を式(28)に代入すると

$$\lambda \left(-\frac{d\epsilon_n}{dr_\beta} \right) + \tan \delta = \tan \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right)$$

上式右辺を m_1, m_2 それぞれの正切で示すため次のようにおく。ここに α は補正のための項である。

$$\tan \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{1}{2} (\tan m_1 + \tan m_2 - \alpha)$$

α は $m_1 = m_2$ では $\alpha = 0$ となるが、 m_1 が m_2 より減少するにつれて増加し、 $m_1 = 0$ では $\alpha = \alpha_0$ となる。 α は小さいから $0 \sim m_2$ の範囲では近似的に直線変化をするとみなすと、

$$\alpha = \frac{\tan m_2 - \tan m_1}{\tan m_2} \alpha_0$$

$$\alpha_0 = \tan m_2 - 2 \tan(m_2/2)$$

式(33)のように $\tan m_1$ を z で、 $\tan m_2$ を s_{el} で示すと、

$$\begin{aligned} \tan \frac{m_1 + m_2}{2} &= \frac{s_{el} + z}{2} - \frac{s_{el} - z}{2} \cdot \frac{\alpha_0}{s_{el}} \\ &= \frac{s_{el} - \alpha_0}{2} + \left(\frac{s_{el} + \alpha_0}{2 s_{el}} \right) z \end{aligned}$$

この関係を本項はじめの式に代入すると、

$$\lambda \left(-\frac{d\epsilon_n}{dr_\beta} \right) + \tan \delta = \frac{s_{el} - \alpha_0}{2} + \frac{s_{el} + \alpha_0}{2 s_{el}} z \quad \dots\dots\dots(34)$$

式(33)を z で微分した結果は

$$d r_\beta / dz = A \cdot W_e / \sqrt{(1+z^2)^3}$$

上式を式(34)に代入して、 $z=0$ と $\epsilon_n=0$ を積分下限として積分し、さらにそれに式(33)を代入すると

$$\begin{aligned} -\epsilon_n &= \frac{A \cdot W_e \cdot z}{\lambda \sqrt{1+z^2}} \left\{ \frac{s_{el} - \alpha_0}{2} - \tan \delta + \frac{s_{el} + \alpha_0}{2 s_{el}} \right. \\ &\quad \cdot \frac{\sqrt{1+z^2} - 1}{z} \left. \right\} = \frac{\tau_\beta}{\lambda} \left\{ \frac{s_{el} - \alpha_0}{2} - \tan \delta \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_{el} + \alpha_0}{2 s_{el}} \cdot \frac{\sqrt{1+z^2} - 1}{z} \right\} \end{aligned}$$

z が1に比べて小さいときは上式右辺第2項の $\sqrt{1+z^2}$ は $\sqrt{1+z^2} \doteq 1+z^2/2$ と近似できるから、上式は

$$\lambda \left(-\frac{\epsilon_n}{r_\beta} \right) + \tan \delta = \frac{s_{el} - \alpha_0}{2} + \frac{s_{el} + \alpha_0}{4 s_{el}} z \quad \dots\dots\dots(35)$$

砂の弾性状態が応力比 z のくり返して作られた場合の $d\epsilon_n/dr_\beta, \epsilon_n/r_\beta$ と z との関係はそれぞれ式(34), (35)で示され、前者を横軸、後者を縦軸として図示すればいずれも直線となる。両直線は z の項の係数以外の係数および定数項が同一であるから、両直線は横軸上の同一点において交わる。また式(34), (35)の示す直線の横軸となす傾斜角は1:2となる。式(34)の直線が縦軸を切る点の縦距を z_0 とすれば、 z_0 は

$$z_0 = 2 s_{el} \{ \tan \delta - (s_{el} - \alpha_0)/2 \} / (s_{el} + \alpha_0)$$

α_0 の値は、 $s_{el} = 0.47 \sim 1.00$ ($m_2 = 25^\circ \sim 45^\circ$) に対して $\alpha_0 = 0.023 \sim 0.172$ と小さいから、上式の α_0 を無視すると

$$z_0 + s_{el} \doteq 2 \tan \delta \quad \dots\dots\dots(36)$$

すなわち縦軸上に $s_{el}, \tan \delta$ をとれば、 $\tan \delta$ の縦距は z_0 と s_{el} の縦距のほぼ中点となることが知られる。

また弾性状態における砂の ϵ_n の変化は式(35)が示すように、 z の2次曲線で近似することができる。

9. 弾性状態にある砂の構成式

構成式のあらわし方には種々の形式があるが、ここでは主応力・主ひずみ関係で示す。構成式は平均有効主応力と偏差応力に対するひずみ特性が含まれるのが一般であるが、 σ_m の影響は別の機会にのべるので、ここでは σ_m が一定の場合の偏差応力に対する特性だけに限定する。したがってここにのべる構成関係は、 σ_m を一定に保てるような载荷形式でなければならぬから、三軸圧縮と三軸伸長の2状態を対象とした。前項8.では、 σ_m 一定のもとで ($\sigma_1 - \sigma_3$) を载荷したときの $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面上

の ϵ_n と r_β を求めたので、それらを主応力・主ひずみ関係に変換すればよいこととなる。

まず3主応力のうち σ_1 と σ_3 が作用する主応力面 I-III 面内の関係を見る。

有効主応力 σ_1, σ_3 や $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面上の σ, τ などの応力関係は図-3 の Mohr の応力円で示した。砂が均質・等方であれば、主ひずみの方向と主応力の方向は一致するから、図-3 の応力円に対応する Mohr のひずみ円を想定すると主ひずみ ϵ_1, ϵ_3 と $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面上の ϵ_n, r_β の関係は周知の次の関係で示される。なお各応力、各ひずみとも圧縮の場合を正としている。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_n &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2} - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} \sin \phi \\ r_\beta &= (\epsilon_1 - \epsilon_3) \cdot \cos \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

式 (37) より $\epsilon_1, \epsilon_3, r$ (最大せん断ひずみ) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_n + r_\beta (1 + \sin \phi) / (2 \cos \phi) \\ \epsilon_3 &= \epsilon_n - r_\beta (1 - \sin \phi) / (2 \cos \phi) \\ r &= \epsilon_1 - \epsilon_3 = r_\beta / \cos \phi, \end{aligned}$$

一方、式 (33) にならって $(\tau/\sigma)_{\max} = z$ とおき、 ϕ の正弦、余弦、正切と σ_1, σ_3 または z との関係を表 (1) を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sqrt{\sigma_1 \cdot \sigma_3}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} - \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}} \right) \\ &= \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)_{\max} = z \\ \sin \phi &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \\ \cos \phi &= \frac{2\sqrt{\sigma_1 \cdot \sigma_3}}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}} \end{aligned}$$

上式中の z は、 $\sigma_1, \sigma_3 (\sigma_1 > \sigma_3)$ から導かれたものであるから、この z には $z_{1,3}$ のように応力の大きさの順に、1, 3 の添字をつけたらう。上記の関係を前式に代入して $\epsilon_1, \epsilon_3, r$ を求める。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_n + (r_\beta/2) \{ \sqrt{z_{1,3}^2 + 1} + z_{1,3} \} \equiv G(\sigma_1/\sigma_3) \\ \epsilon_3 &= \epsilon_n - (r_\beta/2) \{ \sqrt{z_{1,3}^2 + 1} - z_{1,3} \} \equiv H(\sigma_1/\sigma_3) \\ r &= r_\beta \cdot \sqrt{z_{1,3}^2 + 1} \\ \text{ここに } z_{1,3} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} - \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

上式は、 σ_1, σ_3 の2主応力の作用する場においては、大きい方の主応力 σ_1 方向に生ずるひずみ ϵ_1 は上式の $G(\sigma_1/\sigma_3)$ の関数を用いることによって、小さい主応力 σ_3 方向のひずみ ϵ_3 は $H(\sigma_1/\sigma_3)$ の関数を用いて求められることを示している。なお関数中の r_β, ϵ_n はそれぞれ式 (33), (35) によって求めたものを代入する。

このような関係は、主応力・主ひずみ関係が各主応力間で独立であるとすると σ_1, σ_2 に対する I-II 面につい

表-1 In Case of Triaxial Compression : ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$)

Principal planes	Comparison between 2 principal stresses	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3
I-II	$\sigma_1 > \sigma_2$	$G(\sigma_1/\sigma_2)$	$H(\sigma_1/\sigma_2)$	
I-III	$\sigma_1 > \sigma_3$	$G(\sigma_1/\sigma_3)$		$H(\sigma_1/\sigma_3)$
II-III	$\sigma_2 = \sigma_3$		0	0
Total strain		$G\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right) + G\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)$	$H\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)$	$H\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)$
		$\epsilon_1 : G\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right) + G\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = 2G\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)$		

表-2 In Case of Triaxial Extension : ($\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$)

Principal planes	Comparison between 2 principal stresses	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3
I-II	$\sigma_1 < \sigma_2$	$H(\sigma_2/\sigma_1)$	$G(\sigma_2/\sigma_1)$	
I-III	$\sigma_1 < \sigma_3$	$H(\sigma_3/\sigma_1)$		$G(\sigma_3/\sigma_1)$
II-III	$\sigma_2 = \sigma_3$		0	0
Total strain		$H\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + H\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)$	$G\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$	$G\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)$
		$\epsilon_1 : H\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + H\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right) = 2H\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)$		

ても同様に成立する。ゆえに σ_1 方向の主ひずみは I-III 面と I-II 面の両方から発生することになるから、実際の σ_1 方向のひずみはこれら両者の和となる。なお II-III 面については、 $\sigma_2 = \sigma_3$ であるから $z_{2,3} = 0$ となつて、 $z_{2,3}$ からの主ひずみは発生しない。上述の扱いを、 σ_m が一定の三軸圧縮、三軸伸長について表によって示すとそれぞれ表-1, 2 となる。すなわち主ひずみおよび体積ひずみ $\Delta V/V$ (圧縮を正) は次のようになる。

3軸圧縮 ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) に対しては、

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 2G\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right), \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = H\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right) \\ \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_c &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 2\left\{ G\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right) + H\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right) \right\} \end{aligned}$$

3軸伸長 ($\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$) に対しては

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 2H\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right), \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = G\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right) \\ \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_e &= 2\left\{ G\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right) + H\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right) \right\} \end{aligned}$$

これらの結果を種々の場合に適用して実際の砂の特性と比較することは興味あることである。一例として一定の σ_m のもとで偏差応力をくり返し載荷して作った弾性状態の砂を σ_m 一定の条件で三軸圧縮する場合のダイラタンシーをみると、砂が弾性限界において原体積より膨張するためには、 $z = s_{el}$ において $(\Delta V/V)_e < 0$ が成立せねばならない。 $(\Delta V/V)_e$ に式 (33), (35), (38) を代入し、 $z = s_{el}$ とおくと、 $(\Delta V/V)_e \leq 0$ になるための s_{el} の条件は、

$$s_{el} \geq (2 \tan \delta + 0.5 \alpha_0) / (1.5 - \lambda)$$

となる。 λ は 1 に近い係数であり、 α_0 の数値も 1 より小

さいから、このような s_{el} は実際の砂で作ることは無理である。ゆえに弾性状態では砂のダイラタンシーによる体積変化は、量の多少は別として、ほとんどすべて圧縮側にあることが知られる。

10. 結 言

本文は、一定の平均有効主応力のもとにおかれた弾性状態にある砂の偏差応力に対する構成式を求めるためあらたな手法の開発を試みたものである。

ここで定義した砂の弾性状態という言葉は、いままで明確に意識されていなかった砂の一状態に対する新しい言葉であると思う。このような概念を設けなければならなかった理由は、弾性状態は砂の構成式を決定する場合にその原点の部分形成する非常に重要な状態であるからである。ゆえにもし弾性状態につづいて発生する塑性状態や破壊状態を、弾性状態からの位置づけなしに求めようとするれば、それらの後続状態がおかれる座標を合理的に決めにくくなることになる。

本文では、砂を摩擦性粒子の random assembly とする前提のもとに、統計力学的考察によって弾性状態にある砂の構成式を理論的に誘導した。これによって、砂の弾性状態における偏差応力とひずみの関係が式示できるとともに、解析の誘導過程に引用した諸因子に対する物性論的意義を明らかにすることができた。

なお本研究において、確率論に関しては角屋睦教授から有益な助言をいただき、また砂の弾性状態の実験例については岩井国臣氏（昭 37 修士、現建設省勤務）の修士論文の一部を用いたことをのべ、ここに両氏に深く謝意を表する次第である。

引用文献

- 1) Murayama, S. : A Theoretical Consideration on a Behavior of Sand, Proc. IUTAM Symposium on Rheology and Soil Mech., Grenoble, 1964, pp. 146-157, Springer-Verlag, 1966.
Murayama, S. : Stress-Strain-Time Behavior of Soils Subjected to Deviatoric Stress, Proc. 7th Int. Conf. Soil Mech. and Foundation Eng., Vol. I, 1969, pp. 297-305.
- 2) Newland, P.L. and B.H. Allely : Volume Change in Drained Triaxial Tests on Granular Materials, Geotechnique, Vol. 7, No. 17, 1957, pp. 17-34.
- 3) Rowe, P.W. : The Stress-dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact, Proc. Royal Society, London, Series A, Vol. 269, 1962, pp. 500-527.
- 4) Mogami, T. : A Statistical Approach to the Mechanics of Granular Materials, Soils and Foundations, Vol. V, No. 2, 1965, pp. 26-36.
Mogami, T. : Mechanics of Granular Material as a Particulated Mass, Proc. 7th Int. Conf. Soil Mech. and Foundation Eng., Vol. I, 1969, pp. 281-285.
- 5) 村山朔郎・松岡 元 : 2次元モデルによる粒状体のせん断現象の微視的考察, 京大防災研究所年報 13号-B, 1970, pp. 505-523.
村山朔郎・松岡 元 : 砂と粘土のせん断特性の類似性とそのメカニズムについて, 京大防災研究所年報 14号-B, 1971, pp. 551-563.
Murayama, S. and H. Matsuoka : A Microscopic Study on Shearing Mechanism of Soils, Proc. 8th Int. Conf. Soil Mech. and Foundation Eng., Vol. 1, Part 2, 1973, pp. 293-298.
- 6) Reiner, M. : Building Materials, North-Holland Publishing Co., 1954, p. 428.
- 7) Ditto 6), p. 427.
- 8) Bishop, A.W. and G. Eldin : Undrained Triaxial Tests on Saturated Sands and Their Significance in the Granular Theory of Shear Strength, Geotechnique, Vol. 2, No. 1, 1950, pp. 13-32.

(1974.10.22・受付)