

吊橋の振動解析に関する計算法的考察

COMPUTATIONAL METHOD ON VIBRATION ANALYSIS OF SUSPENSION BRIDGES

上原 七司*
By Shichishi UEHARA

1. はしがき

吊橋の地震応答解析における力学的モデルの問題に関しては、土木学会本州四国連絡橋技術調査委員会「耐震設計指針」で詳細な検討と解説が行われている。これらの力学的モデルに基づく応答計算の結果と考察はすでにいくつか本報告集に発表されている。小論の目的は応答計算そのものではなくて、ある力学的モデルを前提として行われる応答計算の過程を計算法的な見地から考察することによって、計算結果の実用的な評価という問題の解明に寄与することにある。

吊橋のように大規模な構造系を扱う際には、計算上の自由度をあまり大きくすることなく所要の精度の計算結果を求めることが一つの関心事である。力学的モデルとしては連続体的であっても実際の演算としては何らかの離散化 (discretization) が行われる。離散化の手法にはいくつかのものがあるが、いま力学的意味のみやすい階差法や変形法のように、系を分割することに基づく離散化を対象としてみる。この際、離散化された系における質点の間隔あるいは FEM (有限要素法) の意味でのエレメントの大きさ dl はどのように選ばよいか、また、そのような選び方が応答量の計算結果にどのように反映されるであろうか。

吊橋の振動解析にも応用可能な手法として一般にビームに関する流麗な理論がある^{1),2)}。Leckie と Lindberg がこれらの理論を考察したあとで new dynamic stiffness matrix として提案している手法は^{2),3)}、今日の FEM と同じものであって後節 (3.8) の型の変形関数に基づいている。この際の方法上の誤差は固有振動数の自乗に関して $(dl)^4$ に比例することが示されている。

筆者はさきに離散化に際して生じる計算法的な誤差 (errors in method) を概略評価するためのパラメータ

一を通常のビーム (elementary beam) および Timoshenko beam の系について試作し、その適用の状況を報告した¹⁾。このパラメータ ϕ は有限要素的な手法に基づく離散化から導かれるが、この際に用いられる変形関数は与えられた微分方程式と一層直接的に結びつけられる。この手法の適用は一定断面の elementary beam については Leckie と Lindberg の結果と同じものを与えるが、さらにひろい適用が可能であって、Timoshenko beam に対しては特定のパラメータと変形関数が対応させられる。

この同じ手法を吊橋の地震応答計算に現われる微分方程式に適用し、近似化のパラメータ ϕ を理論づけ、離散化の基準について検討することが小論の課題である。

2. 吊橋の地震応答解析における計算法的な問題

前提として力学的モデルは与えられている。 x なる位置での変位あるいは応力 $y(x)$ の応答量は経時的な最大値として次の式で算出するものとする。

$$R(y(x)) = \sqrt{\sum_{i=1}^N |S_{di} F_i y_i(x)|^2} \dots \dots \dots (2.1)$$

この式で左辺は $y(x)$ の応答量を示し、 i は固有振動の次数、 N は自由度の大きさを表わす。 $y_i(x)$ は i 次の固有振動モード (変位に関して正規化しておく) で $y(x)$ に対応する量、 F_i は i 次の刺激係数 (participation factor)、 S_{di} は i 次の固有周期 T_i に対する相対変位スペクトルの値である。 S_d と加速度スペクトル S_a とは

$$S_d = \frac{S_a}{p^2}, \quad p = \frac{2\pi}{T} \dots \dots \dots (2.2)$$

なる関係で結ばれている。 p は円振動数を表わす。

式 (2.1) の演算を遂行する際の問題を考えてみる。

(1) 力学的モデルは連続体的であって、一連の微分方程式と対応している。実際の演算は離散化された系に

* 正会員 日本建設コンサルタント(株) 開発室

ついて行われるが、これを計算法的な見地からみると最初の微分方程式に対する近似解法とみることができる。ここで述べた意味で離散化された系についての計算結果は最初の力学的モデルに対して計算方法上の誤差を有する。

いうまでもなく、エレメントの大きさ dl が小さくなるにつれて、上記の方法上の誤差も小さくなるような手法のみが実用的な価値をもつ。このように、離散化された系では dl の大きさに依存する方法上の誤差を含むことになるが、いま課題としているモーダル・アナリシスにおいてはこの方法上の誤差は個々の固有振動モードの誤差として現われる。したがって、個々の固有振動モードを所要の範囲で精度よく算出することが第一の問題となる。

実際にいろいろの手法によっても確かめられることであるが、個々の固有振動モードの精度は一様ではなく、次数が高くなる（固有周期が短くなる）につれて精度が落ちる。このことは、十分高い次数まで精度のよい算出を要求するようにはみえるが、求める応答量が式(2.1)のように個々の固有振動モードのみではなく和の形で表わされる全体であるので、個々のモードの全体に対する寄与に着目することによって上記の難点を避けることができる。

(2) 全体としての応答量に対する個々のモードの寄与の比率については、応答の種類や着目点に依存して必ずしも一様にはいえないが、具体的な実施例についての研究から^{4),5),6)}、主要な寄与をもたらすモードは最初の若干個のものであって、ある程度高い次数のモードの寄与はきわめて小さいことが知られる。

このことは、応答値の精度が主として最初の若干個の固有振動モードの精度に依存することを意味する。十分な精度で算出されねばならないのはこの部分であって、残りの高次の部分は比較的荒い精度でもさしつかえないといえる。その境目の円振動数 p_m あるいは周期 T_m は、着目する応答量や位置について工学的な判断を行い、経験的な知識を集成して定められるであろう。

(3) 固有振動の個々の応答値は二つの部分からなる。一つは固有周期 T_i と外力に依存する S_d であり、もう一つは $|F_i \times y_i(x)|$ なる量である。同一の外力に対しては S_d は T_i のみに依存し、 $|F_i \times y_i(x)|$ は固有ベクトルのみに依存する。

いま応答計算値の精度的な比較をするのに $S_d \times |F_i \times y_i(x)|$ として一挙に考察すれば、ここには固有値 (T_i) と固有ベクトルのそれぞれの誤差の効果が混入する。このようにするよりも、 T_i と $|F_i \times y_i(x)|$ の二つの値に分けて論じると固有値と固有ベクトルのそれぞれの誤差が個別に現われてみやすいであろう。この後者の値を小

論の以下において簡単のために応答値ということにする。その力学的な意味は、これに i 次の単振動の変位応答値(長さの元をもつ)を乗じた値が i 次モードの実際の応答値になるような量である。

応答計算においてはいずれかの形で、固有ベクトルの精度を調べることが必要であり、小論では上記の量をとったのであるが、正規化されたベクトルそのものを比較の対象とすることも考えられる。しかし、うえで述べたように適切な F_i のとり方が指定できればこちらが力学的にみやすいので、小論では主として $|F_i \times y_i(x)|$ の値をとって精度の比較の対象とする。

以上の考察によって地震応答解析に現われる主要な計算問題として、次の問題をたてることができる。すなわち、ある円振動数 p を与えられたものとして p より低い固有振動モードに対して計算値である T_i と $|F_i \times y_i(x)|$ が十分精度のよいことを表わすパラメーターを見出すということである。

さきに述べたように離散化された系についての解は力学的モデルを表わす微分方程式に対する近似解であるので、上の問題の解決は力学的モデルあるいは微分方程式とこれに対する近似解の手法にかかっている。力学的モデルという立場から吊橋構造系は二つの部分に大別することができる。第一の部分は主塔および基礎構造の系であり、第二の部分は補剛桁、主ケーブルとハンガーからなる吊構造系である。

第一の部分は橋軸方向および橋軸直角方向について、曲げ変形あるいは曲げ変形と縦変形を受けるビーム系としてモデル化される。このようなビーム系に関する離散化のパラメーターに関してはさきの報告で検討されている。

いま代表的なエレメントをとり、その長さを dl 、曲げ剛性を EI 、単位長さあたり質量を m とし、さらに断面積を A としてパラメーター ϕ と ϕ_a を定義する。

$$\phi = \frac{p^2 m (dl)^4}{EI}, \quad \phi_a = \frac{p^2 m (dl)^2}{EA} \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

このとき、 p より低い固有振動モードについて $|F_i \times y_i(x)|$ が 10% 水準の精度で求められる条件は

$$\phi \leq 1.0, \quad \phi_a \leq 1.0 \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

である。この場合、固有周期 T_i は一層よい精度で算出される。

式(2.4)の右辺の数値は大きいほど、計算上には有利である。どの程度まで大きくすることができるかは、特定の領域についての経験的な知識を勘案して定めることができる。容易にその理由を推察できることであるが、有限要素的な手法では地盤に対して相対的に不動である境界を有する系よりも、ある程度軟らかい弾性支承を有する系の方が扱い易い。後者の条件で曲げ変形が支配的

であるビーム系において、上記の水準のよい精度の結果がえられる基準はおおよそ

$$\phi \leq 10.0 \dots\dots\dots(2.5)$$

となる。この右辺の数値はなお経験的な知識で補うことが必要である。境界の支承の性質と ϕ 値との関係については次節の解析例も参考にさせていただきたい。

有限要素的な手法でこのような現象が生じる理由は一 generally 次のように説明できる。いま 1-2 エレメントの 1 端付近に着目する。正しい変形曲線は

$$v(x) = v_1 + \theta_1 x + O(x^2) \dots\dots\dots(2.6)$$

の形で表わされる。 v_1, θ_1 は 1 端でのたわみとたわみ角であり、 $O(x^2)$ は級数展開した場合に筆頭の項が x^2 のオーダーであることを示す。有限要素的な手法では仮定された変形関数によって $v(x)$ を近似するが、その形式は式 (2.6) と同じであってただ $O(x^2)$ の内容が異なっている。

$$v(x) \approx v_1 + \theta_1 x + \bar{O}(x^2) \dots\dots\dots(2.7)$$

ところがたとえば $v_1 = \theta_1 = 0$ のような不動支承であると、変形曲線はそれぞれ

$$v(x) = O(x^2), v(x) \approx \bar{O}(x^2) \dots\dots\dots(2.8)$$

となり、式 (2.8) の両者の相対誤差が式 (2.6) と (2.7) の両者の相対誤差よりも大きくなる。すなわち、有限要素的な手法では不動支承の付近で正しい変形曲線に対して近似的な変形曲線を仮定することが一層困難になる。このような変形曲線に基づいて算出される結果は精度が劣ることになり、精度を上げるためには dl を一層小さくしなければならない。このことが上述のように ϕ 値の基準に反映するのである。しかし、 ϕ 値に現われる量的な影響については与えられた微分方程式群の形式に制約されるもので、個々の具体的な研究が必要であろう。

吊橋構造系の第二の部分つまり吊橋構造系に関する離散化のパラメーターの考察は小論の主要な論点である。吊橋構造系をビームと曲げ剛性のないケーブルよりなる系に分解してしまえば、うえに考察した一般的なビーム系になるが、ここでは一体の構造系としての力学的モデルを出発点とする。

3. 橋軸面内の振動

A. Selberg はこの問題の振動方程式に対して半ば解析的な解を試みている⁷⁾。この力学的モデルでは補剛桁の鉛直変位 $\eta(x)$ は同時に主ケーブルの鉛直変位である。主ケーブルの水平変位 (橋軸方向) は $\zeta(x)$ とし、また、補剛桁はここでは簡単のために水平方向に剛体的な変形をするものと仮定し、さらに、連続吊橋を対象として一つの変数 r で表わす。その質量は M_f とする。

主ケーブルの死荷重状態における鉛直座標を $y(x)$,

水平張力を H_w とすると、変形に伴う主ケーブル張力の鉛直成分の増加 V は水平成分の増加 H を用いて、次のように近似される。

$$\begin{aligned} V &= (H_w + H)(\eta' + y') - H_w y' \\ &= H_r \eta' + H y', \quad H_r = H_w + H \dots\dots\dots(3.1) \end{aligned}$$

ここで (') は x に関する微分を表わしている。 H_r は近似的に一定の量として扱われる。

主ケーブルの H と ζ との間には次の stress-strain の関係が成立している。

$$\zeta' = \frac{H}{E_c A_c \cos^3 \varphi} - \eta' y', \quad \tan \varphi = y' \dots\dots\dots(3.2)$$

E_c は主ケーブル材質のヤング率、 A_c は断面積を表わす。式 (3.2) の関係式を変更して

$$H = f(x)(\zeta' + \eta' y'), \quad f(x) = E_c A_c \cos^3 \varphi \dots\dots\dots(3.3)$$

の形の関係を導く。

ハンガーの長さを $h(x)$ 、橋軸方向長さあたりのハンガー張力を $P_s(x)$ とするとき、主ケーブルの水平方向の振動方程式は

$$\frac{dH}{dx} - P_s \frac{\zeta - r}{h} + p^2 m_c \zeta = 0$$

あるいは

$$\frac{d}{dx} f(x)(\zeta' + \eta' y') = -p^2 m_c \zeta + P_s \frac{\zeta - r}{h} \dots\dots\dots(3.4)$$

となる。 m_c は主ケーブルの単位長あたり質量である。

補剛桁の鉛直方向の振動方程式は

$$-\frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{dV}{dx} + p^2 m_f \eta = 0$$

あるいは

$$\frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 \eta}{dx^2} - \frac{d}{dx} (H y') = p^2 m_f \eta + H_r \eta'' \dots\dots\dots(3.5)$$

と表わされる。補剛桁の単位長あたり質量を m_f とし、 $m = m_c + m_f$ である。

最後に補剛桁の水平方向の振動方程式は

$$\int P_s \frac{\zeta - r}{h} dx + p^2 M_f r = 0 \dots\dots\dots(3.6)$$

となる。

式 (3.4)~(3.6) に対して離散化のパラメーターを導出することを試みる。さきに説明した¹⁴⁾と同様にして一般には EI が x の滑らかな関数でもよいのであるが、ここでは少なくともエレメントの内部では EI が一定値をとるものとしよう。式 (3.4) は ζ について 2 階、式 (3.5) は η について 4 階の微分方程式であるので、 ζ および η に対して

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) \zeta' &= 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 \eta}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.7)$$

によって定まる変形関数 (shape function) を適用することが考えられる。あるいは通常よく用いられるように、

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(\xi) &= 1 - \xi, \quad \Psi_2(\xi) = \xi, \\ \Phi_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad \Phi_2(\xi) = \Delta l \cdot (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ \Phi_3(\xi) &= 1 - \Phi_1(\xi), \quad \Phi_4(\xi) = \Delta l \cdot (-\xi^2 + \xi^3) \\ \xi &= \frac{x}{\Delta l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.8)$$

なる関数を適用することが考えられる。ここで Δl は代表的にとったエレメントの長さであり、 x はこのエレメントの左端から測っている。式 (3.8) は (3.7) で ζ および η の係数を定数とみなした場合に導かれる関数である。

しかし、式 (3.7) あるいは式 (3.8) の型の変形関数を用いて式 (3.4), (3.5) を離散化するのは効率的ではない。その理由は式 (3.4), (3.5) を書き改めて左辺に式 (3.7) の項をおき、残りの項を右辺においてその形式を調べるとわかることである。この点についてはすでに一般的な判定法を示してあるので、ここでは立入ることを省略させていただく。

もっと能率のよい離散化のための変形関数は式 (3.4) および式 (3.5) の左辺から、すなわち、

$$\frac{d}{dx} f(x)(\Psi_i'(x) + y'\Phi_i(x)) = 0 \dots\dots\dots(3.9)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2\Phi_i(x)}{dx^2} - \frac{d}{dx} (H_s y') = 0 \dots\dots\dots(3.10)$$

$$H_s = f(x)(\Psi_i'(x) + y'\Phi_i'(x))$$

から出発して求められる。ここで i は表一1の6組の境界条件 (エレメントの両端の条件) に対して算出することを表わす。

まず式 (3.9) によって $H_s = \text{const.}$ となるので F_i を未定の係数として

$$H_s = \frac{3!F_i}{(\Delta l)^4} \frac{EI}{y''} \equiv \tau_0 F_i \dots\dots\dots(3.11)$$

とおく。 y'' は x に関しない定数である。

式 (3.10), (3.11) より

$$\Phi_i'''' = \frac{6F_i}{(\Delta l)^4}$$

となるので、未定係数 B_i, C_i, D_i, E_i を用いて

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= B_i + C_i \frac{x}{\Delta l} + D_i \frac{x^2}{2(\Delta l)^2} + E_i \frac{x^3}{3(\Delta l)^3} + F_i \frac{x^4}{4(\Delta l)^4} \\ \Phi_i' &= C_i \frac{1}{\Delta l} + D_i \frac{x}{(\Delta l)^2} + E_i \frac{x^2}{(\Delta l)^3} + F_i \frac{x^3}{(\Delta l)^4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.12)$$

をえる。

次に、 H_s の式より

$$\Psi_i' = \frac{H_s}{f(x)} - y'\Phi_i' = F_i \frac{\tau_0}{f(x)} - y'\Phi_i'$$

表一1 Ψ_i, Φ_i に対する境界条件

i	$\Psi_i(0)$	$\Phi_i(0)$	$\Phi_i'(0)$	$\Psi_i(\Delta l)$	$\Phi_i(\Delta l)$	$\Phi_i'(\Delta l)$
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

であるので、これを積分して

$$\Psi_i = A_i + F_i \tau_0 t(x) - \int_0^x y' \Phi_i' dx \dots\dots\dots(3.13)$$

となる。 A_i は未定係数であり、 $t(x)$ は

$$t(x) = \int_0^x \frac{dx}{f(x)}$$

として数値的に容易に定めることのできる関数である。式 (3.13) の最後の項の積分では y' が x の一次関数であるとすれば式 (3.12) の Φ_i' と同じ未定係数を用いて、代数的な表現に直すことができる。

式 (3.12), (3.13) に対して表一1の境界条件を適用すれば6元連立方程式の解として $A_i \sim F_i (i=1 \sim 6)$ の6組の未定係数が定まる。これによって変形関数 $\Psi_i(x), \Phi_i(x)$ が定まる。

変形関数が定まると式 (3.4), (3.5) の解 ζ, η はエレメントの両端 ($x=0$ を1端, $x=\Delta l$ を2端と呼ぶ) の値を用いて

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \Psi_1 \zeta_1 + \Psi_2 \eta_1 + \Psi_3 \eta_1' + \Psi_4 \zeta_2 + \Psi_5 \eta_2 + \Psi_6 \eta_2' \\ \eta &= \Phi_1 \zeta_1 + \Phi_2 \eta_1 + \Phi_3 \eta_1' + \Phi_4 \zeta_2 + \Phi_5 \eta_2 + \Phi_6 \eta_2' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.14)$$

と近似される。式 (3.4), (3.5) の右辺の形式から、式 (3.14) の近似が有効であることを表わすパラメーターが導かれる。

$$\phi = \frac{p^2 m_c (\Delta l)^4}{EI}, \quad \phi_c = \frac{p^2 m_c (\Delta l)^2}{f} \dots\dots\dots(3.15)$$

$$\phi_s = \frac{P_s (\Delta l)^2}{fh}, \quad \phi_h = \frac{H_r (\Delta l)^2}{EI} \dots\dots\dots(3.16)$$

これらのパラメーターのうち ϕ_s, ϕ_h は静力学の場合にも現われるもので、この場合にその意味を確かめることができる。動力学の場合に主要なパラメーターは ϕ, ϕ_c である。

変位-応力の関係は式 (3.4), (3.5) より

$$\int_0^{\Delta l} \Psi_i \left\{ p^2 m_c \zeta + P_s \frac{r-\zeta}{h} \right\} dx + \int_0^{\Delta l} \Phi_i \{ p^2 m \eta + H_r \eta'' \} dx$$

を計算して整理するとえられる。ここで ζ, η には式 (3.14) を代入する。

変位ベクトル v と応力ベクトル f を次のように定義する。

$$v = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \eta_1 \\ \eta_1' \\ \zeta_2 \\ \eta_2 \\ \eta_2' \\ r \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} H_1 \\ Q_1 + V_1 \\ -M_1 \\ -H_2 \\ -Q_2 - V_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

(……) で積分値を表わすものとして、剛性行列 B と質量行列 C の要素 b_{ij}, c_{ij} は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} b_{ij} &= (\Psi_i' f \Psi_j') + \left(\Psi_i \frac{P_s}{h} \Psi_j \right) + (\Psi_i' f y' \Phi_j'') \\ &\quad + (\Phi_i' f y' \Psi_j') + (\Phi_i'' EI \Phi_j'') \\ &\quad + (\Phi_i' f y'^2 \Phi_j') + (\Phi_i' H_r \Phi_j') \\ c_{ij} &= (\Psi_i m_c \Psi_j) + (\Phi_i m \Phi_j) \end{aligned} \right\} i, j \leq 6$$

$$\left. \begin{aligned} b_{ir} &= -\left(\frac{P_s}{h} \Psi_i \right) \\ c_{ir} &= 0 \end{aligned} \right\} i \leq 6$$

B, C の 7 列目の要素は自由度 r に対応する。これらの行列を用いて変位-応力関係は

$$f = -Bv + p^2 Cv$$

となる。この関係式をエレメントごとにてたてて連ねると系全体としての振動方程式がえられる。

以上の手法についての数値例を考察するまえに、比較のために水平方向の慣性を省略する力学的モデルをみておこう。Klöppel-Lie の振動方程式といわれるものがこれに相当する。このモデルでは式 (3.5) の H は x に関しない定数であって、系全体としての適合条件のうちに現われる。

$$H = \frac{E_c A_c}{L_s} \sum -y'' \int_0^l \eta dx, \quad L_s \equiv \sum \int \sec^3 \varphi dx \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

この関係式で $\sum \int$ は全系に及ぼされることを示す。

式 (3.17) を用いて式 (3.5) の代りに

$$\frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 \eta}{dx^2} = p^2 m \eta + H_r \eta'' + y'' H \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

が基本の微分方程式となる。

式 (3.18) の離散化には式 (3.7) の第 2 式から求められる変形関数を適用できる。すなわち、式 (3.8) の Φ_i を用いて η を

$$\eta = \Phi_1 \eta_1 + \Phi_2 \eta_1' + \Phi_3 \eta_2 + \Phi_4 \eta_2' \quad \dots\dots\dots (3.19)$$

と近似する。この近似が有効であることを示すパラメータは式 (3.18) の右辺の形式より

$$\phi = \frac{p^2 m (dl)^4}{EI}, \quad \phi_h = \frac{H_r (dl)^2}{EI}$$

と、もう一つ式 (3.18) の最後の項から $(dl)^5$ に比例するファクターが現われる。これは静力学的なファクターであっていくつかの試算によると、静力学の場合に支配的なファクターは ϕ_h の大きさとみてよい。 ϕ, ϕ_h は式

(3.15), (3.16) のものと同一である。

式 (3.18) の右辺と式 (3.19) を用いて

$$\int_0^{dl} \Phi_i \{ p^2 m \eta + H_r \eta'' + y'' H \} dx$$

を計算して整理すれば、エレメントについての変位-応力関係がえられる。

変位ベクトル v と応力ベクトル f , 剛性行列 B と質量行列 C は次のようになる。

$$f = \begin{bmatrix} Q_1 + H_r \eta_1' \\ -M_1 \\ -(Q_2 + H_r \eta_2') \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_1' \\ \eta_2 \\ \eta_2' \end{bmatrix}$$

$$b_{ij} = (\Phi_i' EI \Phi_j'') + (\Phi_i' H_r \Phi_j')$$

$$c_{ij} = (\Phi_i m \Phi_j)$$

このほかに $y'' H$ の項からベクトル $h = (h_i)$ が現われる。この要素はそれ自体ベクトルであるが、着目しているエレメントの変位ベクトルだけではなく系全体の変位ベクトルに関係する。

ここに定義した諸量によって、エレメントについての変位-応力関係は

$$f = -Bv + h + p^2 Cv, \quad h_i = y'' (\Phi_i H)$$

となる。これを連ねて全体に及ぼせば系の振動方程式となる。このとき h は剛性行列のなかに吸収される。

数値例の考察

ここで考察する 3 径間連続の W 吊橋モデルは本州四国連絡橋公団の設計計画資料より借用し、簡略化されたものである。

スパン長を l_1, l_2, l_3 とし、サグを f_1, f_2, f_3 として、諸元は次のとおりである。

$$l_1 = l_3 = 120 \text{ m}, \quad l_2 = 480 \text{ m}$$

$$f_1 = f_3 = 3.39 \text{ m}, \quad f_2 = 44 \text{ m}$$

$$H_r = 36000 \text{ t}, \quad EI = 3 \times 10^8 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

$$E_c A_c = 2 \times 10^7 \times 0.71 \text{ t}$$

$$L_s = 900 \text{ m}, \quad mg = 38 \text{ t/m}$$

比較の対象とするエレメント構成 $D_k (k=1 \sim 4)$ は各径間を次のように等分してつくる。

- D_1 ; 1-4-1 等分
- D_2 ; 2-4-2 "
- D_3 ; 3-12-3 "
- D_4 ; 4-16-4 "

最初に水平方向の慣性を省略するモデルについて計算する。この場合、刺激係数は鉛直方向の一樣な地震動に対して定めるものとする。前節で述べたとおり、系全体の支承条件は計算上で重要な因子である。ここでいう支承ばねの相対的な硬軟とは、次のように定める。ただしこれは相対的な意味をもつもので、厳密な分類ではない。いま支承点の分担する概略の重量を W と考えると

き，対象としている範囲の円振動数 p とばね係数 K との間に

$$K \gg p^2 \frac{W}{g}$$

なる関係があるなら硬いばねといい，このような関係がなければ軟いばねという。ここでは軟いばねとして $K = 10^5 \text{ t/m}$ をとってみる。これは仮想的なものである。不動支承（地盤に相対的に不動である支承）と弾性支承の場合とでは固有周期に表—2でみる差異が生じる。

さて，エレメントの大きさと固有周期および応答値の動向，その動向とパラメーター ϕ との関係を調べる。逆対称モードでは刺激係数が消えるので応答値（この意味については2.(3)を参照のこと）は対称モードのみみればよい。 ϕ と ϕ_h の値は表—3（弾性支承）と表—4（不動支承）に示されている。弾性支承の場合について，固有周期 T とセンターの鉛直変位 δ ，中間支点の曲げモーメント M および反力 R の応答値の動向を図—1に示す。数値はすべて D_1 系に対する百分率で与えられ

表—2 W 橋吊構造系の固有周期（橋軸方向慣性を省略するモデル）

D ₂ 系についての計算値（秒）					
次数	不動支承	弾性支承	次数	不動支承	弾性支承
1	3.19	3.20	7	0.549	0.590
2	2.69	2.72	8	0.409	0.436
3	1.46	1.47	9	0.312	0.335
4	0.961	0.968	10	0.252	0.294
5	0.783	0.819	11	0.227	0.288
6	0.709	0.776			

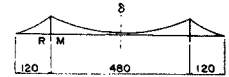
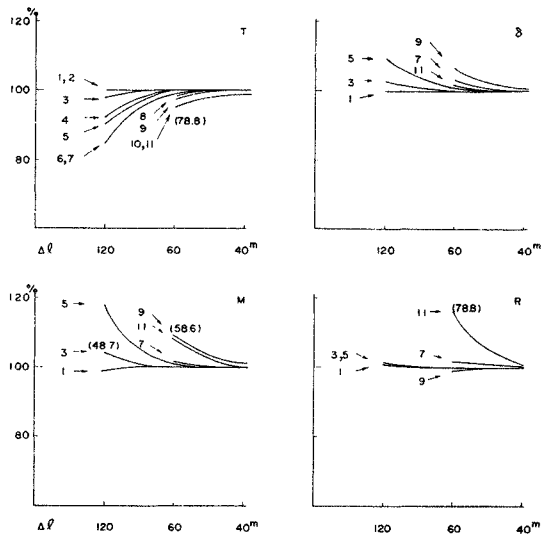
表—3 エレメント構成と ϕ , ϕ_h 値（橋軸方向慣性を省略するモデル——弾性支承）

次数	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
1	10.3	0.65	0.13	0.04
3	48.7	3.1	0.60	0.19
5		9.9	1.9	0.62
7		19.0	3.7	1.2
9		58.6	11.6	3.7
11		78.8	15.5	4.9
ϕ_h	1.7	0.43	0.19	0.11

表—4 エレメント構成と ϕ , ϕ_h 値（橋軸方向慣性を省略するモデル——不動支承）

次数	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
1	10.3	0.65	0.13	0.04
3	49.5	3.1	0.61	0.30
5		10.8	2.1	0.67
7		22.0	4.3	1.4
9		67.3	13.3	4.2
11			24.9	7.9
ϕ_h	1.7	0.43	0.19	0.11

(注) D₁: 1-4-1 分系
 D₂: 2-8-2 分系
 D₃: 3-12-3 分系
 D₄: 4-16-4 分系



図—1 エレメントの大きさと応答値の関係（橋軸方向慣性を省略するモデル——弾性支承）

注 1: 応答値は D_1 系 ($\Delta l = 30 \text{ m}$) の値に対する %，左の数字は次数，() は ϕ 値を表わす。
 注 2: δ はセンターの鉛直変位， M と R は中間支点での曲げモーメントと反力を示す。

ている。 T については D_2 系 ($\Delta l = 60 \text{ m}$) をとれば 11 次モード付近まで 10% 以下の誤差水準で計算できる。同じ水準で応答値をえようとすれば 9~11 次モード付近が限界であることがわかる。 ϕ 値で表わすと $\phi \approx 50.0$ がよい近似を与える限界である。また，すべての応答値にはほぼ同一の ϕ 値が通用する。

不動支承の場合に図—1と同様なグラフ図—2を描いてみると，同じ程度により近似を与える ϕ の上限値は $\phi \approx 1.0$ となってさらに Δl を小さくする必要のあることがわかる。吊橋の全体構造系を考えれば，いま問題にしている支承は弾性的であって，しかも，上述の意味で軟いばねという条件のもとでモデル化できるように思われる。この点についてはなお経験的な知識によって補うことが必要であろう。

いずれにしても，個々の固有振動モードの周期および応答値の精度の水準はパラメーター ϕ の大きさに結びつけられる。この関係を逆に用いれば，所要の p の最大値に合せて Δl を定めることができる。

$$\Delta l = \sqrt[4]{\frac{EI\phi}{p^2 m}}$$

次に，水平方向の慣性を考慮するモデルを計算する。さきと同じ W 吊橋モデルであるが，諸元がわずかに異

なっている。

$$l_1=l_3=124.8 \text{ m}, \quad l_2=478.4 \text{ m}$$

$$f_1=f_3=3.391 \text{ m}, \quad f_2=44 \text{ m}$$

$$A_c=0.71 \text{ m}^2, \quad P_s=30.82 \text{ t/m}, \quad I=15 \text{ m}^4$$

$$m_{fg}=30.82 \text{ t/m}, \quad m_{cg}=7.11 \text{ t/m}$$

エレメント構成は同じく $D_k(k=1\sim 4)$ とし、弾性支承の場合について計算する。今度の刺激係数は橋軸方向の一様な地震動について求めておく。したがって逆対称モードについてのみ応答がおこる。また、主ケーブルの水平方向の振動が低次のモードにおこり易いように、主ケーブルの両支点にかなり軟いばね ($K=10^4 \text{ t/m}$) をつけた。

表-5 に固有周期を示す。これは表-2 に対応するものであるが、表-5 の1次モードは補剛桁の水平振動、8次モードは主ケーブルの1次の水平振動に相当して表-4 には対応するものがない。主ケーブルの振動が

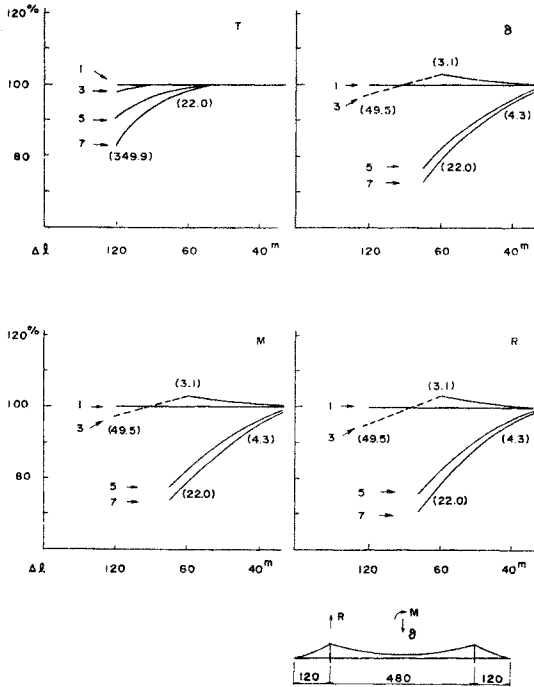


図-2 エレメントの大きさと応答値の関係 (橋軸方向慣性を省略するモデル—不動支承)
注 1: 記号については 図-1 参照。

表-5 W 橋吊構造系の固有周期 D_3 系についての計算値 (秒)

次数	不動支承	弾性支承	次数	不動支承	弾性支承
1	7.79	7.92	7	0.730	0.789
2	3.05	4.13	8	0.543	0.734
3	2.65	2.67	9	0.404	0.581
4	1.44	1.45	10	0.345	0.429
5	0.968	0.980	11	0.308	0.337
6	0.811	0.880	12	0.255	0.309

現われる領域になるとモードも複雑になる。

ϕ と ϕ_c の数値は表-6 に示されている。この表の ϕ_c は実は $\cos \phi=1$ の点での値であるので、位置によってはこれより 2~3 倍大きくなる。しかし、 $T\sim 0.3$ 秒位までの領域で平均的にみて D_k のいかにかわらず $\phi_c < 1.0$ となっている。 $D_k(k \geq 2)$ なら $\phi_c \ll 1.0$ といえる。

この特性のために、いまの場合、計算結果の近似の良否を左右するパラメーターは主として ϕ であることがわかる。

固有周期および若干の応答値と $\Delta l, \phi$ との関係を示すと 図-3 のようになる。方法上の誤差を固有周期につい

表-6 エレメント構成と ϕ, ϕ_c 値

次数	ϕ				ϕ_c			
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_1	D_2	D_3	D_4
1	1.5	0.09	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
3	13.4	0.84	0.17	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00
5	99.5	6.2	1.2	0.39	0.03	0.01	0.00	0.00
7		9.6	1.9	0.60	0.05	0.01	0.00	0.00
8		11.1	2.2	0.69	0.06	0.01	0.00	0.00
10		32.5	6.4	2.0	0.16	0.04	0.02	0.01
12		61.6	12.2	3.9	0.31	0.08	0.03	0.02

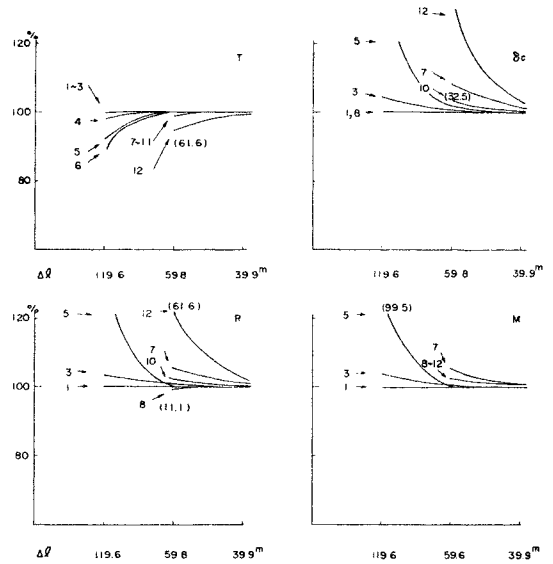


図-3 エレメントの大きさと応答値の関係 (橋軸方向慣性をとり入れるモデル—弾性支承)

注 1: 応答値は D_k 系 ($\Delta l=29.9 \text{ m}$) の値に対する %、左の数字は次数、() は ϕ 値を表わす。 Δl はセンタースパンについて示す。
注 2: δ_c は主ケーブル・センターの水平変位、 M と R は中間支点での曲げモーメントと反力を示す。

ては数%, 応答値については10%程度とおさえ, D_2 系で計算したとすれば12次モード付近が限界である。 ϕ 値と対照させると, よい近似の条件は $\phi \leq 50.0$ といえる。

同様にして不動支承の場合を調べてみると, 水平方向の慣性を省略するモデルのときと対応して $\phi \leq 1.0$ がよい近似のための条件であることが知られる。

このようにして, 水平方向の慣性を省略するモデルでもこれを取り入れるモデルでも, 同一のパラメーターに関する同一の基準によって近似の良否を判定することができる。その理由の一つは後者のモデルにおけるパラメーター ϕ_c が小さい数値をとる傾向にあり, $\phi_c \leq 1.0$ なる条件は特にとりあげなくともよいからである。ここに, 橋軸方向振動の特徴がある。

水平方向の慣性をとり入れるモデルではパラメーター ϕ, ϕ_c は理論上式(3.9), (3.10)の変形関数に結びついている。さきに述べたようにもっと簡略な式(3.7)の変形関数を用いると効率が悪い。両者の変形関数の差異は図4に示されている。簡略な変形関数では $\phi_c(\xi)$ は dl に無関係であり, $\Psi_1(\xi)$ についても変動はきわめて小さい。小論の手法による変形関数は $dl \rightarrow 0$ とともに簡略な変形関数に接近するが, 試算によると計算結果の値の接近の度合は変形関数そのものの接近の度合よりもおそい。すなわち, 式(3.9), (3.10)の変形関数を用いるのが能率的である。

橋軸方向振動に対する微分方程式の離散化のパラメー

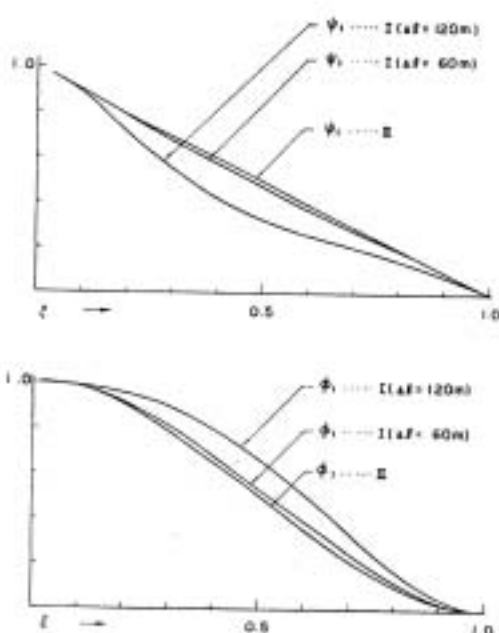


図4 本手法による変形関数(I) Ψ_1, ϕ_c と簡略な変形関数(II)との差

ターに関する論議と平行して, 橋軸直角方向の振動およびねじれ振動についても同様な考察ができる。なるべく説明の重複を省いて要点だけを述べたい。

4. 橋軸直角方向の振動

Moisseiff が静力学的にたてた力学的モデル⁹⁾に従う。動力学的には多質点系法⁹⁾やエネルギー法¹⁰⁾でも扱われる。小論の手法では微分方程式を一層直接的な形で扱う。補剛術の変位を $v(x)$, 主ケーブルの変位を $u(x)$ として固有振動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 v}{dx^2} &= \rho^2 m_f v + \frac{P_c}{h} (u-v) \\ H_r \frac{d^2 u}{dx^2} &= -\rho^2 m_c u + \frac{P_c}{h} (u-v) \end{aligned} \right\} \dots (4.1)$$

式(4.1)の離散化に式(3.7)の形から定まる変形関数, つまり式(3.8)を適用することが考えられる。のちに示す理由によってこの適用は, 橋軸内振動の場合ほど効果的ではない。しかし, 離散化の変形関数とパラメーターをセットにして与える理論がほかにないと思われるので, さしあたって式(3.8)を適用しておいて他日の開発をまちたい。

式(3.8)を用いて v, u は

$$\left. \begin{aligned} v &= \phi_1 v_1 + \phi_2 v_1' + \phi_3 v_2 + \phi_4 v_2' \\ u &= \Psi_1 u_1 + \Psi_2 u_2 \end{aligned} \right\} \dots (4.2)$$

と近似される。これがよい近似であることを表わす動力学的パラメーターは

$$\phi = \frac{\rho^2 m_f (dl)^2}{EI}, \quad \phi_c = \frac{\rho^2 m_c (dl)^2}{H_r} \dots (4.3)$$

である。式(4.2)を用いて離散化された変位-応力関係を求めることは前節にならって容易である。

前節の場合と異なる特徴は式(4.3)の ϕ_c が式(3.15)の ϕ_c と違って小さくなりがたい量であるという点にある。これは物理的諸量のプロポーションそのもののためである。この理由によって, 前節の場合と異なり式(4.3)の2つのパラメーターのうちではむしろ ϕ_c の方が支配的となる。2階の微分方程式の解法に式(3.7)の第1式から定まる変形関数を適用することは前回¹⁰⁾に検討したが, よい近似であるための条件はほぼ $\phi_c \leq 1.0$ で与えられる。

本節での離散化の手法は結果としては通常のFEMの場合とはほとんど同じである¹⁰⁾。小論ではこの手法をパラメーター ϕ と結びつけることによって, 結果の近似性を評価する理論的な目安を付随させることが特徴である。

5. ねじれ振動

ねじれ構造の力学的モデルとして断面が相対的に変形

しない開断面ビームのモデルが適用できるとすれば、その振動方程式は式 (3.18) と同型となるのでその理論が通用する。動力学的なパラメーター ϕ の役割も同様である。

力学的モデルとして V. Vlasov^{(11),(12)} が扱っている閉断面ビームのモデルを適用すれば、これまでとは異なった型の微分方程式の離散化に直面する。いま、それを表わす関数を $u(x)$ 、ねじれ角を $\theta(x)$ 、ずれ角を $\chi(x)$ とするとき、外力項を $q_1(x)$ 、 $q_4(x)$ としてつり合いの方程式は次の形をとる。

$$\left. \begin{aligned} au'' - b_1u - b_2\theta' - b_1\chi' &= 0 \\ b_2u' + \hat{b}_1\theta'' + \hat{b}_2\chi'' &= -q_1 - Hy''b \\ b_1u' + \hat{b}_2\theta'' + \hat{b}_1\chi'' - c\chi &= -q_4 - Hy''b \end{aligned} \right\} \dots(5.1)$$

$$H = \frac{E_c A_c}{L_s} \Sigma -y'' \int_0^l b(\theta + \chi) dx$$

ここで $a, b_1, b_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2, c$ は断面に関する物理定数である。 $2b$ は主ケーブルの間隔を表わす。

式 (5.1) の離散化の土台となる変形関数は

$$\left. \begin{aligned} aU'' - b_1U - b_2\theta' - b_1\chi' &= 0 \\ b_2U' + \hat{b}_1\theta'' + \hat{b}_2\chi'' &= 0 \\ b_1U' + \hat{b}_2\theta'' + \hat{b}_1\chi'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.2)$$

より求め、2階の微分方程式の境界条件を適用する。それを用いてよい近似がえられることを示すパラメーターは静力学的な ϕ_c :

$$\left. \begin{aligned} \phi_c &= \frac{c(\Delta l)^2}{r} \\ \text{と、動力学的な } \phi &= \frac{p^2 j_p (\Delta l)^2}{r}, \frac{1}{r} = \frac{\hat{b}_1}{\hat{b}_1^2 - \hat{b}_2^2} \text{ or } \frac{\hat{b}_2}{\hat{b}_1^2 - \hat{b}_2^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.3)$$

である。ここに j_p は断面の質量慣性モーメントを表わす。

式 (5.1) の解は

$$\left. \begin{aligned} u &= U_1 u_1 + U_2 \theta_1 + U_3 \chi_1 + U_4 u_2 + U_5 \theta_2 + U_6 \chi_2 \\ \theta &= \theta_1 u_1 + \theta_2 \theta_1 + \theta_3 \chi_1 + \theta_4 u_2 + \theta_5 \theta_2 + \theta_6 \chi_2 \\ \chi &= X_1 u_1 + X_2 \theta_1 + X_3 \chi_1 + X_4 u_2 + X_5 \theta_2 + X_6 \chi_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.4)$$

と近似される。式 (5.1), (5.4) によって変位-応力関係を導びくことができる。その適用がよい近似値を与えるのに必要な条件は一般には $\phi_c \leq 1.0$, $\phi \leq 1.0$ で表わされる。

エレメントの境界においてつり合うべき u, θ, χ に対応するそり、ねじれ、ずれの応力を B, T, Q とする。

$$\begin{aligned} B &= -au' \\ T &= b_2u + \hat{b}_1\theta' + \hat{b}_2\chi' \\ Q &= b_1u + \hat{b}_2\theta' + \hat{b}_1\chi' \end{aligned}$$

エレメントの両端 (1, 2) での変位ベクトル v と応力ベクトル f を定義する。

$$v = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ u_1 \\ \chi_1 \\ \theta_2 \\ u_2 \\ \chi_2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} T_1 \\ -B_1 \\ Q_1 \\ -T_2 \\ B_2 \\ -Q_2 \end{bmatrix}$$

式 (5.2) より定まる変形関数を用いて

$$\int_0^{\Delta l} U_i \times 0 dx + \int_0^{\Delta l} \theta_i (q_1 + Hy''b) dx + \int_0^{\Delta l} X_i (q_4 + Hy''b) dx$$

を計算して整理すれば、次の形で変位-応力関数をえる。

$$\left. \begin{aligned} f &= -Bv + c + h, \quad B = (b_{ij}), \quad c = (c_i), \quad h = (h_i) \\ b_{ij} &= (U_i' a U_j') + (U_i b_1 U_j) + (\theta_i' \hat{b}_1 \theta_j') \\ &\quad + (X_i' \hat{b}_1 X_j') + (X_i c X_j) + (U_i b_2 \theta_j') \\ &\quad + (\theta_i' b_2 U_j) + (U_i b_1 X_j') + (X_i' b_1 U_j) \\ &\quad + (\theta_i' \hat{b}_2 X_j') + (X_i' \hat{b}_2 \theta_j') \\ c_i &= (U_i \times 0) + (\theta_i q_1) + (X_i q_4) \\ h_i &= y'' b \{ (\theta_i H) + (X_i H) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.5)$$

式 (3.18) の場合と同様、 h は H を含む荷重項より現われるベクトルであるが、系全体の関係式では剛性行列に吸収される。

式 (5.1) の一般的な関係式で $c \rightarrow \infty$ とみなされる場合、つまり断面が相対的に変形しないとみなされる場合には、従属変数が u, θ の2つになって関係式もやや簡単になる。この場合 $\chi=0$ となるので

$$B = -au', \quad T = b_2u + \hat{b}_1\theta'$$

となる。式 (5.1) の微分方程式は

$$\left. \begin{aligned} au'' - b_1u - b_2\theta' &= 0 \\ b_2u' + \hat{b}_1\theta'' &= -q_1 - Hy''b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.6)$$

となる。ここで $q_1 = p^2 j_p \theta$ は慣性力である。

式 (5.6) に対する変形関数は

$$\left. \begin{aligned} aU'' - b_1U - b_2\theta' &= 0 \\ b_2U' + \hat{b}_1\theta'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.7)$$

より定められる。4組 ($i=1\sim 4$) の境界条件は表-1のように与えられる。

未定係数 C_i, D_i, E_i, F_i を用いて式 (5.7) の不定積分として U_i, θ_i を次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} U_i(x) &= D_i \cosh \lambda x + \frac{E_i}{\Delta l} \sinh \lambda x - \epsilon \frac{F_i}{\Delta l} \\ \theta_i(x) &= \frac{F_i}{\Delta l} (1 + \epsilon \alpha) x + C_i \end{aligned}$$

表-1 U_i, θ_i に対する境界条件

i	$\theta_i(0)$	$U_i(0)$	$\theta_i(\Delta l)$	$U_i(\Delta l)$
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

$$\varepsilon = \frac{\hat{b}_1 b_2}{b_1 \hat{b}_1 - b_2^2}, \quad \alpha = \frac{b_2}{\hat{b}_1}, \quad \lambda^2 = \frac{b_1 \hat{b}_1 - b_2^2}{a \hat{b}_1} - \alpha \left\{ \frac{D_i}{\lambda} \sinh \lambda x + \frac{E_i}{\Delta L \cdot \lambda} \cosh \lambda x \right\}$$

これらに表-7の境界条件を課すれば4組の変形関数が定まる。

式(5.5)ののと同様にして変位-応力関係を導く。

ここでは

$$v = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ u_1 \\ \theta_2 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} T_1 \\ -B_1 \\ -T_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (5.8)$$

$$f = -Bv + p^2 Cv + h$$

として、その要素は

$$b_{ij} = (U_i' a U_j') + (U_i b_1 U_j) + (\theta_i' \hat{b}_1 \theta_j') + (U_i b_2 \theta_j') + (\theta_i' b_2 U_j)$$

$$c_{ij} = (\theta_i j_p \theta_j)$$

$$h_i = y'' b (\theta_i H)$$

となる。式(5.6)の右辺の形式より、式(5.8)の近似性を表わす動力的なパラメーターは

$$\phi = \frac{p^2 j_p (\Delta L)^2}{\hat{b}_1}$$

である。

式(5.6)の型の方方程式を一つの従属変数の関係式に帰着させないで解く手法としては Sih¹³⁾ が静力学の問題について適用しているものと共通しているが、小論の手法が一層ひろい適用性をそなえている。

式(5.8)の解法を3.節の第一のW吊橋モデルに適用してみる。モデルの諸元として次のものを追加する。

$$a = 7.5 \times 10^{10} \text{ t} \cdot \text{m}^4, \quad b_2 = -1.5 \times 10^8 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

$$\hat{b}_1 = b_1 + b_2 H_r = 2.0 \times 10^8 + 0.123 \times 10^8 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

$$j_p g = 667.8 \text{ g t} \cdot \text{m}$$

比較の対象とするエレメント構成は同様であって D_k ($k=1 \sim 4$) とする。計算の条件としては不動支承 ($\theta=0$) の場合をとり、またここで応答値というものは正規化されたベクトルそのものの値を指している。

計算の結果に基づいて各次モードの ϕ とエレメント構成との関係をまとめると表-8のとおりである。

固有周期と応答値の動向は図-5に示されている。応

表-8 エレメント構成と ϕ 値 (不動支承)

次 数	ϕ			
	D_1	D_2	D_3	D_4
1	0.62	0.15	0.07	0.04
2	1.32	0.33	0.15	0.08
3	3.19	0.80	0.35	0.20
4		1.47	0.65	0.37
5		1.66	0.74	0.42
6		1.66	0.74	0.42
7		2.63	1.17	0.66
8		4.09	1.82	1.02

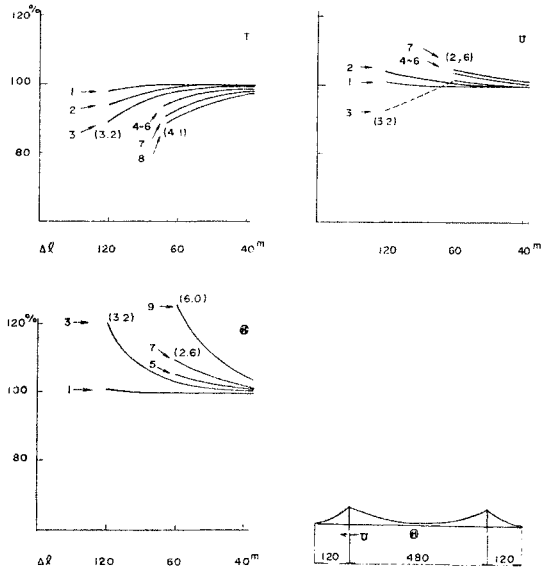


図-5 エレメントの大きさと応答値の関係 (ねじれ振動—不動支承)

注1: T は固有周期, U は中間支点でのそり変形, θ はセンターでのねじれ角を示す。その他の記号については図-1参照。

答値は中間支点でのそりとセンターでのねじれ角についてのものであるが、3. でみたように、10% 程度のよい近似性の範囲ではすべての応答値 (変位と応力) がほぼ一様な動向を示すことが確かめられている。

図-5 よりよい近似といえるものは、 D_1 では1~2次、 D_2 では1~6次、 D_3 では1~8次の範囲である。 ϕ の上限値として表わせば $\phi \leq 1 \sim 2$ といえる。不動支承の条件でよい近似の基準はほぼ $\phi \leq 1.0$ で表わされることがわかる。この右辺の数値は大きければ大きいほど、計算上に有利である。弾性支承の条件では不動支承の条件の場合より大きくなることは3. で述べたが、これは弾性ばねの硬軟にも依存し、ねじれ振動の力学モデルが実際に適用される諸条件に照らして検討が必要であろう。このようにして ϕ の基準が定まれば、大きさ ΔL :

$$\Delta L = \sqrt{\frac{\phi \hat{b}_1}{p^2 j_p}}$$

でエレメント構成された計算上のモデルの与える結果は振動数 p までの範囲でよい近似値といえる。

6. 結 び

吊橋の地震応答解析において計算上の自由度の大きさの選定が計算結果に及ぼす影響を評価する目的で、吊構造系の振動解析に有限要素的な手法を適用し、エレメントの大きさと近似計算値の良否との関連を表わすためのパラメーターを導出した。特に、橋軸面内振動とねじれ

振動の解析例について手法の特徴とパラメーターの役割とを詳しく検討した。

このパラメーターは特定の手法に結びついているものであるが、必ずしもこのようなパラメーターをとまわない他の手法と経験的な知識を介して結びつけることは今後の課題である。

この手法とパラメーターの理論は、特別の場合 ($p=0$) として静力学の場合にも効果的に利用できる。また、静力学の場合にはよい近似を与える計算上のモデルでも動力学の場合には必ずしもよい結果を与えないことのある事情も、小論の検討から明らかになる。

本研究を遂行するにあたって東京大学生産技術研究所の久保慶三郎教授より多くの御指導をいただいたことを感謝する。また、本四公団設計部 榎波義幸課長代理をはじめ担当諸氏には日ごろ有益なディスカッションをいただいております、あわせて感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 山田善一：構造物動的解析への応用，土木学会関西支部，高速度計算機の土木工学への応用に所載，昭和36年2月。
- 2) Leckie, F.A. and Lindberg, G.M.: The Effect of Lumped Parameters on Beam Frequencies, The Aeronautical Quarterly, Vol., XIV, August 1963.
- 3) Lindberg, G.M.: Vibration of Non-Uniform Beams, The Aeronautical Quarterly, Vol. XIV, November 1963.
- 4) 建設省土木研究所：吊橋上部構造全体及び下部構造ケーソンの地震応答解析，昭和44年1月。
- 5) 建設省土木研究所：三径間吊橋上下部構造全体系地震応答解析，昭和44年4月。
- 6) 本州四国連絡橋公団：耐震設計要領のための基礎資料，昭和49年3月。
- 7) Selberg, A.: Oscillation and Aerodynamic Stability of Suspension Bridges, Acta Polytechnica Scandinavica, 1961, Ci 13 (308/1961).
- 8) Moisseiff, L.S. and Lienhardt, F.: Suspension Bridge under the Action of Lateral Forces, Trans. ASCE, 98, 1933.
- 9) 山田善一：吊橋の水平横方向自由振動について，土木学会関西支部年次講演会概要，1962。
- 10) Ito, M.: The Lateral Motion of Suspension Bridges, 土木学会論文報告集，第81号，1962。
- 11) Vlasov, V.Z.: Thin-walled Elastic Beams, 1961.
- 12) 土木学会・本州四国連絡橋鋼上部構造研究小委員会・解析分科会：本州四国連絡橋鋼上部構造に関する調査研究報告書 別冊 6，昭和48年3月。
- 13) Sih, Nansze.: Torsion Analysis for Suspension Bridges, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 83, No. ST 6, November, 1957.
- 14) 上原七司：骨組構造に関する有限要素法の計算法的側面，土木学会論文報告集，No. 201, 1972.

(1974.5.31・受付)