

薄肉曲線ばりの板殻構造としての一解析法

A METHOD FOR NUMERICAL ANALYSIS OF THIN-WALLED CURVED
BEAMS CONSISTING OF PLATES AND SHELLS坂井 藤 一* ・ 中村 秀 治**
By Fujikazu SAKAI and Hideharu NAKAMURA

1. ま え が き

近年、構造解析技術の進歩に伴い、薄肉断面を有する曲線ばりの解析もさかんに研究されるようになった。薄肉断面の場合と充実断面の場合とで、その力学的性状が異なることは直線ばりにおいても認められている事実であるが、特に曲線ばりにおいては、ねじりの影響がより厳しくなることからその相違は顕著となる。

薄肉曲線ばりの解析には、通常、断面形状の保持を前提としてそりねじりの理論が適用されている。この最も初期の取扱いは、1932年のGottfeldによる並列トラス曲線ばりの研究¹⁾であるといわれている。さらに、Uman-skiy²⁾により二軸対称I型ばりが取扱われ、Wansleben³⁾によって曲線ばりのそりねじり理論がかなり進展した。しかし、彼の理論では相反作用則が充足されないとされている。Vlasov⁴⁾もまた有名な著書において理論を述べている。最近ではDabrowski⁵⁾が精力的に研究を行い、その成果を著書として公刊している。

一方、わが国においても、1958年の平井・倉西の研究⁶⁾頃から曲線ばりのそりねじり理論が発展を見はじめ、小西・小松の基礎理論に関する研究⁷⁾、小松らによる一連の実用化研究^{8)~10)}、さらには、倉西¹¹⁾、島田¹²⁾そして深沢^{13)・14)}などにより基礎理論の詳細な展開と応用化がなされた。他に、幅員の広い場合を異方性扇形平板として取扱う芳村の研究¹⁵⁾、あるいは折線近似を行う多角形曲線橋理論(遠藤)¹⁶⁾もある。このような基礎理論についての調査とともに、複雑な曲線ばりの方程式を解いて設計にとり入れるための手段もいろいろ考えられ、Becker¹⁷⁾をはじめとする伝達マトリクス法やFourier級数解法¹⁸⁾がさかんに報告された。また、最近では有限要素法(変形法)がコンピューター解析に便利な点から適用されるに至り、それとともに、基礎理論の再検討も試みられている¹⁹⁾。

最近までの以上のような成果は、アメリカにおける研究の現状とともに、ASCEの調査レポートにまとめられている²⁰⁾。

断面形状の変化を考慮して曲線ばりを扱うことは、ごく最近に至り考えられるようになった。これは直線ばりの場合と同様に、床版あるいはダイヤフラム、スチフナーなどの補剛材と主構造たるはりの立体的関連挙動を解明し、より合理的な設計法を追求しようとする立場に立つものである。しかしながら、この解析はきわめて複雑になるので、あまり研究報告はなされていない。従来の研究は箱型はりに関するものである。Dabrowski²¹⁾は簡便な取扱法を示し、落合²²⁾は直線ばりに対するVlasov理論を応用している。能町・吉田²³⁾は曲線箱型はりを扇形板と円筒殻の集合として、変位-せん断方程式を用いて解析した。坂井も一般の曲線ばりを有限要素法(帯板法)の観点から解析し得ることを示し²⁴⁾、また別に、板殻の基礎方程式とVlasovの一般座標法を組合わせた曲線箱型はりの解析法を示した²⁴⁾。青野²⁵⁾はVlasov法をより精密に適用し、計算と実験の結果を対比している。折板構造理論あるいは有限帯板法による曲線箱型はりの解析は、Chuら²⁶⁾、Scordelisら²⁷⁾、あるいはBuragohainら²⁸⁾によっても研究されている。

薄肉曲線ばりの立体挙動問題の一つは有効幅の問題である。これらについては、小松ら²⁹⁾、および薄木・菅原³⁰⁾によって報告がなされており、芳村・蕨沢³¹⁾はChuらの方法とほぼ同一な折板構造解析法の立場から検討を加えている。

一方、アメリカではCulverを中心とするグループが、フランジおよびウェブの座屈安定問題やスチフナー剛度の問題を論じており^{32)~34)}、また、Abdel-Sayedの研究³⁵⁾もある。この種の研究は米沢ら³⁶⁾によっても報告されている。

床版の問題は、扇形平板の解析としてさかんに研究されている。Coullら³⁷⁾およびHeinsら³⁸⁾は解析法の検討ならびに実験的確認を行い、Buragohain³⁹⁾は数値解析の結果とそれらを対比してゐる。また、Cheung⁴⁰⁾お

* 正会員 工博 川崎重工工業鉄構事業部東京設計事務所

** 正会員 工修 電力中央研究所技術第二研究所

よび大宮司ら⁴¹⁾は有限帯板法の適用を行っている。

曲線ばりの振動問題はいろいろ研究されているが、扇形平板として取扱った米沢の研究⁴²⁾や、Cheung の有限帯板法による箱型ばりの研究⁴³⁾などが本論の立場と特に関連する。

本論文は、このような背景の下に薄肉曲線ばりの諸問題を扱う一解析法を述べたものである。ここで述べる手法は、文献23)に基づくものであり、直線構造において、奥村・坂井が展開した手法⁴⁴⁾を曲線構造に拡張したものである。文献44)は Cheung⁴⁵⁾あるいは Powell ら⁴⁶⁾の有限帯板法とほぼ同時期に独立に展開されたものであるが、次のような点で他と異なる特徴を見出すことができる。

- 1) Kantrovich 法による有限要素法定式化。
- 2) weighted residuals method (重みつき残差法) の有限要素法への適用。
- 3) 有限帯板法の立体構造解析への適用。
- 4) 解析解との重ね合わせ。

本論文の一つの意図はこれらの点にある。本解析法は Cheung⁴²⁾あるいは Scordelis²⁷⁾が導いたものとほとんど同一の内容を有するが、重みつき残差法としての Galerkin 法を基礎として定式化している。その際、重み関数の選択によっては、相反作用則を充足しないことがあることを指摘する。

本解析法はまた、従来の曲線折板構造解析法に比べて一般性がある。すなわち、文献22)あるいは26)の方法は、限定された問題に対しては有効であろうが、異方性板フランジの場合や、振動・座屈問題に対しては適用が困難となろう。また、一般に応力法は変位法に比べて数値計算上、取扱いが面倒になると思われる。

本報告では、二、三の簡単な例題に対する計算および曲線箱型ばりの模型実験を行い、本解析法が実用上十分な結果を与えることを示す。紙面の都合から、ここでは静的解析の展開にとどめてある。振動解析などのより複雑な問題への応用については次の機会に譲るが、薄肉曲線ばりにおけるいろいろの問題、たとえば、断面変形挙動およびそれに関連したダイヤフラム、スチフナーの効果算定、床板の計算、あるいはフランジ、ウェブの座屈安定などの問題が、本解析法の応用により解析されるものと思われる。

2. 解析理論

(1) 概要

この理論は有限要素法の一つの考え方に基づいており、参考文献44)で薄肉直線ばりについて述べた手法を

薄肉曲線ばりに拡張したものである。

円弧曲線を描く薄肉曲線ばり(図-1)は、ほとんどが扇形平板と円筒殻から構成されているので、曲線ばりをこのような構成要素の集合体として解析する。そのため各要素について、変形は節線変位とある仮定された内挿関数で表わされるものとし、変分原理を適用して、節線外力と節線変位を結びつける要素の剛性マトリクスを誘導する。その際、扇形板要素については極座標で表示された平衡方程式、曲板要素については Donnell の理論式を用いる。誘導の手順は直線ばりの場合と同様であるが、扇形板要素の場合、重みつき残差法としての Galerkin 法を用いる際、若干の配慮が必要であり、また剛性マトリクスの成分を陽に求めるための積分が煩雑になるので、数値積分を利用する。また扇形板要素では、扇形の鉄筋コンクリート床版あるいは鋼床版などへの適用を想定して、異方性を考慮している。

全部の要素についての剛性マトリクスを重ね合わせれば、はり全体の節線外力と節線変位の関係式が導かれる。これは軸方向座標について4階の線型連立常微分方程式の形を持ち、その解法は直線ばりの場合と同様である。本論文の数値計算例では、すべて Fourier 級数解法を用いている。

(2) 扇形板要素の剛性マトリクスの誘導

図-1 に示すような扇形板および曲板要素からなる構造系を考え、点 i, i', j, j' で囲まれた要素を扇形板要素 ij とよぶことにし、また ii' および jj' を節線 ii' および節線 jj' とよぶことにする。

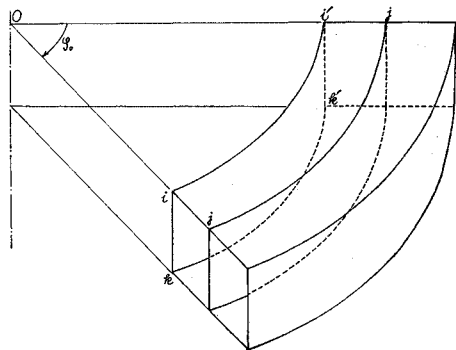


図-1 薄肉曲線ばり

図-2 に示すように、基準座標系を $O-r-y-\varphi$ とし、要素の局所座標系を $O'-s$ とする。基準座標軸方向の変位をそれぞれ u, v, w とし、 φ 軸まわりの回転を θ とする。節線 ii' における曲率半径を R_i 、また各座標軸方向の変位、回転をそれぞれ u_i, v_i, w_i, θ_i とし、同様に節線 jj' における曲率半径、変位、回転をそれぞれ $R_j, u_j, v_j, w_j, \theta_j$ と表わす。また、要素の板幅を b とす

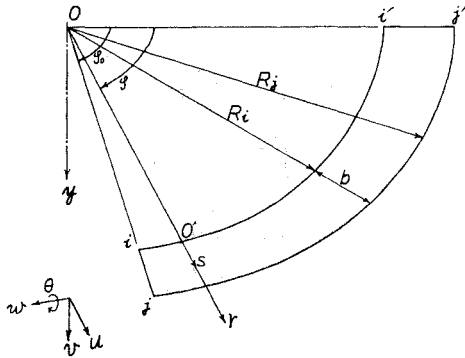


図-2 扇形板要素

る。

扇形板が半径方向とはり軸方向に直交異方性を有するものとし、面内変形と面外変形の間に相互の連成がないものと仮定すれば、次に述べる手順で扇形板要素の剛性マトリクスを導くことができる。等方性を有する場合はこの特殊な場合と考えればよい。

極座標表示された平板の平衡方程式は次の3式である。

$$\frac{1}{r}N'_{\varphi} + N'_{\varphi r} + \frac{2}{r}N_{\varphi r} + p_{\varphi} = 0 \quad (1\cdot a)$$

$$\frac{1}{r}N'_{\varphi r} + N_r + \frac{1}{r}(N_r - N_{\varphi}) + p_r = 0 \quad (1\cdot b)$$

$$\frac{1}{r^2}M_{\varphi}'' + \frac{2}{r}M'_{\varphi r} + M_r + \frac{1}{r}\left(\frac{2}{r}M'_{\varphi r} + 2M_r - M_{\varphi}\right) + p_y = 0 \quad (1\cdot c)$$

ここで、()' = \partial() / \partial\varphi, ()\dot{ } = \partial() / \partial r とし、N_{\varphi}, N_r, N_{\varphi r} は応力、M_{\varphi}, M_r, M_{\varphi r} は曲げおよびねじりモーメントであり、p_{\varphi}, p_r, p_y はそれぞれ \varphi, r, y 軸方向の単位面積当たり分布荷重である。

面内ひずみを \varepsilon_{\varphi}, \varepsilon_r, r_{\varphi r}, 面外ひずみを \chi_{\varphi}, \chi_r, \chi_{\varphi r} とすれば、応力とひずみの関係は次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} N_{\varphi} \\ N_r \\ N_{\varphi r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{\varphi} & \nu_r F_{\varphi} & 0 \\ \nu_{\varphi} F_r & F_r & 0 \\ 0 & 0 & F_h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\varphi} \\ \varepsilon_r \\ r_{\varphi r} \end{Bmatrix} \quad (2\cdot a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{\varphi} \\ M_r \\ M_{\varphi r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{\varphi} & \nu_r D_{\varphi} & 0 \\ \nu_{\varphi} D_r & D_r & 0 \\ 0 & 0 & D_h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{\varphi} \\ \chi_r \\ \chi_{\varphi r} \end{Bmatrix} \quad (2\cdot b)$$

ひずみと変位の関係は次式で表示される。

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}w' \quad (3\cdot a)$$

$$\varepsilon_r = -u' \quad (3\cdot b)$$

$$r_{\varphi r} = \frac{1}{r}u' + w' - \frac{w}{r} \quad (3\cdot c)$$

$$\chi_{\varphi} = -\frac{1}{r}v' - \frac{1}{r^2}v'' \quad (3\cdot d)$$

$$\chi_r = -v' \quad (3\cdot e)$$

$$\chi_{\varphi r} = -\frac{1}{r}v' + \frac{1}{r^2}v'' \quad (3\cdot f)$$

要素 ij について変位関数を次のように仮定する。

$$w(\varphi, s) = w^{(i)}(s)w_i(\varphi) + w^{(j)}(s)w_j(\varphi) \quad (4\cdot a)$$

$$u(\varphi, s) = u^{(i)}(s)u_i(\varphi) + u^{(j)}(s)u_j(\varphi) \quad (4\cdot b)$$

$$v(\varphi, s) = v^{(i)}(s)v_i(\varphi) + \theta^{(i)}(s)\theta_i(\varphi) + v^{(j)}(s)v_j(\varphi) + \theta^{(j)}(s)\theta_j(\varphi) \quad (4\cdot c)$$

ただし、

$$w^{(i)}(s) = u^{(i)}(s) = 1 - \frac{s}{b} \quad (5\cdot a)$$

$$w^{(j)}(s) = u^{(j)}(s) = \frac{s}{b} \quad (5\cdot b)$$

$$v^{(i)}(s) = 1 - \frac{3}{b^2}s^2 + \frac{2}{b^3}s^3 \quad (5\cdot c)$$

$$\theta^{(i)}(s) = s - \frac{2}{b}s^2 + \frac{1}{b^2}s^3 \quad (5\cdot d)$$

$$v^{(j)}(s) = \frac{3}{b^2}s^2 - \frac{2}{b^3}s^3 \quad (5\cdot e)$$

$$\theta^{(j)}(s) = -\frac{1}{b}s^2 + \frac{1}{b^2}s^3 \quad (5\cdot f)$$

式(1)の平衡方程式に対して、式(4)のように仮定された変位関数を用いて、重みつき残差法としての Galerkin 法を適用すれば、次の8式を導くことができる。

$$\int_0^b \left(\frac{1}{R_i+s} N_{\varphi}' + N_{\varphi r}' + \frac{2}{R_i+s} N_{\varphi r} + p_{\varphi} \right) (R_i + s) w^{(i)} ds = 0 \quad (6\cdot a)$$

$$\int_0^b \left(\frac{1}{R_i+s} N_{\varphi}' + N_{\varphi r}' + \frac{2}{R_i+s} N_{\varphi r} + p_{\varphi} \right) (R_i + s) w^{(j)} ds = 0 \quad (6\cdot b)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{1}{R_i+s} N_{\varphi r}' + N_r + \frac{1}{R_i+s} (N_r - N_{\varphi}) + p_r \right\} (R_i + s) u^{(i)} ds = 0 \quad (6\cdot c)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{1}{R_i+s} N_{\varphi r}' + N_r + \frac{1}{R_i+s} (N_r - N_{\varphi}) + p_r \right\} (R_i + s) u^{(j)} ds = 0 \quad (6\cdot d)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{1}{(R_i+s)^2} M_{\varphi}'' + \frac{2}{R_i+s} M_{\varphi r}' + M_r + \frac{1}{R_i+s} \left(\frac{2}{R_i+s} M_{\varphi r}' + 2M_r - M_{\varphi} \right) + p_y \right\} (R_i + s) v^{(i)} ds = 0 \quad (6\cdot e)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{1}{(R_i+s)^2} M_{\varphi}'' + \frac{2}{R_i+s} M_{\varphi r}' + M_r + \frac{1}{R_i+s} \left(\frac{2}{R_i+s} M_{\varphi r}' + 2M_r - M_{\varphi} \right) + p_y \right\} (R_i + s) v^{(j)} ds = 0 \quad (6\cdot f)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{1}{(R_i+s)^2} M_{\varphi}'' + \frac{2}{R_i+s} M_{\varphi r}' + M_r \right\} (R_i + s) v^{(i)} ds = 0 \quad (6\cdot g)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{1}{(R_i+s)^2} M_{\varphi}'' + \frac{2}{R_i+s} M_{\varphi r}' + M_r \right\} (R_i + s) v^{(j)} ds = 0 \quad (6\cdot h)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{R_i+s} \left(\frac{2}{R_i+s} M_{\varphi r'} + 2 M_r - M_{\varphi} \right) \\
 & + p_y \} (R_i+s) \theta^{(i)} ds = 0 \dots\dots\dots (6 \cdot g)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^b \left\{ \frac{1}{(R_i+s)^2} M_{\varphi}'' + \frac{2}{R_i+s} M_{\varphi r}'' + M_r \dots \right. \\
 & + \frac{1}{R_i+s} \left(\frac{2}{R_i+s} M_{\varphi r'} + 2 M_r - M_{\varphi} \right) \\
 & \left. + p_y \right\} (R_i+s) \theta^{(j)} ds = 0 \dots\dots\dots (6 \cdot h)
 \end{aligned}$$

ここで、残差に対する重みとして内挿関数 $u^{(i)}, u^{(j)}$,
 \dots を (R_i+s) 倍したものをを用いていることに注目する
 必要がある (この点に関しては脚注参照)。

式(6)の $\partial^2/\partial s^2$ 項および $\partial/\partial s$ 項を部分積分すれば、
 $w^{(i)}, w^{(j)}, u^{(i)}, u^{(j)}, v^{(i)}, v^{(j)}, \theta^{(i)}, \theta^{(j)}$ の定義によ
 って次式が導かれる*。

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi r}^{(i)}(\varphi) = & -\frac{1}{R_i} \int_0^b \{ (N_{\varphi}' + N_{\varphi r}) w^{(i)} \\
 & - N_{\varphi r} (R_i+s) \dot{w}^{(i)} + p_{\varphi} (R_i \\
 & + s) w^{(i)} \} ds \dots\dots\dots (7 \cdot a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi r}^{(j)}(\varphi) = & -\frac{1}{R_j} \int_0^b \{ (N_{\varphi}' + N_{\varphi r}) w^{(j)} \\
 & - N_{\varphi r} (R_i+s) \dot{w}^{(j)} + p_{\varphi} \\
 & + (R_i+s) w^{(j)} \} ds \dots\dots\dots (7 \cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_r^{(i)}(\varphi) = & -\frac{1}{R_i} \int_0^b \{ (N_{\varphi r}' - N_{\varphi}) u^{(i)} \\
 & - N_r (R_i+s) \dot{u}^{(i)} + p_r (R_i \\
 & + s) u^{(i)} \} ds \dots\dots\dots (7 \cdot c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_r^{(j)}(\varphi) = & -\frac{1}{R_j} \int_0^b \{ (N_{\varphi r}' - N_{\varphi}) u^{(j)} \\
 & - N_r (R_i+s) \dot{u}^{(j)} + p_r (R_i \\
 & + s) u^{(j)} \} ds \dots\dots\dots (7 \cdot d)
 \end{aligned}$$

$$Q_r^{(i)}(\varphi) = -\frac{1}{R_i} \int_0^b \left\{ \frac{1}{R_i+s} (M_{\varphi}'' + 2 M_{\varphi r}') v^{(i)} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - (2 M_{\varphi r}' - M_{\varphi}) \dot{v}^{(i)} \\
 & + M_r (R_i+s) \ddot{v}^{(i)} \\
 & \left. + p_y (R_i+s) v^{(i)} \right\} ds \dots\dots\dots (7 \cdot e)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_r^{(j)}(\varphi) = & -\frac{1}{R_j} \int_0^b \left\{ \frac{1}{R_i+s} (M_{\varphi}'' + 2 M_{\varphi r}') v^{(j)} \right. \\
 & - (2 M_{\varphi r}' - M_{\varphi}) \dot{v}^{(j)} \\
 & + M_r (R_i+s) \ddot{v}^{(j)} \\
 & \left. + p_y (R_i+s) v^{(j)} \right\} ds \dots\dots\dots (7 \cdot f)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_r^{(i)}(\varphi) = & -\frac{1}{R_i} \int_0^b \left\{ \frac{1}{R_i+s} (M_{\varphi}'' + 2 M_{\varphi r}') \theta^{(i)} \right. \\
 & - (2 M_{\varphi r}' - M_{\varphi}) \dot{\theta}^{(i)} \\
 & + M_r (R_i+s) \ddot{\theta}^{(i)} \\
 & \left. + p_y (R_i+s) \theta^{(i)} \right\} ds \dots\dots\dots (7 \cdot g)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_r^{(j)}(\varphi) = & -\frac{1}{R_j} \int_0^b \left\{ \frac{1}{R_i+s} (M_{\varphi}'' + 2 M_{\varphi r}') \theta^{(j)} \right. \\
 & - (2 M_{\varphi r}' - M_{\varphi}) \dot{\theta}^{(j)} \\
 & + M_r (R_i+s) \ddot{\theta}^{(j)} \\
 & \left. + p_y (R_i+s) \theta^{(j)} \right\} ds \dots\dots\dots (7 \cdot h)
 \end{aligned}$$

ここで、 $N_{\varphi r}^{(i)}, N_{\varphi r}^{(j)}, N_r^{(i)}, N_r^{(j)}, Q_r^{(i)}, Q_r^{(j)}$,
 $M_r^{(i)}, M_r^{(j)}$ はそれぞれ、節線 ii', jj' に作用する φ, r ,
 y 軸方向外力荷重および φ 軸まわり外力モーメントで
 ある。ただし、 $Q_r^{(i)}, Q_r^{(j)}$ は次式で表わされる等価せん断力
 を考えている。

$$\begin{aligned}
 Q_r^{(i)} = & - \left[M_r' + \frac{2}{R_i+s} M_{\varphi}' r \right. \\
 & \left. + \frac{1}{R_i+s} (M_r - M_{\varphi}) \right]_{s=0} \dots\dots\dots (8 \cdot a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_r^{(j)} = & \left[M_r' + \frac{2}{R_i+s} M_{\varphi}' r \right. \\
 & \left. + \frac{1}{R_i+s} (M_r - M_{\varphi}) \right]_{s=b} \dots\dots\dots (8 \cdot b)
 \end{aligned}$$

式(7)から式(2), (3), (4), (5)を利用して変形すれば、
 次のマトリクス表示式が導かれる**。

$$\begin{aligned}
 \{P\} = & \left[[K_1^{pl}] \left(\frac{d}{d\varphi} \right)^4 + [K_2^{pl}] \left(\frac{d}{d\varphi} \right)^2 \right. \\
 & \left. + [K_3^{pl}] \left(\frac{d}{d\varphi} \right) + [K_4^{pl}] \right] \{\delta\} \dots\dots (9)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\{P\}$ および $\{\delta\}$ は節線外力および節線変位の
 ベクトルであり、次に示すものである。

$$\{P\} = \begin{pmatrix} N_{\varphi r}^{(i)}(\varphi) \\ N_r^{(i)}(\varphi) \\ Q_r^{(i)}(\varphi) \\ M_r^{(i)}(\varphi) \\ N_{\varphi r}^{(j)}(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \{\delta\} = \begin{pmatrix} w_i(\varphi) \\ u_i(\varphi) \\ v_i(\varphi) \\ \theta_i(\varphi) \\ w_j(\varphi) \end{pmatrix} \dots (10)$$

(脚注) 重みつき残差法としての Galerkin 法あるいは仮想仕事の原理は最小ポテンシャルエネルギー原理と比べて、自己随伴型のみならず非自己随伴型の微分方程式に対しても適用可能であることが利点である。しかしながら、その場合変位関数に課せられる条件は変分学上許容でありさえすればよく、その結果として剛性マトリクスの対称性などが必ずしも保証されないことは注意すべきである。

現在扱っている微小変位弾性学の問題においては、方程式は自己随伴型であり、したがって Maxwell-Betti の相反作用則が成立つことがわかっている。最小ポテンシャルエネルギー原理から出発する時には、必然的にこの法則は充足されるけれども、Galerkin 法を基礎にする時には、重み関数の選択に注意を払わないとこの法則と矛盾する結果を得ることがある。本論では前述のような重み関数を選ぶことによって、マトリクスの対称性、ひいては相反作用則の成立を確保している。この結果は最小ポテンシャルエネルギー原理に基づく Ritz 法の場合とほとんど同じことになる。曲線構造の場合には仮想仕事の原理を適用するに際してもこの点は同様であることを指摘しておく。

* この誘導過程の詳細は文献 44) を参照されたい。

** このように本論では変分原理を利用して偏微分方程式を常微分方程式に変換する Kantrovich 法を基に有限帯板法を定式化している。

$$\begin{pmatrix} N_r^{(j)}(\varphi) \\ Q_r^{(j)}(\varphi) \\ M_r^{(j)}(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_j(\varphi) \\ v_j(\varphi) \\ \theta_j(\varphi) \end{pmatrix}$$

$[K_1^{pl}]$, $[K_2^{pl}]$, $[K_3^{pl}]$ および $[K_4^{pl}]$ は剛性マトリクスで次に示すものである。

a) $[K_1^{pl}]$ マトリクス

$(i, j) = 0$ (次に示す以外のマトリクス成分)

$$(3, 3) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(i)}v^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(3, 4) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(i)}v^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(3, 7) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(j)}v^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(3, 8) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(j)}v^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(4, 3) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(i)}\theta^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(4, 4) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(i)}\theta^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(4, 7) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(j)}\theta^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(4, 8) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(j)}\theta^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(7, 3) = \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(i)}v^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(7, 4) = \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{\theta^{(i)}v^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(7, 7) = \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(j)}v^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(7, 8) = \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{\theta^{(j)}v^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(8, 3) = \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(i)}\theta^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(8, 4) = \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{\theta^{(i)}\theta^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(8, 7) = \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(j)}\theta^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds$$

$$(8, 8) = \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{\theta^{(j)}\theta^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds$$

b) $[K_2^{pl}]$ マトリクス

$(i, j) = 0$ (次に示す以外のマトリクス成分)

$$(1, 1) = -\frac{F_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{w^{(i)}w^{(i)}}{R_i+s} ds$$

$$(1, 5) = -\frac{F_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{w^{(j)}w^{(i)}}{R_i+s} ds$$

$$(2, 2) = -\frac{F_k}{R_i} \int_0^b \frac{u^{(i)}u^{(i)}}{R_i+s} ds$$

$$(2, 6) = -\frac{F_k}{R_i} \int_0^b \frac{u^{(j)}u^{(i)}}{R_i+s} ds$$

$$(3, 3) = -\frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(i)}v^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_\varphi + 4D_k}{R_i}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \int_0^b \frac{\dot{v}^{(i)}v^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{v^{(i)}\dot{v}^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} \\ & + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\ddot{v}^{(i)}v^{(i)}}{R_i+s} ds - \frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(i)}\dot{v}^{(i)}}{R_i+s} ds \\ & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(i)}\ddot{v}^{(i)}}{R_i+s} ds \end{aligned}$$

$$(3, 4) = -\frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(i)}v^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_\varphi + 4D_k}{R_i}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(i)}v^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{\theta^{(i)}\dot{v}^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} \\ & + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\ddot{\theta}^{(i)}v^{(i)}}{R_i+s} ds - \frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(i)}\dot{v}^{(i)}}{R_i+s} ds \\ & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(i)}\ddot{v}^{(i)}}{R_i+s} ds \end{aligned}$$

$$(3, 7) = -\frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(j)}v^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_\varphi + 4D_k}{R_i}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \int_0^b \frac{\dot{v}^{(j)}v^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{v^{(j)}\dot{v}^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} \\ & + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\ddot{v}^{(j)}v^{(i)}}{R_i+s} ds - \frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(j)}\dot{v}^{(i)}}{R_i+s} ds \\ & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(j)}\ddot{v}^{(i)}}{R_i+s} ds \end{aligned}$$

$$(3, 8) = -\frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(j)}v^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_\varphi + 4D_k}{R_i}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(j)}v^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{\theta^{(j)}\dot{v}^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} \\ & + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\ddot{\theta}^{(j)}v^{(i)}}{R_i+s} ds - \frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(j)}\dot{v}^{(i)}}{R_i+s} ds \\ & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(j)}\ddot{v}^{(i)}}{R_i+s} ds \end{aligned}$$

$$(4, 3) = -\frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(i)}\theta^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_\varphi + 4D_k}{R_i}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \int_0^b \frac{\dot{v}^{(i)}\theta^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{v^{(i)}\dot{\theta}^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} \\ & + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\ddot{v}^{(i)}\theta^{(i)}}{R_i+s} ds - \frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(i)}\dot{\theta}^{(i)}}{R_i+s} ds \\ & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(i)}\ddot{\theta}^{(i)}}{R_i+s} ds \end{aligned}$$

$$(4, 4) = -\frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(i)}\theta^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_\varphi + 4D_k}{R_i}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(i)}\theta^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{\theta^{(i)}\dot{\theta}^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} \\ & + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\ddot{\theta}^{(i)}\theta^{(i)}}{R_i+s} ds - \frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(i)}\dot{\theta}^{(i)}}{R_i+s} ds \\ & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(i)}\ddot{\theta}^{(i)}}{R_i+s} ds \end{aligned}$$

$$(4, 7) = -\frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(j)}\theta^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_\varphi + 4D_k}{R_i}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \int_0^b \frac{\dot{v}^{(j)}\theta^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{v^{(j)}\dot{\theta}^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} \\ & + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\ddot{v}^{(j)}\theta^{(i)}}{R_i+s} ds - \frac{4D_k}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(j)}\dot{\theta}^{(i)}}{R_i+s} ds \end{aligned}$$

$$(4, 8) = -\frac{\nu_{\varphi} D_r}{R_i} \int_0^b \frac{v^{(j)} \dot{\theta}^{(i)}}{R_i+s} ds + \frac{4 D_k}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(j)} \theta^{(i)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_{\varphi} + 4 D_k}{R_i} \cdot \left\{ \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(j)} \theta^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{\theta^{(j)} \dot{\theta}^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} + \frac{\nu_r D_{\varphi}}{R_i} \int_0^b \frac{\ddot{\theta}^{(j)} \theta^{(i)}}{R_i+s} ds - \frac{4 D_k}{R_i} \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(j)} \dot{\theta}^{(i)}}{R_i+s} ds + \frac{\nu_{\varphi} D_r}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(j)} \ddot{\theta}^{(i)}}{R_i+s} ds$$

$$(5, 1) = -\frac{F_{\varphi}}{R_j} \int_0^b \frac{w^{(i)} w^{(j)}}{R_i+s} ds$$

$$(5, 5) = -\frac{F_{\varphi}}{R_j} \int_0^b \frac{w^{(j)} w^{(i)}}{R_i+s} ds$$

$$(6, 2) = -\frac{F_k}{R_j} \int_0^b \frac{u^{(i)} u^{(j)}}{R_i+s} ds$$

$$(6, 6) = -\frac{F_k}{R_j} \int_0^b \frac{u^{(j)} u^{(i)}}{R_i+s} ds$$

$$(7, 3) = -\frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(i)} v^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_{\varphi} + 4 D_k}{R_j} \cdot \left\{ \int_0^b \frac{v^{(i)} v^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{v^{(j)} v^{(i)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} + \frac{\nu_r D_{\varphi}}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{v}^{(i)} v^{(j)}}{R_i+s} ds - \frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(i)} \dot{v}^{(j)}}{R_i+s} ds + \frac{\nu_{\varphi} D_r}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(i)} \dot{v}^{(j)}}{R_i+s} ds$$

$$(7, 4) = -\frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{\theta^{(i)} v^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_{\varphi} + 4 D_k}{R_j} \cdot \left\{ \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(i)} v^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{\theta^{(i)} \dot{v}^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} + \frac{\nu_r D_{\varphi}}{R_j} \int_0^b \frac{\ddot{\theta}^{(i)} v^{(j)}}{R_i+s} ds - \frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(i)} \dot{v}^{(j)}}{R_i+s} ds + \frac{\nu_{\varphi} D_r}{R_j} \int_0^b \frac{\theta^{(i)} \ddot{v}^{(j)}}{R_i+s} ds$$

$$(7, 7) = -\frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(j)} v^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_{\varphi} + 4 D_k}{R_j} \cdot \left\{ \int_0^b \frac{v^{(j)} v^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{v^{(j)} v^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} + \frac{\nu_r D_{\varphi}}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{v}^{(j)} v^{(j)}}{R_i+s} ds - \frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(j)} \dot{v}^{(j)}}{R_i+s} ds + \frac{\nu_{\varphi} D_r}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(j)} \dot{v}^{(j)}}{R_i+s} ds$$

$$(7, 8) = -\frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{\theta^{(j)} v^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_{\varphi} + 4 D_k}{R_j} \cdot \left\{ \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(j)} v^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{\theta^{(j)} \dot{v}^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} + \frac{\nu_r D_{\varphi}}{R_j} \int_0^b \frac{\ddot{\theta}^{(j)} v^{(j)}}{R_i+s} ds - \frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(j)} \dot{v}^{(j)}}{R_i+s} ds + \frac{\nu_{\varphi} D_r}{R_j} \int_0^b \frac{\theta^{(j)} \ddot{v}^{(j)}}{R_i+s} ds$$

$$(8, 3) = -\frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(i)} \theta^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_{\varphi} + 4 D_k}{R_j}$$

$$\cdot \left\{ \int_0^b \frac{v^{(i)} \theta^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{v^{(i)} \dot{\theta}^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} + \frac{\nu_r D_{\varphi}}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{v}^{(i)} \theta^{(j)}}{R_i+s} ds - \frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(i)} \dot{\theta}^{(j)}}{R_i+s} ds + \frac{\nu_{\varphi} D_r}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)}}{R_i+s} ds$$

$$(8, 4) = -\frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{\theta^{(i)} \theta^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_{\varphi} + 4 D_k}{R_j} \cdot \left\{ \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(i)} \theta^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{\theta^{(i)} \dot{\theta}^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} + \frac{\nu_r D_{\varphi}}{R_j} \int_0^b \frac{\ddot{\theta}^{(i)} \theta^{(j)}}{R_i+s} ds - \frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(i)} \dot{\theta}^{(j)}}{R_i+s} ds + \frac{\nu_{\varphi} D_r}{R_j} \int_0^b \frac{\theta^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)}}{R_i+s} ds$$

$$(8, 7) = -\frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(j)} \theta^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_{\varphi} + 4 D_k}{R_j} \cdot \left\{ \int_0^b \frac{v^{(j)} \theta^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{v^{(j)} \dot{\theta}^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} + \frac{\nu_r D_{\varphi}}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{v}^{(j)} \theta^{(j)}}{R_i+s} ds - \frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(j)} \dot{\theta}^{(j)}}{R_i+s} ds + \frac{\nu_{\varphi} D_r}{R_j} \int_0^b \frac{v^{(j)} \ddot{\theta}^{(j)}}{R_i+s} ds$$

$$(8, 8) = -\frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{\theta^{(j)} \theta^{(j)}}{(R_i+s)^3} ds + \frac{D_{\varphi} + 4 D_k}{R_j} \cdot \left\{ \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(j)} \theta^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds + \int_0^b \frac{\theta^{(j)} \dot{\theta}^{(j)}}{(R_i+s)^2} ds \right\} + \frac{\nu_r D_{\varphi}}{R_j} \int_0^b \frac{\ddot{\theta}^{(j)} \theta^{(j)}}{R_i+s} ds - \frac{4 D_k}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(j)} \dot{\theta}^{(j)}}{R_i+s} ds + \frac{\nu_{\varphi} D_r}{R_j} \int_0^b \frac{\theta^{(j)} \ddot{\theta}^{(j)}}{R_i+s} ds$$

c) $[K_s^{pl}]$ マトリクス

$(i, j) = 0$ (次に示す以外のマトリクス成分)

$$(1, 2) = -\frac{F_{\varphi} + F_k}{R_i} \int_0^b \frac{u^{(i)} w^{(i)}}{R_i+s} ds - \frac{\nu_r F_{\varphi}}{R_i} \int_0^b \frac{\dot{u}^{(i)} w^{(i)}}{R_i+s} ds + \frac{F_k}{R_i} \int_0^b \frac{u^{(i)} \dot{w}^{(i)}}{R_i+s} ds$$

$$(1, 6) = -\frac{F_{\varphi} + F_k}{R_i} \int_0^b \frac{u^{(j)} w^{(i)}}{R_i+s} ds - \frac{\nu_r F_{\varphi}}{R_i} \int_0^b \frac{\dot{u}^{(j)} w^{(i)}}{R_i+s} ds + \frac{F_k}{R_i} \int_0^b \frac{u^{(j)} \dot{w}^{(i)}}{R_i+s} ds$$

$$(2, 1) = \frac{F_{\varphi} + F_k}{R_i} \int_0^b \frac{w^{(i)} u^{(i)}}{R_i+s} ds + \frac{\nu_{\varphi} F_r}{R_i} \int_0^b \frac{w^{(i)} \dot{u}^{(i)}}{R_i+s} ds - \frac{F_k}{R_i} \int_0^b \frac{\dot{w}^{(i)} u^{(i)}}{R_i+s} ds$$

$$(2, 5) = \frac{F_{\varphi} + F_k}{R_i} \int_0^b \frac{w^{(j)} u^{(i)}}{R_i+s} ds + \frac{\nu_{\varphi} F_r}{R_i} \int_0^b \frac{w^{(j)} \dot{u}^{(i)}}{R_i+s} ds - \frac{F_k}{R_i} \int_0^b \frac{\dot{w}^{(j)} u^{(i)}}{R_i+s} ds$$

$$(5, 2) = -\frac{F_{\varphi} + F_k}{R_j} \int_0^b \frac{u^{(i)} w^{(j)}}{R_i+s} ds - \frac{\nu_r F_{\varphi}}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{u}^{(i)} w^{(j)}}{R_i+s} ds + \frac{F_k}{R_j} \int_0^b \frac{u^{(i)} \dot{w}^{(j)}}{R_i+s} ds$$

$$(5, 6) = -\frac{F_\varphi + F_k}{R_j} \int_0^b \frac{u^{(j)} w^{(j)}}{R_i + s} ds - \frac{\nu_r F_\varphi}{R_j} \int_0^b \dot{u}^{(j)} w^{(j)} ds + \frac{F_k}{R_j} \int_0^b u^{(j)} \dot{w}^{(j)} ds$$

$$(6, 1) = \frac{F_\varphi + F_k}{R_j} \int_0^b \frac{w^{(i)} u^{(j)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r F_r}{R_j} \int_0^b w^{(i)} \dot{u}^{(j)} ds - \frac{F_k}{R_j} \int_0^b \dot{w}^{(i)} u^{(j)} ds$$

$$(6, 5) = \frac{F_\varphi + F_k}{R_j} \int_0^b \frac{w^{(j)} u^{(j)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r F_r}{R_j} \int_0^b w^{(j)} \dot{u}^{(j)} ds - \frac{F_k}{R_j} \int_0^b \dot{w}^{(j)} u^{(j)} ds$$

d) $[K_i^{\beta l}]$ マトリクス

$(i, j) = 0$ (次に示す以外のマトリクス成分)

$$(1, 1) = \frac{F_k}{R_i} \left\{ \int_0^b \frac{w^{(i)} w^{(i)}}{R_i + s} ds - \int_0^b \dot{w}^{(i)} w^{(i)} ds - \int_0^b w^{(i)} \dot{w}^{(i)} ds + \int_0^b \dot{w}^{(i)} \dot{w}^{(i)} (R_i + s) ds \right\}$$

$$(1, 5) = \frac{F_k}{R_i} \left\{ \int_0^b \frac{w^{(j)} w^{(i)}}{R_i + s} ds - \int_0^b \dot{w}^{(j)} w^{(i)} ds - \int_0^b w^{(j)} \dot{w}^{(i)} ds + \int_0^b \dot{w}^{(j)} \dot{w}^{(i)} (R_i + s) ds \right\}$$

$$(2, 2) = \frac{F_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{u^{(i)} u^{(i)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r F_\varphi}{R_i} \int_0^b \dot{u}^{(i)} u^{(i)} ds + \frac{\nu_r F_r}{R_i} \int_0^b u^{(i)} \dot{u}^{(i)} ds + \frac{F_r}{R_i} \int_0^b \dot{u}^{(i)} \dot{u}^{(i)} (R_i + s) ds$$

$$(2, 6) = \frac{F_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{u^{(j)} u^{(i)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r F_\varphi}{R_i} \int_0^b \dot{u}^{(j)} u^{(i)} ds + \frac{\nu_r F_r}{R_i} \int_0^b u^{(j)} \dot{u}^{(i)} ds + \frac{F_r}{R_i} \int_0^b \dot{u}^{(j)} \dot{u}^{(i)} (R_i + s) ds$$

$$(3, 3) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\psi^{(i)} \psi^{(i)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \dot{\psi}^{(i)} \psi^{(i)} ds + \frac{\nu_r D_r}{R_i} \int_0^b \psi^{(i)} \dot{\psi}^{(i)} ds + \frac{D_r}{R_i} \int_0^b \dot{\psi}^{(i)} \dot{\psi}^{(i)} (R_i + s) ds$$

$$(3, 4) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(i)} \psi^{(i)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \dot{\theta}^{(i)} \psi^{(i)} ds + \frac{\nu_r D_r}{R_i} \int_0^b \theta^{(i)} \dot{\psi}^{(i)} ds + \frac{D_r}{R_i} \int_0^b \dot{\theta}^{(i)} \dot{\psi}^{(i)} (R_i + s) ds$$

$$(3, 7) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\psi^{(j)} \psi^{(i)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \dot{\psi}^{(j)} \psi^{(i)} ds + \frac{\nu_r D_r}{R_i} \int_0^b \psi^{(j)} \dot{\psi}^{(i)} ds + \frac{D_r}{R_i} \int_0^b \dot{\psi}^{(j)} \dot{\psi}^{(i)} (R_i + s) ds$$

$$(3, 8) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(j)} \psi^{(i)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \dot{\theta}^{(j)} \psi^{(i)} ds + \frac{\nu_r D_r}{R_i} \int_0^b \theta^{(j)} \dot{\psi}^{(i)} ds + \frac{D_r}{R_i} \int_0^b \dot{\theta}^{(j)} \dot{\psi}^{(i)} (R_i + s) ds$$

$$(4, 3) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\psi^{(i)} \theta^{(i)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \dot{\psi}^{(i)} \theta^{(i)} ds + \frac{\nu_r D_r}{R_i} \int_0^b \psi^{(i)} \dot{\theta}^{(i)} ds + \frac{D_r}{R_i} \int_0^b \dot{\psi}^{(i)} \dot{\theta}^{(i)} (R_i + s) ds$$

$$(4, 4) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(i)} \theta^{(i)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \dot{\theta}^{(i)} \theta^{(i)} ds + \frac{\nu_r D_r}{R_i} \int_0^b \theta^{(i)} \dot{\theta}^{(i)} ds + \frac{D_r}{R_i} \int_0^b \dot{\theta}^{(i)} \dot{\theta}^{(i)} (R_i + s) ds$$

$$(4, 7) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\psi^{(j)} \theta^{(i)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \dot{\psi}^{(j)} \theta^{(i)} ds + \frac{\nu_r D_r}{R_i} \int_0^b \psi^{(j)} \dot{\theta}^{(i)} ds + \frac{D_r}{R_i} \int_0^b \dot{\psi}^{(j)} \dot{\theta}^{(i)} (R_i + s) ds$$

$$(4, 8) = \frac{D_\varphi}{R_i} \int_0^b \frac{\theta^{(j)} \theta^{(i)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_i} \int_0^b \dot{\theta}^{(j)} \theta^{(i)} ds + \frac{\nu_r D_r}{R_i} \int_0^b \theta^{(j)} \dot{\theta}^{(i)} ds + \frac{D_r}{R_i} \int_0^b \dot{\theta}^{(j)} \dot{\theta}^{(i)} (R_i + s) ds$$

$$(5, 1) = \frac{F_k}{R_j} \left\{ \int_0^b \frac{w^{(i)} w^{(j)}}{R_i + s} ds - \int_0^b \dot{w}^{(i)} w^{(j)} ds - \int_0^b w^{(i)} \dot{w}^{(j)} ds + \int_0^b \dot{w}^{(i)} \dot{w}^{(j)} (R_i + s) ds \right\}$$

$$(5, 5) = \frac{F_k}{R_j} \left\{ \int_0^b \frac{w^{(j)} w^{(j)}}{R_i + s} ds - \int_0^b \dot{w}^{(j)} w^{(j)} ds - \int_0^b w^{(j)} \dot{w}^{(j)} ds + \int_0^b \dot{w}^{(j)} \dot{w}^{(j)} (R_i + s) ds \right\}$$

$$(6, 2) = \frac{F_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{u^{(i)} u^{(j)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r F_\varphi}{R_j} \int_0^b \dot{u}^{(i)} u^{(j)} ds + \frac{\nu_r F_r}{R_j} \int_0^b u^{(i)} \dot{u}^{(j)} ds + \frac{F_r}{R_j} \int_0^b \dot{u}^{(i)} \dot{u}^{(j)} (R_i + s) ds$$

$$(6, 6) = \frac{F_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{u^{(j)} u^{(j)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r F_\varphi}{R_j} \int_0^b \dot{u}^{(j)} u^{(j)} ds + \frac{\nu_r F_r}{R_j} \int_0^b u^{(j)} \dot{u}^{(j)} ds + \frac{F_r}{R_j} \int_0^b \dot{u}^{(j)} \dot{u}^{(j)} (R_i + s) ds$$

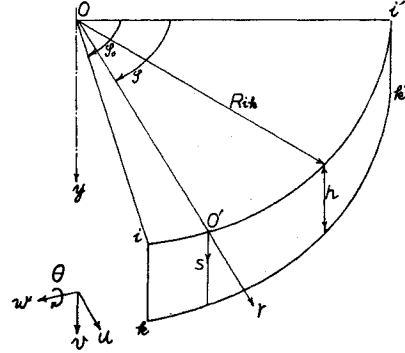
$$(7, 3) = \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{\psi^{(i)} \psi^{(j)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_j} \int_0^b \dot{\psi}^{(i)} \psi^{(j)} ds$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_j} \int_0^b \dot{\psi}^{(i)} \ddot{\psi}^{(j)} ds + \frac{D_r}{R_j} \\
 & \cdot \int_0^b \ddot{\psi}^{(i)} \ddot{\psi}^{(j)} (R_i + s) ds \\
 (7, 4) = & \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(i)} \dot{\psi}^{(j)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_j} \int_0^b \ddot{\theta}^{(i)} \dot{\psi}^{(j)} ds \\
 & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_j} \int_0^b \dot{\theta}^{(i)} \ddot{\psi}^{(j)} ds + \frac{D_r}{R_j} \\
 & \cdot \int_0^b \ddot{\theta}^{(i)} \ddot{\psi}^{(j)} (R_i + s) ds \\
 (7, 7) = & \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{\psi}^{(i)} \dot{\psi}^{(j)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_j} \int_0^b \ddot{\psi}^{(i)} \dot{\psi}^{(j)} ds \\
 & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_j} \int_0^b \dot{\psi}^{(i)} \ddot{\psi}^{(j)} ds + \frac{D_r}{R_j} \\
 & \cdot \int_0^b \ddot{\psi}^{(i)} \ddot{\psi}^{(j)} (R_i + s) ds \\
 (7, 8) = & \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(i)} \dot{\psi}^{(j)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_j} \int_0^b \ddot{\theta}^{(i)} \dot{\psi}^{(j)} ds \\
 & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_j} \int_0^b \dot{\theta}^{(i)} \ddot{\psi}^{(j)} ds + \frac{D_r}{R_j} \\
 & \cdot \int_0^b \ddot{\theta}^{(i)} \ddot{\psi}^{(j)} (R_i + s) ds \\
 (8, 3) = & \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{\psi}^{(i)} \dot{\theta}^{(j)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_j} \int_0^b \ddot{\psi}^{(i)} \dot{\theta}^{(j)} ds \\
 & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_j} \int_0^b \dot{\psi}^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)} ds + \frac{D_r}{R_j} \\
 & \cdot \int_0^b \ddot{\psi}^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)} (R_i + s) ds \\
 (8, 4) = & \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(i)} \dot{\theta}^{(j)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_j} \int_0^b \ddot{\theta}^{(i)} \dot{\theta}^{(j)} ds \\
 & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_j} \int_0^b \dot{\theta}^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)} ds + \frac{D_r}{R_j} \\
 & \cdot \int_0^b \ddot{\theta}^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)} (R_i + s) ds \\
 (8, 7) = & \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{\psi}^{(i)} \dot{\theta}^{(j)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_j} \int_0^b \ddot{\psi}^{(i)} \dot{\theta}^{(j)} ds \\
 & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_j} \int_0^b \dot{\psi}^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)} ds + \frac{D_r}{R_j} \\
 & \cdot \int_0^b \ddot{\psi}^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)} (R_i + s) ds \\
 (8, 8) = & \frac{D_\varphi}{R_j} \int_0^b \frac{\dot{\theta}^{(i)} \dot{\theta}^{(j)}}{R_i + s} ds + \frac{\nu_r D_\varphi}{R_j} \int_0^b \ddot{\theta}^{(i)} \dot{\theta}^{(j)} ds \\
 & + \frac{\nu_\varphi D_r}{R_j} \int_0^b \dot{\theta}^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)} ds + \frac{D_r}{R_j} \\
 & \cdot \int_0^b \ddot{\theta}^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)} (R_i + s) ds
 \end{aligned}$$

以上のマトリクス成分は積分形で与えられているが、実際には、88個の定積分に対して Newton-Cotes の9点公式程度のものを用いて数値積分すればよい。結果は十分な精度でその値を求めることができる。

(3) 曲板要素の剛性マトリクスの誘導

図一1において点 i, i', k, k' で囲まれた要素を曲板要素 ik とよぶことにし、 $\widehat{ii'}$, $\widehat{kk'}$ を節線 ii' , 節線 kk' とよぶことにする。また初期曲率半径を R_{ik} , 要素の幅を h とする。



図一3 曲板要素

図一3 に示すように、基準座標系ならびにその座標方向の変位、節線変位などはすべて扇形板要素の場合と同じ記号で表わすことにし、局所座標系を $0'-s$ とする。

曲板要素は等方性を有するものとし、面内変形と面外変形の間相互の連成がないものとすれば、次の手順で曲板要素の剛性マトリクスを導くことができる。

曲板の φ, y, r 軸方向の平衡方程式は、Donnell の理論⁽⁷⁾にしたがえば次の3式で表わされる。

$$\frac{1}{R_{ik}} N_\varphi' + N_{\varphi y}' + p_\varphi = 0 \dots\dots\dots(11 \cdot a)$$

$$\frac{1}{R_{ik}} N'_{\varphi y} + N_y' + p_y = 0 \dots\dots\dots(11 \cdot b)$$

$$\frac{1}{R_{ik}} M_\varphi'' + \frac{2}{R_{ik}} N_{\varphi y}'' + M_y'' - \frac{N_\varphi}{R_{ik}} + p_r = 0 \dots\dots\dots(11 \cdot c)$$

ここで、 $()' = \partial() / \partial \varphi$, $()'' = \partial() / \partial y$ とし、 N_φ , N_y , $N_{\varphi y}$ は応力、 M_φ , M_y , $M_{\varphi y}$ は曲げおよびねじりモーメントであり、 p_φ , p_y , p_r はそれぞれ φ, y, r 軸方向の単位面積当たり分布荷重である。面内および面外のひずみを $\epsilon_\varphi, \epsilon_y, \tau_{\varphi y}, \chi_\varphi, \chi_y, \chi_{\varphi y}$ とすれば、応力とひずみの関係は次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} N_\varphi \\ N_y \\ N_{\varphi y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F & \nu F & 0 \\ \nu F & F & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} F \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_\varphi \\ \epsilon_y \\ \tau_{\varphi y} \end{Bmatrix} \dots\dots(12 \cdot a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_\varphi \\ M_y \\ M_{\varphi y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_\varphi \\ \chi_y \\ \chi_{\varphi y} \end{Bmatrix} \dots\dots(12 \cdot b)$$

ここで、 ν はポアソン比、 t は板厚、 F, D は板の面内剛性、面外剛性であり、 $F = \frac{Et}{1-\nu^2}$, $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ とする。

ひずみと変位の関係は次式で表示される。

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{R_{ik}} w' + \frac{u}{R_{ik}} \dots\dots\dots(13\cdot a)$$

$$\epsilon_y = v' \dots\dots\dots(13\cdot b)$$

$$r_{\varphi y} = \frac{1}{R_{ik}} v' + w' \dots\dots\dots(13\cdot c)$$

$$\chi_\varphi = -\frac{1}{R_{ik}} u'' \dots\dots\dots(13\cdot d)$$

$$\chi_y = -u'' \dots\dots\dots(13\cdot e)$$

$$\chi_{\varphi y} = -\frac{1}{R_{ik}} u'' \dots\dots\dots(13\cdot f)$$

要素について変位関数を次のように仮定する。

$$w(\varphi, s) = w^{(i)}(s)w_i(\varphi) + w^{(k)}(s)w_k(\varphi) \dots\dots\dots(14\cdot a)$$

$$u(\varphi, s) = u^{(i)}(s)u_i(\varphi) + \theta^{(i)}(s)\theta_i(\varphi) + u^{(k)}(s)u_k(\varphi) + \theta^{(k)}(s)\theta_k(\varphi) \dots\dots(14\cdot b)$$

$$v(\varphi, s) = v^{(i)}(s)v_i(\varphi) + v^{(k)}(s)v_k(\varphi) \dots\dots(14\cdot c)$$

ただし、

$$w^{(i)}(s) = v^{(i)}(s) = 1 - \frac{s}{h} \dots\dots\dots(15\cdot a)$$

$$w^{(k)}(s) = v^{(k)}(s) = \frac{s}{h} \dots\dots\dots(15\cdot b)$$

$$u^{(i)}(s) = 1 - \frac{3}{h^2}s^2 + \frac{2}{h^3}s^3 \dots\dots\dots(15\cdot c)$$

$$\theta^{(i)}(s) = -s + \frac{2}{h}s^2 - \frac{1}{h^2}s^3 \dots\dots\dots(15\cdot d)$$

$$u^{(k)}(s) = \frac{3}{h^2}s^2 - \frac{2}{h^3}s^3 \dots\dots\dots(15\cdot e)$$

$$\theta^{(k)}(s) = \frac{1}{h}s^2 - \frac{1}{h^2}s^3 \dots\dots\dots(15\cdot f)$$

式(11)の平衡方程式に対して、式(14)のように仮定された変位関数を用いて、重みつき残差法としての Galerkin 法を適用すれば、次の 8 式を導くことができる。

$$\int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}} N_\varphi' + N_{\varphi y} + p_\varphi \right) w^{(i)} ds = 0 \dots\dots(16\cdot a)$$

$$\int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}} N_\varphi' + N_{\varphi y} + p_\varphi \right) w^{(k)} ds = 0 \dots\dots(16\cdot b)$$

$$\int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}} N_{\varphi y}' + N_y + p_y \right) v^{(i)} ds = 0 \dots\dots(16\cdot c)$$

$$\int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}} N_{\varphi y}' + N_y + p_y \right) v^{(k)} ds = 0 \dots\dots(16\cdot d)$$

$$\int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}^2} M_\varphi'' + \frac{2}{R_{ik}} M_{\varphi y}' + M_y - \frac{N_\varphi}{R_{ik}} + p_r \right) u^{(i)} ds = 0 \dots\dots(16\cdot e)$$

$$\int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}^2} M_\varphi'' + \frac{2}{R_{ik}} M_{\varphi y}' + M_y - \frac{N_\varphi}{R_{ik}} + p_r \right) u^{(k)} ds = 0 \dots\dots(16\cdot f)$$

$$\int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}^2} M_\varphi'' + \frac{2}{R_{ik}} M_{\varphi y}' + M_y \dots\dots\dots(16\cdot g)$$

$$- \frac{N_\varphi}{R_{ik}} + p_r \Big) \theta^{(i)} ds = 0 \dots\dots\dots(16\cdot g)$$

$$\int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}^2} M_\varphi'' + \frac{2}{R_{ik}} M_{\varphi y}' + M_y - \frac{N_\varphi}{R_{ik}} + p_r \right) \theta^{(k)} ds = 0 \dots\dots\dots(16\cdot h)$$

式(16)の $\partial^2/\partial s^2$ 項および $\partial/\partial s$ 項を部分積分すれば、 $w^{(i)}$, $w^{(k)}$, $u^{(i)}$, $u^{(k)}$, $v^{(i)}$, $v^{(k)}$, $\theta^{(i)}$, $\theta^{(k)}$ の定義によって次式が導かれる。

$$N_{\varphi y}^{(i)}(\varphi) = - \int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}} N_\varphi' w^{(i)} - N_{\varphi y} v^{(i)} + p_\varphi w^{(i)} \right) ds \dots\dots\dots(17\cdot a)$$

$$N_{\varphi y}^{(k)}(\varphi) = - \int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}} N_\varphi' w^{(k)} - N_{\varphi y} v^{(k)} + p_\varphi w^{(k)} \right) ds \dots\dots\dots(17\cdot b)$$

$$N_y^{(i)}(\varphi) = - \int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}} N_{\varphi y}' v^{(i)} - N_y v^{(i)} + p_y v^{(i)} \right) ds \dots\dots\dots(17\cdot c)$$

$$N_y^{(k)}(\varphi) = - \int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}} N_{\varphi y}' v^{(k)} - N_y v^{(k)} + p_y v^{(k)} \right) ds \dots\dots\dots(17\cdot d)$$

$$Q_y^{(i)}(\varphi) = - \int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}^2} M_\varphi'' u^{(i)} - \frac{2}{R_{ik}} M_{\varphi y}' u^{(i)} + M_y u^{(i)} - \frac{N_\varphi}{R_{ik}} u^{(i)} + p_r u^{(i)} \right) ds \dots\dots\dots(17\cdot e)$$

$$Q_y^{(k)}(\varphi) = - \int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}^2} M_\varphi'' u^{(k)} - \frac{2}{R_{ik}} M_{\varphi y}' u^{(k)} + M_y u^{(k)} - \frac{N_\varphi}{R_{ik}} u^{(k)} + p_r u^{(k)} \right) ds \dots\dots\dots(17\cdot f)$$

$$M_y^{(i)}(\varphi) = - \int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}} M_\varphi'' \theta^{(i)} - \frac{2}{R_{ik}} M_{\varphi y}' \theta^{(i)} + M_y \ddot{\theta}^{(i)} - \frac{N_\varphi}{R_{ik}} \theta^{(i)} + p_r \theta^{(i)} \right) ds \dots\dots\dots(17\cdot g)$$

$$M_y^{(k)}(\varphi) = - \int_0^h \left(\frac{1}{R_{ik}} M_\varphi'' \theta^{(k)} - \frac{2}{R_{ik}} M_{\varphi y}' \theta^{(k)} + M_y \ddot{\theta}^{(k)} - \frac{N_\varphi}{R_{ik}} \theta^{(k)} + p_r \theta^{(k)} \right) ds \dots\dots\dots(17\cdot h)$$

ここで、 $N_{\varphi y}^{(i)}$, $N_{\varphi y}^{(k)}$, $N_y^{(i)}$, $N_y^{(k)}$, $Q_y^{(i)}$, $Q_y^{(k)}$, $M_y^{(i)}$, $M_y^{(k)}$ はそれぞれ、節線 ii' , kk' に作用する φ , y , r 軸方向外力荷重および φ 軸まわり外力モーメントである。ただし、 $Q_y^{(i)}$, $Q_y^{(k)}$ は次式で表わされる等価せん断力を考えている。

$$Q_y^{(i)} = - \left[M_y + \frac{2}{R_{ik}} M_{\varphi y}' \right]_{s=0} \dots\dots\dots(18\cdot a)$$

$$Q_y^{(k)} = \left[M_y \cdot + \frac{2}{R_{ik}} M_{\varphi y'} \right]_{s=h} \dots\dots\dots (18 \cdot b)$$

式(17)より式(12), (13), (14), (15)を利用して変形すれば, 次のマトリクス表示式が導かれる。

$$\{P\} = \left[[K_1^{sh}] \left(\frac{d}{d\varphi} \right)^4 + [K_2^{sh}] \left(\frac{d}{d\varphi} \right)^2 + [K_3^{sh}] \left(\frac{d}{d\varphi} \right) + [K_4^{sh}] \right] \{\delta\} \dots\dots\dots (19)$$

ここで, $\{P\}$ および $\{\delta\}$ は節線外力および節線変位のベクトルであり, 次に示すものである。

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} N_{\varphi y}^{(i)}(\varphi) \\ Q_y^{(i)}(\varphi) \\ N_y^{(i)}(\varphi) \\ M_y^{(i)}(\varphi) \\ N_{\varphi y}^{(k)}(\varphi) \\ Q_y^{(k)}(\varphi) \\ N_y^{(k)}(\varphi) \\ M_y^{(k)}(\varphi) \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} w_i(\varphi) \\ u_i(\varphi) \\ v_i(\varphi) \\ \theta_i(\varphi) \\ w_k(\varphi) \\ u_k(\varphi) \\ v_k(\varphi) \\ \theta_k(\varphi) \end{Bmatrix} \dots\dots (20)$$

$[K_1^{sh}]$, $[K_2^{sh}]$, $[K_3^{sh}]$ および $[K_4^{sh}]$ は剛性マトリクスで, 表-1, 2, 3, 4 に示すとおりである。

表-1 K_1^{sh} マトリクス

$$[K_1^{sh}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D\left(\frac{13}{35}\right)\frac{h}{R_{ik}^4} & 0 & D\left(-\frac{11}{210}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^4} & 0 & D\left(\frac{9}{70}\right)\frac{h}{R_{ik}^4} & 0 & D\left(\frac{13}{420}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^4} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D\left(\frac{1}{105}\right)\frac{h^3}{R_{ik}^4} & 0 & D\left(-\frac{13}{420}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^4} & 0 & D\left(-\frac{1}{140}\right)\frac{h^3}{R_{ik}^4} \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & D\left(\frac{13}{35}\right)\frac{h}{R_{ik}^4} & 0 & D\left(\frac{11}{210}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^4} \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & D\left(\frac{1}{105}\right)\frac{h^3}{R_{ik}^4} \end{bmatrix}$$

Sym.

表-2 K_2^{sh} マトリクス

$$[K_2^{sh}] = \begin{bmatrix} F\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & 0 & 0 & 0 & F\left(-\frac{1}{6}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & 0 & 0 & 0 \\ & D\left(-\frac{12}{5}\right)\frac{1}{hR_{ik}^2} & 0 & D\left(\nu + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{R_{ik}^2} & 0 & D\left(\frac{12}{5}\right)\frac{1}{hR_{ik}^2} & 0 & D\left(\frac{1}{5}\right)\frac{1}{R_{ik}^2} \\ & & F\left(-\frac{1-\nu}{6}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & 0 & 0 & 0 & F\left(-\frac{1-\nu}{12}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & 0 \\ & & & D\left(-\frac{4}{15}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & 0 & D\left(-\frac{1}{5}\right)\frac{1}{R_{ik}^2} & 0 & D\left(\frac{1}{15}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} \\ & & & & F\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & D\left(-\frac{12}{5}\right)\frac{1}{hR_{ik}^2} & 0 & D\left(-\nu - \frac{1}{5}\right)\frac{1}{R_{ik}^2} \\ & & & & & & F\left(-\frac{1-\nu}{6}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & 0 \\ & & & & & & & D\left(-\frac{4}{15}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} \end{bmatrix}$$

Sym.

表-3 K_3^{sh} マトリクス

$$[K_3^{sh}] = \begin{bmatrix} 0 & F\left(-\frac{7}{20}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & F\left(-\frac{1-3\nu}{4}\right)\frac{1}{R_{ik}} & F\left(\frac{1}{20}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^2} & 0 & F\left(-\frac{3}{20}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & F\left(-\frac{1+\nu}{4}\right)\frac{1}{R_{ik}} & F\left(-\frac{1}{30}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^2} \\ F\left(\frac{7}{20}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & 0 & 0 & 0 & F\left(\frac{3}{20}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & 0 & 0 & 0 \\ F\left(\frac{1-3\nu}{4}\right)\frac{1}{R_{ik}} & 0 & 0 & 0 & F\left(-\frac{1+\nu}{4}\right)\frac{1}{R_{ik}} & 0 & 0 & 0 \\ F\left(-\frac{1}{20}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^2} & 0 & 0 & 0 & F\left(-\frac{1}{30}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F\left(-\frac{3}{20}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & F\left(\frac{1+\nu}{4}\right)\frac{1}{R_{ik}} & F\left(\frac{1}{30}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^2} & 0 & F\left(-\frac{7}{20}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & F\left(\frac{1-3\nu}{4}\right)\frac{1}{R_{ik}} & F\left(-\frac{1}{20}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^2} \\ F\left(\frac{3}{20}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & 0 & 0 & 0 & F\left(\frac{7}{20}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} & 0 & 0 & 0 \\ F\left(\frac{1+\nu}{4}\right)\frac{1}{R_{ik}} & 0 & 0 & 0 & F\left(-\frac{1-3\nu}{4}\right)\frac{1}{R_{ik}} & 0 & 0 & 0 \\ F\left(\frac{1}{30}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^2} & 0 & 0 & 0 & F\left(\frac{1}{20}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

表-4 $K_1^{s/h}$ マトリクス

$$[K_1^{s/h}] = \begin{bmatrix} F\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & F\left(-\frac{1-\nu}{2}\right)\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left\{ D\left(\frac{12}{h^3}\right) \right. & & & & & \left\{ D\left(-\frac{12}{h^3}\right) \right. & & & & \left\{ D\left(-\frac{6}{h^2}\right) \right. \\ +F\left(\frac{13}{35}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} \left. \right\} F\left(-\frac{1-\nu}{2}\right)\frac{1}{R_{ik}} & +F\left(-\frac{11}{210}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^2} \left. \right\} & 0 & +F\left(\frac{9}{70}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} \left. \right\} & F\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\frac{1}{R_{ik}} & +F\left(\frac{13}{420}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^2} \left. \right\} \\ & F\left(\frac{1}{h}\right) & F\left(\frac{1-\nu}{12}\right)\frac{h}{R_{ik}} & 0 & F\left(-\frac{1-\nu}{2}\right)\frac{1}{R_{ik}} & F\left(-\frac{1}{h}\right) & F\left(-\frac{1-\nu}{12}\right)\frac{h}{R_{ik}} \\ & \left\{ D\left(\frac{4}{h}\right) \right. & & & \left\{ D\left(\frac{6}{h^2}\right) \right. & & & \left\{ D\left(\frac{2}{h}\right) \right. \\ +F\left(\frac{1}{105}\right)\frac{h^3}{R_{ik}^2} \left. \right\} & 0 & +F\left(-\frac{13}{420}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^2} \left. \right\} & F\left(-\frac{1-\nu}{12}\right)\frac{h}{R_{ik}} & +F\left(-\frac{1}{140}\right)\frac{h^3}{R_{ik}^2} \left. \right\} \\ F\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & \left\{ D\left(\frac{12}{h^3}\right) \right. & & & & \left\{ D\left(\frac{6}{h^2}\right) \right. & & & & \left\{ D\left(\frac{6}{h^2}\right) \right. \\ +F\left(\frac{13}{35}\right)\frac{h}{R_{ik}^2} \left. \right\} & F\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\frac{1}{R_{ik}} & +F\left(\frac{11}{210}\right)\frac{h^2}{R_{ik}^2} \left. \right\} & & & & & & & \\ & & F\left(\frac{1}{h}\right) & F\left(\frac{1-\nu}{12}\right)\frac{h}{R_{ik}} & & & & & & & \\ & & \left\{ D\left(\frac{4}{h}\right) \right. & & & & & & & & \left\{ D\left(\frac{4}{h}\right) \right. \\ & & +F\left(\frac{1}{105}\right)\frac{h^3}{R_{ik}^2} \left. \right\} & & & & & & & & +F\left(\frac{1}{105}\right)\frac{h^3}{R_{ik}^2} \left. \right\} \end{bmatrix}$$

Sym.

3. 数値解析例

(1) 両端単純支持された異方性扇形平板の曲げ問題

図-4 に示す両端単純支持の扇形平板を解析する。この問題は文献 38)において、解析および実験が行われている。実験モデルは扇形平板と 6 本の補強 T 型ばりから成る。本解析ではこれを異方性板とみなし、その剛性は文献 28) によって与えられた値を使用した。この平板を等間隔に 5 要素に分割し、図-4 のように節線 11', 22', ..., 66' を定めた。また、軸方向の位置を示す便宜上、等間隔に $R_1, R_2, \dots, R_6, L_1, L_2, \dots, L_6$ の線を探っている。

扇形平板の寸法および曲げ剛性は次のとおりである。

- 断面の幅 38.1 cm (15 in.)
- 中心角 102°
- D_r 0.5496 × 10³ kg-cm
(0.4770 × 10³ lb.-in.)

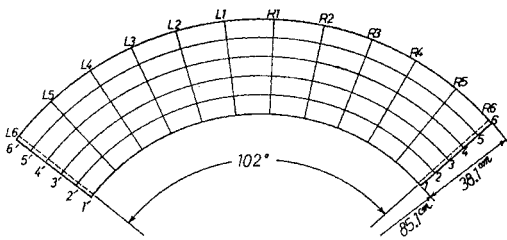


図-4 扇形平板の計算モデル

D_φ 3 031 × 10³ kg-cm (2 631 × 10³ lb.-in.)

D_k 15.90 × 10³ kg-cm (13.80 × 10³ lb.-in.)

ポアソン比 (ν_r, ν_φ) 0

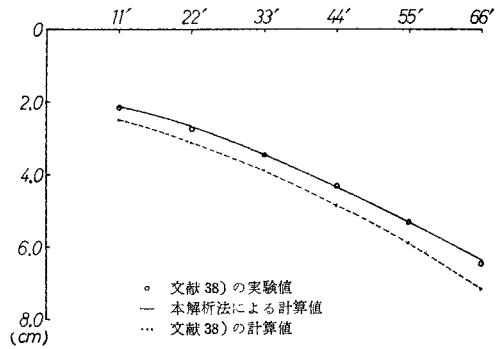


図-5(a) L1 上のたわみ分布

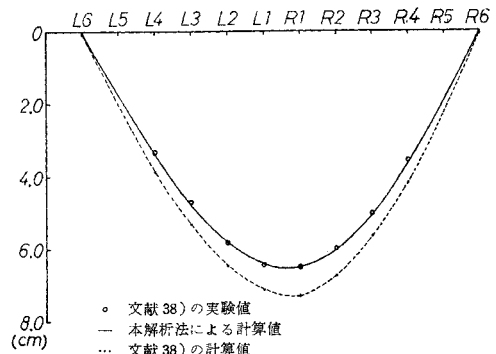


図-5(b) 節線 66' 上のたわみ分布

荷重としては、R3 と節線 11', 22', ……、66' の交差する点に、面外方向にそれぞれ 22.68 kg(50 lb.) が載荷されている。

図-5 は本解析法による計算結果と、文献 38) に示された Heins らの実験結果ならびに彼らの計算結果を図示したものである。図-5(a) は L1 上のたわみ分布、図-5(b) は節線 66' 上のたわみ分布を示している。本解析法による値は、Fourier 級数の 5 項までの結果であるが、Heins らの計算値と比較しても実験値と良く一致していることがわかる。

(2) 薄肉箱型はりのずり問題

図-6 に示す両端単純支持の薄肉箱型はりを解析する。要素分割は扇形板要素 2 枚、曲板要素 2 枚、合計 4 要素である。両端には面内剛性無限大のダイヤフラムが入っているものとする。中間ダイヤフラムは、全くない場合、スパン中央に 1 枚入っている場合、およびスパン中央と 1/4、3/4 点に合計 3 枚入っている場合の 3 ケースについて考えられている。中間ダイヤフラムの取扱いに

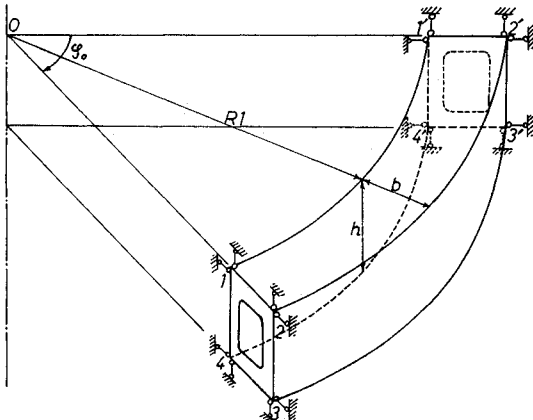


図-6 薄肉箱型はりの計算モデル

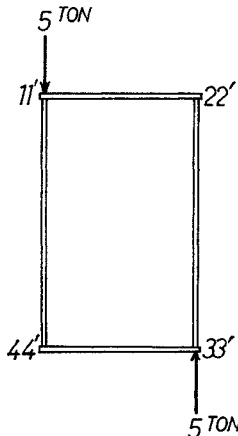


図-7 スパン中央のずり荷重

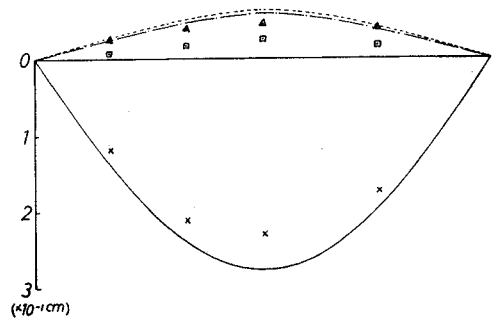
つについては、ダイヤフラムを二次元平板として求めた有限要素剛性マトリクスを薄肉はりの剛性マトリクスに組み入れることにより考慮することができる。

計算に用いたモデルの寸法および材料定数は次のとおりである。

断面の高さ	$h=50\text{ cm}$
断面の幅	$b=30\text{ cm}$
断面の図心までの曲率半径	$R_1+b/2=5\text{ m}$
中心角	$\varphi_0=1\text{ radian}$
上下フランジ板厚	$t_f=0.6\text{ cm}$
ウェブ板厚	$t_w=0.6\text{ cm}$
中間ダイヤフラム板厚	$t_D=2.0\text{ cm}$
ヤング率	$2.1 \times 10^6\text{ kg/cm}^2$
ポアソン比	0.3

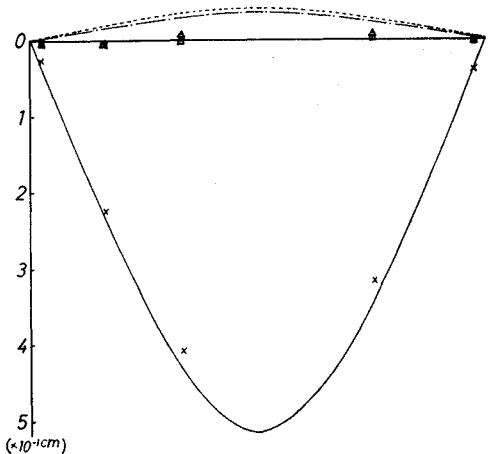
荷重はスパン中央に図-7 に示すように、内外のウェブ位置にそれぞれ 5 ton のずり荷重を載荷した。

図-8 は節線 33', 44' の上下方向変位 (下向きが正) について、本解析法 (級数項数 5) による計算値と、別



— x 中間ダイヤフラムなしの計算値と実験値
 Δ 中間ダイヤフラム 1 枚の計算値と実験値
 - · - □ 中間ダイヤフラム 3 枚の計算値と実験値

図-8(a) 節線 33' の上下方向変位



— x 中間ダイヤフラムなしの計算値と実験値
 Δ 中間ダイヤフラム 1 枚の計算値と実験値
 - · - □ 中間ダイヤフラム 3 枚の計算値と実験値

図-8(b) 節線 44' の上下方向変位

途²³⁾行われた模型実験による値を図示したものである。計算値が実験値より若干大き目の値を与え、また中間ダイヤフラムが入る場合については、両者の間かなりの相違も見られるが、結果はまず良いものと思われる。相違の原因としては、実験における端部支持条件充足の難かしさと中間ダイヤフラムが入る場合、変位絶対量の小さいことなどが考えられよう。

図-9 はスパンの1/3断面の変位形状を模式的に図示したものである。中間ダイヤフラムの入らない場合と入る場合とで断面形状の変化における相違が明確に認められる。特に中間ダイヤフラムの入らない場合の変形に特徴が見られる。

図-10 は中間ダイヤフラムをスパン中央に1枚入れた場合について、ダイヤフラム板厚のみを2cmから順次減少させて計算した時の結果である。ダイヤフラム板厚が0.4cm以下になるにしたがい、急速にダイヤフラムの効果が失われていく様子が認められる。このような計算はダイヤフラムの設計資料を与える意味から今後有用とならう。

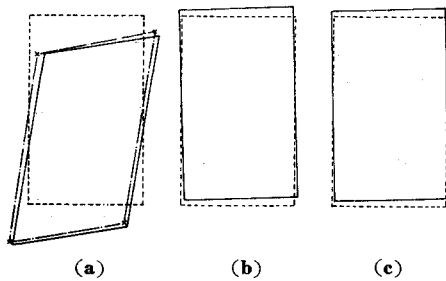


図-9 断面の変形状態
 a) 中間ダイヤフラムなし b) 中間ダイヤフラム1枚
 c) 中間ダイヤフラム3枚

図-9 断面の変形状態

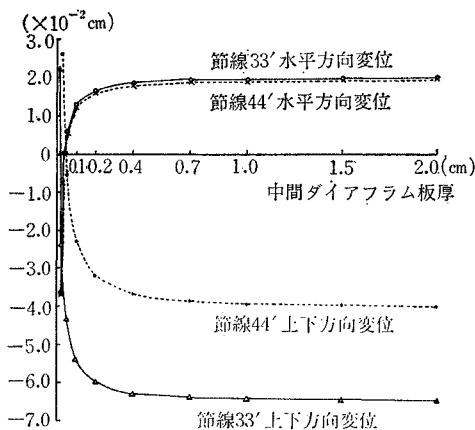


図-10 中間ダイヤフラム（スパン中央）板厚と変位の関係

4. む す び

以上から、本論文を要約すると以下のようになる。

(1) 重みつき残差法としての Galerkin 法の適用によって、Cheung などの有限帯板法とほとんど同一の剛性マトリックス式を得た。しかしながら、その場合重み関数の選び方によっては相反作用則を充足しないことがあるので注意を要する。

(2) 異方性扇形板の曲げ解析の結果は、既往研究の結果と良く一致した。

(3) 曲線箱ばりの模型実験の結果と、本解析法の結果との対比によれば、ダイヤフラムの影響を含めて両者はほぼ良く一致した。若干の相違は実験誤差（特に支承条件）に起因すると思われる。

本論文は筆者らが東京大学大学院在学中に行った研究に基づく所が多い。ご指導と有益なご助言を載いた工学部土木工学科 奥村敏恵教授ならびに同総合試験所 西野文雄助教授に厚く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Gottfeld, H.: Die Berechnung raumlich gekrummter Stahlbrucken. Baurechnik 1932, s. 715
- 2) Umanski, A.A.: Raumliche Tragwerke, Moskau 1948 (Russisch)
- 3) Wansleben, F.: Die Berechnung drehfester gekrummter Stahlbrucken. Stahlbau 1952, s. 53
- 4) Vlasov, V.Z.: Thin-walled Elastic Beams. Publ. for the National Science Foundation, 1961
- 5) Dabrowski, R.: Gekrummte dünnwandige Trager. Springer-Verlag, 1968
- 6) 平井 敦・倉西 茂: 曲線橋の理論について, 土木技術, 昭和33年7月
- 7) 小西一郎・小松定夫: 薄肉曲線桁の基礎理論, 土木学会論文誌, 第87号, 昭和37年11月
- 8) 小西一郎・小松定夫: 単純支持曲線桁橋の立体的解析, 土木学会論文誌, 第90号, 昭和38年2月
- 9) 小西一郎・小松定夫: 薄肉連続曲線桁橋の立体的解析, 土木学会論文誌, 第91号, 昭和38年3月
- 10) 小松定夫: 曲線並列桁橋の実用計算式, 土木学会論文誌, 第93号, 昭和38年5月
- 11) 倉西 茂: 一般薄肉断面の曲りばりの解析, 土木学会論文誌, 第108号, 昭和39年8月
- 12) 島田静雄・倉西 茂: 曲りばりの計算式, 技報堂, 昭和41年
- 13) 深沢泰晴: 薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論, 土木学会論文誌, 第110号, 昭和39年10月
- 14) 深沢泰晴: セン断中心軸の不連続性を考慮した変断面薄肉曲線桁の解析法, 第14回橋梁構造工学研究発表会論文誌, 1967
- 15) 芳村 仁: 曲線直交異方性変厚扇形平板の曲げについて, 土木学会論文誌, 第86号, 昭和37年10月
- 16) 遠藤篤康: 多角形曲線橋理論, 土木技術, 昭和35年10月
- 17) Becker, G.: Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter gekrummter ebener Stabe mit einfach-symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse vefanderlichem Querschnitt

- unter Berücksichtigung der Wolbkrafttorsion. Stahlbau 1965, s. 334
- 18) 倉西 茂：曲線格子桁の解法，土木学会論文集，第 76 号，昭和 36 年 9 月
 - 19) 西野文雄・Lee, Seng-Lip：薄肉断面曲線はりの基礎方程式，第 28 回土木学会年次学術講演概要集，昭和 48 年
 - 20) McManus, P.F., Nasir, G.A. and Culver, C.G.: Horizontally Curved Girders—State of the Art, Proc. ASCE, Vol. 95, No. ST 5, May, 1969
 - 21) 落合重俊：多室断面げたの力学的性状について，東京大学大学院博士論文，昭和 41 年
 - 22) 能町純雄・吉田紘一：断面変形を考慮した曲線箱桁の応力解析，土木学会論文報告集，第 187 号，昭和 46 年 3 月
 - 23) 坂井藤一：平板ないし曲面板より成る薄肉立体構造物の力学的性状について，東京大学大学院工学系研究科博士論文，昭和 45 年
 - 24) 坂井藤一：曲線箱げたの断面変形とダイアフラムの影響，関西支部年次学術講演概要集，昭和 46 年
 - 25) 青野捷人：断面変形を考慮した曲線箱げた解析，東京大学大学院工学系研究科修士論文，昭和 46 年
 - 26) Chu, K.H. and Pinjarkar, S.G.: Analysis of Horizontally Curved Box Girder Bridges, Proc. ASCE, Vol. 97, No. St 10, Oct., 1971
 - 27) Meyer, C. and Scordelis, A.C.: Analysis of Curved Folded Plate Structures, Proc. ASCE, Vol. 97, No. St 10, Oct., 1971
 - 28) Buragohain, D.N. and Agrawal, B.L.: Analysis of Curved Box Girder Bridges, Proc. ASCE, Vol. 99, No. St 5, May, 1973
 - 29) 小松定夫・中井 博・北田俊行：曲線桁橋の Shear lag と有効幅に関する研究，土木学会論文報告集，第 191 号，昭和 46 年 7 月
 - 30) 薄木征三・菅原 登：曲線箱桁のフランジ有効幅について第 23 回土木学会年次学術講演概要集，昭和 43 年
 - 31) 芳村 仁・蕨沢憲吉：折板理論解析による曲線桁橋の床版応力と有効幅について，土木学会論文報告集，第 233 号，pp. 45~54, 1974 年 12 月
 - 32) Culver, C.G. and Frampton, R.E.: Local Instability of Horizontally Curved Members, Proc. ASCE, Vol. 96, No. ST 2, Feb., 1970
 - 33) Culver, C.G., Dym, C.L. and Brogan, D.K.: Bending Behavior of Cylindrical Panels, Proc. ASCE, Vol. 98, No. ST 10, Oct., 1972
 - 34) Mariani, N., Mozer, J.D., Dym, C.L. and Culver, C.G.: Transverse Stiffener Requirements for Curved Webs, Proc. ASCE, Vol. 99, No. ST 4, April, 1973
 - 35) Abdel-Sayed, G.: Curved Webs under Combined Shear and Normal Stresses, Proc. ASCE, Vol. 99, No. ST 3, March, 1973
 - 36) 米沢 博・三上市蔵他：扇形板の曲げ座屈(近似解)，第 24 回土木学会年次学術講演概要集，昭和 44 年
 - 37) Coull, A. and Das, P.C.: Analysis of Curved Bridge Decks, Proc. ICE, Vol. 37, May, 1967
 - 38) Heins, C.P.Jr. and Hails, R.L.: Behavior of Stiffened Curved Plate Model, Proc. ASCE, Vol. 95, No. ST 11, Nov., 1969
 - 39) Buragohain, D.N.: Discrete Analysis of Cylindrical Orthotropic Curved Bridge Decks, Publ. IABSE, Vol. 32, 1972
 - 40) Cheung, Y.K.: The Analysis of Cylindrical Orthotropic Curved Bridge Decks, Publ. IABSE, Vol. 29, 1969
 - 41) 大宮司尚・Vallabhan, C.V.G.: 有限帯板法による曲鋼床版の解析，マトリックス構造解析シンポジウム，JSSC, 1973
 - 42) Yonezawa, H.: Moments and Free Vibrations in Curved Girder Bridges, Proc. ASCE, Vol. 88, No. EM 1, Feb., 1962
 - 43) Cheung, Y.K.: Free Vibration of Curved and Straight Beam-Slab of Box-Girder Bridges, Publ. IABSE, Vol. 32, 1972
 - 44) 奥村敏恵・坂井藤一：薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析に関する一方法とその応用，土木学会論文報告集，第 176 号，昭和 45 年 4 月
 - 45) Cheung, Y.K.: The Finite Strip Method in the Analysis of Elastic Plates with Two opposite Simply Supported Ends, Proc. ICE, May, 1968
 - 46) Powell, G.H. and Ogden, D.W.: Analysis of Orthotropic Plate Bridge Decks, Proc. ASCE, Vol. 95, No. ST 5, May, 1969
 - 47) 軽構造の理論とその応用，林毅編，日科技連，昭和 41 年 (1974. 9. 18・受付)