

## 薄肉断面曲線材の変形法による解析

## ANALYSIS OF THIN WALLED CURVED BEAM BY STIFFNESS METHOD

薄 木 征 三\*・稼 農 知 徳\*\*  
By Seizo USUKI and Tomonori KANO

## 1. ま え が き

近年、薄肉断面部材に関する研究は非線形問題を含めて非常に活発になり、多くの論文が発表されている。薄肉断面部材の基礎的研究は、微小変位理論について、Vlasov<sup>1)</sup>、Bornscheuer<sup>2)</sup>、Kollbrunner・Hajdin<sup>3)</sup>らによって体系的にまとめられ、最近は有限変位理論に基づいた統一的にまとめられた論文もみられるようになった<sup>4)~6)</sup>。これら薄肉断面部材に関する研究の発展は直線部材とともに、当然のように曲線部材に対しても拡張展開されてきた。この薄肉断面曲線部材に関する基礎的研究も多く、既往の発表論文がある<sup>7)~11)</sup>。

一方、薄肉断面部材から成る骨組構造の解析法としては、複雑な任意形状の構造を比較的簡単に扱うことができ、また任意の方向の荷重、支持条件も簡単に組み入れることができる変形法が有利であると認められる。さらに変形法は微小変位解析のみならず、有限変位解析、弾塑性解析および座屈・振動解析の数値計算法としての発展が容易であると思われる。

薄肉断面部材の変形法による解析に関する研究をあげると、Krajcinovic<sup>12)</sup>、鷹羽・成岡<sup>13)</sup>、Arggris and Radaj<sup>14)</sup>、川井・明石・村木<sup>15)</sup>、Reilly<sup>16)</sup>、結城・前田<sup>17)</sup>などである。これらは薄肉断面部材の微分方程式の解から剛性マトリックスを導くものと、部材要素の変位関数をべき級数で近似して、有限要素法の考えに基づいて剛性マトリックスを導くものとの違いはあっても、すべて薄肉断面直線部材を対象としている。薄肉断面曲線部材のマトリックス法による解析に関しては、Becker<sup>18)</sup>が一軸対称薄肉断面曲線材に対して、5階の微分方程式を求め、その解から伝達マトリックス法を用いて解析している。また、深沢<sup>19)</sup>は曲線部材の曲率面外変形に対する

4階2元連立微分方程式をラプラス変換によって解を求め、伝達マトリックス法を用いてせん断中心軸の不連続性を考慮した解析を行っている。さらに遠田<sup>20)</sup>は薄肉開断面曲線ばりの有限変位理論に基づいた一階連立常微分方程式を誘導し、数値積分と伝達マトリックス法を用いて解析し、その後曲線材の2次応力問題に対する基礎微分方程式を求め、伝達マトリックス法を用いて数値解析をして座屈荷重も求めている。これらはいずれも伝達マトリックス法を用いているが、一般にこの方法は連続したはり系の解析に比較的便利に用いられるものであるが、複雑な立体的骨組構造系に対しては剛性マトリックス法が有効と思われる。

渡辺・稼農・藤井<sup>21)</sup>は、薄肉断面曲線部材の曲率面外変形に対する4階2元連立微分方程式から6階の常微分方程式を誘導し、その一般解から得られる係数マトリックスを介して剛性マトリックスを求め、連続曲線格子材の解析に応用している。この場合、微分方程式を基本にしている点で、部材要素の分割数に関係なく正確な解を求められるが、微分方程式の解の性質から、剛性マトリックスは双曲線関数を含む複雑な表式となっている。しかも曲線部材の横断面上の任意に選んだ点を連ねた軸線の変形量で表わされておらず、せん断中心軸が各部材要素ごとに一致していなければならない制約がある。すなわち各部材要素内で、桁高が連続的に変化するような変断面曲線材や、径間ごとに曲率半径が異なるような連続曲線材などには厳密な意味での適用がむずかしい。

ここでは、微小変形理論の仮定に基づき、曲率面外と面内に任意な荷重を受ける曲率一定な薄肉曲線要素について、任意な軸に関する変形量を3次までのべき級数で表示し、任意な横断面形状に対する剛性マトリックスを導く。剛性マトリックスの誘導は仮想仕事の原理に基づいており、桁高が連続的に変化する変断面曲線材にも適用しうるような一般的な表示をしている。特別な場合として、曲線要素内で一定断面の剛性マトリックスを簡単

\* 正会員 秋田大学講師 釧山学部土木工学科

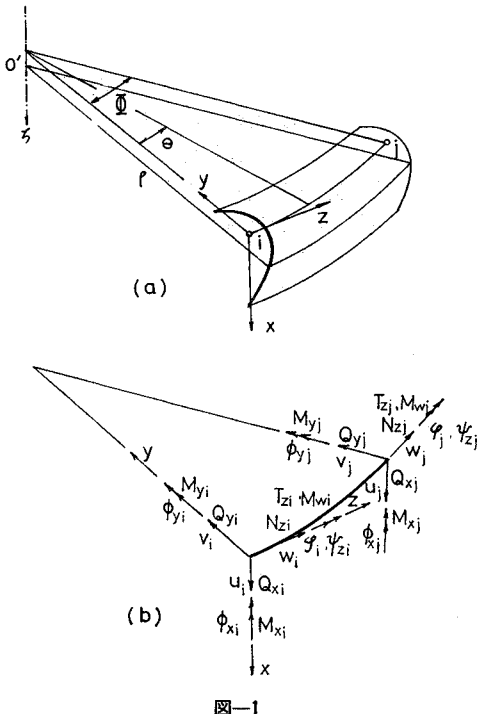
\*\* 正会員 工博 秋田大学助教授 釧山学部土木工学科

で陽な形で与え、特に中立軸の変形で論ずる場合とせん断中心の変形で論ずる場合について比較考察した。計算例として2軸対称断面の2径間連続曲線桁と単径間曲線格子桁を対象とし、応力法による結果と比較した。前者の計算例では、同じく変形量のべき級数表示に基づいても、曲線桁を直線要素の集合、すなわち折線として解析する従来の方法と本法とを比較し、本法の精度がより優れていることが示される。ここに誘導された結果は薄肉曲線材を含む薄肉断面構造の3次元挙動の解析の基礎となるものである。

2. 薄肉曲線要素の剛性マトリックス

(1) 記号と仮定

図一(a)に示すように、曲線要素  $i-j$  に対して円柱座標系  $(O'-\rho, \theta, z)$  を導入する。変形前の母線の曲率は一定であり  $O'-\rho, \theta$  平面は曲線要素の曲面面に平行である。 $(i-x, y, z)$  は右手系直角座標であり、軸線  $i-j$  は断面の任意点を通る母線である。節点変位と節点力は図一(b)に示す方向と向きを正の量とする。 $u, v, w$  はそれぞれ  $x, y, z$  軸方向の変位、 $\phi_x, \phi_y$  はそれぞれ  $x$  および  $y$  軸まわりの接線回転角、 $\phi, \psi_z$  はそれぞれ  $z$  軸まわりのねじれ角およびねじれ率である。したがって、軸線  $i-j$  はねじり中心軸でもある。節点力はすべて節点  $i$  および  $j$  点に関する量であり、 $M_\omega$  は曲げね



図一

じれモーメントを表わす。

以下の解析において用いられる理論上の仮定は

- (1) 微小変形を対象とする。
- (2) 荷重が作用した後も横断面の形状は不変である。
- (3) 曲げに対して Navier の平面保持の原則が成立する。
- (4) そりに対しては St. Venant のねじれによるそのみを考える。

仮定(3)においては、曲げに伴うせん断変形を無視することであり、(4)においては、曲げねじれにおける垂直応力の変化に伴うせん断応力によるそのは無視することである。

(2) 変位関数

図一(a)において、軸線  $i-j$  上の任意点の変位  $u, v, w$  および  $\phi$  を次のようにべき級数で近似する。

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 \dots\dots\dots (1) \\ v &= b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + b_3\theta^3 \dots\dots\dots (2) \\ w &= c_0 + c_1\theta \dots\dots\dots (3) \\ \phi &= d_0 + d_1\theta + d_2\theta^2 + d_3\theta^3 \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここで  $a_0, a_1, \dots, d_3$  は未定係数である。軸線  $i-j$  上の任意点の垂直ひずみ  $\epsilon_z$ 、 $x$  軸まわりの接線回転角  $\phi_x$  および曲率の変化  $\kappa_x$ 、 $y$  軸まわりの接線回転角  $\phi_y$  および曲率の変化  $\kappa_y$ 、ねじれ率  $\psi_z$  および曲げねじれ率  $\vartheta_\omega$  は、薄肉曲線材の変位に関する定義により次のようである<sup>10)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{1}{R} \left( \frac{dw}{d\theta} - v \right), & \phi_x &= \frac{1}{R} \left( \frac{dv}{d\theta} + w \right) \\ \phi_y &= \frac{1}{R} \frac{du}{d\theta}, & \kappa_x &= \frac{1}{R^2} \left( \frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{dw}{d\theta} \right) \\ \kappa_y &= \frac{1}{R^2} \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} + R\phi \right), & \psi_z &= \frac{1}{R} \left( \frac{d\phi}{d\theta} - \frac{1}{R} \frac{du}{d\theta} \right) \\ \vartheta_\omega &= \frac{1}{R^2} \left( \frac{d^2\phi}{d\theta^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.1 \sim 5.7)$$

ここで  $R$  は軸線  $i-j$  の曲率半径である。

軸線  $i-j$  をはさむ角度を  $\theta$  とすると、 $x$  軸方向変位  $u$  については式(1)と式(5.3)から

$$\left. \begin{aligned} u(\theta=0) &= u_i = a_0 \\ \phi_y(\theta=0) &= \phi_{yi} = a_1/R \\ u(\theta=\theta) &= u_j = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 \\ \phi_y(\theta=\theta) &= \phi_{yj} = (a_1 + 2a_2\theta + 3a_3\theta^2)/R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

式(6)を  $a_0 \sim a_3$  について解くと

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= u_i \\ a_1 &= R\phi_{yi} \\ a_2 &= -\frac{3}{\theta^2} u_i - \frac{2R}{\theta} \phi_{yi} + \frac{3}{\theta^2} u_j - \frac{R}{\theta} \phi_{yj} \end{aligned} \right\}$$

$$a_3 = \left. \begin{aligned} & \frac{2}{\phi^3} u_i + \frac{R}{\phi^2} \phi_{yi} - \frac{2}{\phi^3} u_j + \frac{R}{\phi^2} \phi_{yj} \\ & \dots\dots\dots(7) \end{aligned} \right\}$$

同様に  $v, w$  および  $\varphi$  について式 (5) の変位量に関する定義式を用いれば、残りの未定係数も定めることができる。結果のみ書くと以下のようである。

$y$  軸方向変位  $v$  について

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= v_i \\ b_1 &= R \left( \phi_{xi} - \frac{w_i}{R} \right) \\ b_2 &= -\frac{3}{\phi^2} v_i - \frac{2R}{\phi} \left( \phi_{xi} - \frac{w_i}{R} \right) \\ & \quad + \frac{3}{\phi^2} v_j - \frac{R}{\phi} \left( \phi_{xj} - \frac{w_j}{R} \right) \\ b_3 &= \frac{2}{\phi^3} v_i + \frac{R}{\phi^2} \left( \phi_{xi} - \frac{w_i}{R} \right) \\ & \quad - \frac{2}{\phi^3} v_j + \frac{R}{\phi^2} \left( \phi_{xj} - \frac{w_j}{R} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

$z$  軸方向変位  $w$  について

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= w_i \\ c_1 &= \frac{1}{\phi} (w_j - w_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

ねじれ角  $\varphi$  について

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= \varphi_i \\ d_1 &= R \left( \psi_{zi} + \frac{\phi_{yi}}{R} \right) \\ d_2 &= -\frac{3}{\phi^2} \varphi_i - \frac{2R}{\phi} \left( \psi_{zi} + \frac{\phi_{yi}}{R} \right) \\ & \quad + \frac{3}{\phi^2} \varphi_j - \frac{R}{\phi} \left( \psi_{zj} + \frac{\phi_{yj}}{R} \right) \\ d_3 &= \frac{2}{\phi^3} \varphi_i + \frac{R}{\phi^2} \left( \psi_{zi} + \frac{\phi_{yi}}{R} \right) \\ & \quad - \frac{2}{\phi^3} \varphi_j + \frac{R}{\phi^2} \left( \psi_{zj} + \frac{\phi_{yj}}{R} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

これらの係数  $a_0, a_1, \dots, d_3$  を式 (1)~(4) に代入すれば次のようになる。

$$u = N_1 u_i + N_2 \phi_{yi} + N_3 u_j + N_4 \phi_{yj} \dots\dots\dots(11)$$

$$v = N_1 v_i + N_2 \phi_{xi} - \frac{N_2}{R} w_i + N_3 v_j + N_4 \phi_{xj} - \frac{N_4}{R} w_j \dots\dots\dots(12)$$

$$w = N_5 w_i + N_6 w_j \dots\dots\dots(13)$$

$$\varphi = N_1 \varphi_i + N_2 \psi_{zi} + \frac{N_2}{R} \phi_{yi} + N_3 \varphi_j + N_4 \psi_{zj} + \frac{N_4}{R} \phi_{yj} \dots\dots\dots(14)$$

係数  $N_1, N_2, \dots, N_6$  は  $\theta$  の関数であり次のようである。

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3\theta^2}{\phi^2} + \frac{2\theta^3}{\phi^3} \\ N_2 &= R \left( \theta - \frac{2\theta^2}{\phi} + \frac{\theta^3}{\phi^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} N_3 &= \frac{3\theta^2}{\phi^2} - \frac{2\theta^3}{\phi^3} \\ N_4 &= R \left( -\frac{\theta^2}{\phi} + \frac{\theta^3}{\phi^2} \right) \\ N_5 &= 1 - \frac{\theta}{\phi} \\ N_6 &= \frac{\theta}{\phi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

曲線要素内部の変位と節点変位を

$$\{f\}^T = [u \ v \ w \ \varphi] \dots\dots\dots(16)$$

$$\{\delta\}^T = [u_i \ v_i \ w_i \ \phi_{xi} \ \phi_{yi} \ \varphi_i \ \psi_{zi} \ u_j \ v_j \ w_j \ \phi_{xj} \ \phi_{yj} \ \varphi_j \ \psi_{zj}] \dots\dots\dots(17)$$

とおくと式 (11)~(14) はマトリックス表示で

$$\{f\} = [N] \{\delta\} \dots\dots\dots(18)$$

[N] の大きさは (4×14) であり、各要素は式 (15) の  $N_1, N_2, \dots, N_6$  から成っている。

(3) 応力-ひずみ関係

曲線部材が任意な外力を受けて変形したとき、断面上の任意点  $P$  に生ずる垂直ひずみ  $\epsilon_\theta$  と薄肉中心線に沿うせん断ひずみ  $r_s$  は、式 (5.1)~(5.7) の変位量に関する定義式を用いれば<sup>10)</sup>

$$\epsilon_\theta = \frac{R}{\rho} (\epsilon_z - y\kappa_x - x\kappa_y - \omega\vartheta_\omega) \dots\dots\dots(19)$$

$$r_s = \left[ \frac{R}{\rho} r - \rho \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\omega}{\rho} \right) \right] \cdot \psi_z \dots\dots\dots(20)$$

ここで図-2にあるように、 $\rho$  は薄肉中心線上の任意な点  $P$  を通る軸線の曲率半径、 $s$  は断面の薄肉中心線上の任意点を原点とし、薄肉中心線に沿う曲線座標、 $r$  はねじり中心 (軸線  $i-j$  上の点) から点  $P$  での  $s$  の接線へおろした垂線の長さであり、 $\omega$  はねじり中心に関するそり関数である。また薄肉であることから板厚方向のせん断ひずみは無視することにする。式 (11)~(14) の  $u, v, w$  および  $\varphi$  を変形量に関する定義式 (5.1) と (5.4)~(5.7) に代入して、さらにそれらを式 (19) と (20) に代入すると、 $\epsilon_\theta$  と  $r_s$  は節点変位で次のように表わされる。

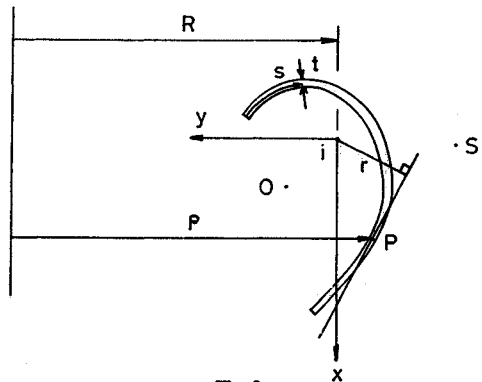


図-2

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta = & \frac{R}{\rho} \left[ \left( -x + \frac{\omega}{R} \right) \frac{N_1''}{R^2} u_i - \left( \frac{N_1}{R} + y \frac{N_1''}{R^2} \right) v_i \right. \\ & + \left\{ \frac{N_2}{R^2} + \frac{N_5'}{R} + \frac{y}{R^2} \left( \frac{N_2''}{R} - N_5' \right) \right\} w_i \\ & - \left( \frac{N_2}{R} + y \frac{N_2''}{R^2} \right) \phi_{xi} - x \left( \frac{N_2}{R^2} + \frac{N_2''}{R^2} \right) \phi_{yi} \\ & - \left( \frac{N_1}{R} x + \omega \frac{N_1''}{R^2} \right) \varphi_i - \left( \frac{N_2}{R} x + \omega \frac{N_2''}{R^2} \right) \psi_{zi} \\ & + \left( -x + \frac{\omega}{R} \right) \frac{N_3''}{R^2} u_j - \left( \frac{N_3}{R} + y \frac{N_3''}{R^2} \right) v_j \\ & + \left\{ \frac{N_4}{R^2} + \frac{N_6'}{R} + \frac{y}{R^2} \left( \frac{N_4''}{R} - N_6' \right) \right\} w_j \\ & - \left( \frac{N_4}{R} + y \frac{N_4''}{R^2} \right) \phi_{xj} - x \left( \frac{N_4}{R^2} + \frac{N_4''}{R^2} \right) \phi_{yj} \\ & - \left( \frac{N_3}{R} x + \omega \frac{N_3''}{R^2} \right) \varphi_j - \left( \frac{N_4}{R} x + \omega \frac{N_4''}{R^2} \right) \psi_{zj} \left. \right] \\ & \dots\dots\dots(21) \\ r_s = & \left( -\frac{N_1'}{R^2} u_i + \frac{N_1'}{R} \varphi_i + \frac{N_2'}{R} \psi_{zi} - \frac{N_3'}{R^2} u_j \right. \\ & \left. + \frac{N_3'}{R} \varphi_j + \frac{N_4'}{R} \psi_{zj} \right) \left\{ \frac{R}{\rho} r - \rho \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\omega}{\rho} \right) \right\} \\ & \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

ここで  $N_1', N_1''$  などは  $\theta$  に関する 1 階および 2 階微分を表わす。すなわち

$$\left. \begin{aligned} N_1' &= \frac{6}{\phi^2} \left( -\theta + \frac{\theta^2}{\phi} \right) \\ N_2' &= R \left( 1 - \frac{4\theta}{\phi} + \frac{3\theta^2}{\phi^2} \right) \\ N_3' &= \frac{6}{\phi^2} \left( \theta - \frac{\theta^2}{\phi} \right) \\ N_4' &= \frac{R}{\phi} \left( -2\theta + \frac{3\theta^2}{\phi} \right) \\ N_5' &= -\frac{1}{\phi} \\ N_6' &= \frac{1}{\phi} \\ N_1'' &= \frac{6}{\phi^2} \left( -1 + \frac{2\theta}{\phi} \right) \\ N_2'' &= \frac{R}{\phi} \left( -4 + \frac{6\theta}{\phi} \right) \\ N_3'' &= \frac{6}{\phi^2} \left( 1 - \frac{2\theta}{\phi} \right) \\ N_4'' &= \frac{2R}{\phi} \left( -1 + \frac{3\theta}{\phi} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

ひずみ  $\{\epsilon\}$  を

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_\theta \\ r_s \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(24)$$

とおくと、式 (21)、(22) はマトリックス表示で

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\} \dots\dots\dots(25)$$

となる。 $[B]$  の大きさは  $(2 \times 14)$  であり、その各要素は  $x, y$  および  $\theta$  の関数である。

断面に生ずる垂直応力を  $\sigma_\theta$ 、薄肉中心線に沿うせん断応力を  $\tau_s$  とすると、応力とひずみの関係はフックの

法則により

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D][B] \{\delta\} \dots\dots\dots(26)$$

である。ここで

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \tau_s \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(27)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \dots\dots\dots(28)$$

であり、 $E, G$  はそれぞれ部材のヤング率、せん断弾性係数であり、一般に断面内と部材の長さ方向の関数である。すなわち  $x, y, \theta$  の関数である。

(4) 仮想仕事の原理

図-1 (b) において、節点力  $\{P\}$  を

$$\begin{aligned} \{P\}^T = & [Q_{xi} \ Q_{yi} \ N_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ T_{zi} \ M_{oi} \ Q_{xj} \\ & Q_{yj} \ N_{zj} \ M_{xj} \ M_{yj} \ T_{zj} \ M_{oj}] \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

と定義する。仮想の節点変位を  $\{\delta\}^*$  とすると、仮想仕事の原理は

$$\begin{aligned} (\{\delta\}^*)^T \{P\} &= \int_V \{\epsilon\}^* \{\sigma\} dV \\ &= (\{\delta\}^*)^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{\delta\} \\ &\dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

$\{\delta\}^*$  は任意であるから

$$\{P\} = \int_V [B]^T [D] [B] dV \{\delta\} = [K] \{\delta\} \dots\dots(31)$$

$[K]$  の大きさは  $(14 \times 14)$  である。式 (30) の左辺の外働では集中力系のみを考えており、分布力や物体力あるいは初期ひずみは考慮していない。式 (30)、(31) は、2 次元および 3 次元弾性体などにおける有限要素法と同一の表示である。また式 (31) の積分は具体的には

$$[K] = \int_0^\phi \int_F [B]^T [D] [B] dn ds \cdot \rho d\theta \dots\dots\dots(32)$$

である。 $n$  は薄肉中心線を原点とし、 $s$  に直交する直線座標であり、内側の積分は断面内での積分である。式 (32) は、断面内でヤング率やせん断弾性係数が変化する曲線合成桁などにも適用しうるものである。

材質が断面内でも軸線方向にも一定で、等断面桁の場合について式 (32) の積分を行い剛性マトリックス  $[K]$  の要素  $K_{ij}$  を書くと以下のものである。

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \frac{12 E}{l^3} \left( J_y - \frac{2 C_y}{R} + \frac{J_\omega}{R^2} \right) + \frac{6 \phi^2 G J_T}{5 l^3} \\ K_{12} &= \frac{6 E}{l} \left( -\frac{Z_y}{5 R} + \frac{2 J_{xy}}{l^2} - \frac{2 C_x}{l^2 R} \right) \\ K_{13} &= \frac{E}{R} \left( \frac{Z_y}{10 R} - \frac{6 J_{xy}}{l^2} + \frac{6 C_x}{l^2 R} \right) \\ K_{14} &= E \left( -\frac{Z_y}{10 R} + \frac{6 J_{xy}}{l^2} - \frac{6 C_x}{l^2 R} \right) \\ K_{15} &= E \left\{ \left( 1 - \frac{\phi^2}{60} \right) \frac{6 J_y}{l^2} + \left( \frac{1}{10} - \frac{6}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{R^3} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
K_{16} &= \frac{6E}{R} \left\{ -\frac{J_y}{5l} + \left( \frac{1}{5} + \frac{Z}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{lR} - \frac{2J_\omega}{l^3} \right\} \\
&\quad - \frac{6GJ_T}{5lR} \\
K_{17} &= \frac{E}{R} \left\{ -\frac{J_y}{10} + \left( \frac{1}{10} + \frac{6}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{R} - \frac{6J_\omega}{l^2} \right\} \\
&\quad - \frac{GJ_T}{10R} \\
K_{18} &= \frac{12E}{l^3} \left( -J_y + \frac{2C_y}{R} - \frac{J_\omega}{R^2} \right) - \frac{6GJ_T}{5lR^2} \\
K_{19} &= \frac{6E}{l} \left( \frac{Z_y}{5R} - \frac{2J_{xy}}{l^2} + \frac{2C_x}{l^2R} \right) \\
K_{1,10} &= \frac{E}{R} \left( \frac{Z_y}{10R} - \frac{6J_{xy}}{l^2} + \frac{6C_x}{l^2R} \right) \\
K_{1,11} &= E \left( -\frac{Z_y}{10R} + \frac{6J_{xy}}{l^2} - \frac{6C_x}{l^2R} \right) \\
K_{1,12} &= E \left\{ \left( \frac{\phi^2}{10} - 6 \right) \frac{J_y}{l^2} + \left( \frac{1}{10} - \frac{6}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{R^2} \right\} \\
K_{1,13} &= \frac{6E}{Rl} \left\{ \frac{J_y}{5} - \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{R} + \frac{2J_\omega}{l^2} \right\} \\
&\quad + \frac{6GJ_T}{5Rl} \\
K_{1,14} &= \frac{E}{R} \left\{ -\frac{J_y}{10} + \left( \frac{1}{10} + \frac{6}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{R} - \frac{6J_\omega}{l^2} \right\} \\
&\quad - \frac{GJ_T}{10R} \\
K_{22} &= E \left( \frac{13\phi F}{35R} - \frac{12Z_x}{5Rl} + \frac{12J_x}{l^3} \right) \\
K_{23} &= \frac{E}{R} \left\{ \left( 1 - \frac{11}{105}\phi^2 \right) \frac{F}{2} + \frac{7Z_x}{10R} - \frac{6J_x}{l^2} \right\} \\
K_{24} &= E \left( \frac{11}{210}\phi^2 F - \frac{6Z_x}{5R} + \frac{6J_x}{l^2} \right) \\
K_{25} &= E \left\{ \left( -1 + \frac{\phi^2}{21} \right) \frac{11Z_y}{10R} + \left( 6 - \frac{\phi^2}{10} \right) \frac{J_{xy}}{l^2} \right\} \\
K_{26} &= E \left( \frac{13\phi Z_y}{35R} - \frac{6J_{xy}}{5Rl} + \frac{12C_x}{l^3} \right) \\
K_{27} &= E \left( \frac{11}{210}\phi^2 Z_y - \frac{J_{xy}}{10R} + \frac{6C_x}{l^2} \right) \\
K_{28} &= \frac{6E}{l} \left( \frac{Z_y}{5R} - \frac{2J_{xy}}{l^2} + \frac{2C_x}{l^2R} \right) \\
K_{29} &= E \left( \frac{9\phi F}{70R} + \frac{12Z_x}{5Rl} - \frac{12J_x}{l^3} \right) \\
K_{2,10} &= \frac{E}{R} \left\{ \left( -1 + \frac{13\phi^2}{210} \right) \frac{F}{2} + \frac{7Z_x}{10R} - \frac{6J_x}{l^2} \right\} \\
K_{2,11} &= E \left( -\frac{13\phi^2 F}{420} - \frac{Z_x}{5R} + \frac{6J_x}{l^2} \right) \\
K_{2,12} &= E \left\{ -\left( 1 + \frac{13}{42}\phi^2 \right) \frac{Z_y}{10R} + \left( 6 - \frac{\phi^2}{10} \right) \frac{J_{xy}}{l^2} \right\} \\
K_{2,13} &= E \left( \frac{9\phi Z_y}{70R} + \frac{6J_{xy}}{5Rl} - \frac{12C_x}{l^3} \right) \\
K_{2,14} &= E \left( -\frac{13\phi^2 Z_y}{420} - \frac{J_{xy}}{10R} + \frac{6C_x}{l^2} \right) \\
K_{33} &= E \left\{ \left( 1 - \frac{\phi^2}{6} + \frac{\phi^4}{105} \right) \frac{F}{l} - \frac{\phi Z_x}{10R^2} + \frac{3J_x}{Rl^2} \right\} \\
K_{34} &= E \left\{ \left( \frac{\phi}{12} - \frac{\phi^3}{105} \right) F \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{11}{60}\phi^2 - 1 \right) \frac{Z_x}{l} - \frac{3J_x}{Rl} \right\} \\
K_{35} &= \frac{E}{l} \left\{ \left( -1 + \frac{13}{60}\phi^2 - \frac{\phi^4}{105} \right) Z_y \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\phi^2}{20} - 3 \right) \frac{J_{xy}}{R} \right\} \\
K_{36} &= \frac{E}{R} \left\{ \left( 1 - \frac{11}{105}\phi^2 \right) \frac{Z_y}{2} + \frac{3J_{xy}}{5R} - \frac{6C_x}{l^2} \right\} \\
K_{37} &= E \left\{ \left( \frac{\phi}{12} - \frac{\phi^3}{105} \right) Z_y + \frac{\phi J_{xy}}{20R} - \frac{3C_x}{Rl} \right\} \\
K_{38} &= \frac{E}{R} \left( -\frac{Z_y}{10R} + \frac{6J_{xy}}{l^2} - \frac{6C_x}{Rl^2} \right) \\
K_{39} &= \frac{E}{R} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{13}{420}\phi^2 \right) F - \frac{7Z_x}{10R} + \frac{6J_x}{l^2} \right\} \\
K_{3,10} &= E \left\{ \left( -1 + \frac{\phi^2}{6} - \frac{\phi^4}{140} \right) \frac{F}{l} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\phi}{10} \frac{Z_x}{R^2} + \frac{3J_x}{R^2 l} \right\} \\
K_{3,11} &= E \left\{ \left( -\frac{1}{12} + \frac{\phi^2}{140} \right) \phi F \right. \\
&\quad \left. + \left( 1 + \frac{\phi^2}{60} \right) \frac{Z_x}{l} - \frac{3J_x}{Rl} \right\} \\
K_{3,12} &= \frac{E}{l} \left\{ \left( 1 - \frac{7}{60}\phi^2 + \frac{\phi^4}{140} \right) Z_y \right. \\
&\quad \left. + \left( -3 + \frac{\phi^2}{20} \right) \frac{J_{xy}}{R} \right\} \\
K_{3,13} &= \frac{E}{R} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{13}{420}\phi^2 \right) Z_y - \frac{3J_{xy}}{5R} + \frac{6C_x}{l^2} \right\} \\
K_{3,14} &= E \left\{ \left( -\frac{1}{12} + \frac{\phi^2}{140} \right) \phi Z_y + \frac{\phi J_{xy}}{20R} - \frac{3C_x}{Rl} \right\} \\
K_{44} &= E \left( \frac{l\phi^2}{105} F - \frac{4\phi}{15} Z_x + \frac{4}{l} J_x \right) \\
K_{45} &= E \left\{ \left( -14 + \phi^2 \right) \frac{\phi Z_y}{105} + \left( 4 - \frac{2}{15}\phi^2 \right) \frac{J_{xy}}{l} \right\} \\
K_{46} &= E \left( \frac{11\phi^2}{210} Z_y - \frac{11J_{xy}}{10R} + \frac{6C_x}{l^2} \right) \\
K_{47} &= E \left( \frac{l\phi^2}{105} Z_y - \frac{2\phi}{15} J_{xy} + \frac{4C_x}{l} \right) \\
K_{48} &= E \left( \frac{Z_y}{10R} - \frac{6J_{xy}}{l^2} + \frac{6C_x}{Rl^2} \right) \\
K_{49} &= E \left( \frac{13\phi^2}{420} F + \frac{2Z_x}{10R} - \frac{6J_x}{l^2} \right) \\
K_{4,10} &= E \left\{ \left( -\frac{1}{12} + \frac{\phi^2}{140} \right) \phi F \right. \\
&\quad \left. + \left( 1 + \frac{\phi^2}{60} \right) \frac{Z_x}{l} - \frac{3J_x}{Rl} \right\} \\
K_{4,11} &= E \left( -\frac{l\phi^2}{140} F + \frac{\phi}{15} Z_x + \frac{2J_x}{l} \right) \\
K_{4,12} &= E \left\{ \left( \frac{1}{30} - \frac{\phi^2}{140} \right) \phi Z_y + \left( 2 + \frac{\phi^2}{30} \right) \frac{J_{xy}}{l} \right\} \\
K_{4,13} &= E \left( \frac{13\phi^2}{420} Z_y + \frac{J_{xy}}{10R} - \frac{6C_x}{l^2} \right) \\
K_{4,14} &= E \left( -\frac{l\phi^2}{140} Z_y + \frac{\phi}{30} J_{xy} + \frac{2C_x}{l} \right) \\
K_{55} &= \frac{E}{l} \left( 4 - \frac{4}{15}\phi^2 + \frac{\phi^4}{105} \right) J_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{56} &= E \left\{ \left( -\frac{11}{10} + \frac{11}{210} \phi^2 \right) \frac{J_y}{R} \right. \\
&\quad \left. + \left( 6 - \frac{\phi^2}{10} \right) \frac{C_y}{l^2} \right\} \\
K_{57} &= E \left\{ \left( -\frac{2}{15} + \frac{\phi^2}{105} \right) \phi J_y \right. \\
&\quad \left. + \left( 4 - \frac{2}{15} \phi^2 \right) \frac{C_y}{l} \right\} \\
K_{58} &= E \left\{ \left( -6 + \frac{\phi^2}{10} \right) \frac{J_y}{l^2} + \left( -\frac{1}{10} + \frac{6}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{R^3} \right\} \\
K_{59} &= E \left\{ \left( 1 + \frac{13}{42} \phi^2 \right) \frac{Z_y}{10R} + \left( -6 + \frac{\phi^2}{10} \right) \frac{J_{xy}}{l^2} \right\} \\
K_{5,10} &= \frac{E}{l} \left\{ \left( 1 - \frac{7}{60} \phi^2 + \frac{\phi^4}{140} \right) Z_y \right. \\
&\quad \left. + \left( -3 + \frac{\phi^2}{20} \right) \frac{J_{xy}}{R} \right\} \\
K_{5,11} &= E \left\{ \left( \frac{1}{30} - \frac{\phi^2}{140} \right) \phi Z_y + \left( 2 + \frac{\phi^2}{30} \right) \frac{J_{xy}}{l} \right\} \\
K_{5,12} &= \frac{E}{l} \left( 2 + \frac{\phi^2}{15} - \frac{\phi^4}{140} \right) J_y \\
K_{5,13} &= \frac{E}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{13}{42} \phi^2 \right) \frac{J_y}{10} + \left( \frac{1}{10} - \frac{6}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{R} \right\} \\
K_{5,14} &= E \left\{ \left( \frac{1}{30} - \frac{\phi^2}{140} \right) \phi J_y + \left( \frac{\phi}{30} + \frac{2}{\phi} \right) \frac{C_y}{R} \right\} \\
K_{66} &= E \left( \frac{13\phi}{35R} J_y - \frac{12C_y}{5Rl} + \frac{12J_w}{l^3} \right) + \frac{6G}{5l} J_T \\
K_{67} &= E \left( \frac{11\phi^2}{210} J_y - \frac{6C_y}{5R} + \frac{6J_w}{l^2} \right) + \frac{G}{10} J_T \\
K_{68} &= \frac{E}{R} \left\{ \frac{6}{5l} J_y - \left( \frac{6}{5} + \frac{12}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{Rl} + \frac{12J_w}{l^3} \right\} \\
&\quad + \frac{6G}{5Rl} J_T \\
K_{69} &= E \left( \frac{9\phi}{70R} Z_y + \frac{6}{5Rl} J_{xy} - \frac{12C_x}{l^3} \right) \\
K_{6,10} &= \frac{E}{R} \left\{ \left( -1 + \frac{13}{210} \phi^2 \right) \frac{Z_y}{2} + \frac{3J_{xy}}{5R} - \frac{6C_x}{Rl} \right\} \\
K_{6,11} &= E \left( -\frac{13\phi^2}{420} Z_y - \frac{J_{xy}}{10R} + \frac{6C_x}{l^2} \right) \\
K_{6,12} &= \frac{E}{R} \left\{ - \left( 1 + \frac{13}{42} \phi^2 \right) \frac{J_y}{10} \right. \\
&\quad \left. + \left( -\frac{1}{10} + \frac{6}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{R} \right\} \\
K_{6,13} &= E \left( \frac{9\phi}{70R} J_y + \frac{12C_y}{5Rl} - \frac{12J_w}{l^3} \right) - \frac{6G}{5l} J_T \\
K_{6,14} &= E \left( -\frac{13\phi^2}{420} J_y - \frac{C_y}{5R} + \frac{6J_w}{l^2} \right) + \frac{G}{10} J_T \\
K_{77} &= E \left( \frac{l\phi^2}{105} J_y - \frac{4\phi}{15} C_y + \frac{4}{l} J_w \right) + \frac{2lG}{15} J_T \\
K_{76} &= \frac{E}{R} \left\{ \frac{J_y}{10} - \left( \frac{1}{10} + \frac{6}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{R} + \frac{6J_w}{l^2} \right\} + \frac{GJ_T}{10R} \\
K_{75} &= E \left( \frac{13\phi^2}{420} Z_y + \frac{J_{xy}}{10R} - \frac{6C_x}{l^2} \right) \\
K_{7,10} &= E \left\{ \left( -\frac{1}{12} + \frac{\phi^2}{140} \right) \phi Z_y + \frac{\phi J_{xy}}{20R} - \frac{3C_x}{Rl} \right\} \\
K_{7,11} &= E \left( -\frac{l\phi^2}{140} Z_y + \frac{\phi}{30} J_{xy} + \frac{2C_x}{l} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{7,12} &= E \left\{ \left( \frac{1}{30} - \frac{\phi^2}{140} \right) \phi J_y + \left( \frac{\phi}{30} + \frac{2}{\phi} \right) \frac{C_y}{R} \right\} \\
K_{7,13} &= E \left( \frac{13\phi^2}{420} J_y + \frac{C_y}{5R} - \frac{6J_w}{l^2} \right) - \frac{GJ_T}{10} \\
K_{7,14} &= E \left( -\frac{l\phi^2}{140} J_y + \frac{\phi}{15} C_y + \frac{2J_w}{l} \right) - \frac{lGJ_T}{30} \\
K_{88} &= \frac{12E}{l^3} \left( J_y - \frac{2C_y}{R} + \frac{J_w}{R^2} \right) + \frac{6\phi^2 GJ_T}{5l^3} \\
K_{89} &= \frac{6E}{l} \left( -\frac{Z_y}{5R} + \frac{2J_{xy}}{l^2} - \frac{2C_x}{Rl^2} \right) \\
K_{8,10} &= \frac{E}{R} \left( -\frac{Z_y}{10R} + \frac{6J_{xy}}{l^2} - \frac{6C_x}{Rl^2} \right) \\
K_{8,11} &= E \left( \frac{Z_y}{10R} - \frac{6J_{xy}}{l^2} + \frac{6C_x}{Rl^2} \right) \\
K_{8,12} &= E \left\{ \left( -6 + \frac{\phi^2}{10} \right) \frac{J_y}{l^2} - \left( \frac{1}{10} - \frac{6}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{R^3} \right\} \\
K_{8,13} &= \frac{6E}{R} \left\{ -\frac{J_y}{5l} + \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{Rl} - \frac{2J_w}{l^3} \right\} \\
&\quad - \frac{6GJ_T}{5Rl} \\
K_{8,14} &= \frac{E}{R} \left\{ \frac{J_y}{10} - \left( \frac{1}{10} + \frac{6}{\phi^2} \right) \frac{C_y}{R} + \frac{6J_w}{l^2} \right\} + \frac{GJ_T}{10R} \\
K_{99} &= E \left( \frac{13\phi}{35R} F - \frac{12Z_x}{5Rl} + \frac{12J_x}{l^3} \right) \\
K_{9,10} &= \frac{E}{R} \left\{ \left( -\frac{1}{2} + \frac{11}{210} \phi^2 \right) F - \frac{7Z_x}{10R} + \frac{6J_x}{l^2} \right\} \\
K_{9,11} &= E \left( -\frac{11\phi^2}{210} F + \frac{6Z_x}{5R} - \frac{6J_x}{l^2} \right) \\
K_{9,12} &= E \left\{ \left( 1 - \frac{\phi^2}{21} \right) \frac{11Z_y}{10R} - \left( 6 - \frac{\phi^2}{10} \right) \frac{J_{xy}}{l^2} \right\} \\
K_{9,13} &= E \left( \frac{13\phi}{35R} Z_y - \frac{6J_{xy}}{5Rl} + \frac{12C_x}{l^3} \right) \\
K_{9,14} &= E \left( -\frac{11\phi^2}{210} Z_y + \frac{J_{xy}}{10R} - \frac{6C_x}{l^2} \right) \\
K_{10,10} &= E \left\{ \left( 1 - \frac{\phi^2}{6} + \frac{\phi^4}{105} \right) \frac{F}{l} - \frac{\phi Z_x}{10R^2} + \frac{3J_x}{R^2 l} \right\} \\
K_{10,11} &= E \left\{ \left( \frac{1}{12} - \frac{\phi^2}{105} \right) \phi F \right. \\
&\quad \left. - \left( 1 - \frac{11}{60} \phi^2 \right) \frac{Z_x}{l} - \frac{3J_x}{Rl} \right\} \\
K_{10,12} &= \frac{E}{l} \left\{ \left( -1 + \frac{13}{60} \phi^2 - \frac{\phi^4}{105} \right) Z_y \right. \\
&\quad \left. - \left( 3 - \frac{\phi^2}{20} \right) \frac{J_{xy}}{R} \right\} \\
K_{10,13} &= \frac{E}{R} \left\{ \left( -\frac{1}{2} + \frac{11}{210} \phi^2 \right) Z_y - \frac{3J_{xy}}{5R} + \frac{6C_x}{l^2} \right\} \\
K_{10,14} &= E \left\{ \left( \frac{1}{12} - \frac{\phi^2}{105} \right) \phi Z_y + \frac{\phi J_{xy}}{20R} - \frac{3C_x}{Rl} \right\} \\
K_{11,11} &= E \left( \frac{l\phi^2}{105} F - \frac{4\phi}{15} Z_x + \frac{4J_x}{l} \right) \\
K_{11,12} &= E \left\{ \left( -\frac{2}{15} + \frac{\phi^2}{105} \right) \phi Z_y \right. \\
&\quad \left. + \left( 4 - \frac{2}{15} \phi^2 \right) \frac{J_{xy}}{l} \right\} \\
K_{11,13} &= E \left( -\frac{11\phi^2}{210} Z_y + \frac{11J_{xy}}{10R} - \frac{6C_x}{l^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{11,14} &= E \left( \frac{l\phi^2}{105} Z_y - \frac{2\phi}{15} J_{xy} + \frac{4C_x}{l} \right) \\
 K_{12,12} &= \frac{E}{l} \left( 4 - \frac{4}{15} \phi^2 + \frac{\phi^4}{105} \right) J_y \\
 K_{12,13} &= E \left\{ \left( 1 - \frac{\phi^2}{21} \right) \frac{11J_y}{10R} + \left( -6 + \frac{\phi^2}{10} \right) \frac{C_y}{l^2} \right\} \\
 K_{12,14} &= E \left\{ \left( -\frac{2}{15} + \frac{\phi^2}{105} \right) \phi J_y + \left( 2 - \frac{\phi^2}{15} \right) \frac{2C_y}{l} \right\} \\
 K_{13,13} &= E \left( \frac{13\phi}{35R} J_y - \frac{12C_y}{5Rl} + \frac{12J_w}{l^3} \right) + \frac{6GJ_T}{5l} \\
 K_{13,14} &= E \left( -\frac{11\phi^2}{210} J_y + \frac{6C_y}{5R} - \frac{6J_w}{l^2} \right) - \frac{GJ_T}{10} \\
 K_{14,14} &= E \left( \frac{l\phi^2}{105} J_y - \frac{4\phi}{15} C_y + \frac{4J_w}{l} \right) + \frac{2lGJ_T}{15}
 \end{aligned} \tag{33}$$

式 (33) において  $l=R\phi$  は軸線  $i-j$  の円弧の長さであり、また以下の断面定数が用いられている。

$$\left. \begin{aligned}
 F &= R \int_F \frac{1}{\rho} dF, & Z_x &= R \int_F \frac{1}{\rho} y dF \\
 Z_y &= R \int_F \frac{1}{\rho} x dF, & J_x &= R \int_F \frac{1}{\rho} y^2 dF \\
 J_y &= R \int_F \frac{1}{\rho} x^2 dF, & J_{xy} &= R \int_F \frac{1}{\rho} xy dF \\
 J_T &= \int_F \frac{\rho}{R} \left[ \frac{R}{\rho} r - \rho \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\omega}{\rho} \right) \right]^2 dF \\
 C_x &= R \int_F \frac{1}{\rho} \omega y dF, & C_y &= R \int_F \frac{1}{\rho} \omega x dF \\
 J_w &= R \int_F \frac{1}{\rho} \omega^2 dF
 \end{aligned} \right\} \tag{34}$$

式 (34) の積分で  $dF=dnds$  であり、これらの断面定数は、曲線材に関する断面定数の定義そのものである。特に  $J_T$  は St. Venant のねじれ定数、 $J_w$  は曲げねじれ定数である。式 (33) で、 $l$ —一定とし、 $R \rightarrow \infty$ ,  $\phi \rightarrow 0$ ,  $R/\rho \rightarrow 1$  の極限をとれば直線材に対する剛性マトリックスとなる。文献 15) は直線材の任意軸に対するものであるが、 $x, y$  軸が主軸に平行な特別な場合である。

### 3. 剛性マトリックスの二、三の特性

前節で導かれた剛性マトリックスは任意な軸線に対するものであったが、中立軸やせん断中心軸に関する変形で論ずる場合は、いくらか簡単なものとなる。すなわち、

(1) 軸線  $i-j$  が中立軸の場合  
 $Z_x = Z_y = 0 \dots\dots\dots(35)$

さらに  $x, y$  軸が主軸の場合は  
 $J_{xy} = 0 \dots\dots\dots(36)$

(2) 軸線  $i-j$  がせん断中心軸の場合  
 $C_x = C_y = 0 \dots\dots\dots(37)$

(1), (2) いずれの場合においても、断面形状が曲率面

に平行な軸、すなわち  $y$  軸に関して対称の場合は  
 $Z_y = J_{xy} = C_x = 0 \dots\dots\dots(38)$

である。  
 式 (33) の剛性マトリックスの要素は、 $x, y$  および  $z$  軸に関する変位量の順に配列されているが、考察に便利のように面外変位に関するものと面内変位に関するものに配列をいれかえると

$$\begin{Bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_\alpha \\ \delta_\beta \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(39)$$

ここで

$$\{P_\alpha\}^T = [Q_{xi} M_{yi} T_{zi} M_{oi} Q_{xj} M_{yj} T_{zj} M_{wj}] \dots\dots\dots(40)$$

$$\{P_\beta\}^T = [Q_{yi} N_{zi} M_{xi} Q_{yj} N_{zj} M_{xj}] \dots\dots\dots(41)$$

$$\{\delta_\alpha\}^T = [u_i \phi_{yi} \phi_i \psi_{zi} u_j \phi_{yj} \phi_j \psi_{zj}] \dots\dots\dots(42)$$

$$\{\delta_\beta\}^T = [v_i w_i \phi_{xi} v_j w_j \phi_{xj}] \dots\dots\dots(43)$$

$$[K_{\alpha\alpha}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} & K_{1,12} & K_{1,13} & K_{1,14} \\ & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} & K_{5,12} & K_{5,13} & K_{5,14} \\ & & K_{66} & K_{67} & K_{68} & K_{6,12} & K_{6,13} & K_{6,14} \\ & & & K_{77} & K_{78} & K_{7,12} & K_{7,13} & K_{7,14} \\ & & & & K_{88} & K_{8,12} & K_{8,13} & K_{8,14} \\ \text{SYM.} & & & & & K_{12,12} & K_{12,13} & K_{12,14} \\ & & & & & & K_{13,13} & K_{13,14} \\ & & & & & & & K_{14,14} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(44)$$

$$[K_{\beta\beta}] = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{29} & K_{2,10} & K_{2,11} \\ & K_{33} & K_{34} & K_{39} & K_{3,10} & K_{3,11} \\ & & K_{44} & K_{49} & K_{4,10} & K_{4,11} \\ & & & K_{99} & K_{9,10} & K_{9,11} \\ \text{SYM.} & & & & K_{10,10} & K_{10,11} \\ & & & & & K_{11,11} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(45)$$

$$[K_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{19} & K_{1,10} & K_{1,11} \\ K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{59} & K_{5,10} & K_{5,11} \\ K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{69} & K_{6,10} & K_{6,11} \\ K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{79} & K_{7,10} & K_{7,11} \\ K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{89} & K_{8,10} & K_{8,11} \\ K_{12,2} & K_{12,3} & K_{12,4} & K_{12,9} & K_{12,10} & K_{12,11} \\ K_{13,2} & K_{13,3} & K_{13,4} & K_{13,9} & K_{13,10} & K_{13,11} \\ K_{14,2} & K_{14,3} & K_{14,4} & K_{14,9} & K_{14,10} & K_{14,11} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(46)$$

また  $[K_{\beta\alpha}] = [K_{\alpha\beta}]^T$  である。 $[K_{\alpha\alpha}]$  は曲率面外の変位に関するマトリックス、 $[K_{\beta\beta}]$  は曲率面内の変位に関するマトリックス、 $[K_{\alpha\beta}]$  は曲率面外と面内の変位の連成を表わすマトリックスである。式 (33) から、 $[K_{\alpha\alpha}]$  の各要素は  $J_y, C_y, J_w$  および  $J_T$  の関数であり、 $[K_{\alpha\beta}]$  の各要素は  $Z_y, J_{xy}$  および  $C_x$  の関数、 $[K_{\beta\beta}]$  の各要素は  $F, Z_x$  および  $J_x$  の関数である。すなわち

$$[K_{\alpha\alpha}] = [K_{\alpha\alpha}(J_y, C_y, J_w, J_T)] \dots\dots\dots(47)$$

$$[K_{\alpha\beta}] = [K_{\alpha\beta}(Z_y, J_{xy}, C_x)] \dots\dots\dots(48)$$

$$[K_{\beta\beta}] = [K_{\beta\beta}(F, Z_x, J_x)] \dots\dots\dots (49)$$

式 (39) の剛性マトリックスを用いて、支持条件が曲率面外の力にも面内の力にも自由、単純または固定の単径間曲線桁橋、あるいは連続曲線桁橋の解析を行う場合、面外荷重が作用したときの面外変位が注目する変位量であるが、軸線  $i-j$  が任意な軸であれば式 (34) の断面定数はいずれもある値をもち、したがって  $[K_{\alpha\beta}]$  の各要素もある値をもつから、面外荷重のみが作用しても面内変位も連成して生ずる。軸線が中立軸の場合でも、さらに  $x, y$  軸が主軸であっても一般断面では  $C_x \neq 0$  であるから、面外荷重だけが作用しても面内変位を生ずる。軸線がせん断中心軸の場合も一般断面では  $Z_y \neq 0, J_{xy} \neq 0$  であるから同じことがいえる。軸線が中立軸でもせん断中心軸でも、断面が  $y$  軸に対称な場合は式 (38) によって  $[K_{\alpha\beta}]$  の各要素はいずれも 0 となって面外荷重によっては面内変位を生じない。したがってこの場合には面内力も生じない注 1)。このとき式 (39) は

$$\{P_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}] \{\delta_\alpha\} \dots\dots\dots (50)$$

となり、 $[K_{\alpha\alpha}]$  が曲線要素に対する剛性マトリックスとなる。

曲率半径が十分大きくて、 $R/\rho \approx 1$  と見なしうる曲線桁橋では、式 (34) で定義される断面定数は直線材としての断面定数にほぼ等しいとみなせる。このとき断面が曲率面に垂直な軸、すなわち  $x$  軸に対称な場合、軸線として中立軸を選ぶと

$$Z_y = Z_x = J_{xy} = C_y = 0, C_x \neq 0 \dots\dots\dots (51)$$

である。またせん断中心軸を選ぶと

$$Z_x = J_{xy} = C_x = C_y = 0, Z_y \neq 0 \dots\dots\dots (52)$$

である。したがって中立軸の変形で論じても、せん断中心軸の変形で論じても、 $[K_{\alpha\beta}]$  の各要素はある値をもち、面外荷重だけが作用しても面内変位を生じ、したがって一般に面内力を生ずる（なお、 $x$  軸に対称な断面で式 (34) で定義される断面定数を用いる場合は、式

(51), (52) で、0 とならない断面定数がさらに増える)。

薄肉曲線桁橋では、断面が  $y$  軸に関して対称であることはほとんどなく、I 型プレートガーダーでは  $x$  軸に対称であるし、箱桁橋では上フランジが曲率内側にカントを持つ、 $x, y$  両軸に非対称な断面である場合が多い（したがって両軸は主軸でもない）。ただ式 (47) と式 (48) の  $[K_{\alpha\alpha}]$  と  $[K_{\alpha\beta}]$  の各要素を構成している断面定数の性質から、後者の要素の値は前者のそれに比べて一般に十分小さいと考えられるから、面内変位や、それに伴う面内力も、面外のそれらに比べて十分小さいものと思われる。

式 (39) を、境界条件を処理した後の平面曲線構造系全体に対してたてられた関係とすると、面外荷重のみが作用する場合

$$\{P_\beta\} = \{0\} \dots\dots\dots (53)$$

であるから、

$$\{\delta_\alpha\} = ([K_{\alpha\alpha}] - [K_{\alpha\beta}][K_{\beta\beta}]^{-1}[K_{\beta\alpha}])^{-1}\{P_\alpha\} \dots\dots\dots (54)$$

$$\{\delta_\beta\} = -[K_{\beta\beta}]^{-1}[K_{\beta\alpha}]\{\delta_\alpha\} \dots\dots\dots (55)$$

となり、面外変位  $\{\delta_\alpha\}$  と面内変位  $\{\delta_\beta\}$  は分離して解かれる。式 (54), (55) は任意軸で一般断面に対して成立する。

### 4. 計算例

#### (1) 2 径間連続曲線桁

図-3 のような 2 径間連続曲線桁を考える。これは文献 17) で取りあげられているものと同じ例であり、ここでも同じ要素数を用いて計算を行い、結果を比較してみる。軸

表-1 断面定数

|            |                                   |
|------------|-----------------------------------|
| $J_y$      | $1.682 \times 10^8 \text{ cm}^4$  |
| $J_T$      | $6.520 \times 10^8 \text{ cm}^4$  |
| $J_\alpha$ | $3.0 \times 10^8 \text{ cm}^8$    |
| $E$        | $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ |
| $G$        | $8.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ |

表-2 節点 5 に  $P=1 \text{ kg}$  が作用した

|                      | 1 | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      |
|----------------------|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| a. 理論解 <sup>2)</sup> | 0 | 152.32 | 280.69 | 364.94 | 391.91 | 358.08 | 270.70 | 144.83 |
| b. 著者                | 0 | 152.17 | 280.40 | 364.56 | 391.51 | 357.70 | 270.42 | 144.68 |
| c. 文献 17)            | 0 | 155.94 | 287.37 | 373.62 | 401.20 | 366.42 | 276.89 | 148.12 |
| a と b の差(%)          | 0 | 0.10   | 0.10   | 0.10   | 0.11   | 0.11   | 0.10   | 0.10   |

表-3 節点 5 に  $T=1 \text{ kg}\cdot\text{cm}$  が作用した

|                      | 1 | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       |
|----------------------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| a. 理論解 <sup>2)</sup> | 0 | -1.1708 | -2.1702 | -2.8410 | -3.0618 | -2.7911 | -2.0977 | -1.1172 |
| b. 著者                | 0 | -1.1696 | -2.1680 | -2.8380 | -3.0586 | -2.7881 | -2.0955 | -1.1153 |
| c. 文献 17)            | 0 | -1.1843 | -2.1964 | -2.8772 | -3.1024 | -2.8254 | -2.1211 | -1.1282 |
| a と b の差(%)          | 0 | 0.10    | 0.10    | 0.11    | 0.10    | 0.11    | 0.10    | 0.17    |

注 1) 文献 21) に対する西野・倉方による討議でも、両端単純支持曲線桁橋について同様の事柄が指摘されているが、連続曲線桁橋の場合でも、断面が  $y$  軸に対称であれば、面外荷重によって面内変位と面内力は生じない。



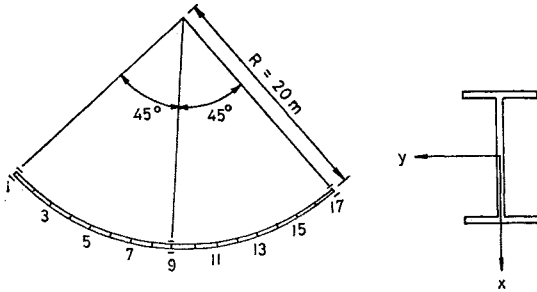


図-3

線を腹板中央を通る円弧とする。2軸対称断面であるから、前節によって面外荷重が作用した場合は面内変位と面内力を生じない。またフランジ幅は 50 cm であり、 $R=2000\text{ cm}$  であるから  $R/\rho \approx 1$  とみなして直線桁としての断面定数を用いることにする注2) (表-1 参照)。桁全体は 16 分割されている。

表-2 は、節点 5 に垂直荷重  $P=1\text{ kg}$  が作用したときの、表-3 は同じ節点にねじりモーメント荷重  $T=1\text{ kg}\cdot\text{cm}$  が作用したときの、それぞれたわみである。これらの表から、曲線桁を直線要素の集合、すなわち折線で解析した文献(17)に比べて、本論文の方法がすぐれた精度をもっていることがわかる。

図-4 (a), (b), (c) は、 $P=1\text{ kg}$  による節点 5 の曲げモーメント  $M_y$ 、ねじれモーメント  $T_z$  および曲げねじれモーメント  $M_x$  の影響線の理論解との比較を示す。断面力についても高い精度をもっていることが示されている。最も精度の劣るのは曲げねじれモーメントであるが、理論解との差は 0.3% 以内である。

(2) 曲線格子桁

曲線要素と直線要素の組合わされた構造系の例として、図-5 に示すような 2軸対称 I 型断面をもつ曲線桁と直線横桁から成る曲線格子桁を解析する。計算例(1)

ときのたわみ表 (乗数= $10^{-6}\text{ cm}$ )

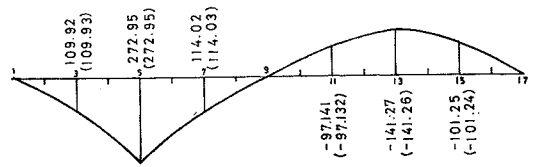
| 9 | 10      | 11      | 12      | 13      | 14      | 15      | 16      | 17 |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----|
| 0 | -142.11 | -259.95 | -335.69 | -359.69 | -329.08 | -249.96 | -134.62 | 0  |
| 0 | -141.96 | -259.68 | -335.60 | -359.31 | -328.74 | -249.70 | -134.48 | 0  |
| 0 | -145.52 | -266.18 | -343.91 | -368.11 | -336.70 | -255.70 | -137.70 | 0  |
| 0 | 0.11    | 0.10    | 0.03    | 0.11    | 0.10    | 0.10    | 0.10    | 0  |

ときのたわみ表 (乗数= $10^{-6}\text{ cm}$ )

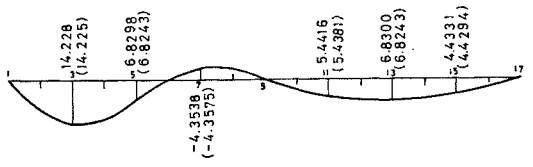
| 9 | 10     | 11     | 12     | 13     | 14     | 15     | 16     | 17 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----|
| 0 | 1.0927 | 2.0014 | 2.5884 | 2.7732 | 2.5384 | 1.9289 | 1.0391 | 0  |
| 0 | 1.0923 | 1.9994 | 2.5858 | 2.7702 | 2.5359 | 1.9269 | 1.0380 | 0  |
| 0 | 1.1067 | 2.0258 | 2.6193 | 2.8054 | 2.5674 | 1.9505 | 1.0506 | 0  |
| 0 | 0.04   | 0.10   | 0.10   | 0.10   | 0.10   | 0.10   | 0.11   | 0  |

注 2) 2軸対称断面は、曲率面に平行な軸 (y 軸) にも対称であるから、前節 3. によって、 $R/\rho \approx 1$  なる仮定を用いるか用いないかにかかわらず、面外荷重が作用した場合は面内変位と面内力は生じない。

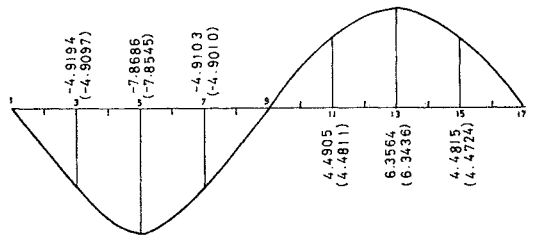
と同じく、曲線桁については  $R/\rho \approx 1$  として直線桁としての断面定数を用いる。解析上の軸線として曲線桁については腹板中央を通る円弧を、直線横桁についても腹板中央を通る直線を選ぶ。このとき図-5 において、これらの軸線は同一平面上にあるものと仮定する。すなわち、面内変位を含む曲線桁に関する (その極限としての直線桁を含む) 剛性マトリックス、式 (39) において、前述のように、断面形が曲率面に平行な軸に対称の場合は、 $[K_{\alpha\beta}] = [0]$  となって、支持条件が単純、自由あるいは固定の曲線桁では面外荷重によって面内変位と、それ



(a) 曲げモーメント影響線 (乗数= $\text{kg}\cdot\text{cm}$ )

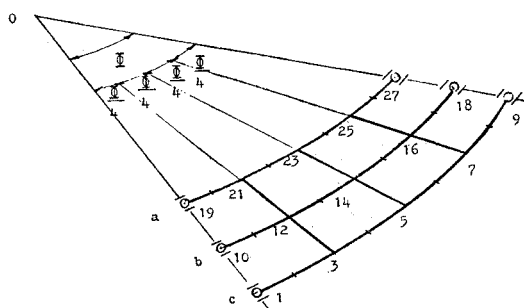


(b) ねじりモーメント影響線 (乗数= $\text{kg}\cdot\text{cm}$ )



(c) 曲げねじれモーメント影響線 (乗数= $10^3\text{ kg}\cdot\text{cm}^2$ )

図-4  $P=1\text{ kg}$  による節点 5 の断面力影響線 (かっこ内の数字は理論解<sup>22)</sup>)



図—5

表—4 形状寸法および断面定数

|      | $\phi$ [°] | R[m] | $J_y$ [cm <sup>4</sup> ] | $J_T$ [cm <sup>4</sup> ] | $J_w$ [cm <sup>6</sup> ] |
|------|------------|------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 主桁 a | 20         | 37   | 1.694×10 <sup>6</sup>    | 3.390×10 <sup>2</sup>    | 1.967×10 <sup>8</sup>    |
| 主桁 b | 20         | 40   | 2.106×10 <sup>6</sup>    | 4.805×10 <sup>2</sup>    | 2.487×10 <sup>8</sup>    |
| 主桁 c | 20         | 43   | 2.579×10 <sup>6</sup>    | 6.565×10 <sup>2</sup>    | 3.081×10 <sup>8</sup>    |
| 横桁   | —          | —    | 5.880×10 <sup>5</sup>    | 6.749×10                 | 2.308×10 <sup>7</sup>    |

に伴う面内力を生じないのであるが、曲線格子桁では、曲線桁と直線横桁それぞれが y 軸（あるいは x, y の両軸）に対称であっても、両者の変形を論じる軸線が同一平面上になければ、曲線桁と直線横桁の交点（格点）は、曲率面外にも面内にも互いに弾性支持された形になり、したがって面外荷重によっても面内変位と面内力を生じることになるからである（このことは、縦リブと横リブの断面形が異なる曲線直交異方性鋼床版などで、両者の中立軸が一般に同一平面上にないことに対応している）。

曲線格子桁の解析には変換マトリックスが必要である。曲線要素と直線要素について、部材座標系（局所座標系）に関して

$$\left. \begin{aligned} \{P_a\}^T &= [Q_{xi} \ M_{yi} \ T_{zi} \ M_{wi} \ \dots \ M_{wj}] \\ \{\delta_a\}^T &= [u_i \ \phi_{yi} \ \varphi_{zi} \ \psi_{zi} \ \dots \ \psi_{zj}] \end{aligned} \right\} \dots \dots (56)$$

絶対座標系（一般座標系）に関して

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{P}_a\}^T &= [\bar{Q}_{xi} \ \bar{M}_{yi} \ \bar{T}_{zi} \ \bar{M}_{wi} \ \dots \ \bar{M}_{wj}] \\ \{\bar{\delta}_a\}^T &= [\bar{u}_i \ \bar{\phi}_{yi} \ \bar{\varphi}_{zi} \ \bar{\psi}_{zi} \ \dots \ \bar{\psi}_{zj}] \end{aligned} \right\} \dots \dots (57)$$

と表わすと、両座標系の間には

$$\{\bar{P}_a\} = [R]\{P_a\}, \ \{\bar{\delta}_a\} = [R]^T\{\delta_a\} \dots \dots (58)$$

なる関係がある。[R]は変換マトリックスである。したがって、部材座標系表示による剛性マトリックス  $[K_{aa}]$  (式 (39)) の絶対座標系表示への変換は

$$\{\bar{P}_a\} = [R][K_{aa}][R]^T\{\delta_a\} = [\bar{K}]\{\bar{\delta}_a\} \dots \dots (59)$$

となる。[R]の内容については文献 (21) を参照されたい。

断面定数は表—4 に示してある。各曲線主桁は、8 分割、横桁は主桁間では分割せず、全体で 27 節点、要素数 30 で計算した。表—5 は、垂直荷重  $P=1$  kg における節点 7 における垂直変位影響線を、表—6 は同じ荷重による節点 5 における曲げねじれモーメント影響線を

表—5 節点 7 における垂直変位影響線

(10<sup>-5</sup> cm)

| 節点番号    | 1 | 3      | 5      | 7      | 9 |
|---------|---|--------|--------|--------|---|
| 文献 (23) | 0 | 0.6259 | 0.9781 | 0.7952 | 0 |
| 著者      | 0 | 0.6255 | 0.9774 | 0.7947 | 0 |
| 誤差 (%)  | 0 | 0.06   | 0.07   | 0.06   |   |

| 節点番号    | 10 | 12     | 14     | 16     | 18 |
|---------|----|--------|--------|--------|----|
| 文献 (23) | 0  | 0.2395 | 0.3516 | 0.2591 | 0  |
| 著者      | 0  | 0.2393 | 0.3513 | 0.2589 | 0  |
| 誤差 (%)  | 0  | 0.08   | 0.08   | 0.08   |    |

| 節点番号    | 19 | 21      | 23      | 25      | 27 |
|---------|----|---------|---------|---------|----|
| 文献 (23) | 0  | -0.0907 | -0.1355 | -0.1017 | 0  |
| 著者      | 0  | -0.0906 | -0.1354 | -0.1016 | 0  |
| 誤差 (%)  | 0  | 0.11    | 0.07    | 0.10    |    |

表—6 節点 5 における曲げねじれモーメント影響線

(10 kg·cm<sup>2</sup>)

| 節点番号    | 1 | 3      | 5      | 7      | 9 |
|---------|---|--------|--------|--------|---|
| 文献 (23) | 0 | 0.4619 | 0.7057 | 0.4619 | 0 |
| 著者      | 0 | 0.4618 | 0.7055 | 0.4618 | 0 |
| 誤差 (%)  | 0 | 0.02   | 0.03   | 0.02   |   |

| 節点番号    | 10 | 12     | 14     | 16     | 18 |
|---------|----|--------|--------|--------|----|
| 文献 (23) | 0  | 0.2153 | 0.3656 | 0.2153 | 0  |
| 著者      | 0  | 0.2152 | 0.3655 | 0.2152 | 0  |
| 誤差 (%)  | 0  | 0.05   | 0.03   | 0.05   |    |

| 節点番号    | 19 | 21      | 23      | 25      | 27 |
|---------|----|---------|---------|---------|----|
| 文献 (23) | 0  | -0.0040 | -0.0087 | -0.0040 | 0  |
| 著者      | 0  | -0.0040 | -0.0087 | -0.0040 | 0  |
| 誤差 (%)  | 0  | 0.00    | 0.00    | 0.00    |    |

示す。また表中の文献 (23) は、曲線桁の基礎微分方程式の解より求められた剛性マトリックスを用いて、同じ仮定のもとに得られた値であり、応力法と全く一致するものである。本論文の方法は、剛性マトリックスが簡単な代数式で与えられるにもかかわらず、高い精度を示している。

## 6. 結 語

微小変形理論を対象とし、曲率面外と面内に任意な集中荷重系を受ける薄肉曲線要素の剛性マトリックスを導いた。変形を考える軸線として任意軸を選び、荷重が作用したときの変形曲線を 3 次までのべき級数で表示し、仮想仕事の原理を用いて連続体における有限要素法と類似の表示で剛性マトリックスが得られた。これは、桁高が連続的に変化する変断面曲線桁橋や、径間ごとに曲率半径の変化する連続曲線桁橋、あるいは S 字型曲線桁橋の解析に容易に応用できるものである。従来の伝達マトリックス法による解析法では、せん断中心軸に関する変形で論じていたために、上記のようなせん断中心軸の高

さが連続的あるいは曲率面内で不連続に変化するような曲線橋に対しては、その適用が不可能あるいは、その不連続点で特別な考慮を必要とするが、本論文の変形法によれば、なんら障害なく解析可能である。

薄肉曲線要素に関する剛性マトリックスは、曲率面外の変形に関する部分、曲率面内の変形に関する部分、および曲率面外と面内の連成に関する部分から成っている。自由、単純または固定支持の単純あるいは連続曲線桁では、面外荷重が作用した場合、変形を論じる軸線が任意軸ではもちろん、中立軸あるいはせん断中心軸であっても、一般断面に対しては面内変形と面内力を生じ、これらが生じないのは、断面が曲率面に平行な軸に関して対称な場合のみである。このような一般的な議論は、薄肉曲線桁に関する基礎微分方程式に基づいてもなされようが、上述の事実は、従来みすごされてきたように思われるし、ここでの変形法によれば、剛性マトリックスの各要素を構成している断面定数の性質から、視覚的に明白にとらえることができる。

計算例として、2径間連続曲線桁と単純格子桁をとりあげた。前者について、従来の曲線桁を折線で近似する変形法による解と、本論文の方法を比較し、本法がすぐれた精度をもつことを示した。後者については、薄肉曲線桁の微分方程式の解を用いた変形法との比較を行い、本法の剛性マトリックスの各要素は、簡単な代数式で表わされるにもかかわらず、十分高い精度が得られることがわかった。

ここで示された変形法に基づく解析法は基本的なものであるが、振動解析、座屈解析、有限変位解析などにも容易に発展させることができよう。

#### 参 考 文 献

- 1) Vlasov, V.Z.: 薄肉弾性ばりの理論 (奥村敏恵ほか共訳), 技報堂, 1967.
- 2) Bornscheuer, F.W.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorgangs unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, Stahlbau, Heft 1, S. 1, und Heft 3, S. 52, 1952.
- 3) Kollbrunner, C.F. und N. Hajdin: Dünnwandige Stäbe, Springer-Verlag, 1972.
- 4) Roik, K., J. Carl und J. Lindner: Biegetorsionsprobleme gerauer dünnwandiger Stäbe, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1972.
- 5) Nishino, F., C. Kasemet und S.L. Lee: Variational Formulation of Stability Problems for Thin-Walled Members, Ingenieur-Archiv, Band 43, Heft 1, S. 58,

1973.

- 6) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵: 軸力と曲げおよびねじれを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, 第225号, pp. 1~15, 1974.
- 7) 小西一郎・小松定夫: 薄肉曲線桁の基礎理論, 土木学会論文集, 第87号, pp. 35~46, 1962.
- 8) 倉西 茂: 一般薄肉断面の曲りばりの解析, 土木学会論文集, 第108号, pp. 7~12, 1964.
- 9) 島田静雄: 曲線格子桁橋の理論, 東大橋梁研究室報告, 第95号, 1961.
- 10) 深沢泰晴: 薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎理論, 土木学会論文報告集, 第110号, pp. 30~51, 1964.
- 11) Dabrowski, R.: Gekrümmte dünnwandige Träger, Springer-Verlag, 1968.
- 12) Krajcinovic, D.: A Consistent Discrete Elements Technique for Thin walled Assemblages, International Journal of Solids and Structures, Vol. 5, pp. 639~662, 1969.
- 13) 鷹羽信勝・成岡昌夫: 変形法による任意形状の薄肉断面格子桁の解析, 土木学会論文報告集, 第178号, pp. 1~9, 1970.
- 14) Argyris, J.H. und D. Radaj: Steifigkeitsmatrizen dünnwandiger Stäbe und Stabsystem, Ingenieur Archiv, Band 40, S. 198~210, 1971.
- 15) 川井忠彦・明石 彰・村木豊彦: 変断面梁の曲げ振り解析, 日本鋼構造協会第5回マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 499~505, 1971.
- 16) Reilly, R.T.: Stiffness Analysis of Grids Including Warping, Proc. ASCE, Vol. 98, St 7, pp. 1511~1523, 1972.
- 17) 結城皓曠・前田幸雄: 薄肉断面構造の三次元挙動の解析, 土木学会論文報告集, 第224号, pp. 67~78, 1974.
- 18) Becker, G.: Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, Stahlbau, Heft 11, S. 334, 1965.
- 19) 深沢泰晴: せん断中心軸の不連続性を考慮した変断面薄肉曲線桁の解析法, 第14回橋梁・構造工学研究発表会, pp. 123~138, 1967.
- 20) 遠田良喜: 伝達マトリックス法による薄肉開断面曲線ばりの有限変位理論の解析, 土木学会論文報告集, 第199号, pp. 11~20, 1972, および, 伝達マトリックス法による薄肉開断面曲線ばりの2次の応力問題の解析, 土木学会論文報告集, 第210号, pp. 1~11, 1973.
- 21) 渡辺 昇・稼農知徳・藤井裕司: 曲げねじれをもった曲線桁橋の剛性マトリックス法による解析, 土木学会論文報告集, 第218号, pp. 1~8, 1973.
- 22) 渡辺 昇: 曲線げたの理論と計算, 技報堂, 1967.
- 23) 渡辺 昇・稼農知徳・藤井裕司: 薄肉断面曲線橋の剛性マトリックス, 北海道大学工学部研究報告, 第66号, pp. 1~12, 1973.

(1974.8.12・受付)