

流域地形構造とその統計則に関する基礎的研究

BASIC STUDY ON THE GEOMETRIC STRUCTURE IN RIVER BASINS AND ITS STATISTICAL LAWS

藤 田 睦 博*
By Mutsuhiro FUJITA

1. ま え が き

出水現象の解析にあたり流域地形の定量的把握は、基本的な重要事項の一つである。複雑な流域地形を定量的に評価しようとする研究は、Horton, Strahler¹⁾らの河道位数の概念と統計則を基本としている。Hortonらによって流域地形に関する河道位数則、河道長則、集水面積則、河道勾配則の地形則が経験的に得られている。河道位数則は、河道ネットワークのトポジカルな構造について記述しているもので、他の地形則は流域の幾何的構造について記述したものである。これらの地形則は、いずれも複雑な流域地形を巨視的に表現しているが、経験的に得られたものであるだけに普遍性をもつか否か興味ある問題である。この点に関して石原・高棹²⁾らは、河道発生ランダム性を考慮することによって河道位数則の成立することを理論的に説明している。しかし河道長則、集水面積則のように流域の物理量に関する地形則については、その理論的説明が未だなされていない。

ここでは、河道ネットワーク構造にグラフ理論を適用して配列構造を単純化して、配列構造の異なる各パターンを系統的に並べた。また新しく、配列構造の異なる各パターンの生起確率の概念を導入し、その理論式を導いた³⁾。さらに各パターンの生起確率構造と使用する地形図の縮尺との関連について考察し、求めた生起確率に基づいて流域地形の幾何的構造を記述している河道長則、集水面積則の普遍性を確めた。一方、理論の検証を天塩川、十勝川の各水系について行った。

2. 河道配列構造とその統計則

河道配列のトポジカルな構造を記述している河道位数則は、河道の距離、河道の曲り等を見捨て河道のつ

ながりと、その構造だけを取り上げている。その意味で河道網をグラフと考えるグラフ理論の適用が可能である。

(1) 河道網配列パターンとその識別法

河道網空間は、向き ϕ のついた枝(河道) κ の集合と、その端点(合流点および河道の始点)の集合 V のつくる有向グラフ $G(V, \kappa, \phi)$ とみなすことができる⁴⁾。ここでは2個の河道が合流して1個の河道を形成するものとし、分流については考えない。

河道網空間を形成する最小のユニットを考え、Fig. 2.1 に示すように記号を付す。点 L_1 から枝 L_1 が出るように番号をつける。点の番号には、 \bullet 印をつけて枝の番号と区別する。Fig. 2.1 において、 $L_1=1, L_2=2, L_3=3$ とすると出スター行列 $\overset{\dagger}{D}$ 、入スター行列 \bar{D} 、スター行列 D はそれぞれ次のようになる。

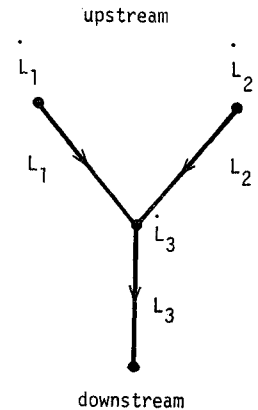


Fig. 2.1 Simple element of network

$$\overset{\dagger}{D} = \begin{vmatrix} 1 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 1 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\bar{D} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 1 & \bullet \end{vmatrix} \dots\dots\dots (2.2)$$

$$D = \overset{\dagger}{D} - \bar{D} = \begin{vmatrix} 1 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 1 & \bullet \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (2.3)$$

ただし行列中の \bullet 印は、0要素を示す。 $\overset{\dagger}{D}$ は、単位行列となり、 $L_1 < L_3, L_2 < L_3$ なるように番号をつけると D は三角行列となる。また D, \bar{D} と河道網は、一義的

* 正会員 工修 北海道大学助教授 工学部土木工学科

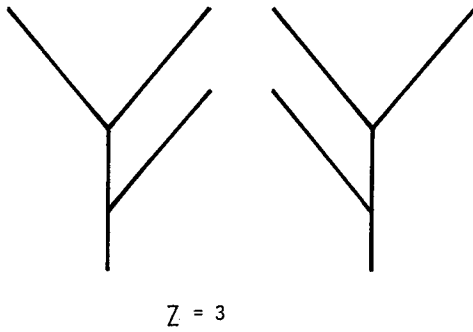


Fig. 2.2 Topologically distinct networks having three sources

に対応している。

一方位数 1 位の河道数を Z とすると Fig. 2.2 に示すように $Z=3$ の場合、従来の識別法では左右の区別をつけるので 2 個の異なるパターンと考えているが、河道網をグラフと見なすと同一のパターンとなる。

Z の値が増加すると D または \bar{D} で河道網を識別するのは困難となる。この場合最下流の合流点と上流側にある端点間を枝の向きに沿ってたどる定向点巡列を考える。たとえば Fig. 2.3 に示す $Z=4$ からなる河道網について、定向点巡列を示す行列 V は、次式で示される。

$$V_a = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.4)$$

$$V_b = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.5)$$

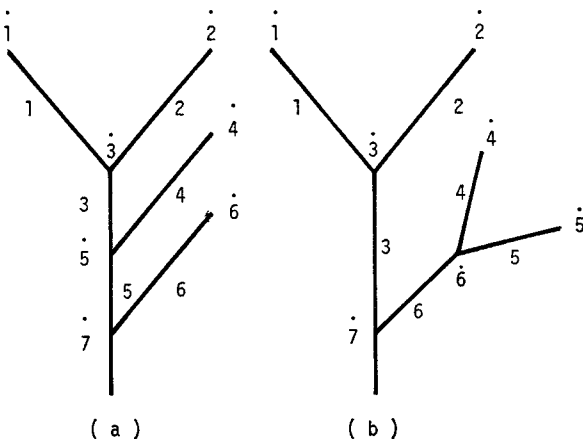


Fig. 2.3 Distinct patterns having four sources

I を単位行列として

$$A = VI \dots\dots\dots(2.6)$$

$$B = V^T I \dots\dots\dots(2.7)$$

は、それぞれの最下流の合流点からの距離および重複度を表わし、距離ベクトル、重複度ベクトルとよばれる。ここの例では、

$$\left. \begin{matrix} A_a = [3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1] \\ B_a = [1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 1] \\ A_b = [2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1] \\ B_b = [1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3] \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(2.8)$$

である。一般に $Z=N$ とすると枝または点の数は $(2N-1)$ 個であるから 重複度ベクトルは 奇数の要素からなり、そのうち N 個だけは 1 の値をとる。一方、距離ベクトルについては、必ず 2 個の河道が合流して 1 個の河道を形成しているの、同じ値の要素が偶数個現われる。これらの両ベクトルは、番号のつけ方をかえても要素を互に並びかえたものにすぎず、河道配列構造の特性をきわめて簡単に記述している。式 (2.8) は、さらに簡単に表現できて、

$$\left. \begin{matrix} A_a = [2 & 2 & 2] \\ B_a = [1 & 1 & \cdot] \\ A_b = [2 & 4 & \cdot] \\ B_b = [2 & \cdot & \cdot] \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(2.9)$$

ここで距離ベクトルの i 番目の要素は、距離 i の枝の数を示し、重複度ベクトルの i 番目の要素は重複度 $(2i+1)$ の枝の個数を示す。また行列 V は、グラフ理論より、

$$E = \bar{D}^T \dots\dots\dots(2.10)$$

とおき、 E の i 個の積を E^i と表わすと、 E^i は $i \geq K$ ですべての要素が 0 になることが証明されており、次式で求めることができる。

$$V = I + \sum_{i=1}^K E^i \dots\dots\dots(2.11)$$

Fig. 2.4 に $Z=6$ までの異なる各パターンと距離ベクトル、重複度ベクトルを示す。各パターンは、重複度ベクトルで大きな重複度をもつ配列から順に並べ、 i 番目のパターンは i 行目の要素に対応している。

$Z=N$ の時の異なるパターン数を S_N で表わすと、 S_N は次のように求めることができる。Fig. 2.5 に示すように河道網を最下流の合流点で切断して、2つの集合を考えると次式を誘導できる。

$$S_N = \begin{cases} \sum_{i=1}^{[N/2]} S_i \cdot S_{N-i} & (N \neq 2m) \\ \sum_{i=1}^{[N/2]-1} S_i \cdot S_{N-i} + \frac{1}{2} S_{[N/2]} (1 + S_{[N/2]}) & (N = 2m) \end{cases} \dots\dots\dots(2.12)$$

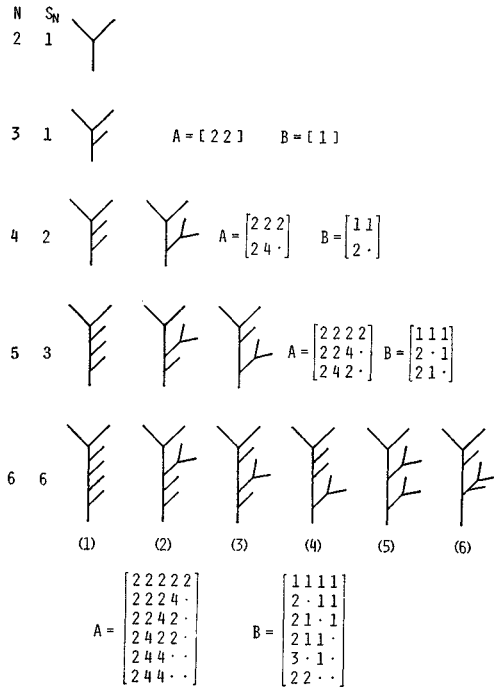


Fig. 2.4 Distinct patterns of channel networks

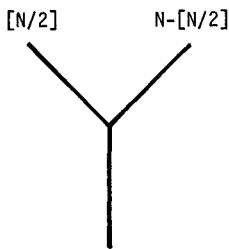
ただ [] は、ガウス記号を示す。従来の河道網配列のパターン数と比較した結果を Table 2.1 に示す。

(2) 河道の形成過程とパターンの生起確率

石原・高棹らは、河道網を形成する外力が流域全体にわたって等分布するとして、河道位数則の成立することを理論的に説明している。ここでも石原らと同様の仮定に基づき、河道が新しく発生する機会を、すべての河道について等確率とする。

なおここでは新たに、相異なる各河道網パターンの生起確

1 N-1
2 N-2
3 N-3
⋮
⋮



[] Gaussian Notation

Fig. 2.5 Combination of the S_i distinct networks having i sources, with the S_{N-i} distinct networks having $N-i$ sources

Table 2.1 Comparison of author's method with conventional method

N	S_N	
	Conventional Method	Author's Method
6	42	6
16	9.695×10^6	1.0905×10^4
25	1.290×10^{12}	1.9680×10^7
27	1.837×10^{13}	1.0789×10^8
50	5.096×10^{28}	5.1501×10^{16}

率の概念を導入する。

$Z=N$ の河道網を最下流の合流点で切断して、1つの集合に $Z=i$, 他の集合には $Z=N-i$ となる組合せを $P_S(i, N-i)$ として、この $P_S(i, N-i)$ が生起する確率を $P(i, N)$ とする。 $Z=i$ の時 S_i 個の異なるパターンがあり、各パターンの生起確率を P_i とすると次式を定義できる。

$$\sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) = 1 \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

$$P_i = (P_i^1, P_i^2, \dots, P_i^{S_i}) \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

$$\sum_{j=1}^{S_i} P_i^j = 1 \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

したがって、 $Z=N$ の時、各パターンの生起確率は

$$P_N = \left\{ \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) \llbracket P_i^T P_{N-i} \rrbracket \right\} \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

$$P_1 = P_2 = P_3 = 1$$

ここで $\llbracket \rrbracket$ は、次のような変換オペレータを意味する。 P_i は行ベクトルで定義したので、 $P_i^T P_{N-i}$ は、 $S_i \times S_{N-i}$ のマトリックスとなる。このマトリックスの1行、2行...の要素を順に並べて行ベクトルにする操作を $\llbracket \rrbracket$ で示す。また、 $N=2m, i=m$ の時には

$$\llbracket P_m^T P_m \rrbracket = \left\{ \sum_{j=1}^{S_m} P_m^j \sum_{K=j}^{S_m} \alpha_{j,K} P_m^K \right\} \quad \dots\dots\dots(2.17)$$

$$\alpha_{j,K} = \begin{cases} 1 & j=K \\ 2 & j \neq K \end{cases}$$

を演算して、順に並べて行ベクトルとする。

$P_S(i, N-i)$ は、 $P_S(i-1, N-i)$ または $P_S(i, N-i-1)$ に新しく河道が発生した場合に生じる。 $Z=N-1$ のとき河道の総数は $(2N-3)$ だから

$$P(i, N) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{2i-3}{2N-3} P(i-1, N-1) \\ & + \frac{2(N-i)-3}{2N-3} P(i, N-1) \end{aligned} \right\}$$

$$2 \leq i \leq [N/2]-1 \quad \dots\dots\dots(2.18)$$

$i=1$ のとき $P_S(1, N-1)$ は、 $P_S(1, N-2)$ に新しく河道が発生した場合か、 $P_S(2, N-3), P_S(3, N-4), \dots, P_S\{[(N-1)/2], N-1-[(N-1)/2]\}$ の最下流の河道に新しく河道が発生したときに生じる。したがって

$$P(1, N) = \frac{2(N-2)-1}{2N-3} P(1, N-1) + \sum_{j=2}^{[(N-1)/2]} \frac{1}{2N-3} P(j, N-1) \quad \dots\dots\dots(2.19)$$

$i=[N/2]$ の場合

$$P\left(\left[\frac{N}{2}\right], N\right) = \left\{ \frac{N-3}{2N-3} P\left(\frac{N}{2}-1, N-1\right) (N=2m) \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{N-4}{2N-3} P\left(\frac{N-3}{2}, N-1\right) \\ & + \frac{2N-4}{2N-3} P\left(\frac{N-1}{2}, N-1\right) (N=2m+1) \\ & \dots\dots\dots(2.20) \end{aligned} \right.$$

$P(i, N)$ の一般式は

$$\left. \begin{aligned} P(1, N) &= \frac{N}{2N-3} \\ P(i, N) &= \frac{2(2i-3)!N!(N-2)!(2N-2i-2)!}{(i-2)!i!(N-i)!(2N-3)!(N-i-1)!} \\ & \quad (2 \leq i \leq [N/2], N \neq 2m) \\ P(m, 2m) &= \frac{8 \cdot m}{(4m-2)!} \left\{ \frac{(2m-1)!(2m-3)!}{m!(m-2)!} \right\}^2 \\ & \dots\dots\dots(2.21) \end{aligned} \right\}$$

式 (2.16), (2.21) より任意の N に対する各パターン¹の生起確率を求めることができる。Table 2.2 に $N=7$ まで求めた結果を示す。

Table 2.2 Probability distribution of distinct patterns

N		Occurrence Probability											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
4	P_1	4	1										$\times 1/5$
5	P_3	4	1	2									$\times 1/7$
6	P_5	8	2	4	4	1	2						$\times 1/21$
7	P_7	8	2	4	4	1	2	4	1	2	4	1	$\times 1/33$

一方, $P_S(i, N-i), i=1, 2, \dots, [N/2]$ のそれぞれの最初に表われるパターン¹の生起確率を求めると,

$$\left. \begin{aligned} P(1, N)P_1^1P_{N-1}^1 &= \frac{2^{N-3}N!(N-2)!}{(2N-3)!} = P_N^1 \\ P(i, N)P_i^1P_{N-i}^1 &= \frac{2^{N-4}N!(N-2)!}{(2N-3)!} = \frac{1}{2}P_N^1 \\ & \quad (2 \leq i \leq [N/2], N \neq 2m) \\ P(m, 2m)P_m^1P_m^1 &= \frac{2^{N-5}N!(N-2)!}{(2N-3)!} = \frac{1}{4}P_N^1 \\ & \dots\dots\dots(2.22) \end{aligned} \right\}$$

したがって, $Z=N$ の時に生じるすべてのパターン¹の確率は, $P_N^1(1/2)^i, i=0, 1, 2, \dots$ の形式で表現できて, 最大の重複度をもつ最も単純な1番目のパターンが最大の確率で生じることがわかる。

(3) パターン¹の生起確率構造の相似性

一般に流域地形の把握は, 地形図に基づいてなされる。同一の流域でも使用する地形図の縮尺により, 位数1位の河道数, 流域の最大位数も異なる。ここではパターン¹の生起確率構造と地形図の縮尺との関係について考察する。

地形図の精度はすべての地点で等しいものとする。また地形図の縮尺が小となるにつれて, 河道網の規模も縮小するが, この際位数1位, 2位, … の河道の順に河道

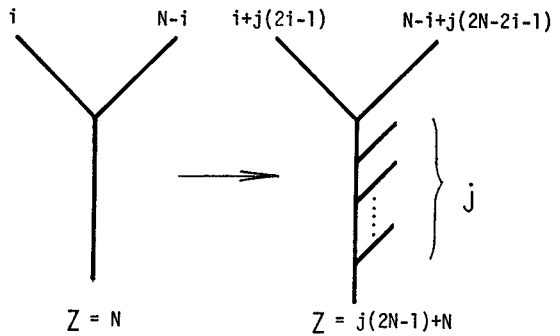


Fig. 2.6 Formation of channel distribution

が消失すると考える。ここでは, 位数1位の河道のみが消失するものとする。

ある特定の縮尺における $Z=N$ の河道網において, 縮尺が大になるとすべての河道に j 個の河道が新しく現われると考える。Fig. 2.6 に示すように $P_S(i, N-i)$ の河道網は, その河道数が $(2N-1)$ だから, $Z=j(2N-1)+N$ の $P_S\{i+j(2i-1), N-i+j(2N-2i-1)\}$ の河道網になる。 $Z=N$ のとき, 異なるパターン数は S_N 個で, $Z=j(2N-1)+N$ のパターン数は $S_{j(2N-1)+N}$ ($> S_N$) であるが, 新しく河道が現われたことにより生じるパターンは, $S_{j(2N-1)+N}$ 個のパターンのうちの特定の S_N 個のパターンである。 $Z=N$ の河道網の各パターン¹の生起確率は

$$P_N = (P_N^1, P_N^2, \dots, P_N^{S_N}) \dots\dots\dots(2.23)$$

で示される。また新しく河道が現われたことにより生じるパターン¹の生起確率を次式で表わす。

$$T_N = (T_N^1, T_N^2, \dots, T_N^{S_N}) \dots\dots\dots(2.24)$$

T_N についても前と同様に考えて次式を導ける。

$$\begin{aligned} T_N &= \prod_{K=1}^j P\{1, (2j+1)N+K-2j\} \\ & \cdot \sum_{i=1}^{[N/2]} P\{(2j+1)i-j, N+j(2N-2)\} \\ & \llbracket T_i^T T_{N-i} \rrbracket \dots\dots\dots(2.25) \end{aligned}$$

したがって T_N^1 は

$$\begin{aligned} T_N^1 &= P\{j+1, N+j(2N-2)\} \\ & \cdot \prod_{K=1}^j P\{1, (2j+1)N+K \\ & -2j\} T_1^1 T_{N-1}^1 \\ & \dots\dots\dots(2.26) \end{aligned}$$

T_1^1 は, Fig. 2.7 に示すように $Z=1$ の河道網に j 個の河道が新しく現われた時の生起確率だから, 式 (2.22) の第1式で $N=j+1$ として

$$T_1^1 = \frac{2^{j-2}(j+1)!(j-1)!}{(2j-1)!} \dots\dots\dots(2.27)$$

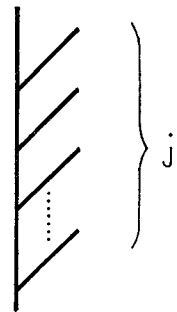


Fig. 2.7 The first pattern for $N=j+1$

したがって

$$T_N^1 = \frac{2^{2jN-(j+3)} \{(2j+1)N-j\}!}{\{2(2j+1)N\}!} \cdot \frac{\{(2j+1)N-(j+2)\}!}{-(2j+3)!} \quad (N \geq 2) \quad \dots\dots\dots(2.28)$$

また $P_S(i, N-i)$, $i=2, 3, \dots, [N/2]$ のパターン群の最初のパターンに新しく河道が表われたときの生起確率は

$$P\{(2j+1)i-j, N+j(2N-2)\} \cdot \prod_{K=1}^j P\{1, (2j+1)N+K-2j\} T_i^1 \cdot T_{N-i}^1 = \begin{cases} \frac{1}{2} T_N^1 & 2 \leq i \leq [N/2] \\ & N \neq 2m \\ \frac{1}{4} T_N^1 & i=m \\ & N=2m \end{cases} \quad \dots\dots\dots(2.29)$$

T_i を求めると

$$\left. \begin{aligned} T_4^1 &= \frac{2^{7j-3}(7j+4)!(7j+2)!}{(14j+5)!} \\ T_4^2 &= \frac{2^{7j-5}(7j+4)!(7j+2)!}{(14j+5)!} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.30)$$

で, $T_4^2/T_4^1=1/4$ で **Table 2.2** の P_i と同一の関係を示している。また式 (2.29) も式 (2.22) と同様の関係を表わしている。このことは, $Z=N$ のどのパターンにおいても各河道に j 個の河道が新しく発生したとき, 新しいパターンの生起確率の相対的な値は, $Z=N$ の各パターンの確率構造と全く同一であることを示している。

(4) 河道網と位数

$Z=N$ の河道網の最大位数が K となる確率 $Q(K, N)$ については, すでに石原・高棹²⁾ が求めている。本手法による河道網の識別法を用いても次のように同一の結果を得ることができる。

$$Z=N(N \geq 2) \text{ の河道網がとりうる位数 } K \text{ の範囲は } 2 \leq K \leq [\log_2 2N] \quad \dots\dots\dots(2.31)$$

で, $Q(K, N)$ については次式が成立している。

$$\sum_{K=2}^{[\log_2 2N]} Q(K, N) = 1 \quad \dots\dots\dots(2.32)$$

いま $P_S(i, N-i)$ のパターン群において

$$\left. \begin{aligned} U_i &= [\log_2 2i] \\ U_{N-i} &= [\log_2 2(N-i)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.33)$$

として, $P_S(i, N-i)$ の河道網が位数 K をとる確率を $Q^i_{K,N}$ とおくと

$$Q(K, N) = \sum_{i=1}^{[N/2]} Q^i_{K,N} \quad \dots\dots\dots(2.34)$$

Table 2.3 に示す例よりただちに次式を誘導できる。

Table 2.3 Computational Example of $Q_{K,N}^i$

		(N-i)					
		2	3	3	4	4U _{N-i}
i	2	3	3	3	4	4U _{N-i}
	3	3	4	4	4	4U _{N-i}
	3	3	4	4	4	4	
	4	4	4	4	5	5	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	U _i	U _i	U _i				

$$U_i=1$$

$$Q^i_{K,N} = P(i, N)Q(K, N-i)$$

$$U_i \geq 2$$

$$Q^i_{K,N} = \begin{cases} P(i, N) \left\{ Q(K, i) \sum_{j=2}^{K-1} Q(j, N-i) \right. \\ \quad \left. + Q(K, N-i) \sum_{j=2}^{K-1} Q(j, i) \right. \\ \quad \left. + Q(K-1, i)Q(K-1, N-i) \right\} \\ \quad (3 \leq K \leq U_i+1) \\ P(i, N)Q(K, N-i) \quad (K \geq U_i+2) \\ \dots\dots\dots(2.35) \end{cases}$$

$Q(2, N)$ については, **Fig. 2.4** に示すように $Z=N$ の1番目のパターンだけが位数2となるので,

$$Q(2, N) = P_N^1 = \frac{2^{N-3}N!(N-2)!}{(2N-3)!} \quad \dots\dots\dots(2.34)$$

となる。 $Q(K, N)$ について数値計算した結果を **Fig. 2.8** に示す。この $Q(K, N)$ は, 石原・高棹らの得ている結果と一致している。

一方, $Z=N$ の河道網の最大位数を U_N とすると, この流域は, 位数 2, 3, ..., U_N の部分流域からなっている。 $M_{N,K}$ を $Z=N$ の河道網の位数 K の流域数とすると $E(M_{N,K})$ は次のように求めることができる。

$$E(M_{N,K}) = \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) \{ E(M_{i,K}) + E(M_{N-i,K}) + Q(K-1, i)Q(K-1, N-i) \}$$

$$E(M_{1,2})=0, E(M_{2,2})=E(M_{3,2})=1$$

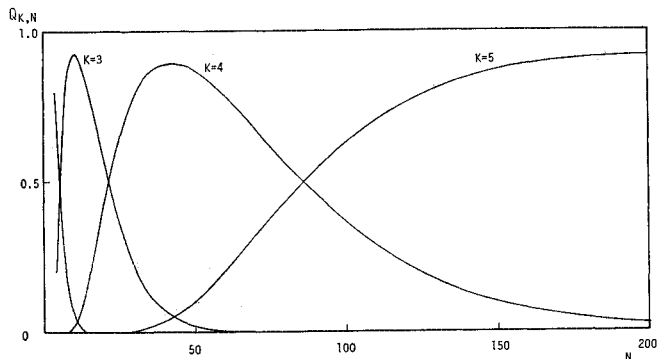


Fig. 2.8 Probability of trunk order for given N

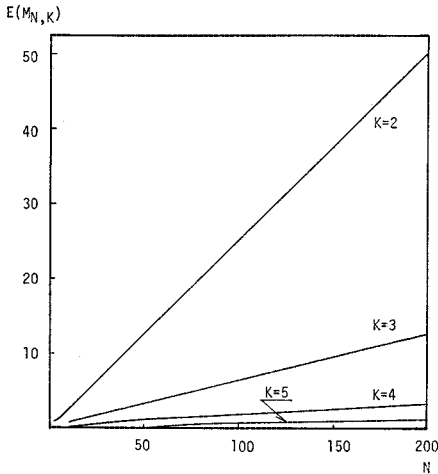


Fig. 2.9 Expected number of the K -th order sub-basins for given N

$$E(M_{j,K})=0, j=1, 2, \dots, (2^{K-1}-1) \quad K \geq 3 \quad \dots\dots\dots(2.35)$$

$$E(M_{N,1})=N$$

$K=2$ のとき, $Q(1, i)=0 (i > 2)$ なので

$$E(M_{N,2}) = \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) \{E(M_{i,2}) + E(M_{N-i,2})\} \quad \dots\dots\dots(2.36)$$

となり,

$$E(M_{N,2}) = \frac{N(N-1)}{(2N-3)} \quad (N \geq 2) \quad \dots\dots\dots(2.37)$$

を誘導できる。 $E(M_{N,K})$ の数値計算の結果を Fig. 2.9 に示す。

3. 流域地形の幾何構造と統計則

流域地形の幾何的構造を記述している集水面積則, 河道長則は, 次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_K &= \bar{A}_1 R_A^{K-1} \\ \bar{L}_K &= \bar{L}_1 R_L^{K-1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

ここに \bar{A}_K, \bar{L}_K は, 位数 K の平均的集水面積, 河道長を表す。また, R_A, R_L はそれぞれ集水面積比, 河道長比とよばれ, 一流域においてほぼ 3~5 の一定値をとるとされている。これらの経験則は, 物理的次元をもち数学的取扱いが困難でその普遍性が十分に吟味されていない。

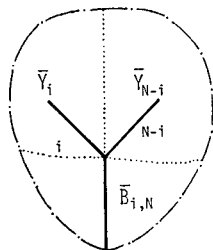


Fig. 3.1 Three components of schematic basin area

ここで, 集水面積則も河道長則も全く同一の数式で記述されているのであえて両者を区別せず, 位数 K に対応して定まる物理量の平均値が

式 (3.1) を満たすものとする。

一方 Shreve⁵⁾ らは, $Z=N$ の流域で求まる集水面積, 河道長は, 位数ごとに求めたときと同様に対数正規分布に従うことを指摘している。

いま $Z=N$ の流域に対応して定まる物理量の期待値を \bar{Y}_N と表わすと, Fig. 3.1 に示すように $P_S(i, N-i)$ の河道網のとき, \bar{Y}_N は \bar{Y}_i, \bar{Y}_{N-i} と残流域の成分 $\bar{B}_{i,N}$ からなっている。したがって \bar{Y}_N は, 次のように表わせる。

$$\bar{Y}_N = \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) (\bar{Y}_i + \bar{Y}_{N-i} + \bar{B}_{i,N}) \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

また

$$\bar{B}_N = \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) \bar{B}_{i,N} \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

とおくと \bar{Y}_N は

$$\bar{Y}_N = \bar{B}_N + \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) (\bar{Y}_i + \bar{Y}_{N-i}) \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

$\bar{B}_N = B(\text{const})$ と仮定すると

$$\bar{Y}_N = (\bar{Y}_1 + B)N - B \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

を誘導できる。 $C_{N,K,i,j}$ を $Z=N$ の流域において, i 番目のパターンの河道網が j 個の位数 1 位の河道からなる位数 K の部分流域数とする。 $Z=N$ の流域の位数 K に対応する物理量の総和の期待値 $\bar{X}_{K,N}$ は, 次式で求まる。

$$\bar{X}_{K,N} = \sum_{j=2^{K-1}}^N \sum_{i=1}^{S_N} C_{N,K,i,j} P_N^i \bar{Y}_j \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

また

$$H_{N,K,j} = \sum_{i=1}^{S_N} C_{N,K,i,j} P_N^i \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

とおくと,

$$\bar{X}_{K,N} = \sum_{j=2^{K-1}}^N H_{N,K,j} \bar{Y}_j \quad \dots\dots\dots(3.8)$$

と表わせる。 $\bar{X}_{K,N}$ は次のように求めることができる。たとえば $K=2$ の場合について説明すると, $Z=N$ の河道網で $P_S(i, N-i)$ のパターン群で $U_i=1$ のとき, $Z=N-i$ の河道網と位数の値は同一だから

$$\begin{aligned} \bar{X}_{i,2,N} &= P(i, N) \left\{ \sum_{j=2}^{N-i-1} H_{N-i,2,j} \bar{Y}_j \right. \\ &\quad \left. + Q(2, N-i) \bar{Y}_N \right\} \quad \dots\dots\dots(3.9) \end{aligned}$$

$U_i=2$ のとき, $Z=N-i$ の河道網のうちで位数が 2 位のパターンだけが位数 3 位となり, 3 位以上の位数は変化しないので

$$\begin{aligned} \bar{X}_{i,2,N} &= P(i, N) \left\{ \bar{Y}_i + Q(2, N-i) \bar{Y}_{N-i} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2}^{N-i-1} H_{N-i,2,j} \bar{Y}_j \right\} \quad \dots\dots\dots(3.10) \end{aligned}$$

となる。

$U_i \geq 3$ の場合は

$$\bar{X}_{2,N} = P(i, N) \left\{ Q(2, i) \bar{Y}_i + Q(2, N-i) \bar{Y}_{N-i} + \sum_{j=2}^{i-1} H_{i,2,j} \bar{Y}_j + \sum_{j=2}^{N-i-1} H_{N-i,2,j} \bar{Y}_j \right\} \dots (3.11)$$

である。したがって、 $\bar{X}_{2,N}$ は次式で求まる。

$$\bar{X}_{2,N} = \sum_{i=1}^{[N/2]} \bar{X}_{2,N} \dots (3.12)$$

$K \geq 3$ のときは、

$$\bar{X}_{K,N} = P(i, N) \left\{ Q(K, i) \sum_{l=K}^{N-i} Q(l, N-i) \bar{Y}_l + Q(K, N-i) \sum_{l=K}^{N-i} Q(l, i) \bar{Y}_{N-i} + \sum_{j=2K-1}^{i-1} K_{i,K,j} \bar{Y}_j + \sum_{j=2K-1}^{N-i-1} H_{N-i,K,j} \bar{Y}_j \right\} \dots (3.13)$$

式 (3.5), (3.8) より

$$\bar{X}_{K,N} = (\bar{Y}_1 + B) \alpha_K - B \cdot \beta_K \dots (3.14)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \alpha_K &= \sum_{j=2K-1}^N j \cdot H_{N,K,j} \\ \beta_K &= \sum_{j=2K-1}^N H_{N,K,j} \end{aligned} \right\} \dots (3.15)$$

α_K, β_K の計算結果を Fig. 3.2, 3.3 に示す。K の値が増加すると $\alpha_K \gg \beta_K$ となり、 $\bar{X}_{K,N}$ は次のように近似できる。

$$\bar{X}_{K,N} \approx (\bar{Y}_1 + B) \alpha_K \dots (3.16)$$

一方 $\bar{X}_{K,N}/E(M_{N,K})$ は、 $Z=N$ の流域における位数 K に対応して定まる物理量の期待値を表す。したがって河道長比、集水面積比に相当する値 R_K は、

$$R_K = \frac{\bar{X}_{K+1,N}/E(M_{N,K+1})}{\bar{X}_{K,N}/E(M_{N,K})} \dots (3.17)$$

で示される。式 (3.16) を用いると

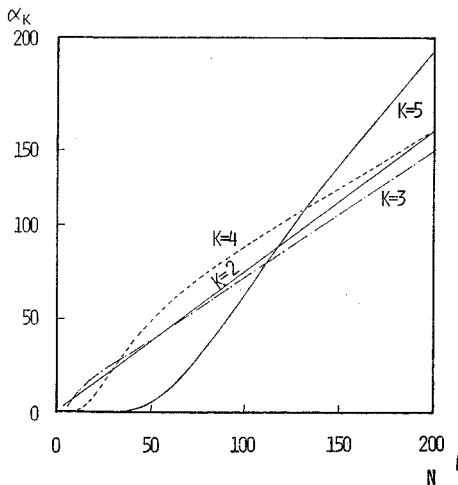


Fig. 3.2 Relation between N and α_K

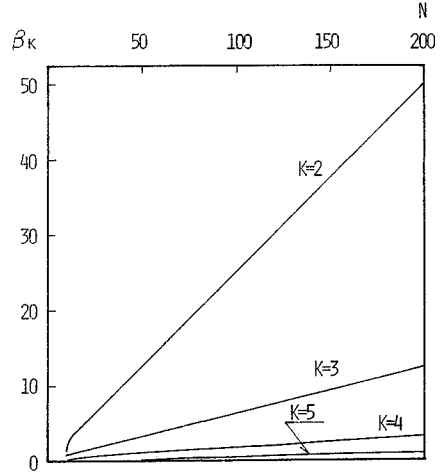


Fig. 3.3 Relation between N and β_K

$$R_K = \frac{\alpha_{K+1}/E(M_{N,K+1})}{\alpha_K/E(M_{N,K})} \dots (3.18)$$

ただし $K=1$ のとき、

$$\bar{X}_{1,N} = N \cdot \bar{Y}_1 \dots (3.19)$$

なので、

$$R_1 = \frac{(\bar{Y}_1 + B) \alpha_2 / E(M_{N,2})}{\bar{Y}_1} \dots (3.20)$$

となり $K \geq 2$ の場合と式が若干異なる。Fig. 3.4 に R_K の数値計算の結果を示す。 R_K はほぼ 3~5 の範囲の値をとり、従来経験的に成立するとされている集水面積比、河道長比は、理論的にも成立するものと思われる。ただし R_1 については、式 (3.20) において B の値が未知なので次式により求めたので、 R_1 がほぼ収束している 3 の値よりさらに大きな値をとるものと思われる。

$$R_1 = \frac{\alpha_2}{E(M_{N,2})} \dots (3.21)$$

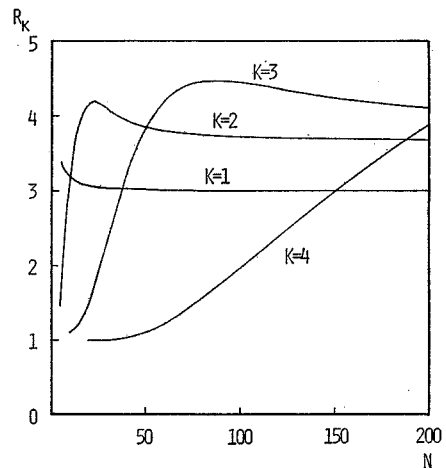


Fig. 3.4 Theoretical value of R_K equivalent to area ratio (or stream length ratio)

4. 天塩川，十勝川における解析例

天塩川，十勝川は，北海道地方の代表的河川で，その概略を Fig. 4.1 に示す。両河川とも中流部において平地が開け，主として農業用の人工水路が発達しているので，ここでは上流部に解析の範囲を限定した。したがって $Z=15$ 程度の小流域を対象とした。

地形図における河道の定義は必ずしも明確でなく，解析においては，地形図に記載されている河道だけを河道として扱った。なお使用した地形図は，縮尺 5 万分の 1 の国土地理院発行のものである。

Table 4.1 に両河川における $Z=N$ の流域の標本数を示す。一方， $Z=5, 6$ における各パターンの生起確率の測定値と理論値との比較を Fig. 4.2, 4.3 に示す。他の値の Z の場合も同様であるが理論値との適合性が良好で，石原・高棹²⁾らの河道網の形成過程におけるランダム性の仮定が満足されていることを示している。Fig. 4.4, 4.5 に $Z=1, 3, 7$ の場合の集水面積および河道長の非超過確率を求めた例を示す。いずれの場合も Shreve³⁾らが指摘しているように対数正規分布で近似できる。 Z の値が増加すると分散は，減少する傾向が認められるが，Table 4.1 に示すように標本数が一定でなく今後検討する必要がある。 Z ごとにまとめた集水面積および流路長の平

N	Teshio River	Tokachi River
1	832	1366
2	258	412
3	123	186
4	69	114
5	48	80
6	40	65
7	26	51
8	23	45
9	16	37
10	12	26
11	17	26
12	7	24
13	6	19
14	5	18
15	9	16

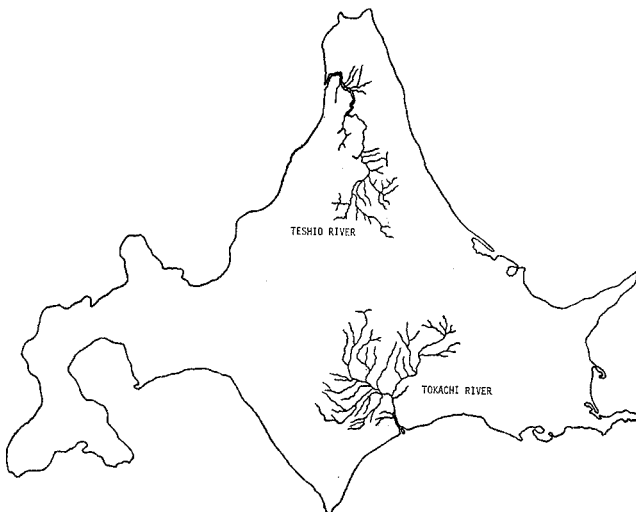


Fig. 4.1 The location of selected river basins

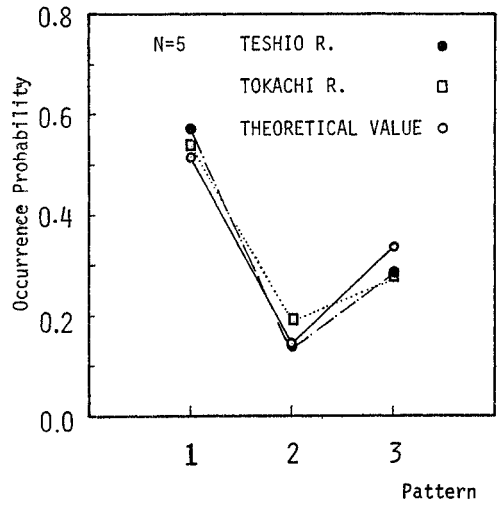


Fig. 4.2 Occurrence probability of each pattern for $N=5$

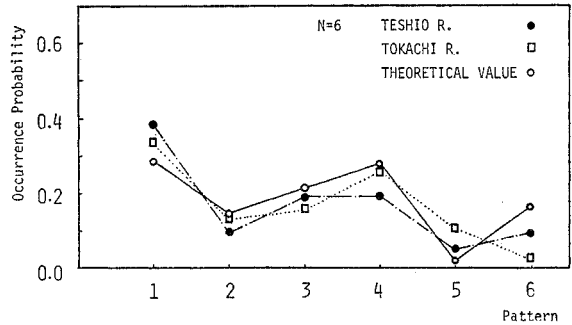


Fig. 4.3 Occurrence probability of each pattern for $N=6$

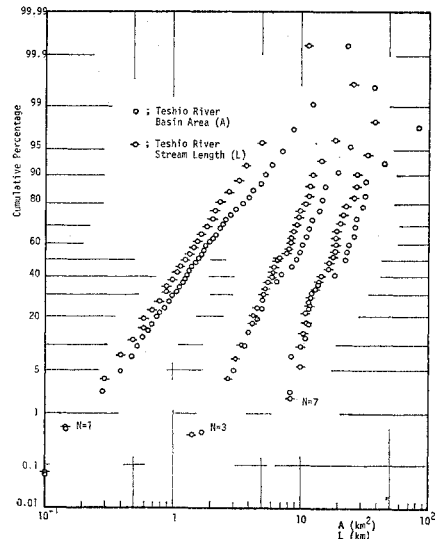


Fig. 4.4 Cumulative percentage of mean basin area and mean stream length for given N

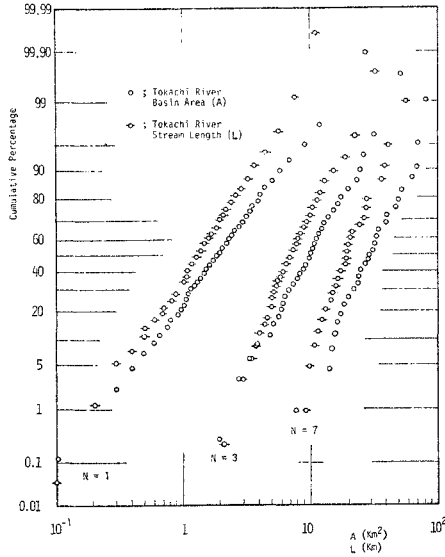


Fig. 4.5 Cumulative percentage of mean basin area and mean stream length for given N

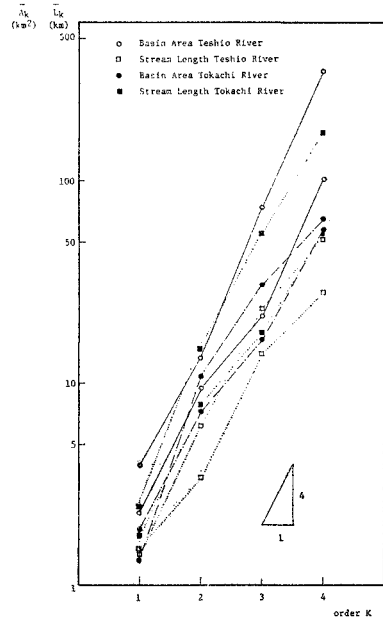


Fig. 4.7 Regression of logarithm of basin area and stream length on order

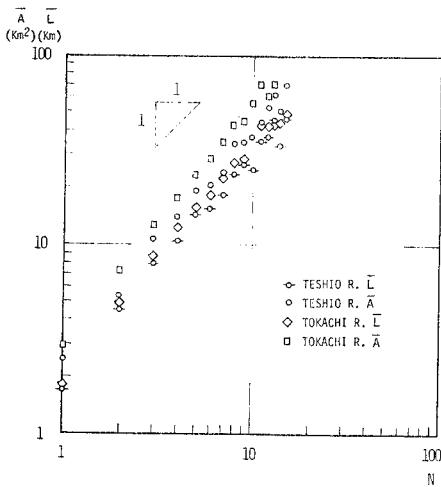


Fig. 4.6 Relation between N and mean basin area (or stream length)

均値を Fig. 4.6 に示す。集水面積、流路長ともほぼ N の1乗に比例しており式 (3.5) の成立することを示している。Fig. 4.7 は、十勝川、天塩川の upstream における位数 K と位数ごとの集水面積、流路長の平均値 \bar{A}_K 、 \bar{L}_K の関係を示す。両河川とも集水面積則、流路長則が成立しており各線群の勾配は、ほぼ4程度で Fig. 3.4 に示す R_K とよく適合していることがわかる。

5. 結 論

複雑な形状を呈する河道網にグラフ論理を適用するこ

とにより得られる重複度ベクトルは、河道網の個々のパターンの配列構造を表現していることがわかった。この結果、異なる河道網配列のパターン数を、その構造特性を失うことなく従来よりも著しく減少できた。さらに各パターンを系統的に並べることができて後の考察を容易にした。

石原・高棹²⁾らの河道網形成に関する仮定を踏襲し、新たに河道配列パターンに生起確率の概念を導入して、その確率構造を明らかにした。また使用する地形図の縮尺とパターンの生起確率との関連について考察し、パターンの生起確率の相対的値は、地形図の縮尺に依存しないことを確かめた。

一方流域の形成モデルを想定して、1位の河道数 N の流域は、その集水面積、河道長とも N の1乗に比例することを示し、これを天塩川、十勝川の両水系で確かめた。また流域形成モデルにより集水面積則、河道長則を理論的に証した。

他の地形則としては、流域地形の縦断構造特性を示す河道勾配則、平均起伏量則などがある。工学的見地からは、これら水系の特性を示す諸法則と侵食、流出現象などとの関連がきわめて重要である。特に洪水流出に関するものとしては、石原・小葉竹⁶⁾らの研究があるが、研究例が少ないのが現状で、今後研究すべき重要事項の一つであろう。

一方、Horton, Strahler 方式の位数の概念は、低次水流が高次水流に合流しても次数がかわらず、Scheidegger らは新たな位数の概念について報告しているが、

複雑で一般化されていない。しかし本論文に示したように河道網をグラフと見なすと、従来の研究結果に矛盾することなく河道網を単純化でき Horton, Strahler 方式の位数の欠点も除去できる。さらにグラフ理論における距離ベクトル, 重複度ベクトルは, 洪水流の合成, 運搬過程の一つの指標になるものと思われる。

最後に, この研究に際しご指導いただいた北海道大学工学部 山岡勲教授ならびに計算, 図面の作成に協力された道口技官, 乾匡子の両君に謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Eagleson, Peter S. : Dynamic Hydrology, McGraw-Hill Book Company, 1970.
 - 2) 石原藤次郎・高棟琢馬・瀬能邦雄：河道配列の統計則に関する基礎的研究, 京都大学防災研究所年報, 12号 B, 1969.
 - 3) 藤田睦博：流域地形構造と統計則, 土木学会北海道支部論文報告集, 第30号, 1974
 - 4) たとえば, 小野寺力男：グラフ理論の基礎, 森北出版, 1971
 - 5) Krumbein, W.C. and Shreve, L. : Some Statistical Properties of Dendritic Channel Networks, Department of Geological Science Northwestern University, April 1970.
 - 6) 石原安雄・小葉竹重機：河道系における洪水の集中過程, 第10回災害科学総合シンポジウム講演論文集, 1973 (1974.5.13・受付)
-