

孔をもつ有限板の二次元弾性問題の一解法

A METHOD FOR ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL ELASTIC
PROBLEM OF A FINITE PLATE WITH A HOLE

後藤 恵之輔*

By Keinosuke GOTOH

1. ま え が き

有孔板の応力集中問題の解法には、(1) 有限要素法や階差法のように板をメッシュに分割する方法、(2) 境界条件を有限個の点において満足させる選点法、および(3) 複素変数法に代表される解析解法などがあげられる。しかし、各手法にはそれぞれ一長一短がある。すなわち、(1) の階差法や現在一般的に用いられている有限要素法は、構造全体の挙動を把握するのに便利であるが、局所的な応力集中に対して高精度の解を得るにはメッシュを極端に細かくせねばならず、多大の労力と計算が必要で高価なものとなる。このことは(2) の選点法についてもいえ、この方法を用いて応力集中部近傍の局所的な性質を調べるには、一般に選点を多くせねばならない。一方、(3) の方法は、構造および境界条件ともに簡単な場合にしか有効でなく、かつ近接した複数個の孔の問題や孔のごく近傍に外縁がある場合などの、いわゆる干渉の問題を取扱うことは一般に不得手である。しかし、(3) は解式に一般性がある parametric study が容易にでき、応力集中に対して厳密解を与えるなどの長所をもつ。これに対して、(1) および(2) は応力勾配の著しい場合に精度が低下するものの、任意の構造、任意の境界条件に適應でき、解析解法の難点である干渉問題を容易に処理しうる。

したがって、本題に掲げるとき板の寸法に対して比較的大きな孔をもつ有限板を精度よく解析するには、(1) あるいは(2) の解法と(3) の方法とを併用することが考えられる。

他方、従来の研究について言及すれば、有孔有限板に関する研究は、無限板のそれと比較してはるかに少なく、対象となる孔の形状も円や楕円に限定されている。たとえば、円孔をもつ正方形板の問題は、Hengst¹⁾、

Wang²⁾、関谷³⁾、Schlack and Little⁴⁾ およびその他の人々^{5)~9)}により逐次近似法や選点法、有限要素法などを用いて理論的に解析されており、Durelli and Barriago⁹⁾によって実験的に解かれている。円孔を有する正多角形板については、川口¹⁰⁾の実数型応力関数および Slot and Yalch¹¹⁾ の選点法に基づいた理論的研究をあげることができる。また、Ibrahim and McCallion¹²⁾ は階差法を用いて円孔をもつ矩形板を解析している。最近では、楕円孔を有する矩形板の解析解が Jones and Hozos¹³⁾ により選点法を利用して求められており、さらに山本・谷口¹⁴⁾ の有限要素法と解析解法とを組合せた楕円孔をもつ正方形板の解がある。

以上を踏まえて、本論文は、(2) の選点法と(3) の複素変数法とを併用した有孔有限板の応力および変位の解析法を提示するもので、複素応力関数をべき級数の展開形で仮定し、孔縁の境界条件を複素変数法により完全に満足させ、外縁の境界条件を選点法により近似的に満足させることによって、応力関数を決定せんとするものである。解式は一般的に複素数の任意係数をもつ任意次数の写像関数に基づいて誘導されているゆえ、本解法は個々の孔形状に限定されず一般性があり、円孔および楕円孔を初めとして従来未解決であった正多角形孔なども一貫した手法で取扱うことができる。適用例として円孔、楕円孔、正方形孔および正六角形孔を有する正方形板を取上げ、一様な引張および圧縮のもとに孔縁を含む各部分の応力を計算し、孔の形状、大きさおよび孔隅部の丸味が応力集中におよぼす影響を調べた。

2. 孔をもつ有限板の応力関数決定法

(1) 任意形孔に対する解法

a) 写像関数および応力関数の一般式

任意形状の孔をもつ有限板を考え、外縁の形状も任意

* 正会員 工修 九州大学講師 工学部水工土木学教室

であるとする。(x, y) を孔中心を原点とする直角座標とすれば、孔の外部領域を単位円の外部へ等角写像する関数は、次式で表わされる。

$$Z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{n=1}^N a_n \zeta^{-n}\right) \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 $Z = x + iy$, $\zeta = \rho \cdot \exp(i\beta)$, (ρ, β) : 極座標, R : 孔の大きさを与える実数定数, a_n : 一般に 0 でない複素数係数。

複素変数法においては、応力関数は解析的かつ一価性を有さねばならないが、式 (1) 中の変数 ζ を用いて次式のごとく仮定することができる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \varphi_0(\zeta) + \varphi_1(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= \psi_0(\zeta) + \psi_1(\zeta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2. a)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= \sum_{k=0}^K B_k \zeta^k, \quad \varphi_1(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \\ \psi_0(\zeta) &= \sum_{k=0}^K C_k \zeta^k, \quad \psi_1(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^{-k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2. b)$$

式 (2.b) において、 B_k, b_k, C_k および c_k は、孔縁および外縁の境界条件より決定される複素数係数である。 B_k および C_k を同数にとっているが、これに特別な根拠はなく、同数にせずとも解法上なら差支えない。また、定数項 B_0 および C_0 は、剛体の変位に関するもので、0 とおいてよい。

b) 応力関数の係数間の関係

孔縁は応力自由であるとすれば、孔縁における境界条件として次式が成立する¹⁵⁾。

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 $\sigma = (\zeta)_{\rho=1} = \exp(i\beta)$

式 (3) に式 (2) を代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \varphi_0(\sigma) + \varphi_1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} [\overline{\varphi_0'(\sigma)} + \overline{\varphi_1'(\sigma)}] \\ + \overline{\psi_0(\sigma)} + \overline{\psi_1(\sigma)} = 0 \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

式 (4) の両辺に $1/2\pi i \cdot d\sigma/(\sigma - \zeta)$ (ただし $|\zeta| > 1$) を乗じ Cauchy の定理を用いて積分すれば、各項はそれぞれ次のごとくなる。

$\varphi_0(\sigma)$ の項：式 (2.b) を考慮して

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\sum_{k=0}^K B_k \sigma^k \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$\varphi_1(\sigma)$ の項：同様にして

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi_1(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sigma^{-k} \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\varphi_1(\zeta) \dots\dots\dots(6)$$

$\omega(\sigma)/\omega'(\sigma) \cdot \overline{\varphi_0'(\sigma)}$ の項： $\omega(\sigma)/\omega'(\sigma)$ は式 (1) を用いて次のごとく昇べき級数に展開される。

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \sum_{q=0}^{\infty} e_q \sigma^{-N+q} \dots\dots\dots(7)$$

ここに、係数 e_q は次の反復方程式より写像関数の係数 a_n の関数として求められる。

$$a_{N-q} = e_q - \sum_{j=1}^{q-1} j \bar{a}_j e_{q-j-1} \dots\dots\dots(8)$$

一方、式 (2.b) より次式を得る。

$$\overline{\varphi_0'(\sigma)} = \sum_{k=1}^K k \bar{B}_k \sigma^{-(k-1)}$$

ゆえに、

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0'(\sigma)} = \sum_{p=0}^{N+K-1} F_p \sigma^{-p} + \sum_{p=1}^{\infty} G_p \sigma^p \dots\dots\dots(9)$$

ここに、係数 F_p は次式より未定係数 B_k の関数として求められる。

$$F_p = \sum_{r=1}^K r e_{N+r-p-1} \bar{B}_r \dots\dots\dots(10)$$

他の係数 G_p も同様にして求められるが、以後の計算には無関係である。

よって、

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = - \sum_{p=1}^{N+K-1} F_p \zeta^{-p} \dots\dots\dots(11)$$

$\omega(\sigma)/\omega'(\sigma) \cdot \overline{\varphi_1'(\sigma)}$ の項：式 (2.b) より

$$\overline{\varphi_1'(\sigma)} = - \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{b}_k \sigma^{k+1}$$

これと式 (7) より次式が得られる。

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_1'(\sigma)} = - \left(\sum_{p=0}^{N-2} f_p \sigma^{-p} + \sum_{p=1}^{\infty} g_p \sigma^p \right) \dots\dots\dots(12)$$

ここに、係数 f_p は次式より未定係数 b_k の関数として求められるが、別の係数 g_p は以後の計算には関係しない。

$$f_p = \sum_{r=1}^{N-p-1} r e_{N-r-p-1} \bar{b}_r \dots\dots\dots(13)$$

ゆえに、

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_1'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \sum_{p=1}^{N-2} f_p \zeta^{-p} \dots\dots\dots(14)$$

$\overline{\psi_0(\sigma)}$ の項：式 (2.b) を考慮して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{\psi_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma &= \frac{1}{2\pi i} \int \left(\sum_{k=0}^K \bar{C}_k \sigma^k \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \\ &= - \sum_{k=1}^K \bar{C}_k \zeta^{-k} \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

$\overline{\psi_1(\sigma)}$ の項：同様にして

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{\psi_1(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k \sigma^k \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0 \dots\dots\dots(16)$$

したがって、式 (5), (6), (11), (14)~(16) を用いて、式 (4) の積分結果は次のごとくなる。

$$-\varphi_1(\zeta) - \sum_{p=1}^{N+K-1} F_p \zeta^{-p} + \sum_{p=1}^{N-2} f_p \zeta^{-p} - \sum_{k=1}^K \bar{C}_k \zeta^{-k} = 0$$

これより

$$\varphi_1(\zeta) = \sum_{p=1}^{N-2} f_p \zeta^{-p} - \sum_{p=1}^{N+K-1} F_p \zeta^{-p} - \sum_{k=1}^K \bar{C}_k \zeta^{-k} \dots\dots\dots(17)$$

式 (2. b) の $\varphi_1(\zeta)$ と式 (17) とにおいて、 ζ の同一べき数の係数を比較することにより、次の方程式を得る。

$K > N-2$ のとき

$$b_k = \begin{cases} f_k - F_k - \bar{C}_k, & k=1, 2, \dots, N-2 \\ -F_k - \bar{C}_k, & k=N-1, N, \dots, K \\ -F_k, & k=K+1, K+2, \dots, N+K-1 \\ 0, & k \geq N+K \end{cases} \dots\dots\dots(18. a)$$

$K = N-2$ のとき

$$b_k = \begin{cases} f_k - F_k - \bar{C}_k, & k=1, 2, \dots, K \\ -F_k, & k=K+1, K+2, \dots, N+K-1 \\ 0, & k \geq N+K \end{cases} \dots\dots\dots(18. b)$$

$K < N-2$ のとき

$$b_k = \begin{cases} f_k - F_k - \bar{C}_k, & k=1, 2, \dots, K \\ f_k - F_k, & k=K+1, K+2, \dots, N-2 \\ -F_k, & k=N-1, N, \dots, N+K-1 \\ 0, & k \geq N+K \end{cases} \dots\dots\dots(18. c)$$

しかるに、式 (1) の写像関数が決定されれば、この係数 a_n を式 (8) に適用することにより e_q が求められる。この e_q を式 (10) および (13) に代入することによって F_k, f_k がそれぞれ B_k, b_k の関数として求められるゆえ、結局応力関数 $\varphi_1(\zeta)$ の係数 b_k は、式 (18) により B_k と C_k の関数で与えられることとなる。

別の応力関数 $\psi_1(\zeta)$ は、式 (4) の共役式より求められる。すなわち、

$$\overline{\varphi_0(\sigma) + \varphi_1(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} [\varphi_0'(\sigma) + \varphi_1'(\sigma)] + \psi_0(\sigma) + \psi_1(\sigma) = 0 \dots\dots\dots(19)$$

式 (19) の両辺に $1/2 \pi i \cdot d\sigma / (\sigma - \zeta)$ (ただし $|\zeta| > 1$) を乗じて複素積分を行えば、各項はそれぞれ次のごとく求められる。

$\overline{\varphi_0(\sigma)}$ の項:

$$\frac{1}{2 \pi i} \int \frac{\overline{\varphi_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2 \pi i} \int \left(\sum_{k=0}^K \bar{B}_k \sigma^{-k} \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = - \sum_{k=1}^K \bar{B}_k \zeta^{-k} \dots\dots\dots(20)$$

$\overline{\varphi_1(\sigma)}$ の項:

$$\frac{1}{2 \pi i} \int \frac{\overline{\varphi_1(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2 \pi i} \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k \sigma^k \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0 \dots\dots\dots(21)$$

$\overline{\omega(\sigma) / \omega'(\sigma)} \cdot \varphi_0'(\sigma)$ の項: 式 (9) を参照して

$$\frac{1}{2 \pi i} \int \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{2 \pi i} \int \left(\sum_{p=0}^{N+K-1} \bar{F}_p \sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{G}_p \sigma^{-p} \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi_0'(\zeta) + \sum_{p=0}^{N+K-1} \bar{F}_p \zeta^p \dots\dots\dots(22)$$

$\overline{\omega(\sigma) / \omega'(\sigma)} \cdot \varphi_1'(\sigma)$ の項: 式 (12) を参照して

$$\frac{1}{2 \pi i} \int \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = - \frac{1}{2 \pi i} \int \left(\sum_{p=0}^{N-2} \bar{f}_p \sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{g}_p \sigma^{-p} \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi_1'(\zeta) - \sum_{p=0}^{N-2} \bar{f}_p \zeta^p \dots\dots\dots(23)$$

$\psi_0(\sigma)$ の項:

$$\frac{1}{2 \pi i} \int \frac{\psi_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2 \pi i} \int \left(\sum_{k=0}^K C_k \sigma^k \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0 \dots\dots\dots(24)$$

$\psi_1(\sigma)$ の項:

$$\frac{1}{2 \pi i} \int \frac{\psi_1(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2 \pi i} \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma^{-k} \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = - \psi_1(\zeta) \dots\dots\dots(25)$$

したがって、式 (20)~(25) により、式 (19) は次の結果となる。

$$- \sum_{k=1}^K \bar{B}_k \zeta^{-k} - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi_0'(\zeta) + \sum_{p=0}^{N+K-1} \bar{F}_p \zeta^p - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi_1'(\zeta) - \sum_{p=0}^{N-2} \bar{f}_p \zeta^p - \psi_1(\zeta) = 0$$

これよりただちに次式を得る。

$$\psi_1(\zeta) = \sum_{p=0}^{N+K-1} \bar{F}_p \zeta^p - \sum_{p=0}^{N-2} \bar{f}_p \zeta^p - \sum_{k=1}^K \bar{B}_k \zeta^{-k} - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} [\varphi_0'(\zeta) + \varphi_1'(\zeta)] \dots\dots\dots(26)$$

式 (26) において、 $\varphi_0(\zeta)$ および $\varphi_1(\zeta)$ はそれぞれ B_k, b_k を含み、 F_p および f_p は式 (10), (13) を用いてそれぞれ B_k, b_k の関数として求められる。しかるに、 b_k は式 (18) を解くことにより B_k, C_k で与えられるゆえ、結局 $\psi_1(\zeta)$ は式 (26) により B_k と C_k の関数として表わされることとなる。

c) 係数 B_k, C_k の決定

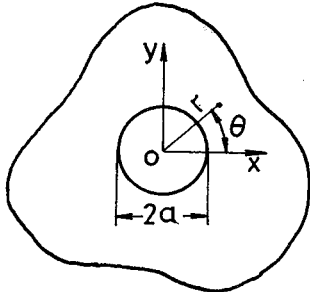
外縁においては、応力や変位の境界条件が与えられる。一方、式 (2) で仮定される応力関数を周知の Kolosoff-Muskhelishvili の公式⁽⁶⁾に代入すれば、応力および変位は未定係数 B_k, b_k, C_k および c_k をすべて含んだ形で求められる。しかるに、 b_k と c_k を含む関数 $\psi_1(\zeta)$ とは、それぞれ式 (18) および (26) により B_k, C_k の関数として表わされるゆえ、上記の応力、変位の式は未定係数として B_k, C_k のみを含むことになる。したがって、これら応力、変位の式を外縁の境界条件式に代入することにより、 B_k および C_k に関する連立方程式が得られる。しかし、この連立方程式を直接解くことは困難なるゆえ、ここでは選点法に基づく近似解法を採用し、もって応力関数の係数を決定することを工夫した。

すなわち、外縁上に $(M_1 + M_2)$ 個の選点をとれば、各点について 2 個、計 $2(M_1 + M_2)$ 個の境界条件式が成立する。これに対して応力関数の係数 B_k および C_k を

それぞれ (M_1+M_2) 個とれば、上記境界条件式は B_k, C_k に関する $2(M_1+M_2)$ 元の線形連立方程式となり、これを解くことによって、未定係数はすべて求められ、所要の応力関数が決定されることとなる。

(2) 円孔に対する解法

円孔の写像関数は式 (1) の一般式において a_n を 0 とおいて得られる。しかし、任意形孔に対する解式は $a_n \neq 0$ という条件の元に誘導されているゆえ、円孔に対しては別途に解を求めておかねばならない。



図一 円孔をもつ有限板

図一に示すごとく半径 a の円孔をもつ任意形状の有限板を考える。直角座標 (x, y) と極座標 (r, θ) とを図のごとく導入すれば、両座標間には次の関係が成立する。

$$Z = x + iy = r \cdot \exp(i\theta) \dots\dots\dots (27)$$

複素応力関数は、任意形孔の場合と同様に、上記の複素変数 Z のべき級数展開形として次式のごとく仮定される。

$$\left. \begin{aligned} \phi(Z) &= \sum_{k=0}^K B_k Z^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k Z^{-k} \\ \psi(Z) &= \sum_{k=0}^K C_k Z^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k Z^{-k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 B_k, b_k, C_k および c_k は、孔縁および外縁における境界条件より決定される複素数係数である。

式 (28) における係数間の必要な関係は、孔縁自由の条件から次式のごとく導かれる¹⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} b_k &= -\{(k+2)\bar{B}_{k+2}a^{2(k+1)} + \bar{C}_k a^{2k}\}, & k=1, 2, 3, \dots \\ c_1 &= -(B_1 + \bar{B}_1)a^2 \\ c_k &= -\{(k-1)^2 \bar{B}_k a^{2k} + (k-2)\bar{C}_{k-2} a^{2(k-1)}\}, & k=2, 3, 4, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

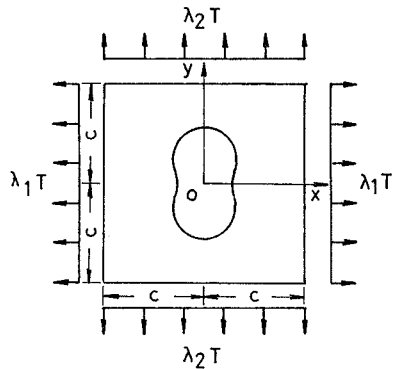
以後の展開は、任意形孔の場合と同様である。すなわち、外縁の境界条件式に式 (29) の関係を考慮して式 (28) で仮定される応力関数を適用すれば、未定係数 B_k および C_k に関する連立方程式が得られる。この連立方程式を選点法を用いて解くことにより、応力関数がすべて決定されることとなる。

3. 適用例：孔をもつ正方形板の応力解析

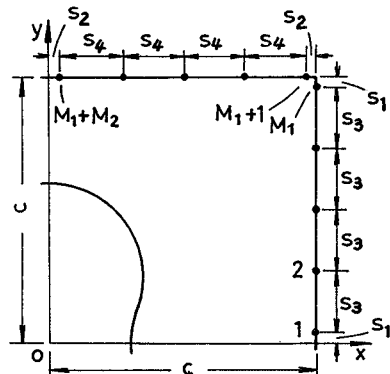
図二に 2 軸対称孔を有し外縁に一様な引張力ないし圧縮力 $\lambda_1 T, \lambda_2 T$ をうける辺長 $2c$ の正方形板を示す。荷重係数 λ_1 と λ_2 との組合せによって 3 種の荷重状態が得られる。すなわち、その組合せを (λ_1, λ_2) で表せば、 $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, -1)$ は等大逆荷重、 $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$ または $(0, 1)$ は一軸引張、 $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1)$ は静水荷重をそれぞれ意味する。したがって、 x, y 両軸は変形の対称軸となり、解析は正方形板の 4 分の 1 領域すなわち第 1 象限のみを対象とすればよいことになる。この第 1 象限に対して選点を図三に示すごとく $x=c$ 上に M_1 個、 $y=c$ 上に M_2 個とり点 1 から点 M_1 までと点 M_1+1 から点 M_1+M_2 までを等間隔にとる。ここでは孔形状と無関係に $M_1=M_2$ とし、 S_1 および S_2 はともに $c/12$ に等しくしている。

(1) 円孔

図四に円孔をもつ正方形板を示す。選点を図三において $M_1=M_2=5$ (未知数 20 個) にとり、孔の大きさを種々変えて応力を計算した。孔縁応力の計算結果は



図二 2 軸対称孔をもつ正方形板



図三 選点の位置

表一のごとくで、() 内の値は Schlack and Little の解⁴⁾である。 μ は円孔半径と 1/2 板幅との比 (a/c) で定義される無次元量で、孔の大きさを表わす。表に見ら

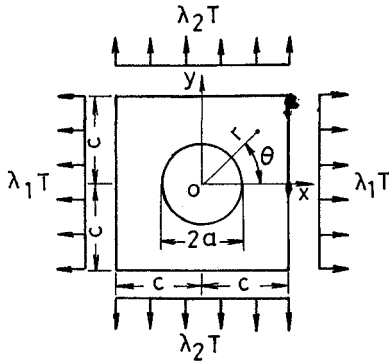


図-4 円孔をもつ正方形板

表-1 円孔をもつ正方形板の孔縁応力

(a) $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, -1)$

θ°	$\mu=0.1$	$\mu=0.3$	$\mu=0.5$	$\mu=0.7$
0	-4.154 (-4.151)	-5.598 (-5.589)	-10.332 (-10.16)	-29.212 (-29.84)
10	-3.903 (-3.900)	-5.256 (-5.248)	-9.592 (-9.452)	-25.956 (-26.56)
20	-3.182 (-3.180)	-4.275 (-4.271)	-7.583 (-7.513)	-18.249 (-18.79)
30	-2.077 (-2.075)	-2.784 (-2.782)	-4.779 (-4.761)	-9.939 (-10.36)
40	-0.721 (---)	-0.956 (---)	-1.622 (---)	-3.036 (---)
45	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

(b) $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$

θ°	$\mu=0.1$	$\mu=0.3$	$\mu=0.5$	$\mu=0.7$
0	-1.068	-1.722	-3.961	-13.193
10	-0.943	-1.549	-3.570	-11.443
20	-0.582	-1.052	-2.514	-7.329
30	-0.029	-0.298	-1.056	-2.959
40	0.649	0.616	0.557	0.589
45	1.009	1.099	1.373	2.117
50	1.370	1.581	2.179	3.625
60	2.048	2.486	3.723	6.979
70	2.600	3.224	5.069	10.920
80	2.960	3.707	6.023	14.513
90	3.086 (3.085)	3.875 (3.871)	6.372 (6.283)	16.019 (16.34)

(c) $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1)$

θ°	$\mu=0.1$	$\mu=0.3$	$\mu=0.5$	$\mu=0.7$
0	2.018 (2.018)	2.153 (2.152)	2.411 (2.408)	2.826 (2.839)
10	2.018 (2.018)	2.158 (2.158)	2.453 (2.450)	3.070 (3.078)
20	2.018 (2.018)	2.172 (2.172)	2.556 (2.555)	3.590 (3.595)
30	2.018 (2.018)	2.187 (2.187)	2.667 (2.667)	4.020 (4.027)
40	2.018 (---)	2.197 (---)	2.736 (---)	4.213 (---)
45	2.018 (2.019)	2.199 (2.220)	2.745 (2.746)	4.235 (4.240)

れるごとく、本理論による解は孔が小さい場合はもちろん大きい場合でも Schlack らの解とかなり良く合致しており、 $M_1=M_2=5$ でも十分正確な解が得られることがわかる。

図-5 は、孔縁および外縁における応力分布の一例で、第1象限は等大逆向荷重、第2象限は一軸引張、第4象限は静水荷重の各場合に対応する。

静水荷重の結果から、一様な内圧が作用する場合の応力を求めることができる。たとえば、図-6 を参照して、極座標における応力は次式で表わされる。

$$\sigma_r^0 = \sigma_r^1 - T, \sigma_\theta^0 = \sigma_\theta^1 - T, \tau_{r\theta}^0 = \tau_{r\theta}^1 \dots (30)$$

ここに、サフィックス“0”は、一様な内圧の場合を意味し、サフィックス“1”は静水荷重の場合を表わす。

式(30)の関係は、孔および板の形状のいかんにかかわらず成立する。

一様な内圧をうける円孔縁の応力 σ_t を求め、表-2 と図-7 において既報の理論解^{3), 6), 8), 10)}および実験値⁹⁾と比較すれば、きわめて良好な一致が得られていることがわかる。

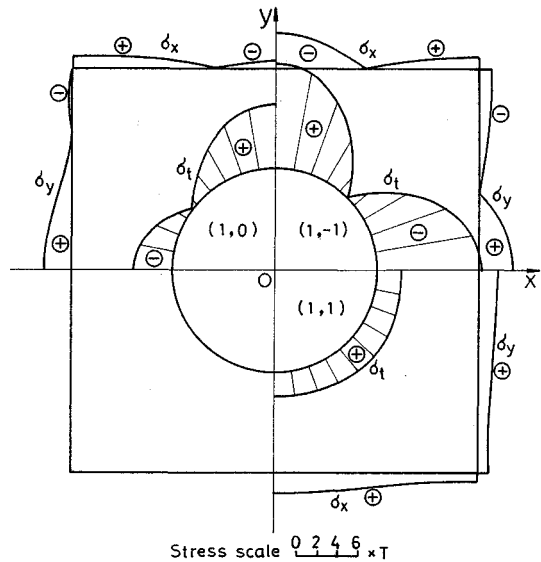


図-5 円孔をもつ正方形板の孔縁および外縁における応力分布の例、 $\mu=0.5$

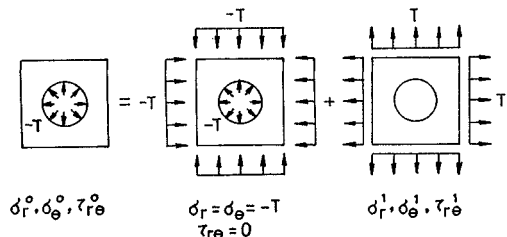


図-6 内圧をうける正方形板の重ね合せによる解法

表-2 円孔縁に内圧をうける場合の孔縁応力の比較

θ°	μ=0.5				μ=0.7	
	Author	Slot ⁸⁾	Kawaguchi ¹⁰⁾	Amenzade & Gus'kova ⁶⁾	Author	Slot ⁸⁾
0	1.411	1.412	1.424	1.42	1.826	1.834
5	1.422	1.423	1.435	—	1.891	1.899
10	1.453	1.454	1.465	—	2.070	2.077
15	1.500	1.501	1.511	—	2.321	2.326
20	1.556	1.557	1.566	—	2.590	2.594
25	1.614	1.615	1.623	—	2.833	2.835
30	1.667	1.667	1.676	—	3.020	3.021
35	1.709	1.710	1.718	—	3.145	3.144
40	1.736	1.736	1.746	—	3.213	3.212
45	1.745	1.746	1.756	1.75	3.235	3.233

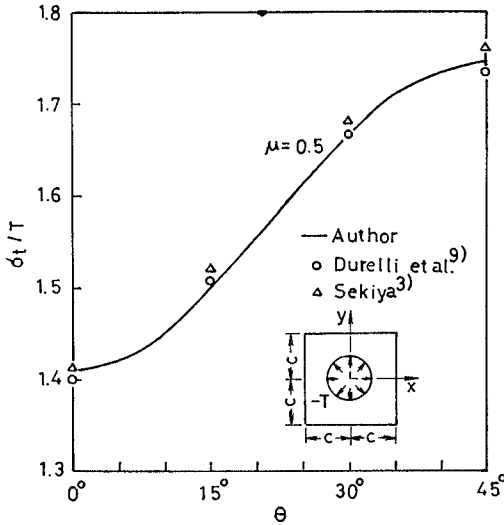


図-7 円孔縁に内圧をうける場合の孔縁応力の比較

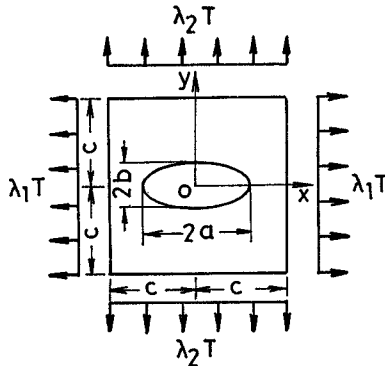


図-8 楕円孔をもつ正方形板

(2) 楕円孔

楕円孔の写像関数は、次式で与えられる。

$$Z = R(\zeta + a_1 \zeta^{-1}) \dots \dots \dots (31)$$

図-8 に示すごとく、楕円孔の両径を $2a, 2b$ とし形状比を $r = b/a$ で与えれば、式 (31) の R および a_1

はそれぞれ $R = (1+r)a/2$, $a_1 = (1-r)/(1+r)$ となる。

孔の大きさを示す無次元量として開孔率 $\mu = a/c$ を定義し、この μ と r との次の組合せに対して応力を計算した。

$$\left. \begin{aligned} r &= 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 \\ \mu &= 0, 0.2, 0.3, 0.5 \end{aligned} \right\}$$

$r=1.0$ のとき、孔は半径 a の円孔となり、前記の結果を用いることができる。また、 $\mu=0$ の状態は板が無限板であることを意味し、このときの応力は複素変数法のみによって厳密に求められる。

解の収束性を吟味するため、最大孔縁応力と作用外力との比、すなわち、応力集中係数 $[S.C.F. = (\sigma_t)_{\max}/T]$ を選点数の関数として、計算に取上げた孔のうち最も扁平な $r=0.2$ の楕円孔について表-3 に示す。これから明らかなように、 $\mu=0.3$ はもちろん $\mu=0.5$ の比較的大きな孔であっても、応力集中係数は選点数に関係なくほぼ一定で、 $M_1=M_2=5$ として実用的に十分な精度の解を得ることができる。

図-9 は孔縁および外縁の応力分布を例示したもの

表-3 応力集中係数と選点数との関係、楕円孔 ($r=0.2$)

(λ_1, λ_2)	μ	$M_1=M_2$		
		5	6	7
(1, -1)	0.3	13.842	13.857	13.849
	0.5	17.112	17.227	17.129
(1, 0)	0.3	1.453	1.454	1.453
	0.5	1.608	1.628	1.611
(1, 1)	0.3	11.393	11.402	11.397
	0.5	13.896	13.971	13.907

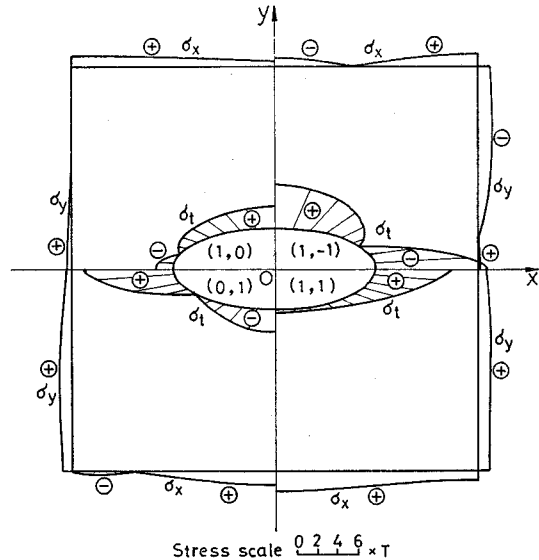


図-9 楕円孔をもつ正方形板の孔縁および外縁における応力分布の例、 $r=0.4, \mu=0.5$

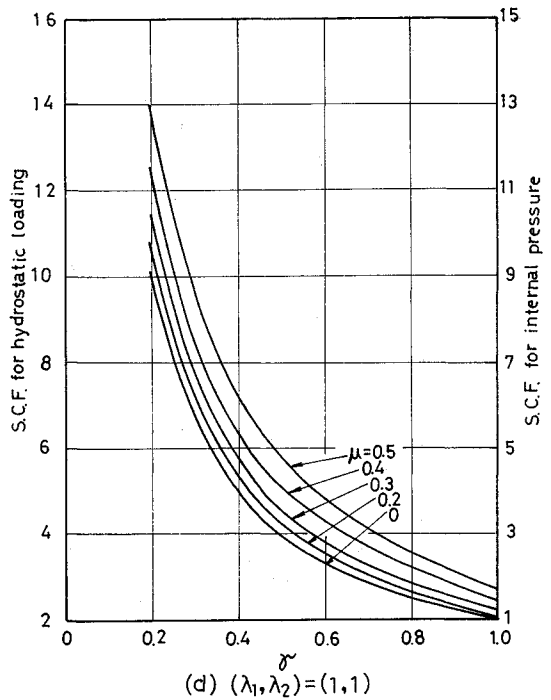
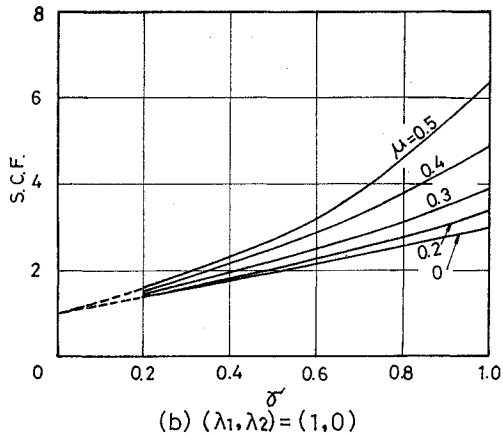
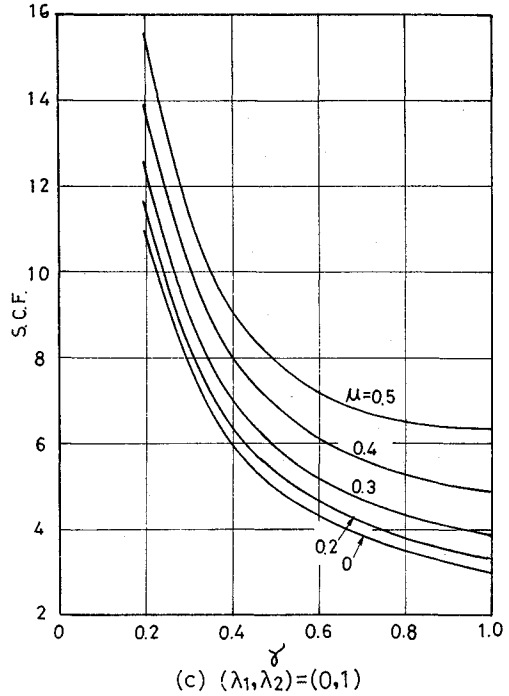
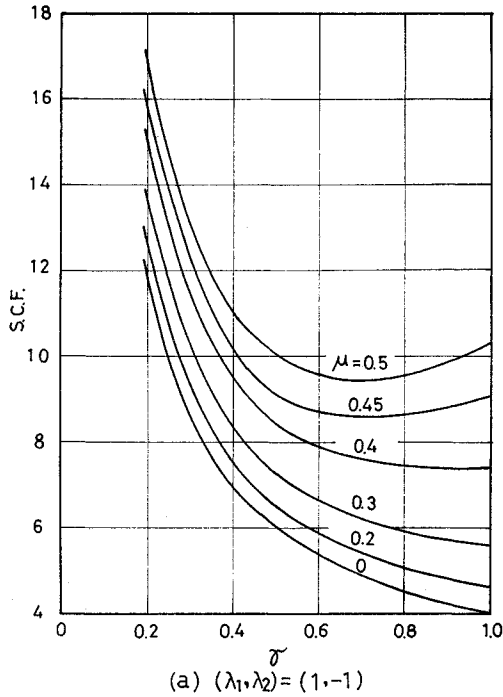


図-10 楕円孔をもつ正方形板の応力集中係数

で、第1および第4象限はそれぞれ等大逆方向荷重および静水荷重の場合を、第2, 第3象限はともに一軸引張の場合を表わしている。いずれの荷重状態においても、最大応力は孔縁に生ずることが認められる。

応力集中係数を形状比 r の関数としてプロットすれば、図-10のごとくなる。これらの図のうち図(d)の右たて座標の数字は、一様内圧による応力集中係数を示し、静水荷重による値から1を引いて得られる(式(30)参照)。また、 $\mu=0.4$ および 0.45 のときの値は、S.C.F. と μ との関係図から図式に求められたものである。

図-10(a)に見られるごとく、等大逆方向荷重のときの応力集中係数は、開孔率が $\mu \leq 0.4$ のとき r の増加、すなわち、孔形状が円形に近づくにつれて減少するが、

$\mu > 0.4$ では $r=0.7$ 付近で最小になる。図-10(b)を参照すれば、 x 軸方向の一軸引張による応力集中係数は、当然のことながら、孔の大きさに関係なく r の減少、いいかえれば孔が扁平になるに従って1に収束することが

わかる。応力集中係数は、いずれの荷重状態においても μ すなわち孔の大きさととも単調に増加する傾向にある。

本理論による解を山本らの結果¹⁴⁾と比較する目的で、 $r=1/30$ 、 $\mu=0.6$ の楕円孔を含む正方形板の一軸引張を考えた。図-11に最小断面 ($y=0$)における応力 σ_y の分布を示す。応力は孔縁のごく近傍に集中し、最大応力の大きさは91.096である。この結果は山本らの解90.77とよく合致しており、本法の妥当性が認められる。

(3) 正方形孔

図-12に正方形孔をもつ正方形板を示す。孔の写像関数は次式で与えられる¹⁸⁾。

$$Z = 2a(A\zeta + B\zeta^{-3} + C\zeta^{-7}) \dots\dots\dots(32)$$

ここに、 a : 孔の辺心距、 A, B および C : 実数係数。

孔隅角部は円弧で丸められており、その半径を r_c と

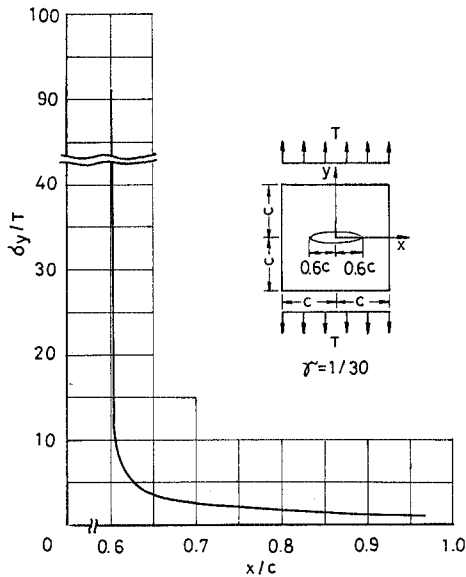


図-11 楕円孔 ($r=1/30$ 、 $\mu=0.6$)をもつ正方形板の一軸引張による最小断面の応力分布

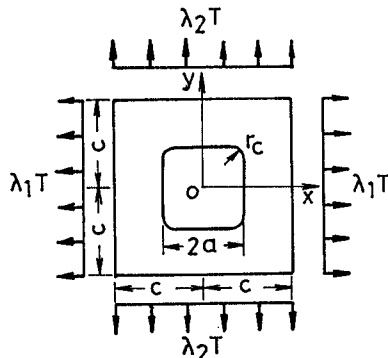


図-12 正方形孔をもつ正方形板

すれば、孔の形状は隅半径比 $\eta=r_c/2a$ で表わされる。 $\eta=0.5$ のとき、孔は半径 a の円孔となる。孔の大きさを表わす量として $\mu=a/c$ を定義し、開孔率と名づける。数値計算は次の η と μ との組合せに対して行われた。

$$\left. \begin{array}{l} \eta=0.025, 0.05, 0.10, 0.20, 0.30, 0.50 \\ \mu=0, 0.2, 0.3, 0.5 \end{array} \right\}$$

解の収束性を調べるために、計算に取上げた孔のうち最も隅の丸味が小さな $\eta=0.025$ の正方形孔について、選点数 ($M_1=M_2$) を 5, 6, 7 と変化させ応力集中係数を求めた。その結果は表-4のごとくで、いずれの荷重状態においても $M_1=M_2=5$ として実用上選定すべき解が得られることがわかる。

図-13は孔縁および外縁における応力分布の一例で、その表示法は図-5、9と同一である。最大応力はいずれの荷重状態でも孔縁に生ずることが認められる。

応力集中係数をすべての η, μ の組合せに対して $M_1=M_2=5$ の選点数で求め、隅半径比 η の関数として図-14に示す。

表-4 応力集中係数と選点数との関係、正方形孔 ($\eta=0.025$)

(λ_1, λ_2)	μ	$M_1=M_2$		
		5	6	7
(1, -1)	0.3	5.400	5.395	5.401
	0.5	9.081	9.093	8.965
(1, 0)	0.3	6.010	6.010	6.012
	0.5	9.435	9.433	9.392
(1, 1)	0.3	9.634	9.637	9.636
	0.5	14.682	14.666	14.687

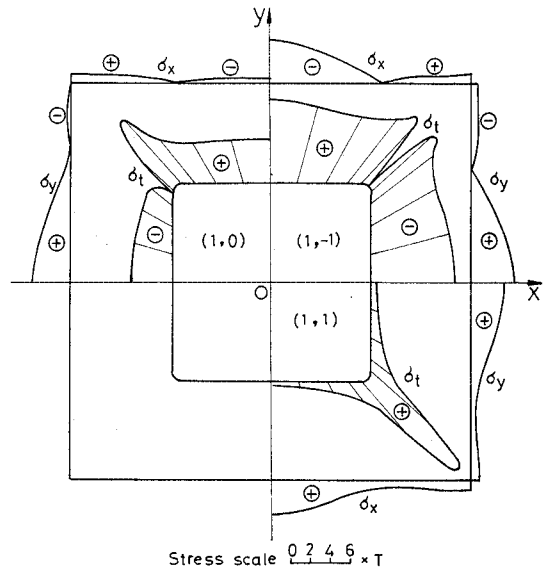


図-13 正方形孔をもつ正方形板の孔縁および外縁における応力分布の例、 $\eta=0.05$ 、 $\mu=0.5$

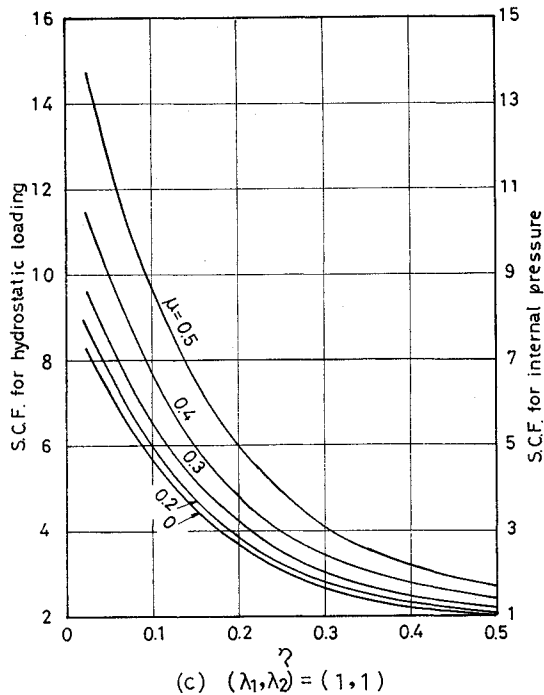
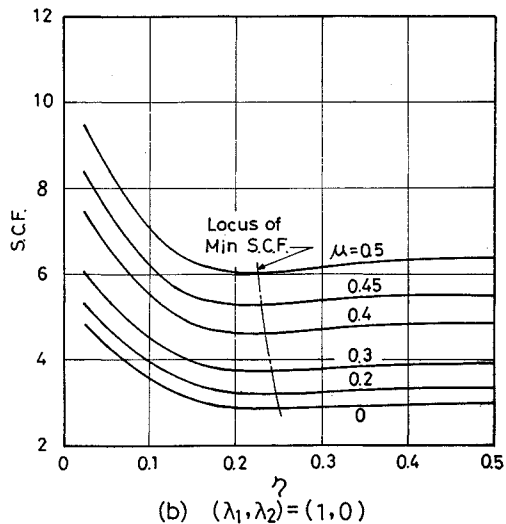
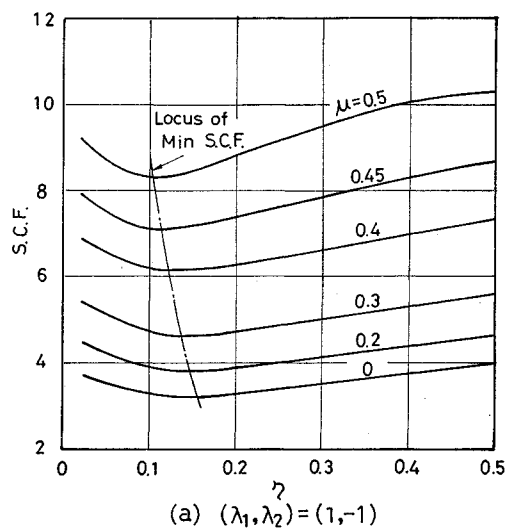


図-14 正方形孔をもつ正方形板の応力集中係数

図-14 (c) から明らかなように、静水荷重の場合の応力集中係数は、 η の増加、すなわち隅の丸味が大きくなるとともに著しく減少し、 $\eta=0.5$ のとき円孔の値となる。これに対して、等大逆向荷重および一軸引張の場合には、図-14 (a), (b) の鎖線に示すごとく、それぞれ $\eta=0.10\sim 0.15$ および $0.20\sim 0.25$ 付近で最小値をとる。したがって、荷重状態が等大逆向荷重あるいは一軸引張であるような板を設計する場合には、孔隅角部の丸味を孔幅の $0.10\sim 0.15$ 倍あるいは $0.20\sim 0.25$ 倍とす

ることにより、応力集中を軽減することができる。

(4) 正六角形孔

図-15 は、正六角形孔をもつ正方形板を示すもので、孔は隅を半径 r_c の円弧で丸められており、次式によって表わされる¹⁸⁾。

$$Z = 2a(A\zeta + B\zeta^{-5} + C\zeta^{-11}) \dots \dots \dots (33)$$

ここに、 a : 孔の辺心距, A, B および C : 実数係数。

孔の大きさおよび形状を表わす開孔率 μ および隅半径比 η は、正方形孔の場合と同様に定義され、これらの同じ組合せに対して計算は行われた。

表-5 は $\eta=0.025$ の正六角形孔について選点数に対する応力集中係数の変化を示すもので、荷重状態のいかにかわらず $M_1=M_2=5$ で実用的に満足すべき解が得られることがわかる。

図-16 は孔縁および外縁における応力分布の一例で、いずれの荷重状態においても最大応力は孔縁に生じている。

応力集中係数をすべての η, μ の組合せに対して $M_1=$

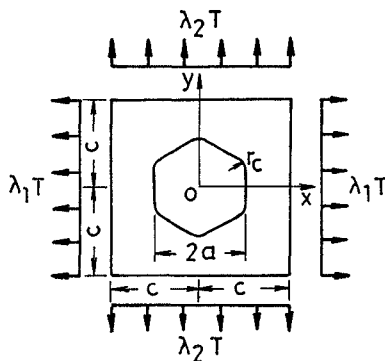
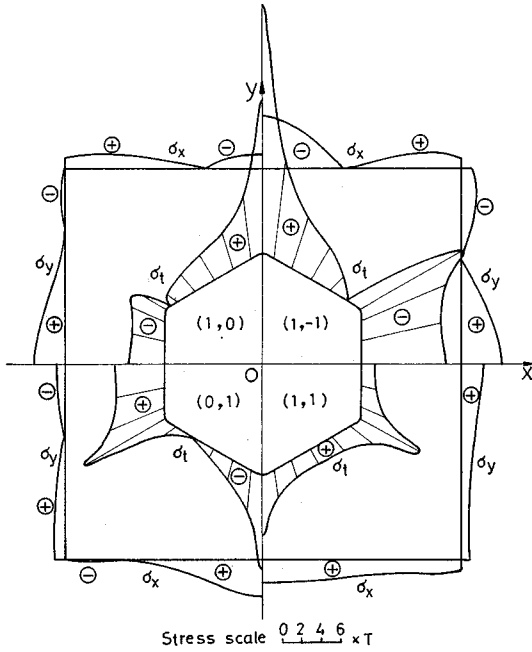


図-15 正六角形孔をもつ正方形板

表一5 応力集中係数と選点数との関係、
正六角形孔 ($\eta=0.025$)

(λ_1, λ_2)	μ	$M_1=M_2$		
		5	6	7
(1, -1)	0.3	13.709	13.742	13.728
	0.5	26.973	27.451	26.867
(1, 0)	0.3	9.682	9.705	9.694
	0.5	16.747	17.107	16.734
(1, 1)	0.3	5.755	5.748	5.753
	0.5	7.367	7.221	7.319



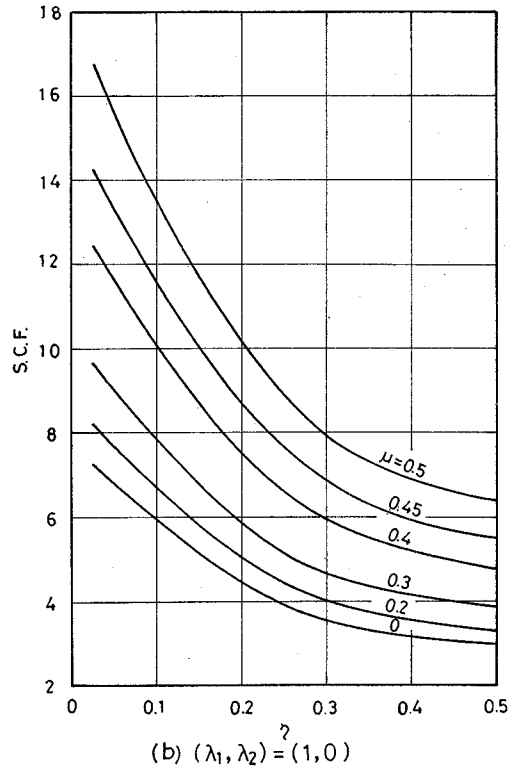
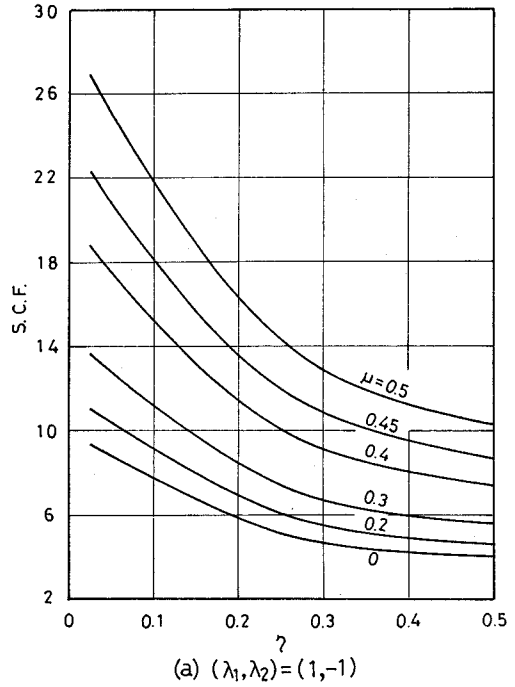
図一16 正六角形孔をもつ正方形板の孔縁および外縁に
おける応力分布の例, $\eta=0.05, \mu=0.5$

$M_2=5$ の選点数で求め、隅半径比 η の関数としてプロットすれば、図一17のごとくなる。応力集中係数は、荷重状態に関係なく、 μ の増加、すなわち孔が大きくなり、また η の減少、すなわち隅角部の丸味が小さくなるにつれて著しく増大する。

4. 結 語

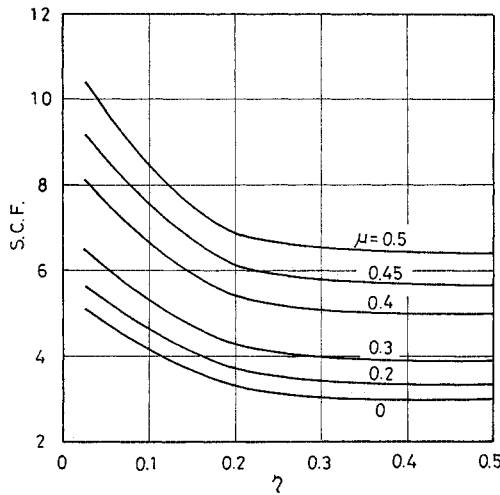
本論文は、複素変数法と選点法とを組合せて、単一孔をもつ有限板の応力および変位を求めるための一般解法を試みたものである。本解法の特徴を要約して述べれば、以下のことがあげられる。

(1) 有孔有限板の問題を解くには、多重連結体の問題として孔境界だけでなく外縁の境界条件をも考慮せねばならず、高精度の解を得ることは困難なように思われる。しかし、この方法によれば、孔境界が単位円に写像

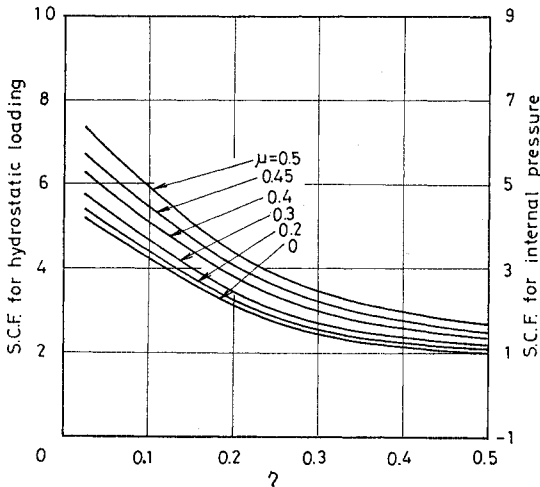


される限り孔縁の境界条件は厳密に満足されるゆえ、孔縁の応力集中は良好な精度で解析される。

(2) 孔縁の境界条件が恒等的に満足されるため、応



(c) $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 1)$



(d) $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1)$

図一七 正六角形孔をもつ正方形板の応力集中係数

力関数を決定するための条件は外縁の境界条件のみとなり、従来の、たとえば有限要素法や階差法、選点法などによる近似解法と比較して、未知数を著しく減じることができる。

(3) 解式は任意係数をもつ任意次数の写像関数に基づいて誘導されているゆえ、解法は個々の孔形状に限定されず一般性がある。したがって、与えられた孔形状の写像関数さえ求められれば、以後の手法は系統的かつ簡単である。さらに、写像関数も、著者提案の選点最小自乗法による写像法¹³⁾を適用することにより、少ない項数で高精度に決定することができる。

(4) 従来の実数型応力関数と組合された選点法^{3), 4), 8), 11), 13)}は、応力型境界値問題には都合がよいが、変位型境界値問題の取扱いは困難である。しかし、ここに示さ

れた複素変数法と選点法との併用法では、応力型境界値問題および変位型境界値問題ともに同一の概念で処理でき、かつ混合型境界値問題に対しても取扱いは前二者の場合とまったく変わらない²⁰⁾。したがって、単一孔をもつ有限板のみならず、1列等間隔に並んだ同一形状、無限個数の孔を有する帯板の問題にも、本解法がそのまま活用できる^{17), 21)}。

(5) 本解法は、二次元弾性問題のみならず、横荷重を受ける有孔平板の問題にも応用可能である。

最後に、本論文をまとめるにあたり終始変らぬご指導、ご激励を賜った元九州大学教授 山崎徳也博士ならびに、文献をご紹介いただいた九州大学助教授 角誠之助博士に深甚の謝意を表する次第である。

参考文献

- 1) Hengst, H. : Beitrag zur Beulteilung des Spannungszustandes einer gelochten Scheibe, Zeit. angew. Math. Mech., Bd. 18, Heft 1, s. 44~48, Feb., 1938.
- 2) Wang, C.-K. : Theoretical Analysis of Perforated Shear Webs, J. Appl. Mech., ASME, Vol. 13, No. 2, pp. A 77~A 84, June, 1946.
- 3) Sekiya, T. : An Approximate Solution in the Problems of Elastic Plates with an Arbitrary External Form and a Circular Hole, Proc. 5th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., pp. 95~98, 1955.
- 4) Schlack, A.L. and Little, R.W. : Elastostatic Problem of a Perforated Square Plate, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 90, No. EM 5, pp. 171~187, Oct., 1964.
- 5) 吉識雅夫・川井忠彦・吉村信敏 : マトリックス法による船体構造解析に関する研究 (I), 日本造船協会論文集, 第 120 号, pp. 127~134, 1966-12.
- 6) Anmazade, Y.A. and Gus'kova, E.P. : The Stress State of a Square Plate under Contour Pressure, Soviet Appl. Mech., Vol. 3, No. 1, pp. 44~48, Jan., 1967.
- 7) 安藤良夫・飯田国広・川井忠彦・矢川元基 : エネルギー法による有孔矩形板の応力集中に関する研究, 日本造船協会論文集, 第 122 号, pp. 146~156, 1967-12.
- 8) Slot, T. : Note on Stresses and Displacements in Square Plates and Cylinders with Pressurized Central Circular Holes, Nucl. Eng. Design, Vol. 5, pp. 142~149, 1967.
- 9) Durelli, A.J. and Barriage, J. : Stress Distribution in Square Plates with Hydrostatically Loaded Central Circular Holes, J. Appl. Mech., ASME, Vol. 22, No. 4, pp. 539~544, Dec., 1955. この論文については P.D. Flynn によって誤りが指摘されたので、改めて実験が行われ、その結果は J. Appl. Mech., ASME, Vol. 26, No. 1, pp. 150~151, Mar., 1959 に報告されている。
- 10) 川口達二 : 内面近似円形、外面正多角形なる厚肉管が内圧を受ける場合の応力分布, 日本機械学会論文集, 第 18 巻第 65 号, pp. 36~41, 1952.
- 11) Slot, T. and Yalch, J.P. : Stress Analysis of Plane Perforated Structures by Point-Wise Matching of Boundary Conditions, Nucl. Eng. Design, Vol. 4, No. 2, pp. 163~176, 1966.
- 12) Ibrahim, S.M. and McCallion, H. : Elastic Stress Concentration Factors in Finite Plates under Tensile

- Loads, J. *Strain Anal.*, Vol. 1, No. 4, pp. 306~312, July, 1966.
- 13) Jones, N. and Hozos, D. : A Study of the Stresses around Elliptical Holes in Flat Plates, *J. Eng. Ind.*, ASME, Vol. 93, No. 2, pp. 688~694, May, 1971.
 - 14) 山本善之・谷口雅春 : 解析解を用いた有限要素法, 日本機械学会論文集, 第 38 卷第 306 号, pp. 269~276, 1972-2.
 - 15) Savin, G.N. : *Stress Concentration around Holes*, Pergamon Press, New York, p. 7, 1961.
 - 16) 前出 15), p. 6.
 - 17) Gotoh, K. : *Stress Concentration in an Infinite Strip with a Row of Circular Holes*, *Theor. Appl. Mech.*, Vol. 22, pp. 187~197, 1972.
 - 18) 山崎徳也・後藤恵之輔 : 任意形孔をもつ無限板の曲げおよびねじりによる応力集中, 土木学会論文報告集, 第 187 号, pp. 49~66, 1971-3.
 - 19) Gotoh, K. : A Numerical Method for Determining the Mapping Functions for Some Simply-Connected Regions, *Theor. Appl. Mech.*, Vol. 21, pp. 355~363, 1971.
 - 20) 後藤恵之輔・村里正彦 : 選点法による二次元応力解析の一研究, 土木学会第 26 回年次学術講演会講演集, I-8, 1971-10.
 - 21) 後藤恵之輔・小八重憲明 : 任意形孔列を有する帯板の引張り, 九大工学集報, 第 45 卷第 4 号, pp. 482~488, 1972-8.

(1974. 4. 30・受付)
