

有限要素法による非ダルシー浸透流の一解法

A METHOD OF ANALYZING NON-DARCY FLOW
PROBLEMS BY FINITE ELEMENTS山 上 拓 男*・小 田 英 一**
By Takuo YAMAGAMI and Eiichi ODA

1. 緒 言

土中水の運動が Darcy の法則に支配されることはおおむね首肯されるところである。しかしながら、低 Reynolds 数および高 Reynolds 数流れにおいては Darcy 則から離れて、いわゆる非 Darcy 流れに移行することも多くの研究に裏付けされた事実である。この種の非 Darcy 流れの研究を大別すれば、流れの微視的機構に立入ってその本質を解明せんとする立場^{1),2)}と、多くは経験則に基づく運動方程式にのっとり、実際的な問題をいかに解析するかにより注がれたものとなる(ここでいう実際的な問題としては Rockfill Dam 中の流れがよく対象となる³⁾)。本文も後者の立場から、有限要素法(FEM)を用いて非 Darcy 流れを簡便に解析する一手法を提案したものである。

従来非 Darcy 流れを解析するには問題の複雑さゆえ、差分法^{4),5)}あるいは FEM による数値解析が常套手段として用いられてきた。ことに電子計算機の発展と相まって、FEM の応用には目覚ましいものがあり、Volker⁶⁾、McCorquodale ら^{7),8)}、Parkin⁹⁾ らによって変分原理を媒介とした定式化が試みられ、一応の成果がおさめられている。ただし彼らの研究は、非線形運動方程式と連続条件より流れを支配する微分方程式(これは一般に非線形微分方程式となる)を導出し、これと等価な汎関数を極小化するという解法をとっているため、最終的に得られる多元連立方程式の係数行列の中に変数が混在するという難点を避けえない。さらに、変分原理を媒介とする限り、非線形微分方程式に等価な汎関数を見出す作業がきわめて困難となり、現在までに提案されている種々の運動方程式いずれにも適用可能というわけにはいかないであろう。

なお、最近注目を集めている重み付き残差法^{10),11)}(Weighted Residual Method)によれば、変分原理の存在しないか、もしくはその存在が明らかでない問題に対して広範に適用しようといった点で、この種の非線形問題に期待するところ大である。

一方、ここで提案する簡易解析法は、非線形力学で用いられる荷重漸増法、および反復法の概念を応用したもので、非 Darcy 流れを Darcy 流れの繰返しで解析せんとするものである。すなわち、力学における Hooke の法則を、多孔体中の Darcy の法則に見立てれば、このようにして得られた解には、通常非線形応力解析で得られると同程度の精度が期待でき、しかもその取扱いが相当に簡易化されたものとなる。

なお、本論文では有限要素の type として 4 節点一次 iso-parametric element を採用した¹²⁾。これは 3 節点三角形要素に比べ少ない節点数で高精度の解が得られると同時に、後述の自由水面追跡に関連して狭窄な要素形状にも十分追従できるであろうとの考えによるものである。

2. 被圧流れ

非 Darcy 流れのうち、自由水面の存在しないいわゆる被圧流れを非線形力学にたとえるならば、無限小ひずみの材料非線形問題に相当するものであって、その取扱いも比較的容易である。すなわち非 Darcy 流れの運動方程式を応力-ひずみ関係の非線形性に、また作用外荷重を流れ系の上、下流側水頭差に置き換えてみれば、荷重漸増法、ならびに反復法の概念が応用しうことは想像に難くないであろう。以下にこれら両手法を用いた近似解法について述べる。

(1) 漸 増 法

運動方程式を一般的に

* 正会員 工修 徳島大学講師 工学部建設工学科

** 正会員 工博 徳島大学教授 工学部建設工学科

$$I = F(v) \dots\dots\dots (1)$$

と表わしておく。ここに、 I : 動水勾配, v : 流速 (合速度)。たとえば

Forchheimer 則では

$$I = av + bv^2 \dots\dots\dots (2)$$

a, b : 実験定数

指数法則では

$$I = \alpha v^n \dots\dots\dots (3)$$

α, n : 実験定数 ($1 \leq n \leq 2$)

などである。

いま, Fig. 1 に示すような矢板のまわりの流れを例にとると, 上・下流側の水頭差 H を適当な増分 $\Delta h_1, \Delta h_2, \dots, \Delta h_n$ に分割し, この水位増分に対応する合速度の増分を $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ とする。また各増分内では流れは線形挙動 (Darcy 流れ) を呈するものと仮定する。このとき式 (1) を v で微分したものは Fig. 2 の接線勾配を与えるが, この逆数, すなわち

$$k = 1/F'(v) \dots\dots\dots (4)$$

をあたかも透水係数のごとくみなし (疑似透水係数とよぶことにする); 第 i 増分過程ではその一歩手前の ($i-1$) 段階終了時の合速度, v_{i-1} , を用いて

$$k_i = 1/F'(v_{i-1}) \dots\dots\dots (5)$$

を求める。この疑似透水係数に基づいて Darcy 則から

$$\left. \begin{aligned} v_{xi} &= -k_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \\ v_{yi} &= -k_i \frac{\partial H_i}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

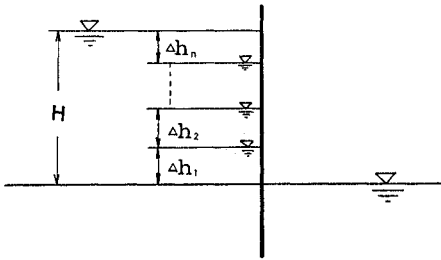


Fig. 1 漸増法

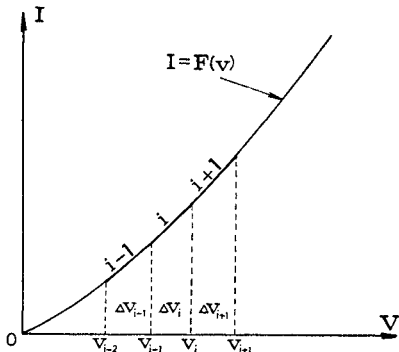


Fig. 2 漸増法

ここに, H_i : 第 i 増分過程の水頭分布

v_{xi}, v_{yi} : 第 i 増分過程の座標方向速度成分

したがって, この場合の流れを支配する基礎微分方程式は次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_i \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_i \frac{\partial H_i}{\partial y} \right) = 0 \dots\dots\dots (7)$$

よって式 (7) に注目すれば既往の FEM 解析のためのプログラムがそのまま応用できよう。たとえば Forchheimer 則, 式 (2)によれば, 第 i 段階の疑似透水係数は

$$k_i = 1/(a + 2bv_{i-1}) \dots\dots\dots (8)$$

指数法則では

$$k_i = 1/\alpha n v_{i-1}^{n-1} \text{ (注 1)} \dots\dots\dots (9)$$

などである。

(2) 反復法

Fig. 3 に示すように, 与えられた境界条件のもとで, ($I-v$) 曲線の初期接線勾配から出発して各要素における (I, v) 点が許容される範囲内ですべて運動方程式を満すまで修正反復計算を行うものである。

いま, 初期接線, $\overline{OP_1}$, の勾配の逆数をこの場合の疑似透水係数として第 1 回目の線形計算を行うと, その結果は図の P_1 点で表わされるように運動方程式からかなり偏倚したところに落着くことが予想される。このとき偏倚量 $\overline{P_1 P_1'}$ があらかじめ規定された許容値 (EPS) より大であれば, 引続き原点と P_1' 点を結ぶ直線の勾配の逆数を新たな疑似透水係数として同様な線形計算を繰返す。以上により第 i 反復過程終了時の偏倚量, $\overline{P_i P_i'}$ がすべての要素において許容値内にあれば, 解は収束したものと演算を打切る。この反復法の場合も従来のプログラムがそのまま利用でき, きわめて好都合である。なお, 反復法の場合の初期疑似透水係数は

Forchheimer 則:

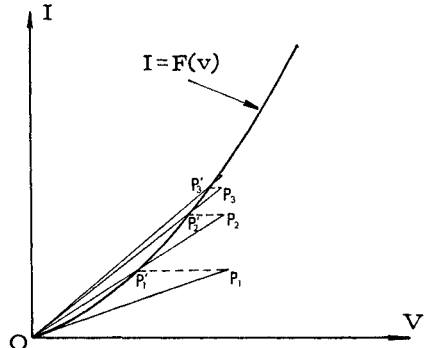


Fig. 3 反復法

注 1) すべての流速あるいは Reynolds 数の範囲で非ダルシー流れとして解析する場合, $i=1$ のときは v にきわめて微小な値を対応させて $k_i \rightarrow \infty$ となるのを防ぐ。

$$k_1 = 1/a \dots\dots\dots (10)$$

指数法則：

$$k_1 = 1/\alpha n v_1^{n-1} \dots\dots\dots (11)$$

として、この v_1 に先の式 (9)、注 1) と同様きわめて微小な値を対応させる、などである。

(3) 流量算定法

従来 FEM で浸透流問題を解析する場合、流量計算は解析領域内に適当な断面を設定し、この断面の長さ、その近傍の流速との積で評価するといった手法がとられてきた。しかしこの方法によると、流量算定のために設定された断面の上、下流側流速分布より求めた流量には、ある程度の開きの生ずることは避け難く、そのために数種の断面を設定して、それらの平均値を採用するのが普通であった^{13),14)}。

本文では応力解析における反力算定の概念ともいうべき手法を用いて、系の流出流量(または系への流入流量)を定める方法をとっている。これはすでに Neuman らによって示唆されているところである¹⁵⁾が、筆者が一貫して用いているブロック消去法(対角化分割法¹⁶⁾)と相まって、後述の不圧流れの解析において特に有用なものである。

いま、Fig. 4 に示す矢板のまわりの流れ系において、系全体のポテンシャル分布が定まったあとで Fig. 4 (a) に示すように下流側流出面に接した要素(斜線部)のみに注目し、この部分を Fig. 4 (b) のごとく 2 つのユニットに分割する。このときマトリックス方程式は次式で与えられる。

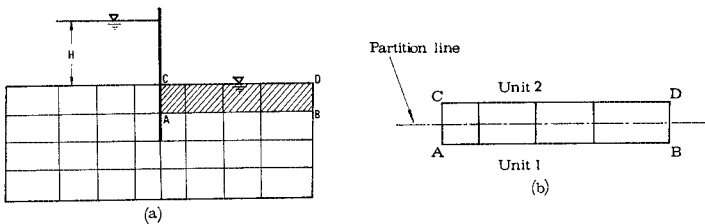


Fig. 4 流量算定(被圧流れ)

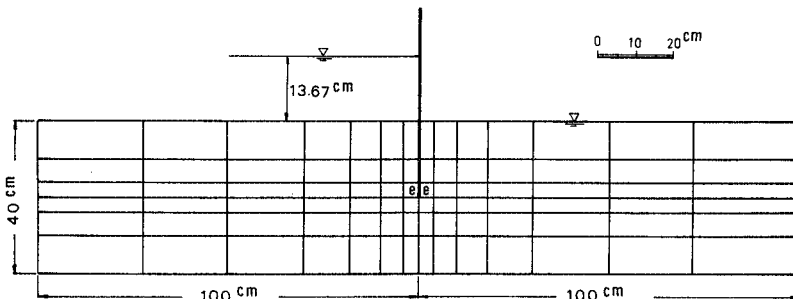


Fig. 5 解析例

$$\begin{bmatrix} [K_1] & [C_1] \\ [C_1^T] & [K_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{H_1\} \\ \{H_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Q_1\} \\ \{Q_2\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、

$\{H_1\}$: \overline{AB} 上の節点のポテンシャルを要素とする列ベクトル

$\{H_2\}$: \overline{CD} 上の節点のポテンシャルを要素とする列ベクトル

$\{Q_1\}$: \overline{AB} 上の節点流量を要素とする列ベクトル

$\{Q_2\}$: \overline{CD} 上の節点流量を要素とする列ベクトル

$[K_1], [C_1], [K_2]$: ユニット 1, 2 の seepage matrix で、Fig. 4 (b) の要素のみで定まる。

$[C_1^T]$: $[C_1]$ の転置マトリックス

よって求めるべき下流側境界面上の流出流量は

$$\{Q_2\} = [C_1^T]\{H_1\} + [K_2]\{H_2\} \dots\dots\dots (13)$$

となる。なお、以上の過程を上流側流入面に面した要素に適用すれば、系への流入流量が求められることになる。

(4) 解析例

被圧流れの解析例として、岡による有限領域内の矢板のまわりの流れに関する研究¹⁷⁾をとりあげる。これは、Fig. 5 に示すような断面諸元、および境界条件のもとに、流れが Forchheimer 則で支配されるとして差分解と実験値とを比較検討したものである。この場合、別途になされた透水試験結果より式 (2) の定数は $a=0.25 \text{ sec/cm}$, $b=0.15 \text{ sec}^2/\text{cm}^2$ であることが知られている。

Fig. 5 には FEM 解析のための 4 節点一次 iso-parametric element による分割状況もあわせ示した(要素数 84, 節点数 108)。ここで一次要素を用いた理由は、浸透問題ではこれで十分な精度が得られるとする Desai の報告¹⁸⁾に従ったものである。また、周知のように iso-parametric element によれば seepage matrix を求める時点で数値積分を要する。これには Gauss 4×4 rule で解析した Pinder らの研究¹⁹⁾もみられるが、本文では 6×6 rule を採用している。

a) 漸増法による結果

Fig. 5 の上、下流水位差、 $H=13.67 \text{ cm}$ 、を 5 等分して 1 回の水位増分量を $\Delta h_i=2.734 \text{ cm}$ とし、5 段階の増分過程で解析した。この場合、最終的なポテンシャル分布は各増分過程ごとの値を合

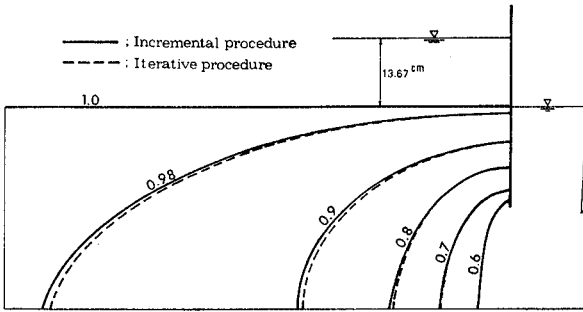


Fig. 6 解析結果 (ポテンシャル分布)

Table 1 漸増法による流量 (cm³/sec/cm)

Increment	1	2	3	4	5	
Calculated	Q ₁ =5.051	Q ₂ =4.289	Q ₃ =3.826	Q ₄ =3.495	Q ₅ =3.241	Q=ΣQ _i =19.902
Experimental	—	—	—	—	—	Q=19.5

計して求められる。Fig. 6 の実線は、このようにして求められた等ポテンシャル線を左半断面についてプロットしたものである。一方、流量に関しては各増分過程ごとにポテンシャル分布が定まったあとで、式 (13) によって下流側流出面上の流出流量を算定している。Table 1 はこの流量を実験値と対比させて示したもので、両者の良好な一致は本解析法の妥当性を裏付けるものであろう。なお、参考までに Computer Time を示せば、京都大学大型計算機センター FACOM 230-75 で Total CPU Time は 13.7 sec であった。

b) 反復法による結果

前述のごとく、反復法は、与えられた境界条件は一定に保ったままで、すべての要素内で (J, v) 点が運動方程式を満すまで繰返し計算を行うものである。したがって収束判定規準 (先の EPS) の値いかんによって解がある程度左右されることは否めない。本解析例では |EPS| = 0.07 cm/sec としたが、この値は漸増法による結果の合速度の最大値 (Fig. 5, 要素 e 内の流速) のほぼ 5% に相当する。

さて、この場合のポテンシャル分布は Fig. 6 の破線で示されたもので、収束に要した反復回数は 2 回である。漸増法、反復法ともほとんど差は認められず、また実測値 (参考文献 5), pp. 155, Fig. 10 参照) とも十分な精度で一致している。

流量に関しては各反復時の値を漸増法と同様、下流側流出流量の形で求めた。これを Table 2 にまとめておく。なお、反復法の Total CPU Time は 8.6 sec であった。

Table 2 反復法による流量 (cm³/sec/cm)

Iteration	1	2	
Calculated	Q ₁ =23.814	Q ₂ =20.760	Q=Q ₂ =20.760

以上、Confined Flow の解析法を略述したが、あらかじめ規定された繰返し回数で確実に解が得られることと、未知の問題に対して反復法を適用する際の、許容値 EPS を定める規準が多少不明確である点、漸増法のほうがすぐれていると考えている。ただし、以下の不圧流れにおいては漸増法は適用できない。

3. 不圧流れ

不圧流れの場合においては自由水面決定が先決問題となる。しかし線形計算の繰返しで非線形流れを近似せんとする性格上、疑似透水係数を修正するたびに自由水面の位置が変化することとなり、

前述の被圧流れのように運動方程式のみに着目した反復計算では問題は解決されない。いわば、この種の問題は非線形力学分野における材料非線形性と幾何学的非線形性とを兼ね備えた問題であるといつてよからう。また、当然のことながら漸増法は適用できなくなる。

ここではまず Darcy 流れの自由水面決定法に触れ、これに基づいた非 Darcy 流れの解析法を詳述しよう。

(1) Darcy 流れの自由水面決定法

Fig. 7 に示すように、最初適当に仮定された自由水面のもとで領域を 4 節点一次 iso-parametric element に分割し、さらにブロック消去法 (対角化分割法) を適用すべく分割線 (一点破線) を入れる。このとき、後述のごとく演算量を軽減する目的で、浸出点を含めて自由水面上の節点が最終分割 (第 N 分割) となるようにユニット分けするものとすれば、適当な境界条件のもとに前進消去の終了時点で、この自由水面上の節点の全水頭 {H_N} が次のように求められる。

まず、系全体のマトリックス方程式は

$$\begin{pmatrix}
 K_1 & C_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 C_1^T & K_2 & C_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & C_2^T & K_3 & C_3 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{N-2}^T & K_{N-1} & C_{N-1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{N-1}^T & K_N &
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 H_1 \\
 H_2 \\
 H_3 \\
 \dots \\
 H_{N-1} \\
 H_N
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 Q_1 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 \dots \\
 Q_{N-1} \\
 Q_N
 \end{pmatrix}
 \tag{14}$$

ここに、

{H_i} : 第 i ユニット内の節点の水頭よりなる列ベクトル

{Q_i} : 第 i ユニット内の節点流量よりなる列ベクトル

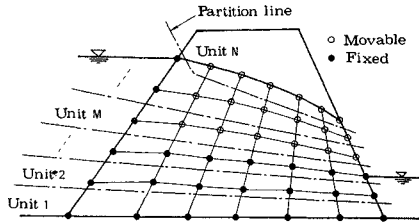


Fig. 7 自由水面決定

ル

$[C_i^T]$, $[K_i]$, $[C_i]$: 第 i ユニットの seepage matrix, ただし $[C_i^T]$ は $[C_{i-1}]$ の転置である。

上式 (14) において, 各ユニットのマトリックス方程式を前進消去で逐次変形すると, 最終分割で

$$[\bar{K}_N]\{H_N\} = \{\bar{Q}_N\} \dots \dots \dots (15)$$

なる形の連立方程式に到達し, これより $\{H_N\}$ が単独に定められる。

ところで, 定常流の場合, 自由水面が正しい位置にあるためには, その上で全水頭が位置水頭に等しいと同時にその面を介しての水収支が存在しないことである (accretion などは考えない)。したがって, 真の自由水面を求めるには最初に仮定された位置を逐次修正しつつ, これら二つの条件が満たされるまで試行錯誤的に探索せねばならない。そこで, Fig. 7 の自由水面をポテンシャル未知なる 1 本の流線として, 上記の前進消去で $\{H_N\}$ のみを求め, 正しい位置を与えているか否かを判定する (後退代入に移る前に仮定された自由水面が正しい位置にあるかどうかを調べることに注意されたい)。すなわち, $\{y_s\}$ を自由水面の位置水頭として, $|\{H_N\} - \{y_s\}| > \epsilon$ (ϵ : 誤差の許容値) であれば河野による relaxation factor α^{20} を導入し, あらかじめ定められた直線 (nodal line) に沿って自由水面を修正したのち, 元に戻って上の process を繰り返す。このとき, 自由水面の修正に伴って各要素の形状が極端な形とならないよう注意することが肝要である。これに関して筆者はあらかじめ各 nodal line 上で自由水面とともに修正すべき節点の範囲 (可動領域と称す) を規定しておき, 修正後のこれらの節点間隔が等しくなるような処置をとっている。なお, 可動領域以外の節点 (固定節点) は解析の全段階を通じて固定しておく。これは幾何学的形状と透水係数のみに依存した要素の seepage matrix の計算を最小限に留めんとするためである。ことに iso-parametric element を用いれば seepage matrix を求める際の数値積分にかなりの演算時間を要することから, この固定節点を可能な限り多くとることが望ましい。

この過程をもう少し詳しく説明する。先の Fig. 7 において, ○印を付した節点を可動節点, ●印を固定節点とし, 可動節点を含むユニットのうち一番若いものを第

M ユニットとする。このとき, 式 (14) のマトリックス方程式において, 各ユニット内の seepage matrix を

$$ST(I, J, II) = [K_{II} : C_{II}] \dots \dots \dots (16)$$

ここに, I: 第 II ユニット内の行番号

J: 第 II ユニット内の列番号

II: 任意のユニット番号

注: $[C_{II}^T]$ は直接記憶の必要なし

と表わせば, 自由水面修正に伴い可動節点を nodal line に沿って移動させたとしても, 少なくとも第 $(M-2)$ ユニットまでの seepage matrix は変化しない。なぜなら, 式 (16) のサブマトリックス $[K_{II}]$ はそのユニットに含まれる節点のみによって構成されるものであるが, $[C_{II}]$ はその次の第 $(II+1)$ ユニットに含まれる節点との連成効果を表わす項であり, したがって第 M ユニット内の節点の位置を修正移動すれば, 第 $(M-1)$ ユニットの seepage matrix (厳密には $[C_{M-1}]$ マトリックス) まで変化することとなる。

よって, プログラミングに際しては, このところ十分に留意してむだな演算を省くことに努めねばならない。

一方, $|\{H_N\} - \{y_s\}| \leq \epsilon$ なるときは, 自由水面は正しい位置に収束したもとして, ただちに後退代入に移り領域全体の解を求めるのである。

(2) 浸出点の決定

前節の自由水面を逐次修正しつつ正しい位置に収斂させていく過程において, 新たな浸出点をいかに決定するかが重要な問題となる。FEM でこの浸出点を定める手順についてはすでに Finn²¹⁾, Taylor ら²²⁾, 川本ら²³⁾, 飯田ら²⁴⁾, Neuman ら²⁵⁾, France ら²⁶⁾, および河野²⁷⁾らによりそれぞれ独自の手法が用いられてきた。このうち Neuman らの研究を除けばもっぱら, 自由水面をポテンシャル未知として解析した結果の浸出点近傍のポテンシャル分布から, 直接的に次の反復段階の浸出点を定めることに終始したものである。これに対し Neuman らは主として Taylor らの解法を例にとり, 単純に自由水面をポテンシャル未知として解いた結果から浸出点を定めることは, それ自体が流れ系に 1 つの束縛を課することとなり, 場合によれば浸出点近傍で自由水面が奇妙な応答を見せるとしてその実例を示した。さらに彼らは, 自由水面決定には単にポテンシャルのみに注目することでは不十分であって, 下流側境界面上の流出流量を考慮すべきだとして巧妙な解析法を提出している。

ここで Neuman らの解析手順を箇条書きすれば大略次のようにまとめられよう。

i) 自由水面を仮定し, この上でポテンシャル既知なる条件のもとに系全体のポテンシャル分布を求める。

このとき自由水面以外の境界上でポテンシャル既知ないしは不透水面の条件を与えることはいうまでもない。

ii) i) の結果より下流側流出面上の節点流出流量 {Q} を計算。

iii) 同じ解析領域において、今度は自由水面をポテンシャル未知とし、浸出点を含む下流側流出面を流量既知(上の {Q}) の境界として再度解析。

iv) iii) の結果求めた自由水面上(浸出点を含む)の全水頭を位置水頭と比較し、収束しているか否かを判定。

以上により、iv) で収束していなければ自由水面を修正したのち i)~iv) を繰り返す。この場合、新たな浸出点を決定する過程において、Neuman らの解法の意義が認められるのである。すなわち、下流側境界面を1つの nodal line とみなせば、自由水面上の他の節点と同じ process によって無理なく新たな浸出点を決定しうところに注意されたい。ただここで問題となるのは、上の反復過程 i), iii) にみられるように、同一の領域に対して境界条件を変更するのみで2度解析せねばならないことである。この点で十分な注意を払わなければ膨大な演算量を要し、不経済なものとなろう。そこで本論文では Neuman らの解法の援用のもとに、ブロック消去法(対角化分割法)と関連して以下に示すような計算方法をとっている。

i) 自由水面を適当に仮定し、この上でポテンシャル既知として前進消去、後退代入をへて系全体を解く。

ii) 下流側境界面上の節点流出流量 {Q} を算定する。この流量計算は、Fig. 8 にみられるように流出面に位置する要素(斜線部)のみに着目し、2. の (3) の所論に従って、CD 上の節点流量を求めればよい。

iii) 同じ解析領域で自由水面はポテンシャル未知とする。また、下流側境界面上の節点のうち、可動節点のみを流量既知の境界として上の {Q} のなかでこれに対応するものを作用させ、固定節点はポテンシャル既知とする注2)。そしてこれらの条件下で再度解析する。このとき 3. の (1) で述べた手法を導入し演算量の軽減化を計る。

いうまでもなく、iii) で収束していなければ、自由水

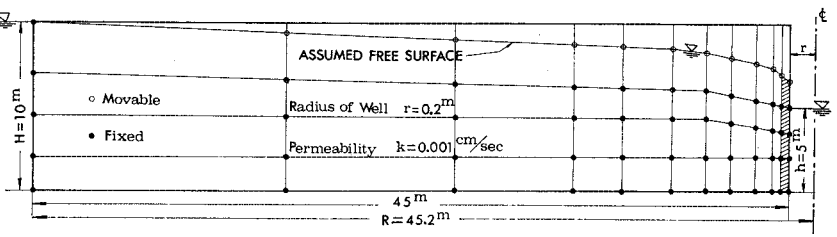


Fig. 9 井戸周辺の軸対称流れの解析例

面を修正したのち i)~iii) を繰り返す。ところで上記の反復過程のうち、i) と iii) の解析領域は同一(換言すれば、境界条件を導入する前の seepage matrix が同じ)であるので、ここでもまたみかけよりはるかに演算量を少なくすることができる。すなわち、i) の段階で求めた各ユニットの seepage matrix を式 (16) の形で記憶するものとするれば、境界条件の導入による修正箇所(これは [K] マトリックスの対角線上の値となる)以外は、両者共通に用いられるという性質をプログラミングに反映させるのである。

以上、定常 Darcy 自由水面流れの解析法を詳述したが、このなかで特に式 (13) の流量算定法に関してその有用性を検討すべく、簡単な応用例を示そう。

問題は Fig. 9 に示すような井戸周辺の軸対称流れである。この問題に対する流量は、水面形が Dupuit の仮定に従うとするにもかわらず、次式で厳密値が与えられることはすでに Hantush によって証明されている²⁸⁾。

$$Q = \pi k (H^2 - h^2) / \log_e R/r \dots\dots\dots (17)$$

これより Fig. 9 の諸数値を用いて流量を計算すると、 $Q = 4.35 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{sec}$ となる。一方、4 節点一次 isoparametric ring element を用いた本解析法によれば、自由水面の収束判定規準を $\epsilon = 10 \text{ cm}$ として、図の斜線部の要素から求めた流量は $Q = 4.44 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{sec}$ と

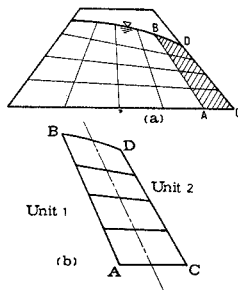


Fig. 8 流量算定 (不圧流れ)

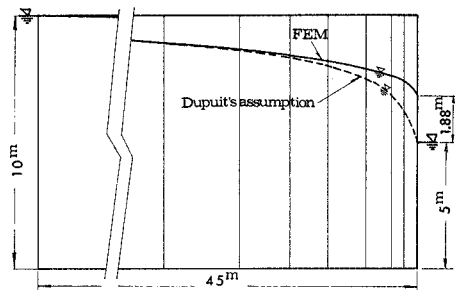


Fig. 10 解析結果 (自由水面)

注 2) 固定節点は自由水面を修正移動してもその影響がおよばないような節点(たとえば Fig. 7 でいえば下流側水面以下の節点)とし、それより上方にある節点を可動節点とする。これにより、少なくとも固定節点では解析の全段階を通じてポテンシャル既知なる境界条件を与えても流れ系を束縛することはないと考えられる。

なった。また、このときの自由水面は Fig. 10 に示されているとおりでである。

以上により本解析法、特に流量算定法が高精度で適用できると考えられる。したがってまた、この流量に基づく自由水面決定法が十分信頼できるとしてよからう。

(3) 非 Darcy 流れへの拡張

前述の定常 Darcy 流れの自由水面ならびに浸出点決定法を非 Darcy 流れの場に拡張する。先にも述べたように、自由水面流れでは解析過程から明らかなように漸増法は適用できず、必然的に反復法によらねばならない。

いま、適当に仮定された自由水面のもとに解析領域全体の要素が一様に初期疑似透水係数を有するものとして、Darcy 流れの解法に従ってこの場合の正しい自由水面を決定し、さらに後退代入をへて系全体のポテンシャル分布を求める。これより各要素内の流速分布を求め、被圧流れと同様に運動方程式を満たしているか否かを調べる。そしてこの関係を満たしていない要素については、Fig. 3 に従って新たな疑似透水係数を定める。これ以後は、今求められている自由水面を、あらためて仮定された自由水面とみなして Darcy 流れの解法を繰返す。以上の過程をすべての要素内で運動方程式が満たされるまで継続すれば、最終的に非 Darcy 流れの解が得られたことになる。

なお、ここに提示した解法は一見非常に多くの反復計算を行わねばならず、かなりの演算時間を要すると思われるが、プログラミングにおいて前述の時間軽減のための種々の工夫を施しておけば、予想以上に短時間で処理しうることは以下の解析例にみられるとおりでである。

(4) 解析例および考察

解析例として McCorquodale および Volker の論文で取扱われている問題を対象とし、これに若干の考察を加えることにする。

a) McCorquodale との比較²⁹⁾

McCorquodale らは透水係数が流速の関数として次式で表わされるとした、いわゆる Lindquist's Law

$$k=1/(a+bv) \dots \dots \dots (18)$$

a, b: 実験定数

を用いている。これに対し、本文で提唱する解法は、運動方程式を式(1)の形に表わすことを出発点としたものである。そのため Forchheimer 則、式(2)を次のように変形してみる。

$$I=av+bv^2=(a+bv)v \dots \dots \dots (19)$$

これより

$$v=\frac{1}{a+bv} I \dots \dots \dots (20)$$

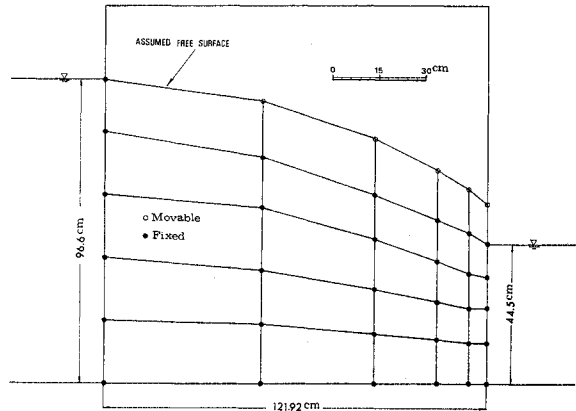


Fig. 11 解析例 (McCorquodale との比較)

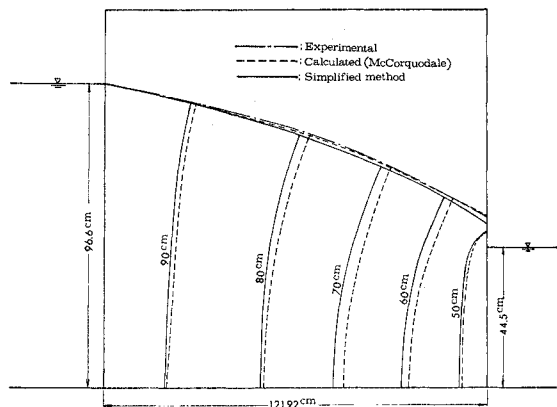


Fig. 12 解析結果 (ポテンシャル分布, 自由水面形)

式(18)と式(20)を比較すれば明らかなように、Lindquist's Law は本質的には Forchheimer 則で表わしうるとしてよからう。この意味で簡易法では Forchheimer 則に基づいて解析した。なお実験定数は $a=0.0103 \text{ sec/cm}$, $b=0.0095 \text{ sec}^2/\text{cm}^2$ である。

Fig. 11 に要素分割を示す。また収束判定規準は、運動方程式に対して $|\text{EPS}|=0.3 \text{ cm/sec}$, 自由水面に対して $\epsilon=0.5 \text{ cm}$ とした。

Fig. 12 に自由水面およびポテンシャル分布を McCorquodale らの結果と比較して示す。この場合、最終的な解が得られるまでに要した運動方程式に関する反復回数は3回であった。この運動方程式に関する反復段階(M)に対して、自由水面の修正回数(S)がどの程度であるかを Table 3 に示した。表にはまた、下流側流出面上の要素より式(13)を用いて求めた流量(Q)も

Table 3 反復回数, 流量

M	1	2	3
S	7	4	2
Q (cm ² /sec/cm)	2966.18	437.12	432.80

併記されている。すなわちこの表の見方は、仮定自由水面から出発して、すべての要素が初期疑似透水係数 $1/a$ を有するとしたときの正しい位置に収束するまでに要した自由水面の修正回数が7回であり、この自由水面のもとでの流量が $Q=2966.18 \text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ であることを意味する。そして、このときの各要素の (I, v) から Fig. 3 に従って新たな一組の疑似透水係数を定め、これに対応する自由水面が得られるまでに要した修正回数が4回、流量は $Q=437.12 \text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ である。

結局、この問題の簡易法による流量は $Q=432.80 \text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ となったが、McCorquodale らの数値解析では $Q=436 \text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ 、実験値は $Q=454 \text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ である。

なお、Total CPU Time は後述の Volker との比較における Fig. 13 の問題とあわせて 20.177 sec であった（両者を同時に計算した）。

以上 Fig. 12 のポテンシャル分布、および流量の比較、さらに演算時間などを総合すると、自由水面問題についても本解析法が十分実用に耐えるものと考えられる。

b) Volker との比較³⁰⁾

Volker は Forchheimer 則、式 (2)、および指数法則、式 (3)、に基づいて2つの解析例を示している。こ

こではその内の1つを取りあげ、Fig. 13 に要素分割を示す。ただし、原文には上流側水位以外の諸寸法が具体的に与えられていないので、断面諸元がこの水位と同じ縮尺のもとに描かれているものとして Fig. 13 を再現した。また、運動方程式として Forchheimer 則を採用したが、実験定数は $a=0.0105 \text{ sec}/\text{cm}$ 、 $b=0.0127 \text{ sec}^2/\text{cm}^2$ である。さらに、収束判定規準は $|\text{EPS}|=0.3 \text{ cm}/\text{sec}$ 、 $\epsilon=0.5 \text{ cm}$ とした。

結果を整理して Fig. 14 に自由水面およびポテンシャル分布を示す。この場合、運動方程式に関する反復回数は3回であった。これを先と同様 Table 4 に要約してある。すなわち、本解析法による流量は $Q=95.509 \text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ である。一方、Volker による数値解析では $Q=102.17 \text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ 、実験値は $Q=105.89 \text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ となっている。

非 Darcy 流れという複雑さを考慮すれば、自由水面の位置、流量いずれも実験値といくぶんのずれがみられるものの、やはり実用的としてよかろう。

ところで、以上の問題に対して収束判定規準をより厳

Table 4 反復回数, 流量

M	1	2	3
S	1	1	0
Q (cm ³ /sec/cm)	530.678	95.500	95.509

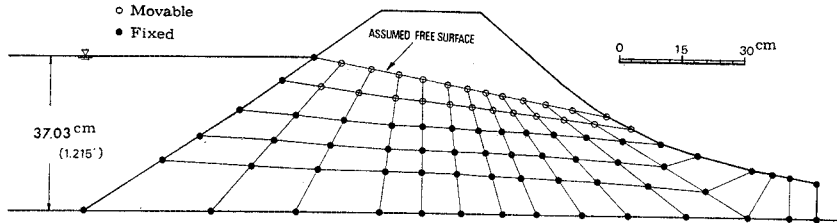


Fig. 13 解析例 (Volker との比較)

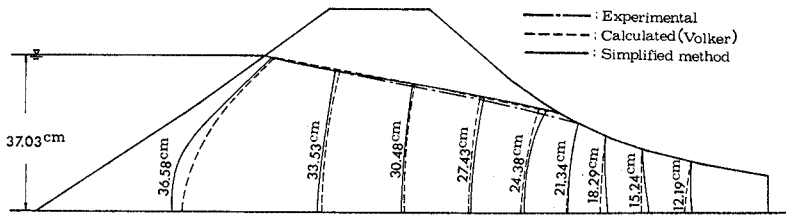


Fig. 14 解析結果 (ポテンシャル分布, 自由水面形)

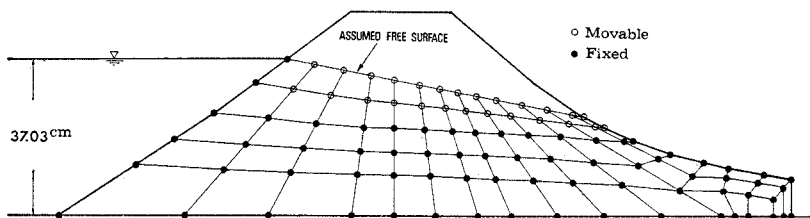


Fig. 15 解析例 (要素分割を密にした場合)

Table 5 反復回数, 流量

M	1	2	3	4
S	2	2	2	0
$Q(\text{cm}^3/\text{sec}/\text{cm})$	526.219	94.925	96.967	96.751

しく, また要素分割をより密にとった場合, 解がどのように変動するかを調べる目的で Fig. 15 に示すような分割のもとに解析を試みた。このときの収束判定規準は $|\text{EPS}|=0.1 \text{ cm}/\text{sec}$, $\epsilon=0.25 \text{ cm}$ である。

結果は自由水面, ポテンシャル分布, 流量いずれも Fig. 14 と大差ないものであった。ただし, 当然のことではあるが, 反復回数が増大し, Table 5 のようになっている。なお, この場合の Total CPU Time は 24.0 sec であった。

動水勾配の大きな下流側の要素分割をかなり密にし, また収束判定基準も厳しくとったにもかかわらず, Fig. 13 と Fig. 15 の結果にほとんど差の認められないことから推測して, この問題に関しては Fig. 15 で得られた結果あたりが本解析法の精度の限界ではなかろうかと考えている。McCorquodale らとの比較に比べ, 流量の差が大きいのは, 先に述べたように Volker の論文で与えられている図には上流側水位以外の諸寸法が具体的に示されていないことと, 下流側のり面が曲線となっているのを直線の連続で置き換えていることなどから, 寸法上の誤差も影響しているものと思われる。

いずれにしても, 実用的見地からは十分なものと考えている。

4. 結 言

本論文は非線形力学の有限要素解析の概念を応用し, 非 Darcy 流れを Darcy 流れの繰返して解析するための簡便な 2 方法, すなわち漸増法と反復法を提案したものである。

そのため流れを被圧流れと不圧流れに分類し, 前者に対しては漸増法, 反復法いずれも適用可能であるが, 後者は反復法によらざるをえないことを述べた。

また, 流量算定法として反力計算の概念ともいべき手法を用い, これが高精度で適用しうることを指摘した。

さらに, 不圧流れに関連して演算量軽減のための種々の工夫につとめ, これらを既往の研究成果と比較することによって, 精度, 演算時間両面で十分実用的であることを検証した。

本解析法の特徴は

① 線形計算を基底としているため, いかなる形の運動方程式も解析過程への導入が容易であること。

② 不圧流れにおいて流量に基づく浸出点決定法を採

用しているため, 各反復段階ごとの新たな浸出点が無理なく定められること。

③ 正しい自由水面が求められた時点で, 同時に流量も計算できていること。

などがあげられよう。

一方, 問題点としては自由水面がほとんど鉛直になるような場合の浸出点を含めた修正方法が指摘される。これについてはたとえば Neuman らが一手法を提案しているがさらに考究したいと考えている。

終りに, 本研究の数値解析はすべて京都大学大型計算機センター FACOM 230-75 を利用したことを記して, 関係各位に感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) 佐藤邦明: 低レイノルズ数浸透流における吸着水の影響について, 土木学会論文報告集, No. 187, 1971-3.
- 2) 武内 等: 確率モデルによる多孔体内の流れのシミュレーション, 土木学会論文報告集, No. 187, 1971-3.
- 3) Parkin, A.K., D.H. Trollope and J.D. Lawson: Rockfill structures subject to water flow, Proc. ASCE, SM, Vol. 92, No. 6, pp. 135~151, 1966.
- 4) Lee, I.K.: SOIL MECHANICS, Selected Topics, Butterworths, London, pp. 92~93, 1968.
- 5) 岡 太郎: Forchheimer 則を適用した Confined Seepage (2), 京都大学防災研究所年報第 13 号 B, 昭和 45 年.
- 6) Volker, R.E.: Nonlinear flow in porous media by finite elements, Proc. ASCE, HY, Vol. 95, No. 6, pp. 2093~2114, 1969.
- 7) McCorquodale, J.A. and H.C. Ng: Non-Darcy flow solved by finite element analysis, 13th Congress of the IAHR, Kyoto, Japan, Vol. 4, Subject D, pp. 347~355, 1969.
- 8) McCorquodale, J.A.: Variational approach to Non-Darcy flow, Proc. ASCE, HY, Vol. 96, No. 11, pp. 2265~2278, 1970.
- 9) Parkin, A.K.: Field solutions for turbulent seepage flow, Proc. ASCE, SM, Vol. 97, No. 1, pp. 209~218, 1971.
- 10) Zienkiewicz, O.C.: The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, 1971.
- 11) Zienkiewicz, O.C. and C. Taylor: Weighted residual processes in finite element with particular reference to some transient and coupled problems, Lectures on finite element method in continuum mechanics (Edited by J.T. Oden and E.R.A. Oliveira), The University of Alabama in Huntsville, pp. 415~458, 1973.
- 12) Edited by I. Holand and K. Bell: Finite element methods in stress analysis, TAPIR, 1972. (川井忠彦監訳: 有限要素法-応力解析への応用, 朝倉書店, 昭和 47 年), または参考文献 10)。
- 13) 川本勝万・駒田広也・宮口友延: 塊体および基礎における浸透流の有限要素解析について, 土と基礎, Vol. 18, No. 12, pp. 19~26, 1970.
- 14) 山上拓男・小田英一: 不均質異方性地盤中の流れに関する有限要素解析について, 土と基礎, Vol. 20, No. 3, pp. 7~13, 1972.
- 15) Neuman, S.P. and P.A. Witherspoon: Finite element

- method of analyzing steady seepage with a free surface, *Water Resour. Res.*, Vol. 6, No. 3, pp. 889~897, 1970.
- 16) Zienkiewicz, O.C. and Y.K. Cheung : The finite element method in structural and continuum mechanics, McGraw-Hill, pp. 228~235, 1967.
- 17) 前出 5).
- 18) Edited by C.S. Desai : Applications of the finite element method in geotechnical engineering, Proc. of the Symposium held at Vicksburg, Miss., pp. 803, 1972.
- 19) Pinder, G.F. and E.O. Frind : Application of Galerkin's procedure to aquifer analysis, *Water Resour. Res.*, Vol. 8, No. 1, pp. 108~120, 1972.
- 20) 河野伊一郎 : 有限要素法による堤体浸透問題の解析, 土と基礎, Vol. 21, No. 8, pp. 13~19, 1973.
- 21) Finn, W.D. : Finite element analysis of seepage through dams, *Proc. ASCE, SM*, Vol. 93, No. 6, pp. 41~48, 1967.
- 22) Taylor, R.L. and C.B. Brown : Darcy flow solutions with free surface, *Proc. ASCE, HY*, Vol. 93, No. 2, pp. 25~33, 1967.
- 23) 前出 13).
- 24) 飯田隆一・朝倉 肇 : 非定常浸透流の有限要素法による解析, 土木研究所報告, 昭和 46 年 4 月.
- 25) 前出 15).
- 26) France, P.W., C.J. Parekh, J.C. Peters, and C. Taylor : Numerical analysis of free surface seepage problems, *Proc. ASCE, IR*, Vol. 97, No. 1, pp. 165~179, 1971.
- 27) 前出 20).
- 28) Hantush, M.S. : On the validity of the Dupuit-Forchheimer well-discharge formula, *Jour. of Geophys. Res.*, Vol. 67, No. 6, pp. 2417~2420, 1962.
- 29) 前出 8), pp. 2272, Fig. 6 参照.
- 30) 前出 6), pp. 2108, Fig. 5 参照.

(1974.7.8・受付)