

弾性せん断ばりの自由振動に与える不確定要因の影響

THE EFFECT OF UNCERTAINTIES UPON FREE
VIBRATION OF ELASTIC SHEAR BEAM

星 谷 勝*・千葉 利 晃**

By Masaru HOSHIYA and Toshiaki CHIBA

1. 緒 言

構造物の安全性や経済性等の検証に動的解析を行う場合、対象とする構造物を解析可能なモデルに置き換え、構造物、入力ともに確定値として解析を行うのが一般的な方法である。最近では、構造モデルは確定値として扱い、入力を不規則なものとして解析し安全性等を検討することがかなり行われるようになってきた。しかしながら、構造物は、それを構成する部材の強度のばらつきとか、施工におけるばらつき等の種々な不確定要素を内在させているのが実状である。また設計に際してのモデル化に起因する不確定性も無視できない。このように、構造物そのものが種々な不確定性を含んでいる以上、構造物を構造要素の不確定性をも考慮した確率構造モデルとしてとらえ、応答量を統計的に処理したほうがより合理的であろう。

以上の思想のもとに解析を行った研究としては、たとえば文献 1)~5) 等がある。文献 1)~4) は解析手法にパータベーション法 (Perturbation Method) を用いている。この方法は線形化を行うため、高次の項を無視するので、大きな確率変動量を有するような構造物では厳密解とかけ離れた結果となろう。したがって、シミュレーション法 (Monte Carlo Simulation Method) を用いてランダム固有値問題を解析し、報告したのが文献 5) である。しかし文献 5) では、ただ1つの構造モデルについて解析を行ったにすぎない。

さて、以上は構造物を確率構造モデルとして解析する必要性およびその理由を強調したのであるが、ここで重要になってくるのが、それではどの程度のばらつきを構造要素に持たせるかという問題であろう。西村⁶⁾は“鋼材の機械的性質のばらつきについては変動係数で 0.08

~0.10 程度で、主観的不確定性を含めればさらに大きくなると思われる”と述べている。しかしこれは、1つの構造部材である鋼材の強度に関するものである。このように各部材の強度については、鋼材の機械的性質とか鉄筋コンクリート部材の強度などのばらつきに関する資料がある程度ある。しかし構造物としての強度や死荷重の統計量はいまだなく、それらのばらつきの程度は推測による他ない状態である。

今回は弾性せん断ばりの自由振動を例にとり、入力としての構造物の確率変動量の大きさが応答におよぼす影響を調べ、パータベーション法による解をシミュレーション法と比較検討した。なお本論文は今までに解析されていない点を補い一連のランダム固有値問題の総括として以下報告するもので、およそ次のような内容を持っている。

- (1) モンテカルロ・シミュレーション法における繰返し回数の検討
- (2) 確率変動量の大きさが応答におよぼす影響
- (3) 確率変動量である質量、ばね定数の相関性が応答におよぼす影響
- (4) より実際的な構造系の解析

以上の諸点をシミュレーション法とパータベーション法で解析し、両方法を比較検討した。

2. 確率構造モデル

緒言に述べた確率構造モデルとして、Fig. 1 に示す n 自由度系弾性せん断ばりの自由振動を例にとり説明する。一般に n 自由度系の自由振動方程式は次のように与えられる。

$$M\ddot{X} + KX = 0 \dots\dots\dots(1)$$

ここで、

M は $(n \times n)$ の質量マトリックスで

* 正会員 Ph. D. 武蔵工業大学助教授 土木工学科
** 正会員 M.S. 武蔵工業大学助手 土木工学科

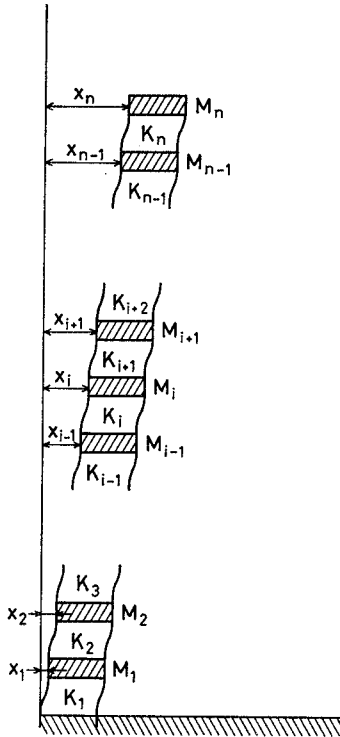


Fig. 1 Elastic Shear Beam Model

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_i & & \\ & & & & & M_n \end{bmatrix}$$

\tilde{K} は $(n \times n)$ の剛性マトリックスで

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & & & & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -K_i & K_i + K_{i+1} & -K_{i+1} & & \\ & & & & & & & & -K_n & K_n \end{bmatrix}$$

\underline{X} は $(n \times 1)$ の変位ベクトルで

$$\underline{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_i \ \dots \ X_n]^T$$

$\underline{\ddot{X}}$ は $(n \times 1)$ の加速度ベクトルで

$$\underline{\ddot{X}} = [\ddot{X}_1 \ \ddot{X}_2 \ \dots \ \ddot{X}_i \ \dots \ \ddot{X}_n]^T$$

さて式 (1) は次に示すような固有値問題の固有値および固有関数を求める問題として表わされる。

$$\omega^2 \tilde{M} \underline{X} = \tilde{K} \underline{X} \dots \dots \dots (2)$$

ここで ω^2 は固有値であり自由振動の固有円振動数を 2 乗した値である。また \underline{X} は ω に対応する固有ベクトル (振動モード) である。

以下確率量を有する系の固有値および固有ベクトルの

解析においては、すでに文献 2), 5) にも示したように次のように仮定して議論を進めることにする。

(1) 確率量 M_i と K_i ; $i=1, 2, \dots, n$ は確定量 m_i, k_i と小さな確率変動量 α_i, β_i との和で与えられるものとする。すなわち,

$$\left. \begin{aligned} M_i &= m_i + \alpha_i = m_i + \sum_{r=1}^n \alpha_r \delta_{ir} \\ K_i &= k_i + \beta_i = k_i + \sum_{r=1}^n \beta_r \delta_{ir} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

ここに α_i, β_i は平均値 0 で m_i, k_i に比べ小さな確率変動量とする。なお、この仮定は次節のパータベーション法による線形近似の精度上から要求されるものであり、シミュレーション法では必要としない。なお δ_{ir} はクロネッカー・デルタ関数である。

(2) 確率変動量 α_i と β_i の相関係数は次のような指数関数で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\alpha\alpha} &= E[\alpha_r \alpha_s] / \sigma_{\alpha_r} \sigma_{\alpha_s} = \exp[-A_1 |r-s|] \\ \rho_{\beta\beta} &= E[\beta_r \beta_s] / \sigma_{\beta_r} \sigma_{\beta_s} = \exp[-A_2 |r-s|] \\ \rho_{\alpha\beta} &= E[\alpha_r \beta_s] / \sigma_{\alpha_r} \sigma_{\beta_s} = B_1 \cdot \exp[-A_3 |r-s|] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

$r, s=1, 2, \dots, n$

ここで $\sigma_{\alpha_r}, \sigma_{\beta_r}$ は添字 α_r, β_r の標準偏差であり、 $E[]$ は期待値である。また A_i は相関性の強さによって決定される正の定数で、その相関性を表わす曲線の形を与える。 B_1 も同様に相関性の強さを表わすが 0 から 1 の間の定数である。式 (4) はそれぞれ α_i どうし、 β_i どうし、および α_i と β_i の間の相関性を与えるが、相関性は近い 2 点間では大きく離れるにしたがって小さくなると考えれば、式 (4) で与えた指数関数形は妥当であろう。

3. パータベーション法 (Perturbation Method)

上記確率構造モデルの解析であるが、 \tilde{M}, \tilde{K} が確率量なので応答 ω, \underline{X} も当然確率量となる。さて式 (2) の固有値問題の解を次のように仮定する。すなわち \underline{X} の i 番目の要素を

$$x_i = x_{0i} + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n (x_{1irs} \alpha_r^s + x_{2irs} \beta_r^s) \dots \dots (5)$$

および

$$\omega = \omega_0 + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n (\omega_{1rs} \alpha_r^s + \omega_{2rs} \beta_r^s) \dots \dots (6)$$

と仮定する。1 次の項のみを用いて高次の項を無視することによって、次のような線形化を行う。このことは近似解を与えることになり、 α_r, β_r が十分に小さい ($\alpha, \beta < 1$) ときにより精度が得られよう。なお、4. 節で述べるモンテカルロ法はこのような制約条件がなく、より厳

密な解を得ることができる。

式 (5) および (6) はさらに、

$$x_i \cong x_{0i} + \sum_{r=1}^n (x_{1ir} \alpha_r + x_{2ir} \beta_r) \dots\dots\dots (7)$$

$$\omega \cong \omega_0 + \sum_{r=1}^n (\omega_{1r} \alpha_r + \omega_{2r} \beta_r) \dots\dots\dots (8)$$

式 (7), (8) を式 (2) に代入し α_r, β_r の係数を等しくおき、かつ高次の項を無視すれば次の一連の行列式を得る。

$$-\omega_0^2 \underline{M}_0 \underline{X}_{0i} + \underline{K}_0 \underline{X}_{0i} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

$$-\omega_0^2 \underline{M}_0 \underline{X}_{1ir} + \underline{K}_0 \underline{X}_{1ir} = 2 \omega_0 \omega_{1r} \underline{M}_0 \underline{X}_{0i} + \omega_0^2 \underline{D} \underline{X}_{0i} \dots\dots\dots (10)$$

$$-\omega_0^2 \underline{M}_0 \underline{X}_{2ir} + \underline{K}_0 \underline{X}_{2ir} = 2 \omega_0 \omega_{2r} \underline{M}_0 \underline{X}_{0i} + \underline{E} \underline{X}_{0i} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、

$$\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_i & & \\ 0 & & & & & m_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_0 = \begin{bmatrix} k_1+k_2, & -k_2 & & & & 0 \\ -k_2, & k_2+k_3, & -k_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -k_i, & k_i+k_{i+1}, & -k_{i+1} \\ 0 & & & & & & -k_n, & k_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}_{0i} = [x_{01} \ x_{02} \ \dots \ x_{0i} \ \dots \ x_{0n}]^T$$

$$\underline{X}_{1ir} = [x_{11r} \ x_{12r} \ \dots \ x_{1ir} \ \dots \ x_{1nr}]^T$$

$$\underline{X}_{2ir} = [x_{21r} \ x_{22r} \ \dots \ x_{2ir} \ \dots \ x_{2nr}]^T$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1r} & & & 0 \\ & \delta_{2r} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_{ir} & & \\ 0 & & & & & \delta_{nr} \end{bmatrix}$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} -\delta_{1r} - \delta_{2r}, & \delta_{2r} & & & & 0 \\ \delta_{2r}, & -\delta_{2r} - \delta_{3r}, & \delta_{3r} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \delta_{ir}, & -\delta_{ir} - \delta_{i+1,r}, & \delta_{i+1,r} \\ 0 & & & & & & \delta_{nr}, & -\delta_{nr} \end{bmatrix}$$

式 (9) は 確定量のみ固有値問題であるから解は簡単に得られよう。そこで式 (9) の n 個の固有円振動数を、

$$(\omega_0)_1, (\omega_0)_2, \dots, (\omega_0)_j, \dots, (\omega_0)_n \dots\dots\dots (12)$$

とし、それに対応する振動モードを

$$(\underline{X}_{0i})_1, (\underline{X}_{0i})_2, \dots, (\underline{X}_{0i})_j, \dots, (\underline{X}_{0i})_n \dots\dots\dots (13)$$

とする。

ω_{1r} および ω_{2r} は上で求めた ω_0 とそれに対応する振動モード \underline{X}_{0i} より次のように求めることができる。まず式 (10) の前方より転置マトリックス \underline{X}_{0i}^T を乗ずれば、

$$(-\omega_0^2 \underline{X}_{0i}^T \underline{M}_0 + \underline{X}_{0i}^T \underline{K}_0) \underline{X}_{1ir} = 2 \omega_0 \omega_{1r} \underline{X}_{0i}^T \underline{M}_0 \underline{X}_{0i} + \omega_0^2 \underline{X}_{0i}^T \underline{D} \underline{X}_{0i} \dots\dots\dots (14)$$

$\underline{M}_0, \underline{K}_0, \underline{D}$ は対称マトリックスであるから、その転置マトリックスは $\underline{M}_0, \underline{K}_0, \underline{D}$ と同一である。したがって、式 (14) の転置マトリックスをとれば

$$\underline{X}_{1ir}^T (-\omega_0^2 \underline{M}_0 \underline{X}_{0i} + \underline{K}_0 \underline{X}_{0i}) = 2 \omega_0 \omega_{1r} \underline{X}_{0i}^T \underline{M}_0 \underline{X}_{0i} + \omega_0^2 \underline{X}_{0i}^T \underline{D} \underline{X}_{0i} \dots\dots\dots (15)$$

左辺は式 (9) より 0 となるから結局未定の ω_{1r} は次式で与えられる。

$$\omega_{1r} = - \frac{\omega_0 \underline{X}_{0i}^T \underline{D} \underline{X}_{0i}}{2 \underline{X}_{0i}^T \underline{M}_0 \underline{X}_{0i}} \dots\dots\dots (16)$$

したがって、 j 番目の固有円振動数に対応する要素は、

$$(\omega_{1r})_j = - \frac{(\omega_0)_j (\underline{X}_{0i}^T)_j \underline{D} (\underline{X}_{0i})_j}{2 (\underline{X}_{0i}^T)_j \underline{M}_0 (\underline{X}_{0i})_j} \dots\dots\dots (17)$$

同様に式 (11) を変形すれば

$$\omega_{2r} = - \frac{\underline{X}_{0i}^T \underline{E} \underline{X}_{0i}}{2 \omega_0 \underline{X}_{0i}^T \underline{M}_0 \underline{X}_{0i}} \dots\dots\dots (18)$$

j 番目の円振動数に対応する要素は

$$(\omega_{2r})_j = - \frac{(\underline{X}_{0i}^T)_j \underline{E} (\underline{X}_{0i})_j}{2 (\omega_0)_j (\underline{X}_{0i}^T)_j \underline{M}_0 (\underline{X}_{0i})_j} \dots\dots\dots (19)$$

式 (2) のランダム固有値問題の解は、式 (17), (19) を用いて次のように与えられる。

$$\omega_j \cong (\omega_0)_j + \sum_{r=1}^n \{ (\omega_{1r})_j \alpha_r + (\omega_{2r})_j \beta_r \} \dots\dots\dots (20)$$

したがって、仮定 (1) より $E[\alpha_r] = E[\beta_r] = 0$ であるから、期待値および分散はそれぞれ次のように与えられる。

$$E[\omega_j] \cong (\omega_0)_j \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\omega_j] &= E[\omega_j^2] - E[\omega_j]^2 \\ &\cong \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \{ (\omega_{1r})_j (\omega_{1s})_j E[\alpha_r \alpha_s] \\ &\quad + (\omega_{2r})_j (\omega_{2s})_j E[\beta_r \beta_s] \\ &\quad + 2 (\omega_{1r})_j (\omega_{2s})_j E[\alpha_r \beta_s] \} \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

式 (22) は式 (4) の仮定を導入することにより計算される。もちろん、もし α_1 と α_s および β_r と β_s が $r \neq s$ のとき独立でかつ α_r と β_s はいかなる場合にも独立であれば式 (22) はさらに簡単となり、分散は次式で与えられる。

$$\text{Var}[\omega_j] \cong \sum_{r=1}^n \{ (\omega_{1r})_j^2 \sigma_{\alpha_r}^2 + (\omega_{2r})_j^2 \sigma_{\beta_r}^2 \} \dots\dots\dots (23)$$

4. モンテカルロ・シミュレーション法 (Monte Carlo Simulation Method)

式 (3) の確率変動量 α_i と β_i を有するマトリックス \underline{M} と \underline{K} を数多く作り出し、各 $\underline{M}, \underline{K}$ 値に対応する式 (2) の解である固有値 ω および固有ベクトル \underline{X} を求める方法である。サンプル数が十分大きい場合には求めたこの一組の固有値および固有ベクトルの平均値および分散は厳密解に近づくであろう。固有値の平均値および分散を求めるのが目的であるから、 $\underline{M}, \underline{K}$ の要素に含まれる $\alpha_i, \beta_i; i=1, 2, \dots, n$ なる確率量の確率分布関数は任意に仮定してもよい。したがって α_i, β_i なる確率量を平均値 0 かつ式 (4) を満足するように作り出す方法を考えればよいことになる。

まず初めに式 (4) を用いて次に示す ($2n \times 2n$) の相関マトリックス \underline{H} を作る。

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} E[\alpha_r \alpha_s] & E[\alpha_r \beta_s] \\ E[\alpha_r \beta_s] & E[\beta_r \beta_s] \end{bmatrix}; r, s=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots(24)$$

ここで対角線上の要素は α_i および β_i の分散であり、非対角線要素は互いの相関を示す共分散となっている。次に互いに独立な平均値 0 かつ分散 1 の正規分布にしたがう $2n$ 個の要素より成るベクトル \underline{A} を作り出す。すなわち、

$$\underline{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T \quad \dots\dots\dots(25)$$

このベクトル \underline{A} を線形変換することにより式 (24) を満足する α_i, β_i なる確率変動量を求めることを考える。前にも述べたように α_i, β_i の確率分布関数は任意に仮定してもよいので、次のような線形変換子を考える。

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & & & 0 \\ & C_{21} & & \\ & & C_{22} & \\ & & & \dots \\ C_{n1} & & & C_{nn} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(26)$$

この線形変換子を使うと α_i, β_i は次のように表わせる。

$$\underline{B} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n]^T = \underline{C} \underline{A} \quad \dots\dots\dots(27)$$

したがって、

$$\underline{B} \underline{B}^T = \underline{C} \underline{A} \underline{A}^T \underline{C}^T \quad \dots\dots\dots(28)$$

両辺の期待値をとると、

$$E[\underline{B} \underline{B}^T] = \underline{C} E[\underline{A} \underline{A}^T] \underline{C}^T \quad \dots\dots\dots(29)$$

ところで、

$$E[\underline{B} \underline{B}^T] = \underline{H}, \quad E[\underline{A} \underline{A}^T] = \underline{I} \text{ (Unit matrix)}$$

であるから、結局、式 (29) は次のようになる。

$$\underline{H} = \underline{C} \underline{C}^T \quad \dots\dots\dots(30)$$

したがって、もし式 (30) を満足する三角マトリックス

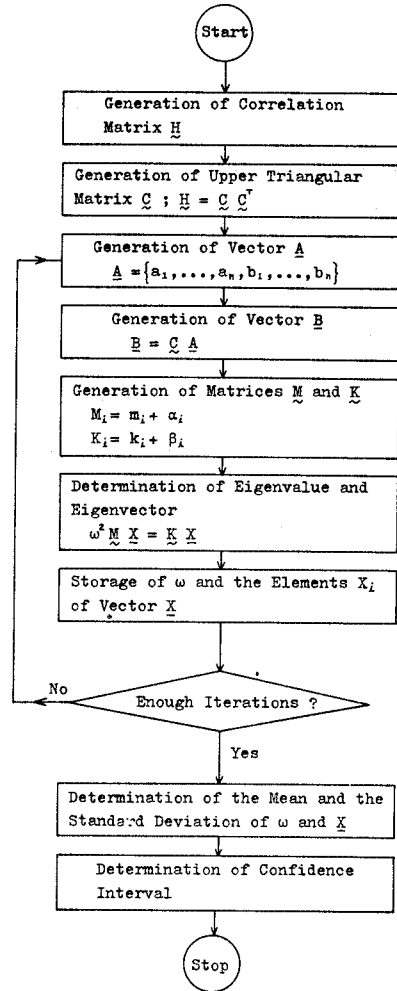


Fig. 2 Monte Carlo Simulation

\underline{C} が解ければ式 (27) より確率変動量 α_i および β_i が求まる。 \underline{C} は確定量より構成され、 \underline{A} は平均値 0 であるので \underline{B} の平均値も当然 0 となっている。したがって、求めた α_i, β_i は目的とした平均値 0 かつ式 (4) を満足する確率変動量となっている。三角マトリックス \underline{C} の求め方および固有値問題の解法についての参考文献は、たとえば文献 7), 8), 9) 等がある。以上述べたモンテカルロ・シミュレーション法によるランダム固有値問題の解法のフローチャートを Fig. 2 に示しておく。

5. 数値計算例および考察

以上述べたランダム固有値問題の 2 つの解析方法を簡単な 8 自由度系弾性せん断ばりの自由振動の解析に応用してみた。まず本研究の一つの目的であるシミュレーション回数であるが、この回数は Table 1 の Model-1

Table 1 Input parameters of Models-1 to 3

Model-1	$m_i = k_i = 1.0$ $V_1 = \sigma_{\alpha_i} / m_i = \sigma_{\beta_i} / k_i = 0.15$ $A_i = 2.0$ $B_i = 0.8$
Model-2	$m_i = k_i = 1.0$ $V_1 = \sigma_{\alpha_i} / m_i = \sigma_{\beta_i} / k_i = (0.01 \sim 0.30)$ α_i, β_i 同士, および α_i と β_i との相関性なし
Model-3	$m_i = k_i = 1.0$ $V_1 = \sigma_{\alpha_i} / m_i = \sigma_{\beta_i} / k_i = 0.05$ $A_i = (0.5 \sim 8.0)$ $B_i = 0.0$

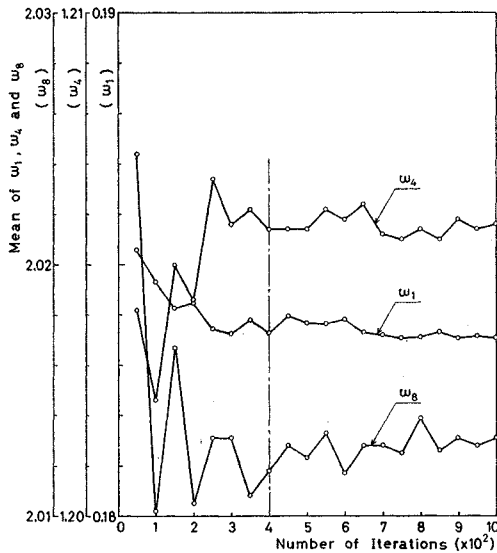


Fig. 3 Convergence check of the mean of natural circular frequencies ω_n

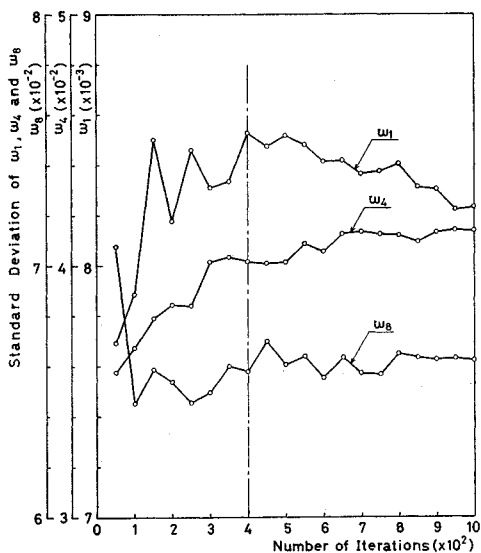


Fig. 4 Convergence check of the standard deviation of natural circular frequencies ω_n

に示す系で収束回数を検討した。表中の変数 V_1 は確率量 α_i, β_i の標準偏差 $\sigma_{\alpha_i}, \sigma_{\beta_i}$ と平均値 m_i, k_i との比であり、構造要素の相対的なばらつきを示す変動係数である。なお、応答である固有円振動数（固有値の平方根）の標準偏差を固有円振動数の平均値で割ったものを応答の変動係数 V_2 とする。さて、シミュレーションの繰返し回数は 1000 回までを行い、その結果は **Fig. 3** と **Fig. 4** に示したとおりである。**Fig. 3** は横軸にシミュレーションの繰返し回数を、縦軸に固有円振動数（固有値の平方根）の平均値をとっている。**Fig. 4** においては、横軸はシミュレーションの繰返し回数、縦軸は固有円振動数の標準偏差を表す。さて **Fig. 3** からわかるように、平均値は繰返し数が 100 回を越えると変動は 0.5% 以内でありほぼ一定とみてさしかえないであろう。一方、標準偏差のほうは 200 回程度まではかなりの変動を示している。著者が前に行った 4 自由度系弾性せん断ばりの解析 [文献 5)] では、シミュレーション回数を 100 回としている。したがって、その解析結果は設定した変動係数 V_1 の値は今回と違いが少なくとも信頼性に欠けるであろう。確率変動量 α_i, β_i が小さい場合には収束も早くなると思われるが、少なくともシミュレーションの繰返し回数は 300 回以上とすべきであろう。もちろん、回数が多ければ多いほど正確にはなるが、計算時間もそれに比例して多くかかるので、あまり繰返し回数を多くすることは不可能となる。今回はこのコンピュータによる計算時間を考慮し、シミュレーション回数は 400 回として以下の計算を行った。

パータベーション法でランダム固有値問題を解析した文献 2), 3) あるいは 4) では、ただ 1 つの確率構造系を設定し解析を行っているにすぎない。これらの解析のみでは、変動係数 V_1 が変化した場合応答量である固有値あるいは固有ベクトルがどのように変化するかが明らかでない。また質量、ばね定数間の相関度が応答におよぼす影響も明らかでない。したがって、本研究ではまず変動係数 V_1 を 0.01 から 0.30 まで変化させ変動係数の応答におよぼす影響を調べた。実際の構造物の質量およびばね定数のばらつきに関しては、現状ではデータ不足のため推測にたよらざるを得ないと思われるが、Cornell [文献 10)] によれば、鋼材降伏応力度で変動係数 0.08~0.10 の範囲、コンクリート圧縮力で 0.05~0.20 としている。これらから推定して本研究では、変動係数 V_1 を 0.01~0.30 の範囲として検討すれば十分と考えた。この際、質量およびばね定数の確率変動量 α_i, β_i は互いに独立かつ α_i と β_i も互いに独立とした。このモデルを **Table 1** に Model-2 として示しておく。次に式 (4) 中の係数の応答におよぼす影響を調べるために、**Table 1** の Model-3 に示す構造系を設定し解析を行

Table 2 Input parameters of Model-4

i	Mass		Spring	
	m_i	σ_{α_i}/m_i	$k_i(\times 10^8)$	σ_{β_i}/k_i
8	2.0	0.10	4.0	0.15
7	2.5	0.10	4.5	0.15
6	3.0	0.15	5.0	0.20
5	3.0	0.15	5.0	0.20
4	3.0	0.15	5.0	0.20
3	3.0	0.15	5.0	0.20
2	3.5	0.20	6.0	0.25
1	4.0	0.20	8.0	0.25

った。この Model-3 では B_1 を 0 とし、 A_1, A_2 および A_3 を 0.5 から 8 まで変化させ、係数 A の応答におよぼす影響を調べた。 $B_1=0$ とおいたのは、質量とばね定数との間の相互相関性を無視し、すなわち互いに独立として A のみの影響を調べるためである。以上、Model-2 および Model-3 は変動係数 V_1 あるいは式 (4) 中の係数の影響を調べるのが目的であるので、質量およびばね定数の確定量とともに 1.0 として構造モデルを単純化している。次に Table 2 に示した Model-4 では、より実際の構造物に近い松島 [文献 4)] の取り上げた確率構造モデルを例題として解析してみた。以上 Model-2, Model-3 および Model-4 ではパータベーション法とシミュレーション法の 2 方法で解析し、両方法の比較検討を合わせ行った。

さて Fig. 5 と Fig. 6 は Model-2 の結果を図示したもので、横軸に変動係数 $V_1 = \sigma_{\alpha_i}/m_i = \sigma_{\beta_i}/k$ を、縦軸に Fig. 5 では固有円振動数の標準偏差を、Fig. 6 では応答の変動係数 V_2 をそれぞれ取ったものである。Fig. 5 からわかるように、構造要素のばらつき程度を示す変動係数 V_1 が大きくなるにしたがい、応答のばらつきを示す標準偏差も大きくなっている。図中、実線はシミュレーション法による結果を、点線はパータベーション法による結果を示すが、シミュレーション法によるものとパータベーション法によるものとの差もまた大きくなっている。同様に構造要素の変動係数 V_1 が大きくなるにしたがい応答の変動係数 V_2 もまた大きくなっている (Fig. 6)。 V_1 が 0.2 まではパータベーション法による解のほうが、シミュレーション法によるものよりもだいたい 10~20% 程度小さくなっているにすぎないが、0.2 を越えるとしだいにその差も大きくなり、0.3 になると 25~35% (1次~3次) も小さくなる。なお Fig. 5 において、一点鎖線はシミュレーション法による標準偏差の 99% 信頼区間の上限値と下限値を表わす。すなわち、標準偏差は 99% の確率でこの 2本の一点鎖線の間 (ハッチを施した範囲) に入ることの意味する。

Model-3 の固有円振動数の標準偏差と応答の変動係数 V_2 の式 (4) 中の係数 A による変化を示したのが

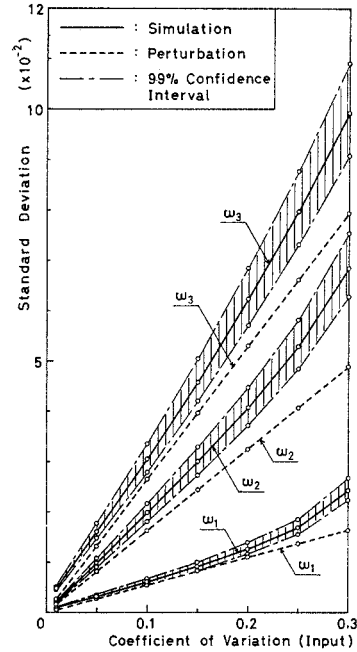


Fig. 5 Relations between standard deviation and coefficient of variation of input, Model-2

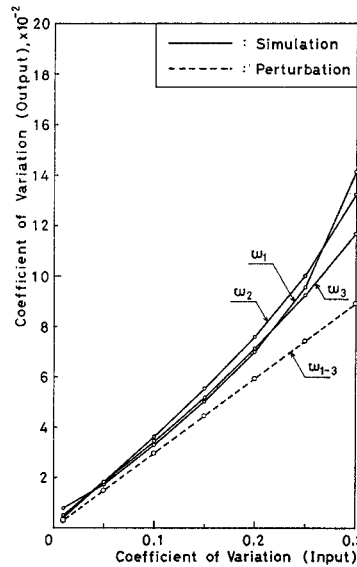


Fig. 6 Input-output relations of coefficient of variation, Model-2

Fig. 7 と Fig. 8 である。横軸に係数 A をとり、縦軸に Fig. 7 では 1~3 次固有円振動数の標準偏差を、Fig. 8 では変動係数 V_2 をとっている。なお Fig. 7 における一点鎖線は Fig. 5 と同様にシミュレーション法による標準偏差の 99% 信頼区間を示す。これらの図からわかるように、 A が小さいほど、応答の標準偏差と変動係数 V_2 は大きくなっている。また A が 4 以上になるとだ

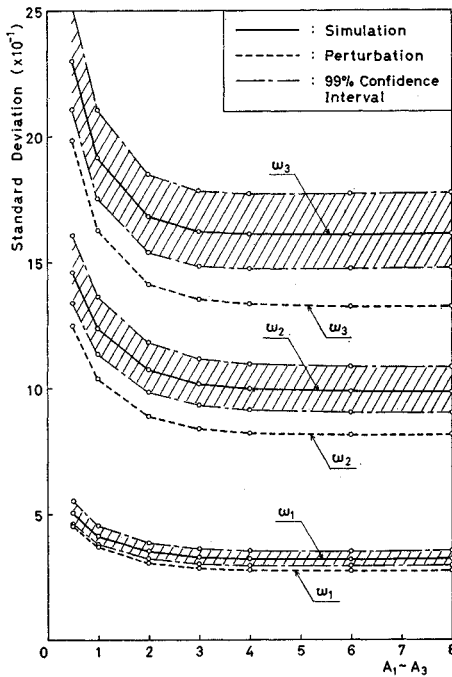


Fig. 7 Effects of coefficients $A_1 \sim A_3$, Model-3

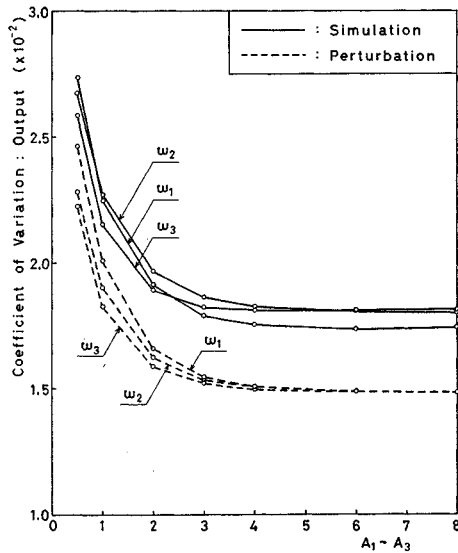


Fig. 8 Relations between coefficient of variation and coefficients $A_1 \sim A_3$, Model-3

いたい一定となっている。これは A が小さいほど、各質量間の自己相関および各ばね定数間の自己相関が大きくなることを意味し、また A が大きくなると自己相関が 0 に近づく、すなわち各質量どうし、各ばね定数どうしは互いに独立となり、応答は構造要素のばらつきを示す変動係数に一義的に依存するからであろう。また変動係数 V_1 を変化させたとときと同様に、係数 A を変えた場合も

パータベーション法による結果のほうがシミュレーション法によるものよりも小さくなっている。1 次固有円振動数に関してしてみると、標準偏差、変動係数 V_2 ともに 10~15% 程度小さくなっている。

Fig. 7 に示した構造モデルは $V_1=0.05$ と比較的小さいが、この変動係数ももっと大きい場合には Fig. 5 からわかるように、より大きな標準偏差となるであろうし、パータベーション法とシミュレーション法による標準偏差の差もまた大きくなるであろう。すなわち、パータベーション法によるばらつきの評価は実際よりもより小さく見積もることになるので、構造要素のばらつきの大きさを十分考慮してパータベーション法による解析結果を評価しなければならない。

さて以上は最も基本的な構造モデルで質量、ばね定数の確定量とともに 1.0 と置いた場合であるが、より実際の構造物に近いものとして松島 [文献 4]) がパータベーション法で解析した例題を取り上げたのが Model-4 である。このモデルは中型の 8 階建て建築構造を想定したものであり、この研究では質量およびばね定数の確率変動量 α_i, β_i は互いに独立でかつ α_i と β_i も互いに独立としている。なおこの Model-4 の入力データを Table 2 に示し、Fig. 9 にその結果を示す。横軸に固有円振動数の平均値、縦軸にその標準偏差と変動係数 V_2 の 2 つを取っている。図中、シミュレーション法による標準偏差の上下 2 本の一点鎖線は 99% 信頼区間の上限値と下限値を表わす。またシミュレーション法による変動係数

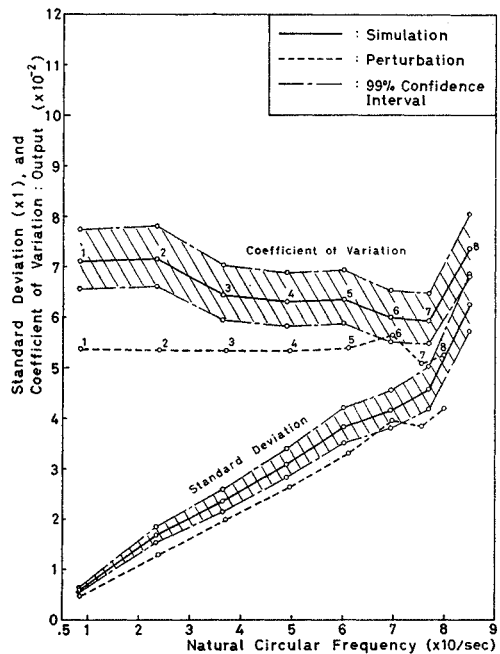


Fig. 9 Output variation of Model-4

の上下2本の一点鎖線は、標準偏差の99%信頼区間の上限値および下限値を、固有円振動数の99%信頼区間の上限値および下限値でそれぞれ割ったものである。すなわち、標準偏差中のハッチを施した部分は絶対的なばらつきの範囲を、変動係数中のハッチを施した部分は各固有円振動数における相対的なばらつきを示すものである。なお図中の数字は次数を表わす。標準偏差のばらつきは高次になるにしたがい大きくなっているが、変動係数 V_2 のばらつきは各次の固有円振動数に関係なくだいたい一定となっている。

文献4)には詳細なデータがなく、図より考察するのみであるが、われわれの解析した Fig. 9 のパータベーション法による変動係数 V_2 の変化とほとんど一致している。これは両者とも同じパータベーション法を使用しているのが当然であろう。ところでパータベーション法とシミュレーション法による固有円振動数の平均値は7次と8次の高次の部分で若干の違いはあるがだいたい一致している。また変動係数 V_2 はパータベーション法の場合、0.054程度でだいたい一定であり、シミュレーション法の場合もパータベーション法による場合よりもかなりの変動を示してはいるが、だいたい一定とみてさしつかえないであろう。ところで Fig. 6, Fig. 8 の説明にも述べたように、この場合もパータベーション法による変動係数のほうがシミュレーション法によるものよりも、1次と2次で25%、3次で17%とかなり小さくなっている。すなわち、パータベーション法によるばらつきの評価は、より厳密解に近いであろうシミュレーション法によるものよりも20%程度小さく見積もっていることになる。

次に Fig. 10~12 に、それぞれ1次から3次までのシミュレーション法による固有振動モードを示しておく。これらの振動モードは固有ベクトルの長さが1になるように正規化されている。図中、中央の実線が平均値で、点線が構造要素のばらつきを示す変動係数 V_1 が0.05の場合の99%信頼区間の上下限値を、一点鎖線が $V_1=0.15$ の場合の99%信頼区間の上下限値を示す。すなわち、 V_1 が0.05の場合、点線の内側の範囲で、 $V_1=0.15$ の時には一点鎖線の内側で99%の確率で振動モードがばらつくことを示している。なお1次モードの図 (Fig. 10) には、 $V_1=0.05$ のときの99%信頼区間は示していない。

最後に固有円振動数の平均値について述べておく。シミュレーション法による固有円振動数の平均値は、パータベーション法による固有円振動数の平均値、すなわち確定量のみで構成系の固有円振動数とだいたい一致している。式(4)中の係数を変化させた場合 (Model-3)、シミュレーション法による固有円振動数の平均値は、パー

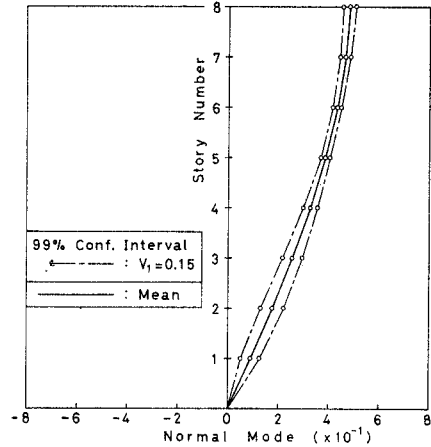


Fig. 10 Variation of Fundamental Mode, Simulation

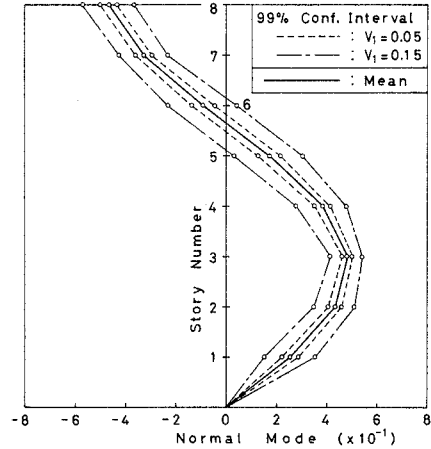


Fig. 11 Variation of Second Mode, Simulation Method

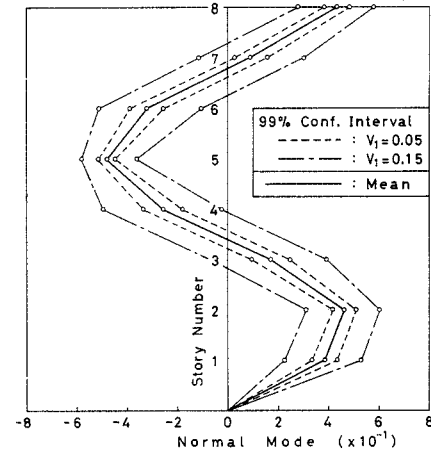


Fig. 12 Variation of Third Mode, Simulation Method

タベーション法による平均値の $\pm 0.2\%$ 以内にあり、変動係数 V_1 を変化させた場合 (Model-2) でも、最悪のときに $\pm 5\%$ 程度である。したがって、固有円振動数の

平均値に関しては、シミュレーション法とパータベーション法の差異は無視できよう。

6. 結 論

確率構造モデルの応答量を 8 自由度系弾性せん断ばりを例にとり、パータベーション法とモンテカルロ・シミュレーション法の 2 方法で解析したのが本論文である。

パータベーション法は線形近似を行うため、高次の項を無視するので固有値のばらつきは構造要素の変動係数が小さい場合には、すなわち構造要素のばらつきが小さい場合にはその精度もかなり良いが、大きい場合には厳密解とかなりかけ離れてくる。Fig. 5 にも示したように、構造要素の変動係数が大きくなるにしたがい、固有円振動数の標準偏差は大きくなり、かつパータベーション法とシミュレーション法による解の差もまた大きくなっている。これを変動係数でみると (Fig. 6)、構造要素の変動係数 V_1 が 0.2 まではパータベーション法による応答の変動係数 V_2 はシミュレーション法によるものよりも 10~20% 程度小さいにすぎないが、0.2 を越えたとしだいにその差も大きくなり、 V_1 が 0.3 になると 25~35% (1 次~3 次) も小さくなる。このようにパータベーション法による応答のばらつきは厳密解より相当小さくなっている。次に質量とばね定数の相関性であるが、相関性が強くなると固有円振動数の標準偏差は急に大きくなる傾向がある。式 (4) 中の係数でみると、 A が小さいほど標準偏差は大きくなる。

以上のようにパータベーション法は、構造要素のばらつきが大きい場合、あるいは質量、ばね定数の相関性が強い場合には、厳密解よりかなり応答のばらつきを小さく見積ることになるが、コンピューター・プログラムは簡単なマトリックス演算で構成されており、演算時間もきわめて短いという利点がある。一方、シミュレーション法の場合、厳密解に近づけることはできるが、その精度は繰返し数すなわちサンプル数に依存し、精度を上げようとする膨大な演算時間を必要とする。このように両方法とも一長一短で、その時の状況を考慮し、両方法を使い分けるべきであろう。しかし、パータベーション法を使用する場合には、構造要素のばらつきの程度、相関性の程度を十分に考慮して解析結果を判断する必要がある。

数値計算例のところでも述べたが、Cornell らの報告から推定すれば、実際の構造物を質点系に置き換えて解析する場合、それらの変動量はおそらく変動係数で 0.05~0.20 程度と思われる。Fig. 6 によればこれらに対応する基本的な 1 次から 3 次までの固有円振動数のばらつきは変動係数で 0.02~0.08 くらいになっている。

また Model-4 の場合、質量の変動係数は $V_1=0.1\sim 0.2$ 、ばね定数の変動係数は $V_1=0.15\sim 0.25$ である。Fig. 9 によれば Model-4 の固有円振動数のばらつきは変動係数でシミュレーション法の場合、平均 0.066、パータベーション法の場合、平均 0.054 である。したがって、信頼区間をも考慮すれば Model-4 程度の規模の構造物を決定論的手法で解析して求めた動特性に対して、±10% 程度の幅を持たせた工学的判断が必要となろう。

以上述べた不確定要因を含む弾性せん断ばりの解析方法は、曲げばり等についても同様な考え方を導入することにより解析できるであろう。また、このように構造物そのものに不確定性を含ませて解析することにより、確定的な構造モデルの解析結果を判断する際のより良い目安が得られるものと思われる。

今後の問題点としては、減衰定数をも不規則なものとして扱うランダム複素固有値問題の解析、ならびに入力、構造モデルともに不規則なものとして扱い応答量を検討する必要があるであろう。

謝 辞：本研究のコンピューター・プログラム作成においては、当時武蔵工業大学の学生であった川本健一君 (現 東京都庁) に負うところが大きい。ここに深く謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Hoshiya, M. and Shah, H.C. : Free Vibration of Stochastic Beam-Column, Proc. of ASCE, E.M. Div., Aug. 1971, pp. 1239-1255
- 2) Hoshiya, M. : Vibration of Elastic Shear Beam with Random Parameters, Proc. of 1-st Int. Conf. on Applications of Stat. and Prob. to Soil and Structural Engineering, Hong Kong, Sept. 13~16, 1971, pp. 538-556
- 3) 星谷 勝 : ランダム固有値問題 (自由振動) の解析, 土木学会全国大会概要集, 1972, pp. 611~614
- 4) 松島 豊 : 確率変数から成る振動系の地震応答量の変動, 建築学会論文報告集, Vol. 210, Aug. 1973, pp. 5~10
- 5) 星谷 勝・千葉利晃 : ランダム固有値問題のシミュレーションによる検討, 土木学会全国大会概要集, 1973, pp. 478-480
- 6) 西村 昭 : 鋼材の機械的性質のばらつきについて, JSSC, Vol. 15, No. 48, 1969
- 7) Ketter, R.L. and Prawel, S.P. : Modern Methods of Engineering Computation, McGraw-Hill Book Company
- 8) Carnahan, B., Luther, H.A. and Wilkes, J.O. : Applied Numerical Methods, John Wiley and Sons, Inc.
- 9) 川井忠彦 : マトリックス法振動および応答, コンピューターによる構造工学講座 I-4-B, 培風館
- 10) Cornell, C.A. : Some Comments on Second-Moment Codes and on Bayesian Methods, Japan-U.S. Joint Seminar, On Reliability Approach in Structural Engineering, May 13~17, 1974, Tokyo, pp. 14-1~14-15

(1974.6.21・受付)