

補強筋をもった単純支持ばりの一応力解析法

THE ANALYSIS OF SIMPLY SUPPORTED BEAMS WITH REINFORCEMENT

川 本 眺 万*・林 義 信**
By Toshikazu KAWAMOTO and Yoshinobu HAYASHI

1. 緒 言

鉄筋コンクリート部材の解析は、コンクリート自身の非均質性や負荷に伴う非線形な挙動および進行性クラック、鉄筋とコンクリートとの間の相対的なすべり、ボンドの局所的な破壊などの影響に加えて、三次元応力状態にあるため、かなり複雑な問題となる。また、繊維強化プラスチック (FRP) などにおいても、母材と繊維の力の分担や繊維相互間の力学的干渉、ボンドの状態など、やはり FRP の力学的挙動に影響を及ぼす多くの問題が含まれている。

このような問題に対するアプローチとして、最近、有限要素法を適用した研究が多くみられる。D. Ngo と A.C. Scordelis¹⁾ は、既存のクラックを有する鉄筋コンクリートばりの二次元線形弾性解析を行っている。その場合、鉄筋とコンクリートとの付着による応力伝達を表現するのに、linkage element と呼ばれる要素を用いている。この要素は、付着応力と相対すべりとの間の関係を示すために、一組の直交する 2 つのばねを用いている。そして、コンクリートおよび鉄筋をそれぞれ二次元状態で考えて、その間を linkage element で繋いだ解析モデルを用い、いくつかのクラック・パターンを想定して、それによる鉄筋およびコンクリート内の応力状態、付着応力への影響について考察している。

鉄筋とコンクリートとの付着機構については、従来から多くの実験的検討が行われてきており、付着応力と相対すべりとの関係が非線形性を示すことが考察されている。このような非線形性を考慮するために、A.H. Nilsson²⁾ は、付着応力と相対すべりの関係が 3 次多項式で表示されるような非線形弾性的なばねを有する linkage element を用い、また、荷重に対するコンクリートの非

線形特性をも考慮して、非線形有限要素解析を行っている。そして、解析例として、鉄筋で偏心補強された引張部材について、荷重増加に伴って付着が逐次的に破壊し、コンクリートに進行性クラックが発生する過程を計算している。

そのほかにも、鉄筋とコンクリートとの間、あるいはクラック前のコンクリートとコンクリートとの間に、同様な linkage element を用いて、鉄筋コンクリートばりの挙動や引張鉄筋周辺のコンクリートの力学性状などについて、非線形解析を行ったものがある^{3),4),5)}。

しかし、これらの解析はいずれも二次元状態で考えられている。現在、二次元有限要素解析では、材料の線形挙動は勿論のこと、非線形な力学的挙動を考慮することや、付着状態の変化などを考慮することは比較的容易である。しかし、実際には補強筋を有するはりの応力分布は三次元状態で考えられなければならない。その有限要素解析には、三次元要素とそれに適合した付着を表現する要素を用いて、はりのモデル化を考える必要がある。

三次元解析に対しては、四面体要素を組合わせた三次元要素やアイソパラメトリックな三次元要素を用いることが可能であるが、二次元の場合に比べて、インプットデータの取り扱いにかなりの労力が必要であり、また計算時間が極端に大きくなって、必ずしも実用的な解析はできない。

補強筋をもつはりの三次元解析をさらに容易にするために、ここでは Finite Prism Method (FPM) を適用する解析法について考察した。この場合、補強筋と母材との付着状態を表現するのに特別な要素を用いる必要がある。この要素として、二次元解析に対して R.E. Godman らによって開発されたジョイント要素⁶⁾の考え方を、FPM に適合するように拡張し、その要素の剛性行列を誘導して解析に用いた。

本報告では、補強筋をもつはりの線形弾性解析法について述べ、解析例として、1 本の鉄筋を有するコンクリー

* 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土庄研究施設

** 正会員 工修 本州四国連絡橋公団

トの単純ばりが等分布荷重を受ける場合について示す。そして、はりのたわみ、鉄筋応力、付着応力ならびに断面内のせん断応力分布などについて、初等はり理論による計算結果と比較するとともに、それらに及ぼす付着状態の影響について考察する。この計算では、引張破壊、材料特性や付着応力-相対変位関係などの非線形性などについては具体的に考慮されていない。しかし、これらの材料および付着の非線形挙動を解析に導入する方法について、その考え方を示しておく。

2. Finite Prism Method の概略

ジョイント要素の剛性行列を導くうえで、それと適合する Finite Prism 要素について述べておかねばならない。三次元構造物に対する合理的な解析法が種々考えられてきているが、構造物がある特別な状態にある場合には、ある条件をつけて有限要素法を適用することにより、次元を減らして解析することが可能である。たとえば、非軸対称荷重を受ける軸対称構造物⁷⁾や軸方向に一樣に断面をもつ構造物^{8),9)}などでは、関数の直交性を考慮して解析解と有限要素法とを結びつけた解析法(半解析的方法¹⁰⁾と呼ばれている)が適用される。これらの解析法の一つに Finite Prism Method^{10),11)}がある。

この方法は、三次元的なはり状の物体(一樣断面をもつ直線状あるいは曲線状構造)を二次元的にモデル化して解析するものである。たとえば図-1に示すように、一樣断面の三次元構造物の断面を分割し、この分割され

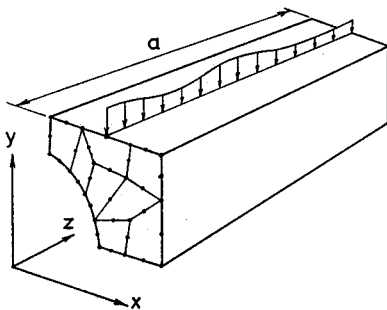


図-1 柱状要素によるモデル化

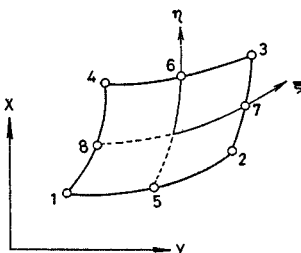


図-2 解析に用いたアイソパラメトリック要素

た断面をもつ柱状のものを一要素として取り扱う。この分割は平面的(x, y 面内)なものであるので、通常の二次元有限要素法の場合と同様に、三角形要素、四角形要素などを使うことができるが、ここでは、図-2に示すようなアイソパラメトリック要素を用いる。

いま、図-1に示すように座標軸を選び、x, y, z 軸方向の変位成分 u, v, w をそれぞれ次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=1}^8 N_i u_i^i \sin \frac{l\pi z}{a} \\ v &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=1}^8 N_i v_i^i \sin \frac{l\pi z}{a} \\ w &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=1}^8 N_i w_i^i \cos \frac{l\pi z}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 N_i は $x(\xi, \eta)$ および $y(\xi, \eta)$ の関数であり、添字 i は i 節点(この場合には、柱状要素の全体の長さにあわせた各稜がそれぞれの節点となる)に関するものである。柱状体の両端ではその面内の変形が拘束され、軸ひずみがないことを上式は示しており、単純支持状態に対応している。

要素内のひずみ $\{\epsilon\}$ および応力 $\{\sigma\}$ は、節点変位 $\{\delta^l\}^e$ を用いて次のように表わされる。

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}^e = \sum_{i=1}^{\infty} \{\epsilon^i\}^e = \sum_{i=1}^{\infty} [B^i] \{\delta^i\}^e \dots (2)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = \sum_{i=1}^{\infty} [D] \{\epsilon^i\}^e \dots\dots\dots (3)$$

仮想仕事の原理あるいは最小ポテンシャルエネルギーの原理から、要素の剛性行列 $[k]^e$ が求められるが、Fourier 級数の直交性を考えると、その第 l 番目の項は次のようになる。

$$\begin{aligned} [k^l]^e &= \sum_{m=1}^{\infty} [k^{lm}]^e = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{V^e} [B^l]^T [D] [B^m] dv \\ &= [k^{ll}]^e \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここで、 V^e は柱状要素の体積を表わす。このようにして求められた要素の剛性行列を集めて、全体構造系の剛性行列を組み立てていくことは、通常の有限要素法の場合と同様である。なお、荷重項も Fourier 級数で表わしておく必要がある。

3. ジョイント要素の剛性行列

ここでは、前節で述べた柱状要素に対して適合するような変位関数を仮定して、補強筋と母材との間における付着応力と相対すべりの関係を表わす特別な要素(ここでは一応、ジョイント要素と呼ぶことにする)の剛性行列を誘導する。

このジョイント要素はアイソパラメトリック要素であり、全体座標系(x, y, z)で示すと図-3のようであるが、局所座標系(ξ, η, z)では図-4のようになる。座

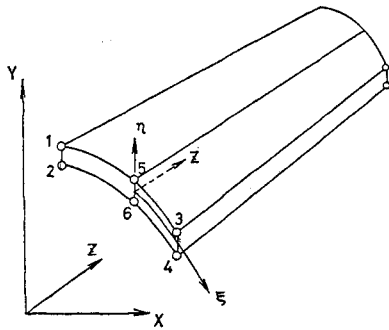


図-3 ジョイント要素 (全体座標系における表示)

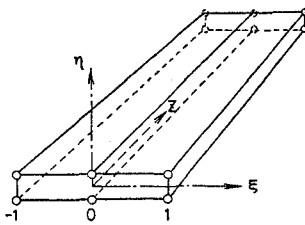


図-4 ジョイント要素 (局所座標系における表示)

標軸の取り方は、それぞれ図に示すとおりである。この解析では柱状要素としてその断面が図-2 に示されるような二次のアイソパラメトリック要素を用いるので、ジョイント要素として図-3 に示すような要素が必要である。なお、図ではジョイント要素が厚みをもつように描かれているが、実際には厚みがないものと考えている。したがって、変形前においては、節点1と2, 3と4, 5と6などは、それぞれ、同じ座標をもつものである。

ジョイントの上面 $\bar{153}$ における任意の点P(全体座標系では (x, y, z) で、局所座標系では $(\xi, 0, z)$ で示される) での変位成分を、次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) u_i^i \sin \frac{l\pi z}{a} \\ v(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) v_i^i \sin \frac{l\pi z}{a} \\ w(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) w_i^i \cos \frac{l\pi z}{a} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

また、ジョイントの下面 $\bar{264}$ における任意点 P' (変形前にはP点と同一の座標をもつ) の変位成分は、同様に次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u'(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) u_i'^i \sin \frac{l\pi z}{a} \\ v'(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) v_i'^i \sin \frac{l\pi z}{a} \\ w'(x, y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) w_i'^i \cos \frac{l\pi z}{a} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

式(5)および式(6)で、 u_i, v_i, w_i および u_i', v_i', w_i' は、それぞれの面に属する節点 i の x, y, z 方向の変位

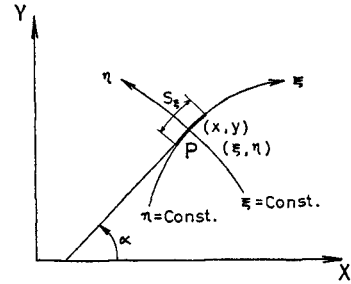


図-5 座標変換

成分を表わす。また、形状関数は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2} \xi(\xi-1) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{2} \xi(\xi+1) \\ N_3(\xi) &= 1-\xi^2 \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

点 P における局所座標系での変位成分を u_ξ, u_η, u_z で表わすと、全体座標系での変位成分 u, v, w との間に次の関係がある (図-5 参照)。

$$\begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \dots (8)$$

ここで、 α は図-5 に示されているように、点 P において、 $\eta = \text{一定}$ (ここでは零) の曲線の切線と x 軸とのなす角であり、

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha \dots (9)$$

で与えられる。点 P' における変位成分についても式(8)と同様の関係が与えられる。

したがって、点 P と点 P' との相対変位 $\{W\}$ は、局所座標系で示すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \{W\}_{\text{local}} &= \begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} u_\xi' \\ u_\eta' \\ u_z' \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} \right\} \\ &= [T] \{W\}_{\text{global}} \dots (10) \end{aligned}$$

全体座標系で表わされた相対変位 $\{W\}_{\text{global}}$ は、式(5)と式(6)によりジョイント要素の節点変位で表わされるから、次のように書ける。

$$\{W\}_{\text{global}} = \sum_{i=0}^{\infty} [N^i] \{\delta^i\} \dots (11)$$

ここで、 $\{\delta^i\}^T = [u_i^i, v_i^i, w_i^i, \dots, u_i'^i, v_i'^i, w_i'^i]$ である。

点 P に作用する単位面積あたりの力のベクトルを $\{p\}$ とし、それが相対変位に比例すると仮定すると、次の関係式が得られる。

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \{W\}_{local}$$

$$= [k] \{W\}_{local} \dots\dots\dots(12)$$

ここで、 p_x, p_y, p_z はそれぞれジョイントの単位面積あたりに作用する力の各軸方向の成分であり、 k_x, k_y, k_z は、それぞれそれらの力の成分に対するジョイントの剛性（ジョイントの単位面積あたりの剛性）で、ジョイント剛性定数と呼ぶ。なお、 p_x はジョイント面に平行な方向の応力度であって、後述の解析例で示すように付着応力に相当する。

次に、ジョイント要素の剛性行列を求めるために、仮想仕事の原理を適用する。節点の仮想変位を $\{\delta^*\}$ とすると、それに対してジョイント要素内に仮想的な相対変位 $\{W^*\}$ を生ずる。いま、 $\{p\}$ と等価な節点力を $\{F\}$ とすれば、節点力のなす仮想的な外部仕事 W_{out} は次のようになる。

$$W_{out} = \{\delta^*\}^T \{F\} = \sum_{i=0}^{\infty} \{\delta^i\}^T \{F^i\} \dots\dots\dots(13)$$

また、 $\{p\}$ による仮想的な内部仕事 W_{in} は次のように表わされる。

$$W_{in} = \int_S \{W^*\}^T [k] \{p\} ds_x ds_y \dots\dots\dots(14)$$

ここに、 S はジョイント要素の全面積を表わす。仮想仕事の原理より、外部仕事と内部仕事を等しいと置くと、第 l 番目の項について次の関係が得られる。

$$\{F^l\} = \sum_{m=0}^{\infty} [k^{lm}] \{\delta^m\} \dots\dots\dots(15)$$

ここに、

$$[k^{lm}] = \int_S [N^l]^T [T]^T [k] [T] [N^m] ds_x ds_y \dots\dots\dots(16)$$

さらに、Fourier 級数の直交性により、 $l \neq m$ に対して、 $[k^{lm}] = 0$ となるから、式 (15) は次のようになる。

$$\{F^l\} = [k^{ll}] \{\delta^l\} \dots\dots\dots(17)$$

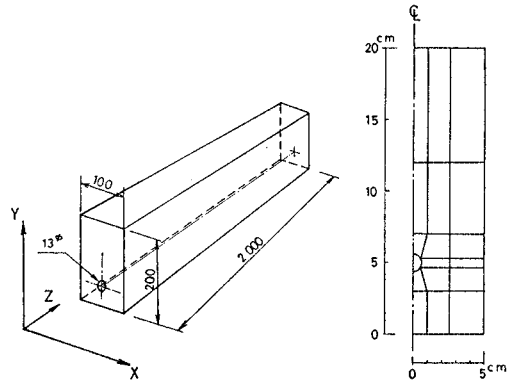
上式中のジョイント要素の剛性行列の成分は次のように与えられる。

$$[k^{ll}] = \int_S [N^l]^T [T]^T [k] [T] [N^l] ds_x ds_y \dots\dots\dots(18)$$

このようにして求められたジョイント要素の剛性行列は、通常の有限要素法におけると同様にして、全体構造系の剛性行列に組み込まれる。

4. 解析モデル

解析モデルとして、図-6 に示すように、1 本の鉄筋を有する単純支持された鉄筋コンクリートばりが等分布鉛直荷重を受ける場合を考える。ただし、コンクリートが引張りに対しても抵抗し、かつコンクリートおよび付



(a) モデルの寸法 (b) 要素分割
図-6 解析モデル

着が線形弾性を保つものとする。はりの幅 10 cm、高さ 20 cm、長さ 200 cm に対して、直径 13 mm の鉄筋をはりの下面から 5 cm の高さに配置した。鉄筋の弾性係数として 2.1×10^5 kg/cm²、ポアソン比として 0.3 を用い、コンクリートのそれらに対して、それぞれ、 2.1×10^4 kg/cm²、0.167 を用いた。なお、外力として、等分布鉛直荷重 $q=1$ kg/cm² がはりの上面に満載される場合を考えた。この場合の計算に使用した変形モードや等分布荷重に対する Fourier 級数の項数は、予備的に桁高 20 cm、幅 10 cm、スパン 20 cm の長方形断面はりに等分布荷重を満載した場合を考え、スパン中央断面におけるたわみの値と Fourier 級数の項数との関係を求めてたわみの収束性を検討し、 $l=11$ までとった。等分布荷重の場合には変形や荷重はいずれも中央断面に対して対称であるので、 $l=1, 3, 5, 7, 9, 11$ がとられる。なお、この予備計算でたわみの値に対して、(初等はり理論によるたわみ) < (FPM によるたわみ) < (せん断変形を考えた初等はり理論によるたわみ) という結果を得ているが、初等はり理論ではせん断力のたわみに及ぼす影響は 3% 以下である。解析に適した Fourier 級数の項数は作用する荷重状態によって異なり、集中荷重に対してはさらに多くの項数を必要とするだろう。

付着応力と相対すべりの関係については、従来より行われている鉄筋の押し抜きあるいは引き抜き試験の結果や、鉄筋コンクリートばりの応力測定の結果から、それらの間の関係が非線形性を有することが示されている^{12), 13)}。したがって、このような関係を導入するためには、付着の機構を表現するのに用いているジョイント要素の剛性定数が鉄筋表面におけるせん断応力に依存するような状態を考えることが必要になる。付着特性の非線形性を解析に導入することについては後でふれることにし、ここでは、付着応力と相対すべりの関係を線形であると仮定して解析をすすめる。

付着応力と相対すべりの関係は、コンクリートの強度、鉄筋の種類、試験の条件（応力状態）などによって異なるが、実験で得られている付着応力-相対すべり曲線の初期勾配をみると、10 000~20 000 kg/cm²/cm 程度のものである^{2),13),14)}。しかし、ここでは、応力レベルに関係なくジョイント剛性定数を一定と仮定し、付着状態が付着応力や鉄筋応力その他に及ぼす影響の程度を調べるために、ジョイント剛性定数として、 $k_{\xi}=k_z=1, 200, 2000, 20000$ kg/cm²/cm の値を用い、 k_z は k_{ξ} に等しく、 k_{η} は十分に大きい値 ($k_{\eta}=2.0 \times 10^6$ kg/cm²/cm) を用いた。

以上のような4つの付着状態の場合と、鉄筋とコンクリートの間に相対的なずれを生じないと考えた場合について線形弾性解析を行い、付着応力分布、鉄筋およびコンクリート内の応力状態、およびはりの変形状態について比較検討した。

5. 解析結果およびその考察

(1) はりのたわみ

はりの中心軸（対称軸上の下面より高さ 9.5 cm の位置にある軸）のたわみ状態を示すと、図-7 のようであり、さらに、同軸のスパン中央におけるたわみ量とジョイント剛性定数 k_{ξ} ($=k_z$) との関係を示すと、図-8 のようである。これらの図から明らかなように、 $k_{\xi}=10000$ kg/cm²/cm 以上になると、たわみ量は鉄筋とコンクリートが完全に付着している場合とほとんど同じ値を示し、一方、 $k_{\xi}=2000$ kg/cm²/cm 以下になるとたわみ量が急激に増加する。

鉄筋とコンクリートが完全に付着しているときのスパン中央のたわみは、ジョイント要素を含まないFPMによって解析されるが、その値は 0.146 cm であった。比較のために、初等はり理論で用いられている直線ばりのたわみ曲線の弾性基礎方程式 $EIy''=-M$ から計算す

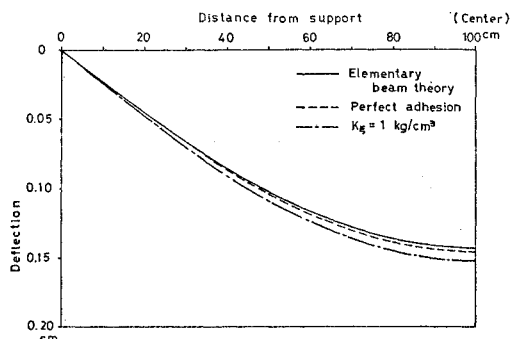


図-7 はりの中心軸（底面より高さ 9.5 cm の位置）のたわみ

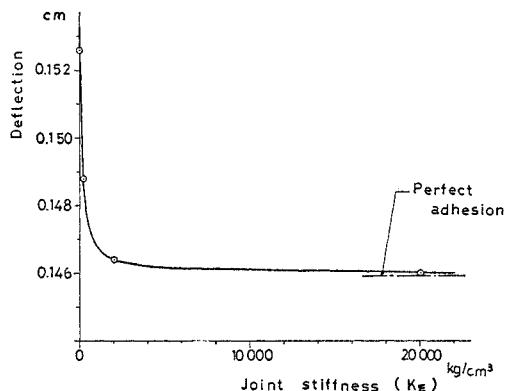


図-8 付着状態の差異によるスパン中央（底面より高さ 9.5 cm の位置）のたわみの変化

ると、0.143 cm が得られる。なお、この場合には鉄筋断面をコンクリートに換算してたわみ計算をしているが、そのときの中立軸の位置ははり下面より 9.72 cm の高さのところであり、FPM で計算した中立軸の位置（下面より 9.5 cm の高さ）とわずかに異なっている。

また、鉄筋とコンクリートとの間の摩擦抵抗がほとんどない場合に対して、 $k_{\xi}=1$ kg/cm²/cm として計算しているが、そのときのFPMによるスパン中央のたわみ量は 0.153 cm であった。これに対する初等はり理論による解を、鉄筋の部分が空洞であるとして求めると、0.150 cm であって、ほとんど一致した値を得た。しかし、FPM 解ではせん断応力による変形も含まれているので、初等はり理論解よりもわずかにたわみが大きくなっている。

実際の鉄筋コンクリートの付着に対して、荷重レベルの低い段階では $k_{\xi}=10000 \sim 20000$ kg/cm²/cm と考えられるので、完全に付着していると考えて計算してもよい。しかし、繰り返し荷重を受けたり、荷重の増大によるポンド破壊やコンクリートの引張破壊などに伴って、 k_{ξ} の値が低下することは考えられる。このような付着状態の劣化は、この計算例で示したように鉄筋とコンクリートとの付着面全体に同時に、しかも同じ程度におこるものでなく、応力状態に応じて場所的に変化するだろう。そのような場合には、勿論、材料の非線形特性を考慮した解析が必要である。

(2) 鉄筋応力および付着応力

図-9 は鉄筋の軸方向 (x 方向) の垂直応力、すなわち、鉄筋応力を示したものである。この図から、ジョイント剛性定数 k_{ξ} の値によって鉄筋応力がかなり変化することや、鉄筋応力は鉄筋断面内で分布し、上縁よりも下縁で引張応力がかなり大きくなるのがわかる。特に、 $k_{\xi}=1$ kg/cm²/cm の場合のように、付着抵抗がほとんどなくなると、鉄筋が独立に曲げを受ける1本のはり

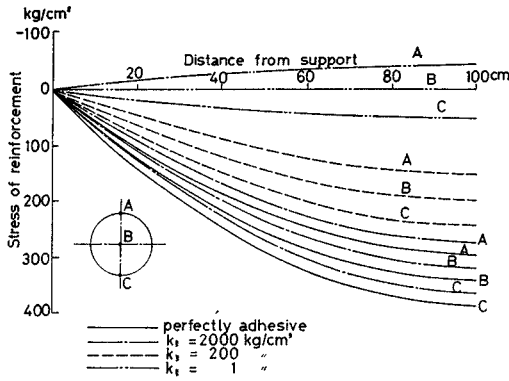


図-9 鉄筋応力分布

のような挙動をし、鉄筋の上縁で圧縮応力、下縁で引張応力を生じるようになる。

次に、鉄筋周囲の付着応力分布の状態を示すと、図-10 のようである。付着応力は、上面(A点)で最大に、下面(C点)で最小に分布している。しかし、ジョイント剛性定数が低下して、 $k_t = 200 \text{ kg/cm}^2/\text{cm}$ 以下になると、付着応力は鉄筋の周囲で一様になる。このことから、付着結合が十分であるときには、付着応力は鉄筋周囲で異なり、局所すべり破壊などにより付着状態が劣化してくると、付着応力が一様化されるようになるものと考えられる。

(3) はりの中央断面における応力状態

はりのスパン中央の断面における軸方向垂直応力 σ_z の状態を、完全付着の場合と $k_t = 1 \text{ kg/cm}^2/\text{cm}$ の場合

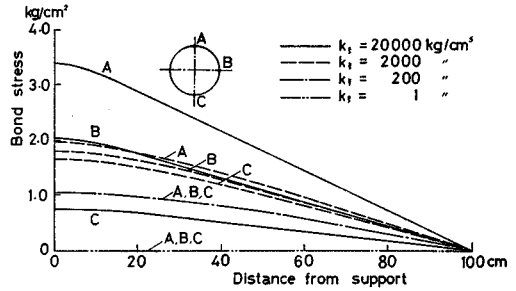


図-10 付着応力分布

について示すと図-11 (a) のようである。鉄筋と相隣るコンクリート要素に、鉄筋のあることによる応力への影響が少し見られるが、対称軸 ($x=0$) と側面 ($x=5 \text{ cm}$) とにおける σ_z はほぼ一致した。このことから、鉄筋の付近以外では、同一高さでは、同じ応力と考えてよい。コンクリート部分の応力分布を示すと図-11(b) のようになるが、いずれの場合もほとんど直線状に分布しており、 k_t が小さくなると下縁での引張応力がわずかに増加する。鉄筋とコンクリートの付着剛性の相違によるはり中央断面の上下縁における応力値を、初等はり理論による曲げ応力式 $\sigma = M/W$ から計算した値と比較して示すと、表-1 のようになる。さらに、はり中央断面で、はりの底面より高さ 5 cm の位置における鉄筋の中心点の垂直応力 (σ_z) と、コンクリート側面での垂直応力 (σ_z) とを比較して示すと、表-2 のようである。これらから、完全付着および $k_t = 1 \text{ kg/cm}^2/\text{cm}$ の場合には、FPM 解と初等はり理論解とはよく一致していることが

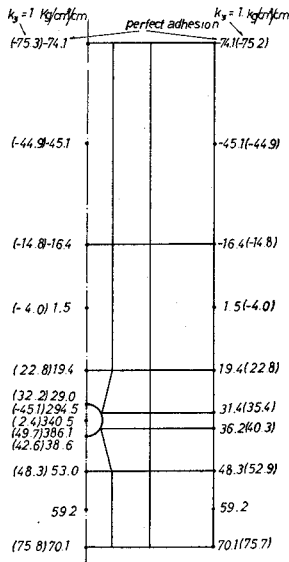


図-11 (a) 中央断面における軸方向応力 (σ_z) の状態

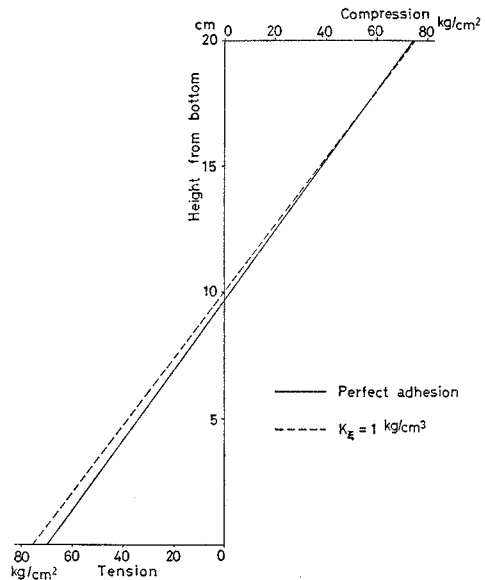


図-11 (b) 中央断面の鉛直線に沿うコンクリート部の軸方向垂直応力 (σ_z) 分布

表一 スパン中央の断面における縁応力

	上縁圧縮応力 (kg/cm ²)	下縁引張応力 (kg/cm ²)
初等はり理論		
鉄筋コンクリートはり	74.0	69.9
コンクリートはり	75.0	75.0
鉄筋部分が空洞のはり	75.1	75.6
Finite Prism Method		
完全付着	74.1	70.1
$K_{\xi}=20000 \text{ kg/cm}^2/\text{cm}$	74.2	70.1
2000	74.2	70.4
200	74.6	72.5
1	75.3	75.8

表二 はりの底面より高さ 5 cm の位置の σ_z の比較

はりの対称軸からの距離	0 cm (鉄筋の中心) (kg/cm ²)	5 cm (コンクリート縁) (kg/cm ²)
初等はり理論		
鉄筋コンクリートはり	340	34.0
鉄筋部分が空洞のはり	—	37.9
Finite Prism Method		
完全付着	340	33.8
$K_{\xi}=20000 \text{ kg/cm}^2/\text{cm}$	338	33.8
2000	320	34.0
200	198	35.5
1	2	37.9

わかる。

せん断応力 τ_{zy} の分布状態を $z=50 \text{ cm}$ の断面において示すと、図-12 (a), (b), (c) のようである。それぞれの場合に対して、鉄筋を含む中心線に沿うものと、はりの側面に沿うものとを示している。また、同時に、次の長方形断面ばりに対する理論式を用いて計算したせん断応力分布が比較のために描かれている。

$$\tau_{zy} = QS_y/bI \dots\dots\dots (19)$$

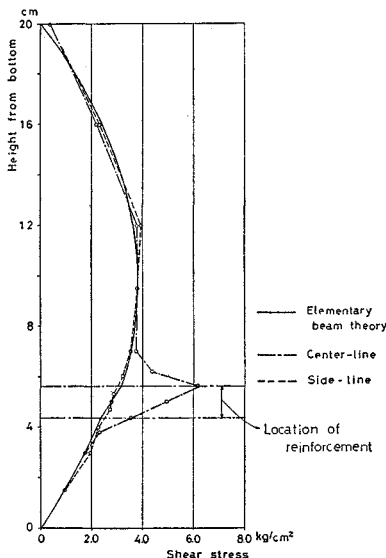


図-12 (a) $z=50 \text{ cm}$ の断面におけるせん断応力 (τ_{zy}) 分布 (完全付着の場合)

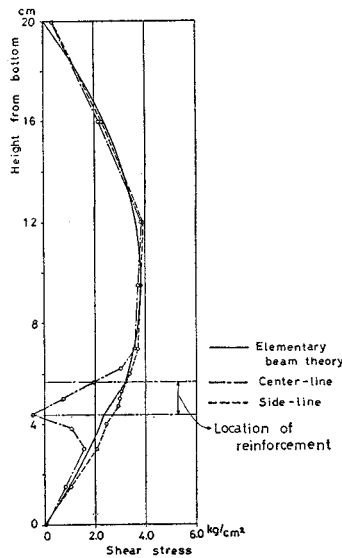


図-12 (b) $z=50 \text{ cm}$ の断面におけるせん断応力 (τ_{zy}) 分布 ($K_{\xi}=20000 \text{ kg/cm}^3$)

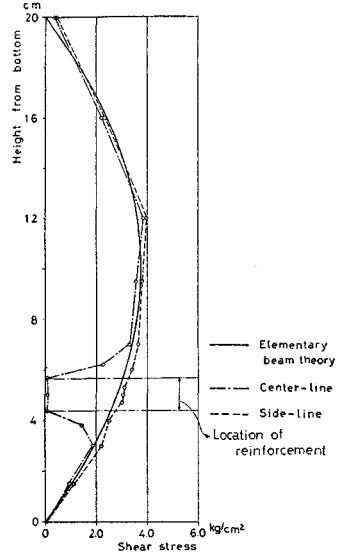


図-12 (c) $z=50 \text{ cm}$ の断面におけるせん断応力 (τ_{zy}) 分布 ($K_{\xi}=1 \text{ kg/cm}^3$)

ここで、 Q :せん断力、 S_y :応力を求めようとしている点より外側断面の中立軸に関する断面一次モーメント、 b :はりの幅、 I :中立軸に関する断面二次モーメントである。なお、図-12 (a) および (b) では鉄筋コンクリート断面に対して式 (19) を用いているために、せん断応力の分布は鉄筋位置で多少不連続な曲線になっているが、図-12 (c) ではコンクリート長方形断面としてせん断応力を求めているので、前二者と少し異なった曲線分布になっている。しかし、これらの間には大きい差異は見られない。

付着が完全な場合には、鉄筋内およびその上下近傍のせん断応力は式 (19) で求められた値よりも大きく、特に鉄筋上面では2倍程度にもなる。鉄筋とコンクリート間に相対すべりが許されると、鉄筋内およびその近傍ではせん断応力がかなり小さくなる。これらの応力分布より、付着状態が鉄筋周辺のせん断応力に鋭敏に影響することがわかる。また、コンクリート側面に沿うせん断応力分布は、完全付着の場合には式 (19) によるものとほとんど一致するが、相対すべりが起こるような状態では、FPM による値の方がわずかに大きくなる。

6. 材料の非線形特性の導入について

以上では、鉄筋コンクリートを例にとり、補強筋をもつはりの線形弾性応力解析の一つの方法について説明し、解析結果について検討した。しかし、実際の鉄筋コンクリートはりでは、応力状態に応じて、コンクリートの非線形挙動、引張応力に対する抵抗や進行性破壊、付

着部分の非線形挙動や局所ボンド破壊などの現象を考慮しなければならない。コンクリートと鉄筋が完全に付着している状態において、鉄筋周囲の各位置における付着応力の相違をみても、荷重レベルに応じてボンド破壊を生ずる状況は実際にはきわめて複雑であるものと思われる。また、施工状態や材料の不均一性のために、付着状態は鉄筋の各位置でかなりばらつき、したがって、付着特性の非線形性に加えて位置的な変化の問題も鉄筋コンクリートばりの変形挙動や破壊の様子を複雑なものにするものと考えられる。

柱状要素およびそれに適合したジョイント要素を用いているため、はりのスパン全体にわたっての柱状あるいは板状のものをそれぞれ一つの要素として取り扱っている。したがって、節点荷重や、付着の状態、破壊の状態など、解析に導入されるべきすべての条件が、スパン全体にわたって連続的に、かつ、スムーズに変化している場合のほうが解析するのに望ましい。それは、この解析法の性質からして、荷重やその他の条件をすべてスパン全体にわたって三角級数的に分布するものに置き換えて計算しており、したがって、集中荷重や不連続的に出てくる状態の変化、たとえば、局所すべりや破壊のような状態変化などをある程度の精度で級数表示する場合に多くの項数を必要とし、計算時間を増すばかりでなく、計算精度も低下する恐れがあるからである。

いま、母材の応力-ひずみ関係や、式 (22) の $[k]$ で表わされる付着の剛性特性が非線形性を示す場合を考える。有限要素解析は基本的には線形解析であるから、ある荷重増分に対する線形解析によって得られた応力状態と非線形性を満足する実際の応力状態との差に相当する応力の取り扱いが問題になる。O.C. Zienkiewicz らの開発した Stress Transfer Method^{(15),(16)} を用いると、このような応力を初期応力と考え、それを構造物を通じて弾性的に分配するように調整計算を行うことができる。Stress Transfer Method の利点は基本的な弾性マトリックスを変えることなく、繰り返し計算が行えることである。

この方法を補強筋をもつはりに対して具体的に適用する場合の手順を示すと次のようである。まず、ある荷重レベルにおいて荷重の増分 $\{dP\}_r$ に対して線形弾性解析を行い、各要素のひずみ増分 $\{d\epsilon'\}_r$ と応力増分 $\{d\sigma'\}_r$ を求める。応力-ひずみ関係の非線形性のために、こうして求められたひずみの増分に対して応力増分は一般に正しくない。したがって、求められたひずみ増分 $\{d\epsilon'\}_r$ に対して可能な応力の真の増分を $\{d\sigma\}_r$ とすると、次に示す初期応力系 $\{d\sigma''\}_r$ とつり合う物体力によって、この状態が保たれる。

$$\{d\sigma''\}_r = \{d\sigma'\}_r - \{d\sigma\}_r \dots\dots\dots (20)$$

式 (20) で与えられる物体力系は実際には作用しているものではないから、計算の次の段階では、この物体力系が取り除かれるが、このために構造物（弾性性質は変わらない）に変形を生ずる。この場合、取り除かれる初期応力 $\{d\sigma''\}_r$ は、それと等価な節点力として取り扱われ、この節点力は次のように求められる。

$$\{P\}_r^e = \int_V [N]^T \{d\sigma''\}_r dv \dots\dots\dots (21)$$

なお、ここでは FPM を用いているので、 $\{d\sigma''\}_r$ を Fourier 級数に展開して用いる必要がある。

また、この変形に伴って付加的なひずみ増分および応力増分が生ずる。この応力増分は再び非線形的な関係のために実際の応力増分よりも大きくなるだろうから、また、式 (20) から求められる物体力とつり合わせるために、応力の再分配が繰り返される。このような計算過程が数回繰り返された後に求められた応力は、非線形な応力-ひずみ関係の上に収束するようになる。

次に、付着部分の局所すべりや非線形挙動を考慮する場合について考える。ある荷重レベルにおける線形計算の結果として得られた応力状態に対して修正されるべきジョイント要素内の応力を $\{d p(\xi, z)\}$ とする。さきの Finite Prism 要素の場合と同様に、この応力と等価な節点力を求めるわけであるが、 $\{d p(\xi, z)\}$ はまず次のように Fourier 級数で表わしておく必要がある。

$$\{d p\} = \begin{Bmatrix} d p_\xi \\ d p_\eta \\ d p_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \{d p^m\} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} d p_\xi^m \sin \frac{m\pi z}{a} \\ d p_\eta^m \sin \frac{m\pi z}{a} \\ d p_z^m \cos \frac{m\pi z}{a} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

$\{d p(\xi, z)\}$ に対する等価節点力を $\{F\} = \sum_{l=0}^{\infty} \{F^l\}$ とすれば、Fourier 級数の第 l 項について

$$\{F^l\} = \int_S [N^l]^T [T]^T \{d p^l\} ds_\xi dz \dots\dots\dots (23)$$

となる。ここで、 $[N^l]$ は式 (11) で定義されるものと同じである。また、 $[T]$ は式 (10) で与えられる。Fourier 級数の直交性により、式 (23) は

$$\{F^l\} = \int_S [N^l]^T [T]^T \{d p^l\} ds_\xi dz \dots\dots\dots (24)$$

となり、 $\{d p^l\}$ が決まれば等価節点力が決定される。

式 (24) で求められる等価節点力を全構造系に作用させて再解析を行い、この力系を弾性的に配分する。この計算過程は応力の修正量が無視できるほど小さくなるまで繰り返される。

こうした解析法を用いることによって、より複雑な挙動の解析に対してアプローチでき、また、コンクリートが引張応力に抵抗しえないという条件も同様の考え方で

導入することができる¹⁶⁾。

7. 結 語

補強筋を有するはりの弾性応力解析に対して Finite Prism Method を適用した一方法を提案した。この場合、補強筋と母材との付着を表わすのに、柱状要素に適合したジョイント要素を用い、この要素の剛性行列を誘導した。解析例として、1本の鉄筋を含むコンクリートばりが単純に支持され、等分布荷重を受ける場合を考え、鉄筋とコンクリートの付着特性およびコンクリートの材料特性がいずれも線形弾性的であるとして解析を行った。付着応力と相対変位との関係をジョイント要素による剛性によって表わし、その剛性の違い、すなわち、付着状態の違いによって生ずるはりのたわみ、鉄筋応力、コンクリート内の応力分布および付着応力分布などの変化について考察した。その結果、次のようなことが明らかになった。

1) 付着が完全な場合およびほとんど付着抵抗がない場合のはりのたわみや上下縁応力に対する FPM の解は、初等はり理論による解とほとんど一致する。ただし、前者では、せん断応力の影響のためにわずかに大きい。

2) 付着状態がよい場合には、付着応力は鉄筋周囲の位置でかなり異なり、一様には分布しない。

3) 付着部の剛性が低くなるにしたがって、鉄筋応力は減少し、たわみは増大する。それと同時に、鉄筋周囲の付着応力は一様化する。

4) 鉄筋周辺部のせん断応力は付着状態によって複雑に変化する。

ここでは、鉄筋が1本の場合についての解析結果を示したが、多数の鉄筋がある場合についても、ここに提案した解析法が適用できる。その場合には、鉄筋の付着応力や鉄筋周辺部のせん断応力の状態に及ぼす鉄筋の三次元的な相互影響が明らかにされるだろう。

実際の鉄筋コンクリートの挙動を解析する場合、コンクリートや付着の力学特性の非線形性およびそれらの局所的な破壊を考慮することが必要である。このような材料非線形性および破壊を、ここで述べた解析法に導入することについては、その解析の概念だけを説明した。これは、解析に用いたアイソパラメトリック要素に対して剛性行列を計算するとき、数値積分にかなりの計算時間を必要とし、非線形解析における繰り返し計算を収束させるだけの時間が現状では十分に得られないためであ

る。この点については、現在、計算上の改良を試みている。

本研究で適用した Finite Prism Method による解析プログラムは、名古屋大学土木工学教室 梶田建夫助教授が開発したものを使用させていただいた。ここに厚くお礼申し上げる次第である。また、本研究における計算には、名古屋大学大型計算機センター FACOM 230-60 を使用したことを付記しておく。

参 考 文 献

- 1) Ngo, D. and Scordelis, A.C.: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, Jour. of ACI, No. 64-14, (1967), pp. 152-163.
- 2) Nilson, A.H.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method, Jour. of ACI, No. 65-55, (1968), pp. 757-766.
- 3) 佐藤稔夫, 他: 鉄筋コンクリート梁の有限要素法による非線形解析, 日本鋼構造協会 第7回 大会研究集会, マトリックス構造解析法研究発表論文集, (1973), pp. 763-770.
- 4) 滝口克巳: 鉄筋コンクリート部材を対象とした有限要素法による二次元非線形型応力解析法, 昭和46年12月, (学位論文).
- 5) 小阪義夫・谷川恭雄: 引張鉄筋周辺のコンクリートの力学性状について, 材料, 22, 232, (1973), pp. 62-68.
- 6) Goodman, R.E., et al.: A Model for the Mechanics of Jointed Rock, Proc. ASCE, Vol. 94, No. SM 3, (1968), pp. 637-659.
- 7) Wilson, E.L.: Structural analysis of axi-symmetric solids, J.A.I.A.A., 3, (1965), pp. 2269-2274.
- 8) Cheung, Y.K.: The finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends, Proc. Inst. Civ. Eng., 40, (1968), pp. 1-7.
- 9) Cheung, Y.K.: The analysis of cylindrical orthotropic curved bridge decks, Publ. Int. Ass. Struct. Eng., 29-II, (1969), pp. 41-52.
- 10) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, (1971), pp. 254-273.
- 11) Zienkiewicz, O.C. and Too, J.J.M.: The Finite Prism in Analysis of Thick Simply Supported Bridge Boxes, Proc. ICE, Part 2, (1972), pp. 147-172.
- 12) 水野高明・渡辺 明: 丸鋼, 異形丸鋼および異形ねじり鉄筋の付着に関する研究, 土木学会論文集, 93, (1963), pp. 23-30.
- 13) 田 政範・島田静雄: 鉄筋コンクリートの付着に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 217, (1973), pp. 87-98.
- 14) 森田司郎: 鉄筋コンクリートにおける付着とひびわれに関する研究, 日本建築学会大会 学術講演概集, (1968), 687.
- 15) Zienkiewicz, O.C. et al.: Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems "Initial Stress", Finite Element Approach, Int. J. for Numerical Method in Eng., 1, (1969), pp. 75-100.
- 16) Zienkiewicz, O.C. et al.: Stress Analysis of Rock as a "No Tension" Material, Geotechnique, 18, (1968), pp. 56-66.

(1974.4.26・受付)