

薄肉多角開断面曲りばりの曲げねじれ問題

BENDING-TORSION PROBLEMS OF THIN-WALLED CURVED
BEAM WITH POLIGONAL OPEN SECTION

深 沢 泰 晴*

By Yasuharu FUKASAWA

1. 緒 言

直線ばりとの比較において、曲線ばりの特徴をあげれば、① はりを構成するすべての母線が曲率をもっていること、② しかもその曲率が母線ごとに異なること、である。薄肉曲りばりに対していわゆる「曲げねじれ理論」の適用を試みた研究は非常に多いが、その大部分は②の特徴である母線ごとの曲率の差異について、なんらかの近似的な措置を、その定式化の過程で講じている^{1)~8)}。

これに対して、各母線の曲率の変化を完全な形で考慮した解析は、小西・小松論文⁹⁾を端緒として、ひとりわが国においてのみその発展をとげてきた^{10)~12)}。このような解析ははりの曲率半径に対する曲率半径方向の断面寸法の比が大きくなるにつれて、その有効性を増すのは当然であるが、なかんずくその理論展開がすっきりした形でなされる点で評価されるべきものと思う。しかしながらその反面、この理論によれば諸種の断面定数を与える断面積分が母線ごとに異なる曲率を含んでいるため、実際の設計計算においては面倒な積分演算を強いられ、その意味で実用的でないうらみがある。

本報告は、このような欠陥を補う目的で、通常の曲げねじれ問題の解析法とは若干異質の手法の適用を試みたものである。すなわち、実用に供されている鋼曲りばりのほとんどが平板から構成されている点に着目し、その構成要素である個々の円弧状の板帯を解析の基本単位とし、それをはりとして集合する解析方法によった。

その結果、個々の板帯に対しては曲率を含んだ断面積分が容易に行い得るため、前記の欠陥が改善されるばかりでなく、他にいくつかの利点が伴う。すなわち、① 諸種の断面定数がすべて構成板帯の断面定数の代数和で表わされ、実用計算にきわめて便利である、② はりの

横断面形状の変化を考慮した解析への発展が考えられる、③ 曲げおよび曲げねじれに伴うせん断変形を考慮した曲げねじれ理論に拡張しやすい、などである。

歴史的な観点からみると、本報告で適用した曲げねじれ問題の解析法は、I 形ばりの曲げねじれ現象を解析した S. Timoshenko および \square , Γ 等の 2 フランジばりを扱った C. Weber の考え方にその源をたどることができる。F. & H. Bleich¹³⁾ はそれを任意な形の薄肉多角断面のはりに拡張することを試みているが、中途半端な段階で終わっている。著者はそれらをさらに改善、発展させることにより、Wagner の単位そりの仮定に基づく慣用の曲げねじれ理論に対比し得る形にまとめあげることを目指した。もちろん本解法は頭初直線ばりを対象として完成したものであるが、ここにはその効果がより大きく期待できる曲りばりに対して適用した結果を報告する。

なお、解析の過程で導入される仮定は次のようである：④ 断面は薄肉多角形状をなす開断面である、⑤ 断面形および曲率ははりの軸方向に一定である、⑥ 微小変形を対象とする、⑦ はりの変形に際して断面形状は変化しない、⑧ はりを構成する個々の板帯の変形は、その板帯に対する軸力、曲げ、および St. Venant のねじりのみによっておこる、⑨ 板帯相互の結合部における変位の連続条件は板厚中央面の交線上においてのみ満たされる。

ここに、⑤、⑥、⑦ は慣用の曲げねじれ理論における仮定とまったく同じである。⑧ より、はりの変形に際して、板厚中央面内でのせん断ひずみは無視されることになり、さらに、断面上の板厚中央線は、各板帯ごとには常に一平面上にあるが、断面全体については必ずしも同一平面上にあるとは限らないことになる。

以上のような仮定を基盤として、薄肉多角開断面曲りばりの解析をエネルギー原理に基づいて行い、その基本式のすべてを任意座標および直交性を満たすいわゆる主

* 正会員 工博 山梨大学助教授 工学部土木工学科

標のそれぞれについて組織的に表示する。

2. 構成要素としての円弧状板帯の解析

断面形および曲率が一定な薄肉多角開断面曲りばりの一例を図-1 および図-2 (a) に示す。このはりに対して、はりの曲率中心線上の任意点 O' を原点とし、 $\rho-\theta$ 面がはりの曲率面と一致する右手系円柱座標系 ($O'-\rho, \theta, \zeta$) を設ける。また、はりの断面を含む平面上すなわち $\rho-\zeta$ 面上に、任意点 O を原点とし、 ζ 軸および ρ 軸の負の方向にそれぞれ一致する x 軸および y 軸をもつ右手系直角座標系 ($O-x, y$) を考える。

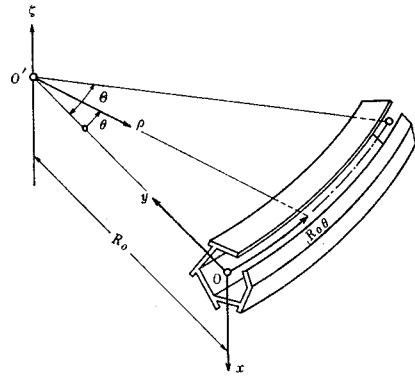


図-1 薄肉多角開断面曲りばりの一般図と座標

まず、はりの構成要素である円弧状板帯のうち、任意の一つを取り出し (以下、板帯 i とよぶ)、これについて解析する。この板帯 i の断面上の点の位置を表わすのに、その断面の中立点 O_i (後に定義する) を原点とする二つの直角座標系 ($O_i-\xi, \eta$) および ($O_i-\tilde{x}, \tilde{y}$) を用いる。 \tilde{x}, \tilde{y} 軸はそれぞれ x, y 軸に平行であり、また、 ξ 軸は板厚方向に向い、 η 軸は板厚中心線と一致する (図-2 (b))。 ($O_i-\tilde{x}, \tilde{y}, \theta$) および ($O_i-\xi, \eta, \theta$) はともに右手系であり、両座標間には次の関係が成り立つ；

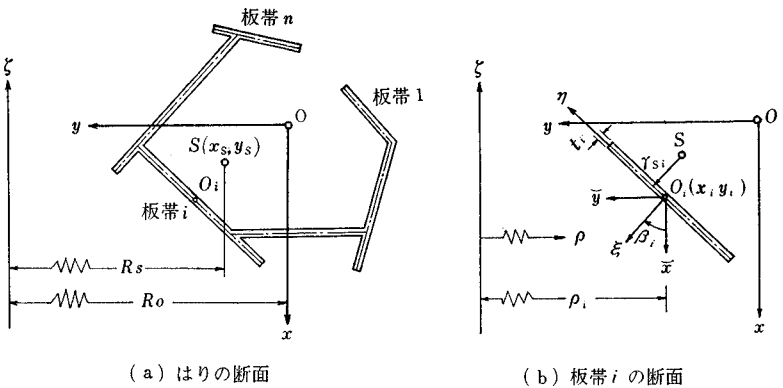


図-2 断面図と座標

$$\tilde{x} = \xi \cos \beta_i - \eta \sin \beta_i, \quad \tilde{y} = \xi \sin \beta_i + \eta \cos \beta_i \quad \dots\dots\dots (1. a, b)$$

ここに、 β_i は ξ 軸が \tilde{x} 軸となす角 (符号は右ねじの法則に従う) である。図-2 (b) 参照。

板帯 i の断面上の任意点 $P(\tilde{x}, \tilde{y})$ および中立点 O_i の $\tilde{x}, \tilde{y}, \theta$ 方向の変位成分をそれぞれ、 u, v, w および u_i, v_i, w_i とし、断面のねじれ回転角を φ (符号は右ねじの法則に従う) とすると、仮定 ㉔, ㉕, ㉖ により次式が書ける；

$$\left. \begin{aligned} u &= u_i - \tilde{y}\varphi \\ v &= v_i + \tilde{x}\varphi \\ w &= w_i - \tilde{y}\phi_{xi} - \tilde{x}\phi_{yi} \text{ (注1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2. a \sim c)$$

ここに、 ϕ_{xi} および ϕ_{yi} はそれぞれ点 O_i を通る母線の $\tilde{y}-\theta$ 面内および $\tilde{x}-\theta$ 面内における接線回転角で、 ϕ_i は同母線のねじれ率である。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \phi_{xi} &= \frac{1}{\rho_i} (v_i' + w_i), \quad \phi_{yi} = \frac{1}{\rho_i} u_i' \\ \phi_i &= \frac{1}{\rho_i} \left(\varphi' - \frac{1}{\rho_i} u_i' \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3. a \sim c)$$

ここに、 ρ_i は点 O_i を通る母線の曲率半径であり、()' は θ による () の微分を表わす。

板帯 i の断面上の任意点 P におけるひずみ成分は式 (2) および仮定 ㉔ より

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\theta &= \frac{\rho_i}{\rho} (\epsilon_i - \tilde{y}\kappa_{xi} - \tilde{x}\kappa_{yi}) \\ \gamma_{\eta\theta} &= 2 \left(\frac{\rho_i}{\rho} \right)^2 \xi \phi_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4. a, b) \quad \text{注2)}$$

他のひずみ成分は 0 である。上式における $\epsilon_i, \kappa_{xi}, \kappa_{yi}, \phi_i$ はそれぞれ点 O_i を通る母線の伸び率、 $y-\theta$ 面内、

注 1) St. Venant のねじりの仮定— $\gamma_{\xi\theta} = 0, \gamma_{\eta\theta}^* = 0$ (*印は $\xi=0$ すなわち板厚中央線上の値の意)——によれば

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\xi\theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_i \cos \beta_i + v_i \sin \beta_i - \eta\varphi) \\ &+ \rho \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{w}{\rho} \right) = 0 \\ \gamma_{\eta\theta}^* &= \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (-u_i \sin \beta_i + v_i \cos \beta_i) \\ &+ \rho^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{w^*}{\rho^*} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (i)$$

これを解いて

$$w = w_i - \tilde{y}\phi_{xi} - \tilde{x}\phi_{yi} + \frac{\rho_i}{\rho^*} \xi \eta \phi_i \quad \dots\dots\dots (ii)$$

ここで、薄肉の前提から右辺第 4 項を無視して、近似的に式 (2.c) を得る。

座 $\bar{x}-\theta$ 面内における曲率の変化, 曲げねじれ率を意味し, 次のように書かれる;

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{1}{\rho_i} (w_i' - v_i), & \kappa_{xi} &= \frac{1}{\rho_i^2} (v_i'' + w_i') \\ \kappa_{yi} &= \frac{1}{\rho_i^2} (u_i'' + \rho_i \varphi), & \vartheta_i &= \frac{1}{\rho_i^2} \left(\varphi'' - \frac{1}{\rho_i} u_i'' \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.a\sim d)$$

板帯 i に分布して作用している外力 (体積力) の \bar{x}, y, θ 方向の成分を単位体積あたりそれぞれ p_x, p_y, p_θ とし, また 両端断面に作用している外力 (表面力) の \bar{x}, y, θ 方向の成分を単位面積あたりそれぞれ $\bar{\tau}_{x\theta}, \bar{\tau}_{y\theta}, \bar{\sigma}_\theta$ (符号は応力のそれと一致するものとする) とすると, はりの任意の変形に際して, 板帯 i に蓄えられるポテンシャルエネルギー Π_i は次のように書ける;

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^\theta \int_{F_i} \{ E\varepsilon_\theta^2 + G\tau_{\theta\theta}^2 - 2(p_x u + p_y v + p_\theta w) \} \cdot dF_i \rho d\theta - \left[\int_{F_i} (\bar{\tau}_{x\theta} u + \bar{\tau}_{y\theta} v + \bar{\sigma}_\theta w) dF_i \right]_0^\theta \dots\dots\dots(6)$$

ここに, θ および F_i はそれぞれ円弧状板帯 i の中心角および断面積であり, E および G ははりの材料のヤング率およびせん断弾性係数である。なお, 式 (6) において, 相隣る板帯との接合面に作用する応力によるポテンシャルエネルギー分は, 板帯全体をはりとして集合する際, 相殺されるので, 式 (6) には書いてない。

式 (6) に式 (2) および (4) を代入して整理すると, 結局 Π_i は次のように表わされる;

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_0^\theta \{ E F_i \varepsilon_i^2 + E J_{xi} \kappa_{xi}^2 + 2 E J_{xyi} \kappa_{xi} \kappa_{yi} \\ &+ E J_{yi} \kappa_{yi}^2 + G J_{Ti} \varphi_i^2 - 2(q_{xi} u_i + q_{yi} v_i \\ &+ q_{zi} w_i + m_{zi} \varphi + m_{xi} \phi_{xi} + m_{yi} \phi_{yi}) \} \rho_i d\theta \\ &- \left[\bar{Q}_{xi} u_i + \bar{Q}_{yi} v_i + \bar{N}_i w_i + \bar{T}_{zi} \varphi \right. \\ &\left. - \bar{M}_{xi} \phi_{xi} - \bar{M}_{yi} \phi_{yi} \right]_0^\theta \dots\dots\dots(6)' \end{aligned}$$

ここに, $J_{xi}, J_{xyi}, J_{yi}, J_{Ti}$ は円弧状板帯 i の断面定数であり, 次式で定義される;

注 2) ひずみと変位の関係式

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) \\ \tau_{y\theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (-u \sin \beta_i + v \cos \beta_i) \\ &+ \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{w}{\rho} \cos \beta_i \end{aligned} \right\} \dots\dots(iii)$$

に式 (2.a,b) および注 1) の式 (ii) を代入して, 式 (5) を考慮すると次式を得る;

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{\rho_i}{\rho} \left(\varepsilon_i - \gamma \kappa_{xi} - \bar{x} \kappa_{yi} + \frac{\rho_i}{\rho^*} \xi \gamma \vartheta_i \right) \\ \tau_{y\theta} &= \left(\frac{\rho_i}{\rho^*} \right)^2 \left(2 + \frac{\xi}{\rho} \sin \beta_i \right) \xi \phi_i \end{aligned} \right\} \dots\dots(iv)$$

ここで, 式 (2.c) の場合と同様に, 薄肉の仮定を適用して近似的に式 (4.a,b) を得る。

$$\left. \begin{aligned} J_{xi} &= \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} \bar{y}^2 dF_i, & J_{xyi} &= \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} \bar{x} \bar{y} dF_i \\ J_{yi} &= \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} \bar{x}^2 dF_i, & J_{Ti} &= 4 \int_{F_i} \left(\frac{\rho_i}{\rho} \right)^3 \xi dF_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7.a\sim d)$$

さらに, 式 (6)' における外力は次式で与えられる;

$$\left. \begin{aligned} q_{xi} &= \int_{F_i} \frac{\rho}{\rho_i} p_x dF_i, & q_{yi} &= \int_{F_i} \frac{\rho}{\rho_i} p_y dF_i \\ q_{zi} &= \int_{F_i} \frac{\rho}{\rho_i} p_\theta dF_i, & m_{xi} &= - \int_{F_i} \frac{\rho}{\rho_i} p_\theta \bar{y} dF_i \\ m_{yi} &= - \int_{F_i} \frac{\rho}{\rho_i} p_\theta \bar{x} dF_i, \\ m_{zi} &= \int_{F_i} \frac{\rho}{\rho_i} (p_y \bar{x} - p_x \bar{y}) dF_i \\ \bar{Q}_{xi} &= \int_{F_i} \bar{\tau}_{x\theta} dF_i, & \bar{Q}_{yi} &= \int_{F_i} \bar{\tau}_{y\theta} dF_i \\ \bar{N}_i &= \int_{F_i} \bar{\sigma}_\theta dF_i, & \bar{T}_{zi} &= \int_{F_i} (\bar{\tau}_{y\theta} \bar{x} - \bar{\tau}_{x\theta} \bar{y}) dF_i \\ \bar{M}_{xi} &= \int_{F_i} \bar{\sigma}_\theta \bar{y} dF_i, & \bar{M}_{yi} &= \int_{F_i} \bar{\sigma}_\theta \bar{x} dF_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8.a\sim l)$$

ここに, サフィクス z ははり軸方向を意味する。

なお, 式 (6)' を導く際, 中立点 O_i の特性が考慮されている。すなわち,

$$\left. \begin{aligned} Z_{xi} &= \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} \bar{y} dF_i = 0, & Z_{yi} &= \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} \bar{x} dF_i = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9.a,b)$$

いま, ρ - ζ 面上の任意点 O を原点とし, ζ, ρ 軸の負の方向にそれぞれ x, y 軸をもつ右手系直角座標系 ($O-x, y$) を用いる (図-1 および 2 参照) と, 式 (9) より点 O_i の x, y 座標の計算式が次のように求まる;

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \frac{\int_{F_i} \frac{1}{\rho} x dF_i}{\int_{F_i} \frac{1}{\rho} dF_i}, & y_i &= \frac{\int_{F_i} \frac{1}{\rho} y dF_i}{\int_{F_i} \frac{1}{\rho} dF_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10.a,b)$$

さらに, 点 O_i を通る母線の曲率半径 ρ_i の計算式は,

$$\rho_i = \frac{F_i}{\int_{F_i} \frac{1}{\rho} dF_i} \dots\dots\dots(11)$$

板帯 i の幅を b_i , 板厚 t_i を一定とし, 式 (10), (11) の断面積分の計算を行うと,

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_{ci} - \rho_{ci} \tan \beta_i + \frac{4\rho_i \tan \beta_i}{\log(\rho_{2i}/\rho_{1i})} \\ y_i &= R_0 - \frac{4\rho_i}{\log(\rho_{2i}/\rho_{1i})}, & \rho_i &= \frac{4\rho_i}{\log(\rho_{2i}/\rho_{1i})} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12.a\sim c)$$

ここに, R_0 は x, y 座標の原点 O を連ねた軸線の曲率半径 (図-1 および 2 (a)) であり, また 図-3 に示すように, x_{ci}, y_{ci} は板帯 i の断面図形の図心 C_i の x, y 座標, ρ_{ci} は点 C_i を通る母線の曲率半径, ρ_{1i} および ρ_{2i} はそれぞれ板帯 i の断面における η の正側および

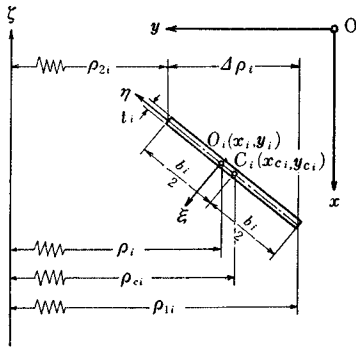


図-3 板帯 *i* の断面の圆心 C_i と中立点 O_i

び負側の端部を通る母線の曲率半径である。さらに、 $\Delta\rho_i$ は次式で表わされる；

$$\Delta\rho_i = \rho_{2i} - \rho_{1i} = b_i \cos \beta_i \dots\dots\dots (13)$$

式 (7) における J_{xi} , J_{yi} , J_{xyi} は式 (1) を用い、さらに薄肉断面の場合には $\xi=0$ として十分であるから、結局次のように書ける；

$$\left. \begin{aligned} J_{xi} &\doteq J_{\xi i} \sin^2 \beta_i, & J_{xyi} &\doteq -J_{\xi i} \sin \beta_i \cos \beta_i \\ J_{yi} &\doteq J_{\xi i} \cos^2 \beta_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14. a \sim c)$$

ここに、

$$J_{\xi i} = \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} \eta^2 dF_i \dots\dots\dots (15)$$

式 (15) および式 (7. d) の断面積分を行うと、

$$\left. \begin{aligned} J_{\xi i} &= \rho_i t_i \sec^2 \beta_i \left\{ \rho_i^2 \log(\rho_{2i}/\rho_{1i}) - \Delta\rho_i (2\rho_i - \rho_{ci}) \right\} \\ J_{Ti} &= \frac{1}{3} \cdot b_i t_i^3 \frac{\rho_i^3 \rho_{ci}}{(\rho_{1i} \rho_{2i})^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16. a, b)$$

ここで、式 (12), (16) に対し、 $(\Delta\rho_i/\rho_{ci}) \ll 1$ を考慮して実用計算式を導くと次のようになる注3)；

$$\left. \begin{aligned} x_i &\doteq x_{ci} - \frac{1}{12} \cdot \frac{b_i^2 \sin \beta_i \cos \beta_i}{\rho_{ci}} \\ y_i &\doteq y_{ci} + \frac{1}{12} \cdot \frac{b_i^2 \cos^2 \beta_i}{\rho_{ci}} \\ \rho_i &\doteq \rho_{ci} - \frac{1}{12} \cdot \frac{b_i^2 \cos^2 \beta_i}{\rho_{ci}} \\ J_{\xi i} &\doteq \frac{1}{12} b_i^3 t_i \left(1 - \frac{1}{60} \cdot \frac{b_i^2 \cos^2 \beta_i}{\rho_{ci}^2} \right) \\ J_{Ti} &\doteq \frac{1}{3} b_i t_i^3 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{b_i^2 \cos^2 \beta_i}{\rho_{ci}^2} \right) \end{aligned} \right\} (17. a \sim e)$$

注3) $\log(\rho_{2i}/\rho_{1i})$ および $\rho_i^3 \rho_{ci}/(\rho_{1i} \rho_{2i})^2$ は、 $(\Delta\rho_i/\rho_{ci}) < 1$ を考慮すると、次のように近似できる；

$$\begin{aligned} \log \frac{\rho_{2i}}{\rho_{1i}} &= \log \frac{1 + (1/2)(\Delta\rho_i/\rho_{ci})}{1 - (1/2)(\Delta\rho_i/\rho_{ci})} \\ &= \frac{\Delta\rho_i}{\rho_{ci}} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta\rho_i}{2\rho_{ci}} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{\Delta\rho_i}{2\rho_{ci}} \right)^2 + \dots \right\} \\ &\doteq \frac{\Delta\rho_i}{\rho_{ci}} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta\rho_i}{\rho_{ci}} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i^3 \rho_{ci}}{(\rho_{1i} \rho_{2i})^2} &= \frac{\{1 - (1/2)(\Delta\rho_i/\rho_{ci})\}^3}{\{1 - (1/4)(\Delta\rho_i/\rho_{ci})\}^2} \\ &\doteq 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta\rho_i}{\rho_{ci}} \right)^2 \dots\dots\dots (vi) \end{aligned}$$

3. 任意座標で表わした曲りばりの基本式

薄肉多角開断面の曲りばりが n 個の円弧状板帯からなる場合には、任意の変形に対して曲りばり全体が得るポテンシャルエネルギー Π は式 (6)' を用いて次のように書ける；

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{i=1}^n \Pi_i \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \sum_{i=1}^n \{ E F_i \varepsilon_i^2 + E J_{xi} \kappa_{xi}^2 + 2 E J_{xyi} \kappa_{xi} \kappa_{yi} \\ &\quad + E J_{yi} \kappa_{yi}^2 + G J_{Ti} \phi_i^2 - 2(q_{xi} u_i + q_{yi} v_i \\ &\quad + q_{zi} w_i + m_{zi} \varphi + m_{xi} \phi_{xi} + m_{yi} \phi_{yi}) \} \rho_i d\theta \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left[\bar{Q}_{xi} u_i + \bar{Q}_{yi} v_i + \bar{N}_i w_i + \bar{T}_{zi} \varphi \right. \\ &\quad \left. - \bar{M}_{xi} \phi_{xi} - \bar{M}_{yi} \phi_{yi} \right]_0^{\theta} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

はりの断面を含む平面上、すなわち x - y 平面上に任意に選んで点 S を定める (図-2)。点 S の x , y 方向の変位成分をそれぞれ u_s , v_s とすると、板帯 i の断面の中立点 O_i の変位成分 u_i , v_i は仮定 ㉔, ㉕ のもとに

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u_s - (y_i - y_s) \varphi \\ v_i &= v_s + (x_i - x_s) \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19. a, b)$$

と表わされる。ここに、 x_s , y_s は点 S の x , y 座標を意味する。また、点 S を極とよぶ。

点 O_i の θ 方向の変位成分 w_i は次のように書くことができる；

$$w_i = w_s - (y_i - y_s) \phi_{xs} - (x_i - x_s) \phi_{ys} - W_{si} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 ϕ_{xs} , ϕ_{ys} は各断面における極 S を連ねた軸線について、それぞれ y - θ 面内、 x - θ 面内における接線回転角であり、次式で表わされる；

$$\phi_{xs} = \frac{1}{R_s} (v_s' + w_s), \quad \phi_{ys} = \frac{1}{R_s} u_s' \dots\dots (21. a, b)$$

ここに、 R_s は極 S を連ねた軸線の曲率半径である。

さて、式 (20) における w_s は θ のみの関数を意味し、したがって、式 (20) の右辺の最初の3項は平面保持の法則に従う変位成分に他ならない。平面保持の法則に従わない変位成分は、第4項の W_{si} によって表わされている。この W_{si} は相隣る板帯の接合部におけるはり軸方向変位の連続の条件から、次のように定められる。

まず、点 O_i を通る母線の接線回転角 ϕ_{xi} および ϕ_{yi} と極 S を連ねた軸線の接線回転角 ϕ_{xs} および ϕ_{ys} との関係は、式 (3. a, b), (19), (20), (21) より次式で表わされる；

$$\left. \begin{aligned} \phi_{xi} &= \phi_{xs} + \frac{R_s}{\rho_i} (x_i - x_s) \phi_s + \frac{1}{\rho_i} W_{si} \\ \phi_{yi} &= \phi_{ys} - \frac{R_s}{\rho_i} (y_i - y_s) \phi_s \end{aligned} \right\} (22. a, b)$$

ここに、 ψ_s は極 S を連ねた軸線のねじり率である。すなわち

$$\psi_s = \frac{1}{R_s} \left(\varphi' - \frac{1}{R_s} u_s' \right) \dots\dots\dots (21.c)$$

したがって、式 (2.c) に式 (20), (22) を代入し整理すると、断面上の任意点 $P(x, y)$ の θ 方向変位 w を極 S を連ねた軸線の変形量で次のように表わすことができる；

$$w = w_s - (y - y_s)\phi_{xs} - (x - x_s)\phi_{ys} - \frac{R_s}{\rho_i} r_{si} \eta \psi_s + \frac{\rho}{\rho_i} W_{si} \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 r_{si} は極 S から板帯 i の η 軸におろした垂線の長さである (図-2 (b))。すなわち

$$r_{si} = (x_i - \hat{x}_s) \cos \beta_i + (y_i - y_s) \sin \beta_i \dots\dots (24)$$

結局、相隣の板帯 $i-1$ と板帯 i の接合部における w の連続の条件は、仮定 ④ の考慮のもとに式 (23) を用いて次のように書くことができる；

$$\begin{aligned} w_{i-1,i} &= w_s - (y_{i-1,i} - y_s)\phi_{xs} - (x_{i-1,i} - x_s)\phi_{ys} \\ &\quad - \frac{R_s}{\rho_{i-1}} r_{s,i-1} a_{i-1} \psi_s + \frac{\rho_{i-1,i}}{\rho_{i-1}} W_{s,i-1} \\ &= w_s - (y_{i-1,i} - y_s)\phi_{xs} - (x_{i-1,i} - x_s)\phi_{ys} \\ &\quad + \frac{R_s}{\rho_i} r_{si} a_i' \psi_s + \frac{\rho_{i-1,i}}{\rho_i} W_{si} \end{aligned}$$

すなわち、

$$\left. \frac{W_{s,i-1}}{\rho_{i-1}} - \frac{W_{si}}{\rho_i} = \frac{R_s}{\rho_{i,i-1}} \left(\frac{r_{s,i-1} a_{i-1}}{\rho_{i-1}} + \frac{r_{si} a_i'}{\rho_i} \right) \psi_s \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここに、相隣の板帯 $i-1$ と板帯 i との板厚中央線の交点を $J_{i-1,i}$ とするとき、 $w_{i-1,i}$ は点 $J_{i-1,i}$ の母線方向の変位、 $x_{i-1,i}$, $y_{i-1,i}$ は点 $J_{i-1,i}$ の x, y 座標、 $\rho_{i-1,i}$ は点 $J_{i-1,i}$ を通る母線の曲率半径、 a_{i-1} および a_i' はそれぞれ点 $J_{i-1,i}$ と板帯 $i-1$ の断面の中立点 O_{i-1} および板帯 i の断面の中立点 O_i との距離である (図-4 参照)。

式 (25) より、 W_{si} は常に断面の幾何学量のみ依存する量と極 S を通る軸線のねじり率 ψ_s との積で表わし得ることがわかる。すなわち、前者を ω_{si} で表わすと

$$W_{si} = -\omega_{si} \psi_s \dots\dots\dots (26)$$

この ω_{si} は、式 (20), (26) で定義されることから、Wagner にならって、極 S に関する板帯 i の中立点 O_i における単位そりとよぶことができる。

さて、式 (25) は式 (26) を考慮すると次のように書きかえられる；

$$\left. \frac{\omega_{s,i-1}}{\rho_{i-1}} - \frac{\omega_{si}}{\rho_i} = -\frac{R_s}{\rho_{i-1,i}} \left(\frac{r_{s,i-1} a_{i-1}}{\rho_{i-1}} + \frac{r_{si} a_i'}{\rho_i} \right) \right\} \dots\dots\dots (25)'$$

式 (25)' は ω_{si} に関する差分方程式である。これを解くと、図-2 (a) の断面の場合、 ω_{si} が次のように求まる注4)；

$$\left. \begin{aligned} \omega_{si} &= \frac{\rho_i}{R_s} \frac{B_{\omega s}}{F} - R_s \rho_i \sum_{k=2}^n \left\{ F_k \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\rho_{j,j+1}} \right. \\ &\quad \cdot \left(\frac{r_{sj} a_j}{\rho_j} + \frac{r_{s,j+1} a_{j+1}'}{\rho_{j+1}} \right) \left. \right\} \\ \omega_{si} &= \frac{\rho_i}{\rho_1} \omega_{s1} + R_s \rho_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\rho_{j,j+1}} \\ &\quad \cdot \left(\frac{r_{sj} a_j}{\rho_j} + \frac{r_{s,j+1} a_{j+1}'}{\rho_{j+1}} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27.a,b)$$

ここに、 $B_{\omega s}$ は ω_{si} の基準面を与える意味をもち、次式で定義される断面定数の一種である；

$$B_{\omega s} = R_s \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} F_i \omega_{si} \dots\dots\dots (28)$$

また、 F ははりの全断面積である。すなわち

$$F = \sum_{i=1}^n F_i \dots\dots\dots (29)$$

なお、式 (26) を用いると、式 (20) は次のように書きかえられる；

$$w_i = w_s - (y_i - y_s)\phi_{xs} - (x_i - x_s)\phi_{ys} - \omega_{si} \psi_s \dots\dots\dots (20)'$$

さて、曲りばりの全ポテンシャルエネルギー Π を与える式 (18) は、各構成板帯の中立点 $O_i (i=1, 2, \dots, n)$ の変形量で表わされているが、これを極 S に関する変

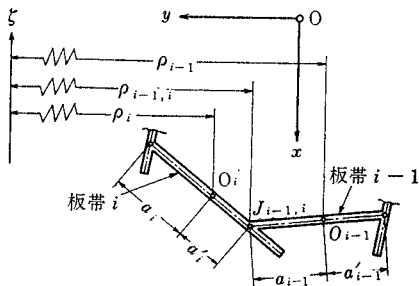


図-4 板帯 $i-1$ と i の接合部

注4) 差分方程式 (25) は次のように解くことができる。まず、 $i=2$ の式から $i=k$ の式まで辺々加えて

$$\left. \frac{1}{\rho_i} \omega_{s1} - \frac{1}{\rho_k} \omega_{sk} = -R_s \sum_{j=2}^k \frac{1}{\rho_{j-1,j}} \cdot \left(\frac{r_{s,j-1} a_{j-1}}{\rho_{j-1}} + \frac{r_{sj} a_j'}{\rho_j} \right), k=2, 3, \dots, n \right\} \dots\dots\dots (vii)$$

この式の両辺に F_k を乗じ、 $n-1$ 個の式を再び辺々加えて、若干変形すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} \omega_{s1} \sum_{k=1}^n F_k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\rho_k} F_k \omega_{sk} \\ = -R_s \sum_{k=2}^n \left\{ F_k \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\rho_{j,j+1}} \right. \\ \left. \cdot \left(\frac{r_{sj} a_j}{\rho_j} + \frac{r_{s,j+1} a_{j+1}'}{\rho_{j+1}} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (viii)$$

したがって、式 (26) が得られる。

形量で表わす。そのために、式 (3), (5), (19), (20)' より両者間の関係式を求める。その結果をまとめて書くと、

$$\left. \begin{aligned} \phi_{xi} &= \phi_{xs} + \frac{R_s}{\rho_i} \left(x_i - x_s - \frac{\omega_{si}}{R_s} \right) \psi_s \\ \phi_{yi} &= \phi_{ys} - \frac{R_s}{\rho_i} (y_i - y_s) \psi_s \\ \psi_i &= \frac{R_s^2}{\rho_i^2} \psi_s \\ \epsilon_i &= \frac{R_s}{\rho_i} \{ \epsilon_s - (y_i - y_s) \kappa_{xs} \\ &\quad - (x_i - x_s) \kappa_{ys} - \omega_{si} \vartheta_s \} \\ \kappa_{xi} &= \frac{R_s}{\rho_i} \kappa_{xs} + \frac{R_s^2}{\rho_i^2} \left(x_i - x_s - \frac{\omega_{si}}{R_s} \right) \vartheta_s \\ \kappa_{yi} &= \frac{R_s}{\rho_i} \kappa_{ys} - \frac{R_s^2}{\rho_i^2} (y_i - y_s) \vartheta_s \\ \vartheta_i &= \frac{R_s^3}{\rho_i^3} \vartheta_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30. a \sim g)$$

ここに、極 S を連ねた軸線について、 ϵ_s はその伸び率、 κ_{xs} , κ_{ys} はその x, y 軸まわりの曲率の変化、

$$\vartheta_s \left(= \frac{1}{R_s} \psi_s' \right)$$

は曲げねじれ率である。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{1}{R_s} (w_s' - v_s), \quad \kappa_{xs} = \frac{1}{R_s^2} (v_s'' + w_s') \\ \kappa_{ys} &= \frac{1}{R_s^2} (u_s'' + R_s \varphi), \quad \vartheta_s = \frac{1}{R_s^2} \left(\varphi'' - \frac{1}{R_s} u_s'' \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31. a \sim d)$$

結局、式 (19), (20)', (22), (30) の諸式を式 (18) に代入して整理すると、曲りばりのポテンシャルエネルギー Π が極 S を連ねた軸線の変形量で次のように表わされる：

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^\theta \left[\frac{R_s}{R_0} E F_0 \epsilon_s^2 - 2 \frac{R_s}{R_0} E (Z_x - F_0 y_s) \epsilon_s \kappa_{xs} \right. \\ &\quad - 2 \frac{R_s}{R_0} E (Z_y - F_0 x_s) \epsilon_s \kappa_{ys} \\ &\quad + \frac{R_s}{R_0} E (J_x - 2 Z_x y_s + F_0 y_s^2) \kappa_{xs}^2 \\ &\quad + 2 \frac{R_s}{R_0} E (J_{xy} - Z_x x_s - Z_y y_s + F_0 x_s y_s) \kappa_{xs} \kappa_{ys} \\ &\quad + \frac{R_s}{R_0} E (J_y - 2 Z_y x_s + F_0 x_s^2) \kappa_{ys}^2 \\ &\quad - 2 E B_{\omega s} \epsilon_s \vartheta_s + 2 E C_{\kappa s} \kappa_{xs} \vartheta_s + 2 E C_{\kappa s} \kappa_{ys} \vartheta_s \\ &\quad + E C_{\omega s} \vartheta_s^2 + G J_{T s} \psi_s^2 - 2 (q_{xs} u_s + q_{ys} v_s \\ &\quad + q_{zs} w_s + m_{zs} \varphi + m_{xs} \phi_{xs} + m_{ys} \phi_{ys} \\ &\quad \left. + m_{\omega s} \psi_s) \right] R_s d\theta \\ &\quad - \left[\bar{Q}_{xs} u_s + \bar{Q}_{ys} v_s + \bar{N}_s w_s + \bar{T}_{zs} \varphi \right. \\ &\quad \left. - \bar{M}_{xs} \phi_{xs} - \bar{M}_{ys} \phi_{ys} - \bar{M}_{\omega s} \psi_s \right]_0^\theta \dots\dots (32) \end{aligned}$$

ここに、変形量の 2 次項の係数は任意に定めた座標系 ($O-x, y$) および極 S に関する曲りばりの断面定数として、次式で定義される；

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \sum_{i=1}^n (R_0 / \rho_i) F_i \\ Z_x &= \sum_{i=1}^n (R_0 / \rho_i) F_i y_i \\ Z_y &= \sum_{i=1}^n (R_0 / \rho_i) F_i x_i \\ J_x &= \sum_{i=1}^n (R_0 / \rho_i) (J_{xi} + F_i y_i^2) \\ J_{xy} &= \sum_{i=1}^n (R_0 / \rho_i) (J_{xyi} + F_i x_i y_i) \\ J_y &= \sum_{i=1}^n (R_0 / \rho_i) (J_y + F_i x_i^2) \\ C_{xs} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{R_s}{\rho_i} F_i \omega_{si} (y_i - y_s) + \left(\frac{R_s}{\rho_i} \right)^2 J_{xi} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(x_i - x_s - \frac{\omega_{si}}{R_s} \right) - \left(\frac{R_s}{\rho_i} \right)^2 J_{xyi} (y_i - y_s) \right\} \\ C_{ys} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{R_s}{\rho_i} F_i \omega_{si} (x_i - x_s) + \left(\frac{R_s}{\rho_i} \right)^2 J_{xyi} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(x_i - x_s - \frac{\omega_{si}}{R_s} \right) - \left(\frac{R_s}{\rho_i} \right)^2 J_{yi} (y_i - y_s) \right\} \\ C_{\omega s} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{R_s}{\rho_i} F_i \omega_{si}^2 + \left(\frac{R_s}{\rho_i} \right)^3 J_{xi} \right. \\ &\quad \cdot \left(x_i - x_s - \frac{\omega_{si}}{R_s} \right) + \left(\frac{R_s}{\rho_i} \right)^3 J_{xyi} \\ &\quad \cdot \left(x_i - x_s - \frac{\omega_{si}}{R_s} \right) (y_i - y_s) \\ &\quad \left. + \left(\frac{R_s}{\rho_i} \right)^3 J_{yi} (y_i - y_s)^2 \right\} \\ J_{T s} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_s}{\rho_i} \right)^3 J_{Ti} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33. a \sim j)$$

$B_{\omega s}$ についてはすでに式 (28) で定義されている。また、式 (32) における外力については次式で計算される；

$$\left. \begin{aligned} q_{xs} &= \sum_{i=1}^n (\rho_i / R_s) q_{xi} \\ q_{ys} &= \sum_{i=1}^n (\rho_i / R_s) q_{yi} \\ q_{zs} &= \sum_{i=1}^n (\rho_i / R_s) q_{zi} \\ m_{xs} &= \sum_{i=1}^n (\rho_i / R_s) \{ m_{xi} - (y_i - y_s) q_{zi} \} \\ m_{ys} &= \sum_{i=1}^n (\rho_i / R_s) \{ m_{yi} - (x_i - x_s) q_{zi} \} \\ m_{zs} &= \sum_{i=1}^n (\rho_i / R_s) \{ m_{zi} + (y_i - y_s) q_{xi} \\ &\quad - (x_i - x_s) q_{yi} \} \\ m_{\omega s} &= \sum_{i=1}^n \{ (\rho_i / R_s) \omega_{si} q_{zi} \\ &\quad - (x_i - x_s - \omega_{si} / R_s) m_{xi} + (y_i - y_s) m_{yi} \} \\ \bar{N} &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_i, \quad \bar{Q}_x = \sum_{i=1}^n \bar{Q}_x i \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_y &= \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{yi}, \quad \bar{M}_{xs} = \sum_{i=1}^n \{ \bar{M}_{xi} + \bar{N}_i (y_i - y_s) \} \\ \bar{M}_{ys} &= \sum_{i=1}^n \{ \bar{M}_{yi} + \bar{N}_i (x_i - x_s) \} \\ \bar{T}_{zs} &= \sum_{i=1}^n \{ \bar{T}_{zi} + \bar{Q}_{xi} (x_i - x_s) - \bar{Q}_{yi} (y_i - y_s) \} \\ \bar{M}_{\omega s} &= \sum_{i=1}^n \{ \bar{N}_i \omega_{si} + (R_s / \rho_i) (x_i - x_s - \omega_{si} / R_s) \\ &\quad \cdot \bar{M}_{xi} - (R_s / \rho_i) (y_i - y_s) \bar{M}_{yi} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34. a \sim c)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{ys} &= \frac{R_s}{R_0} E (Z_y - F_0 x_s) \varepsilon_s \\ &\quad - \frac{R_s}{R_0} E (J_y - 2 Z_y x_s + F_0 x_s^2) \kappa_{ys} \\ &\quad - \frac{R_s}{R_0} E (J_{xy} - Z_x x_s - Z_y y_s + F_0 x_s y_s) \kappa_{xs} \\ &\quad - EC_{ys} \vartheta_s \\ M_{\omega s} &= EB_{\omega s} \varepsilon_s - EC_{xs} \kappa_{xs} - EC_{ys} \kappa_{ys} - EC_{\omega s} \vartheta_s \\ T_{S_{t,s}} &= G J_{T_s} \psi_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37. a \sim e)$$

$q_{xs}, q_{ys}, q_{zs}, m_{xs}, m_{ys}, m_{zs}$ および $m_{\omega s}$ は、極 S を連ねた軸線の単位長さあたりの荷重強度を表わし、 $\bar{N}_s, \bar{Q}_{xs}, \bar{Q}_{ys}, \bar{M}_{xs}, \bar{M}_{ys}, \bar{T}_{zs}$ および $\bar{M}_{\omega s}$ は、はりの両端断面に作用する表面力の合力を表わしている。

式 (37) で表わされる諸量は、式 (36) の被積分項において、変形量の変分 $\delta \varepsilon_s, \delta \kappa_{xs}, \delta \kappa_{ys}, \delta \vartheta_s$ および $\delta \psi_s$ の係数であるから、極 S に関する断面力に他ならない。

なお、式 (33.g~i) で表わされている $C_{xs}, C_{ys}, C_{\omega s}$ は、式 (14) によって、 J_{xi}, J_{yi}, J_{xyi} の代りに式 (15) の $J_{\xi i}$ を用いると、次のようにも書ける；

さて、式 (36) に式 (21.a~c), (31) を代入し、部分積分を行って整理すると

$$\left. \begin{aligned} C_{xs} &= \sum_{i=1}^n \frac{R_s}{\rho_i} \left\{ F_i \omega_{si} y_i + \frac{R_s}{\rho_i} J_{\xi i} \cos \beta_i \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(r_{si} - \frac{\omega_{si}}{R_s} \cos \beta_i \right) \right\} \\ C_{ys} &= \sum_{i=1}^n \frac{R_s}{\rho_i} \left\{ F_i \omega_{si} x_i - \frac{R_s}{\rho_i} J_{\xi i} \sin \beta_i \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(r_{si} - \frac{\omega_{si}}{R_s} \cos \beta_i \right) \right\} \\ C_{\omega s} &= \sum_{i=1}^n \frac{R_s}{\rho_i} \left\{ F_i \omega_{si}^2 + \frac{R_s^2}{\rho_i^2} J_{\xi i} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(r_{si} - \frac{\omega_{si}}{R_s} \cos \beta_i \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35. a \sim c)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \int_0^{\theta} \frac{1}{R_s} [(R_s N_s' - M_{xs}' + R_s^2 q_{zs} + R_s m_{xs}) \delta \omega_s \\ & + (R_s N_s + M_{xs}'' + R_s^2 q_{ys} - R_s m_{xs}') \delta v_s \\ & + (M_{ys}'' - T_{S_{t,s}}' - M_{\omega s}'' / R_s + R_s^2 q_{xs} \\ & - R_s m_{ys}' + m_{\omega s}') \delta u_s + (T_{S_{t,s}}' + M_{\omega s}'' / R_s \\ & + M_{ys} + R_s m_{zs} - m_{\omega s}') R_s \delta \varphi] d\theta \\ & + [(N_s - \bar{N}) \delta \omega_s + (M_{xs}' / R_s - m_{xs} - \bar{Q}_y) \delta v_s \\ & + (M_{ys}' / R_s - T_{S_{t,s}} / R_s - M_{\omega s}' / R_s^2 \\ & - m_{ys} - m_{\omega s} - \bar{Q}_x) \delta u_s + (T_{S_{t,s}} + M_{\omega s}' / R_s \\ & - m_{\omega s} - \bar{T}_{zs}) \delta \varphi - (M_{xs} - \bar{M}_{ys}) \delta \phi_{xs} \\ & - (M_{ys} - \bar{M}_{ys}) \delta \phi_{ys} - (M_{\omega s} - \bar{M}_{\omega s}) \delta \psi_s]_0^{\theta} \end{aligned} \dots\dots\dots (38)$$

系の全ポテンシャルエネルギー Π を知れば、弾性変形のつりあい方程式は、変分問題のオイラーの微分方程式として導かれる。まず、式 (32) の第一変分をとると

を得る。したがって、 $\delta \Pi = 0$ より変分 $\delta \omega_s, \delta v_s, \delta u_s, \delta \varphi$ の任意性と境界項の消滅する条件から、つり合いの微分方程式と、それに随伴する境界条件が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_0^{\theta} (N_s \delta \varepsilon_s - M_{xs} \delta \kappa_{xs} - M_{ys} \delta \kappa_{ys} - M_{\omega s} \delta \vartheta_s \\ & + T_{S_{t,s}} \delta \psi_s - q_{xs} \delta u_s - q_{ys} \delta v_s - q_{zs} \delta \omega_s \\ & - m_{xs} \delta \phi_{xs} - m_{ys} \delta \phi_{ys} - m_{\omega s} \delta \psi_s) R_s d\theta \\ & - [\bar{Q}_x \delta u_s + \bar{Q}_y \delta v_s + \bar{N} \delta \omega_s + \bar{T}_{zs} \delta \varphi \\ & - \bar{M}_{xs} \delta \phi_{xs} - \bar{M}_{ys} \delta \phi_{ys} - \bar{M}_{\omega s} \delta \psi_s]_0^{\theta} \dots (36) \end{aligned}$$

まず、つり合いの微分方程式として

$$\left. \begin{aligned} N_s' - \frac{1}{R_s} M_{xs}' + R_s q_{zs} + m_{xs} &= 0 \\ M_{xs}'' + R_s N_s + R_s^2 q_{ys} - R_s m_{xs}' &= 0 \\ M_{ys}'' - T_{S_{t,s}}' - \frac{M_{\omega s}''}{R_s} + R_s^2 q_{xs} - R_s m_{ys}' + m_{\omega s}' &= 0 \\ T_{S_{t,s}}' + \frac{M_{\omega s}''}{R_s} + M_{ys} + R_s m_{zs} - m_{\omega s}' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} N_s &= \frac{R_s}{R_0} E F_0 \varepsilon_s - \frac{R_s}{R_0} E (Z_x - F_0 y_s) \kappa_{xs} \\ &\quad - \frac{R_s}{R_0} E (Z_y - F_0 x_s) \kappa_{ys} - EB_{\omega s} \vartheta_s \\ M_{xs} &= \frac{R_s}{R_0} E (Z_x - F_0 y_s) \varepsilon_s \\ &\quad - \frac{R_s}{R_0} E (J_x - 2 Z_x y_s + F_0 y_s^2) \kappa_{xs} \\ &\quad - \frac{R_s}{R_0} E (J_{xy} - Z_x x_s - Z_y y_s + F_0 x_s y_s) \kappa_{ys} \\ &\quad - EC_{xs} \vartheta_s \end{aligned} \right\}$$

なお、ここで式 (36) の境界項に注目すると、せん断力およびねじりモーメントは、次式で表わし得ることがわかる；

$$\left. \begin{aligned} Q_{xs} &= \frac{1}{R_s} (M_{ys}' - T_{zs}) - m_{ys} \\ Q_{ys} &= \frac{1}{R_s} M_{xs}' - m_{xs} \\ T_{zs} &= T_{S_{t,s}} + \frac{1}{R_s} M_{\omega s}' - m_{\omega s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40. a \sim c)$$

ちなみに、式 (39) は式 (40) を考慮して書き直すところとなる；

$$\left. \begin{aligned} N_s' - Q_{y_s} + R_s q_{z_s} &= 0 \\ Q_{y_s}' + N_s + R_s q_{y_s} &= 0 \\ Q_{x_s}' + R_s q_{x_s} &= 0 \\ T_{z_s}' + M_{y_s} + R_s m_{z_s} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41. a \sim d)$$

これらは微小角 $d\theta$ に挟まれる曲りばりの素片に作用するすべての力に関する 6 個のつり合い条件式のうちの 4 個に相当する。残りの 2 個のつり合い式はすでに書かれている式 (40. a, b) にほかならない。なお、式 (40. c) は力のつり合い条件からは得られない。

次に、境界条件は式 (38) の境界項の消滅する条件から、式 (40) の考慮のもとに、はりの両端部 $\theta=0$ および $\theta=\theta$ に対して

$$\left. \begin{aligned} w_s &= C_1 \text{ あるいは } N_s = \bar{N} \\ v_s &= C_2 \text{ あるいは } Q_{y_s} = \bar{Q}_y \\ u_s &= C_3 \text{ あるいは } Q_{x_s} = \bar{Q}_x \\ \varphi &= C_4 \text{ あるいは } T_{z_s} = \bar{T}_{z_s} \\ \phi_{x_s} &= C_5 \text{ あるいは } M_{x_s} = \bar{M}_{x_s} \\ \phi_{y_s} &= C_6 \text{ あるいは } M_{y_s} = \bar{M}_{y_s} \\ \phi_s &= C_7 \text{ あるいは } M_{\omega_s} = \bar{M}_{\omega_s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42. a \sim g)$$

ここに、左側の列は拘束境界条件（または変位境界条件）を表わし、右側の列は自然境界条件（または力学的境界条件）である。なお、 $C_1 \sim C_7$ は定数を意味する。

極 S を連ねた軸線の変形量 $\epsilon_s, \kappa_{x_s}, \kappa_{y_s}, \phi_s$ に関する微分方程式は、式 (39. a~d) に式 (37. a~e) を代入し、 $\phi_s = \phi_s' / R_s$ を考慮して整理すると次のようになる；

$$\left. \begin{aligned} E(F_0 R_0 - Z_x) R_s \epsilon_s' &+ E\{J_x - Z_x(R_0 + y_s) + F_0 R_s y_s\} R_s \kappa_{x_s}' \\ &+ E\{J_{xy} - Z_x x_s - Z_y R_0 + F_0 R_0 x_s\} R_s \kappa_{y_s}' \\ &- E\left(B_{\omega_s} - \frac{C_{x_s}}{R_s}\right) R_0 \phi_s'' + R_0 R_s^2 q_{z_s} \\ &+ R_0 R_s m_{x_s} = 0 \\ E(Z_x - F_0 y_s) R_s \epsilon_s'' + E F_0 R_s^2 \epsilon_s &- E\{J_x - 2 Z_x y_s + F_0 y_s^2\} R_s \kappa_{x_s}'' \\ &- E(Z_x - F_0 y_s) R_s^2 \kappa_{x_s} \\ &- E\{J_{xy} - Z_x x_s - Z_y y_s + F_0 x_s y_s\} R_s \kappa_{y_s}'' \\ &- E(Z_y - F_0 x_s) R_s^2 \kappa_{y_s} - \frac{R_0}{R_s} E C_{x_s} \phi_s'' \\ &- E B_{\omega_s} R_0 \phi_s' + R_0 R_s^2 q_{y_s} - R_0 R_s m_{x_s}' = 0 \\ E\{(Z_y - F_0 x_s) R_s^2 - E B_{\omega_s} R_0\} \epsilon_s'' &- \{E\{J_{xy} - Z_x x_s - Z_y y_s + F_0 x_s y_s\} R_s^2 \\ &- E C_{x_s} R_0\} \kappa_{x_s}'' - \{E\{J_y - 2 Z_y x_s \\ &+ F_0 x_s^2\} R_s^2 - E C_{y_s} R_0\} \kappa_{y_s}'' \\ &- E\left(\frac{C_{\omega_s}}{R_s} - C_{y_s}\right) R_0 \phi_s''' - G J_{TS} R_0 R_s \phi_s' \\ &+ R_0 R_s^3 q_{x_s} - R_0 R_s^2 m_{y_s}' + R_0 R_s m_{\omega_s}' = 0 \\ E B_{\omega_s} R_0 R_s \epsilon_s'' + E(Z_y - F_0 x_s) R_s^2 \epsilon_s &- E C_{x_s} R_0 \kappa_{x_s}'' - E\{J_{xy} - Z_x x_s - Z_y y_s \\ &+ F_0 x_s y_s\} R_s^2 \kappa_{x_s} - E C_{y_s} R_0 \kappa_{y_s}'' \end{aligned} \right\}$$

表—1 任意座標で表わした曲りばりの弾性方程式：式 (44. a~d)

$$D = \frac{d}{d\theta}$$

w_s	v_s	u_s	$R_s \varphi$	1
$\frac{R_s}{R_0} E\{J_x + F_0 R_0^2 - 2 Z_x R_0\} D^2$	$\frac{R_s}{R_0} E\{J_x - Z_x(R_0 + y_s) + F_0 R_0 y_s\} D^3 - \frac{R_s}{R_0} E(F_0 R_0 - Z_x) R_s D$	$E\left\{\frac{R_s}{R_0} (J_{xy} - Z_x x_s - Z_y y_s + F_0 R_0 x_s) + \left(B_{\omega_s} - \frac{C_{x_s}}{R_s}\right)\right\} D^3$	$-E\left(B_{\omega_s} - \frac{C_{x_s}}{R_s}\right) D^3 + \frac{R_s}{R_0} E\{J_{xy} - Z_x x_s - Z_y R_0 + F_0 R_0 x_s\} D$	$= -R_s^4 q_{z_s} - R_s^2 m_{x_s}$
$\frac{R_s}{R_0} E\{J_x - Z_x(R_0 + y_s) + F_0 R_0 y_s\} D^3 + \frac{R_s}{R_0} E(Z_x - F_0 R_0) R_s D$	$\frac{R_s}{R_0} E\{J_x - 2 Z_x y_s + F_0 y_s^2\} D^4 + 2 \frac{R_s}{R_0} E(Z_x - F_0 y_s) R_s D^2 + \frac{R_s}{R_0} E F_0 R_s^2$	$E\left\{\frac{R_s}{R_0} (J_{xy} - Z_x x_s - Z_y y_s + F_0 x_s y_s) - \frac{C_{x_s}}{R_s}\right\} D^4 + E\left\{\frac{R_s}{R_0} (Z_y - F_0 x_s) R_s - B_{\omega_s}\right\} D^2$	$\frac{1}{R_s} E C_{x_s} D^4 + E\left\{\frac{R_s}{R_0} (J_{xy} - Z_x x_s - Z_y y_s + F_0 x_s y_s) - B_{\omega_s}\right\} D^2 + \frac{R_s}{R_0} E(Z_y - F_0 x_s) R_s$	$= R_s^4 q_{y_s} - R_s^2 m_{x_s}'$
$E\left\{\frac{R_s}{R_0} (J_{xy} - Z_x x_s - Z_y R_0 + F_0 R_0 x_s) + B_{\omega_s} - \frac{C_{x_s}}{R_s}\right\} D^3$	$E\left\{\frac{R_s}{R_0} (J_{xy} - Z_x x_s - Z_y y_s + F_0 x_s y_s) - \frac{C_{x_s}}{R_s}\right\} D^4 + E\left\{\frac{R_s}{R_0} (Z_y - F_0 x_s) R_s - B_{\omega_s}\right\} D^2$	$E\left\{\frac{R_s}{R_0} (J_y - 2 Z_y x_s + F_0 x_s^2) - \frac{1}{R_s} \left(2 C_{y_s} - \frac{C_{\omega_s}}{R_s}\right)\right\} D^4 - G J_{TS} D^2$	$\frac{1}{R_s} E\left(C_{y_s} - \frac{C_{\omega_s}}{R_s}\right) D^4 + \left\{\frac{R_s}{R_0} E\{J_y - 2 Z_y x_s + F_0 x_s^2\} + G J_{TS} - \frac{E C_{y_s}}{R_s}\right\} D^2$	$= R_s^4 q_{x_s} - R_s^2 m_{y_s}' + R_s^2 m_{\omega_s}'$
$-E\left(B_{\omega_s} - \frac{C_{x_s}}{R_s}\right) D^3 + \frac{R_s}{R_0} E\{J_{xy} - Z_x x_s - Z_y R_0 + F_0 R_0 x_s\} D$	$\frac{1}{R_s} E C_{x_s} D^4 + E\left\{\frac{R_s}{R_0} (J_{xy} - Z_x x_s - Z_y y_s + F_0 x_s y_s) - B_{\omega_s}\right\} D^2 + \frac{R_s}{R_0} E(Z_y - F_0 x_s) R_s$	$\frac{1}{R_s} E\left(C_{y_s} - \frac{C_{\omega_s}}{R_s}\right) D^4 + \left\{\frac{R_s}{R_0} E\{J_y - 2 Z_y x_s + F_0 x_s^2\} + G J_{TS} - \frac{E C_{y_s}}{R_s}\right\} D^2$	$\frac{1}{R_s^2} E C_{\omega_s} D^4 - \left(G J_{TS} - 2 \frac{E C_{y_s}}{R_s}\right) D^2 + \frac{R_s}{R_0} E\{J_y - 2 Z_y x_s + F_0 x_s^2\}$	$= R_s^2 m_{z_s} - R_s^2 m_{\omega_s}'$

$$\left. \begin{aligned} & -E(J_y - 2Z_y x_s + F_0 x_s^2) R_s^2 \kappa_{ys} \\ & - \frac{R_0}{R_s} EC_{\omega s} \phi_s''' + (GJ_{TS} R_s - EC_{ys}) R_0 \phi_s' \\ & + R_0 R_s^2 m_{zs} - R_0 R_s m_{\omega s}' = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43.a \sim d)$$

さらに、式 (43) に式 (21.c), (31) を代入すると、任意座標で表わした曲りばりの弾性方程式が u_s, v_s, w_s, φ に関し表—1 [式 (44.a~d)] のように得られる。

4. 主座標で表わした曲りばりの基本式

3. においては、任意座標すなわち、任意に定めた点 O を原点とする座標 ($O-x, y$), 任意に選んだ極 S , および基準面を任意に設定した各板帯の中立点の単位そり ω_{si} 等に基づいて解析を行った。しかしそれらは次式を満たすように定めることができる；

$$\left. \begin{aligned} Z_x = 0, Z_y = 0, B_{\omega s} = 0, C_{xs} = 0, C_{ys} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45.a \sim e)$$

これらの条件を満たす座標すなわち主座標を用いると、式の構成が単純化され、実際計算には有利である。

式 (45.a,b) から x, y 座標の新しい原点すなわち断面の中立点 O の位置が定められる。いま、任意に定めた点 D を原点とし、 x, y 軸に平行な \bar{x}, \bar{y} 軸をもつ直角座標系 ($D-\bar{x}, \bar{y}$) における中立点 O の座標を \bar{x}_0, \bar{y}_0 , 板帯 i の断面の中立点 O_i の座標を \bar{x}_i, \bar{y}_i とすると、式 (33.b,c), (45.a,b) より

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n (1/\rho_i) F_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n (1/\rho_i) F_i}, \bar{y}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (1/\rho_i) F_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n (1/\rho_i) F_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

また、中立点 O を連ねた軸線の曲率半径 R_0 は

$$R_0 = \frac{F}{\sum_{i=1}^n (1/\rho_i) F_i} \dots\dots\dots (47)$$

さらに、式 (33.a), (47) より次式が成り立つ；

$$F_0 = F \dots\dots\dots (48)$$

次に、 ω_{si} の基準面を定める式 (45.c) の条件は、式 (27) からわかるように、 ω_{si} が self-equilibrium 系を構成するための条件にほかならない。以下、極 S はこの条件を満たすものとする。

式 (45.d,e) からは、主極すなわちせん断中心 S の位置が特定点として定められる。

まず、極 S と異なる任意な極 A をはりの断面を含む平面上に選ぶ。中立点 O を原点とする新しい x, y 座標における極 A の座標を x_A, y_A , 極 A の x, y 方向の変位成分を u_A, v_A とすると

$$\left. \begin{aligned} u_s &= u_A - (y_s - y_A) \varphi \\ v_s &= v_A + (x_s - x_A) \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

が成り立つ。

一方、式 (20)' と同様に次式が書ける；

$$\left. \begin{aligned} w_i &= w_A - (y_i - y_A) \phi_{xA} \\ & - (x_i - x_A) \phi_{yA} - \omega_{Ai} \psi_A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

ここに、 w_A は θ のみの関数を意味し、 ω_{Ai} は板帯 i の断面の中立点 O_i の極 A に関する単位そりで self-equilibrium 系の条件式 (45.c) を満たすものとする。 ϕ_{xA}, ϕ_{yA} および ψ_A はそれぞれ極 A を連ねた軸線の $y-\theta$ 面内、 $x-\theta$ 面内の接線回転角およびねじり率であり、これらと u_A, v_A, w_A, φ との関係式は式 (21.a~c) において、サフィクス s の代りに A としたものである。ここで、式 (20)' と (50) の両式より、式 (45.a~c) の条件を考慮して、次の 2 つの関係式を導くことができる；

$$\left. \begin{aligned} w_s + y_s \phi_{xs} + x_s \phi_{ys} &= w_A + y_A \phi_{xA} + x_A \phi_{yA} \\ y_i \phi_{xs} + x_i \phi_{ys} + \omega_{si} \psi_s &= y_i \phi_{xA} + x_i \phi_{yA} + \omega_{Ai} \psi_A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51.a, b)$$

式 (51.a) より、式 (21.a~c), (49) を考慮して、 w_s と w_A との関係が次のように得られる；

$$\left. \begin{aligned} w_s &= w_A - (y_s - y_A) \phi_{xA} - (x_s - x_A) \phi_{yA} \\ & - \frac{R_A}{R_0} (x_s y_A - x_A y_s) \psi_A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

以上、式 (49), (52) を知れば、任意に定めた極 S と A の両軸線の変形量間の関係が次のように求まる；

$$\left. \begin{aligned} \phi_{xs} &= \phi_{xA} + \frac{R_A^2}{R_0 R_s} \left(x_s - \frac{R_s}{R_A} x_A \right) \psi_A \\ \phi_{ys} &= \phi_{yA} - \frac{R_A}{R_s} (y_s - y_A) \psi_A \\ \psi_s &= \frac{R_A^2}{R_s^2} \psi_A \\ \epsilon_s &= \frac{R_A}{R_s} \left\{ \epsilon_A - (y_s - y_A) \kappa_{xA} - (x_s - x_A) \kappa_{yA} \right. \\ & \left. - \frac{R_A}{R_0} (x_s y_A - x_A y_s) \vartheta_A \right\} \\ \kappa_{xs} &= \frac{R_A}{R_s} \kappa_{xA} + \frac{R_A^3}{R_0 R_s^2} \left(x_s - \frac{R_s}{R_A} x_A \right) \vartheta_A \\ \kappa_{ys} &= \frac{R_A}{R_s} \kappa_{yA} - \frac{R_A^2}{R_s^2} (y_s - y_A) \vartheta_A \\ \vartheta_s &= \frac{R_A^3}{R_s^3} \vartheta_A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53.a \sim g)$$

次に、式 (51.b) より、式 (53.a~c) を用いて

$$\left. \begin{aligned} \omega_{si} &= \frac{R_s^2}{R_A^2} \omega_{Ai} + \frac{R_s}{R_A} x_i (y_s - y_A) \\ & - \frac{R_s}{R_0} y_i \left(x_s - \frac{R_s}{R_A} x_A \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

を得る。 ω_{si} と ω_{Ai} との関係を知れば、これを式 (33.g~i) に代入して面倒な演算ののち、次の諸式が得られる；

$$\left. \begin{aligned} C_{xs} &= \frac{R_s^3}{R_A^3} C_{xA} - \frac{R_s^2}{R_0^2} \left(x_s - \frac{R_s}{R_0} x_A \right) J_x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{R_s^2}{R_0 R_A} (y_s - y_A) J_{xy} \\
 C_{ys} = & \frac{R_s^3}{R_A^3} C_{yA} - \frac{R_s^2}{R_0^2} \left(x_s - \frac{R_s}{R_0} x_A \right) J_{xy} \\
 & + \frac{R_s^2}{R_0 R_A} (y_s - y_A) J_y \\
 C_{\omega s} = & \frac{R_s^5}{R_A^5} C_{\omega A} - 2 \frac{R_s^4}{R_0 R_s^3} \left(x_s - \frac{R_s}{R_0} x_A \right) C_{xA} \\
 & + 2 \frac{R_s^4}{R_A^4} (y_s - y_A) C_{yA} \\
 & + \frac{R_s^3}{R_A^3} \left(x_s - \frac{R_s}{R_A} x_A \right)^2 J_x \\
 & + \frac{R_s^3}{R_0 R_A^2} (y_s - y_A)^2 J_y \\
 & - 2 \frac{R_s^3}{R_0^2 R_A} \left(x_s - \frac{R_s}{R_A} x_A \right) (y_s - y_A) J_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{55.a~c}$$

ここに、 C_{xA} , C_{yA} , $C_{\omega A}$ は極 A に関する断面定数であり、式 (33.g~i) において、サフィクス s の代りに A を用いた式で計算することができる。

式 (55.a,b) に式 (45.d,e) の条件を適用すると、主極すなわちせん断中心 S の座標の計算式が次式のように得られる；

$$\begin{aligned}
 x_s - x_A = & \frac{R_0^2}{R_A^2} \\
 & \frac{C_{xA} \left(J_y - \frac{x_A}{R_0} J_{xy} \right) - C_{yA} \left(J_{xy} - \frac{x_A}{R_0} J_x \right)}{J_x \left(J_y - \frac{R_0}{R_A^2} C_{yA} \right) - J_{xy} \left(J_{xy} - \frac{R_0}{R_A^2} C_{xA} \right)} \\
 y_s - y_A = & - \frac{R_0}{R_A} \\
 & \frac{C_{yA} J_x - C_{xA} J_{xy}}{J_x \left(J_y - \frac{R_0}{R_A^2} C_{yA} \right) - J_{xy} \left(J_{xy} - \frac{R_0}{R_A^2} C_{xA} \right)} \\
 R_s = & R_A \\
 & \frac{J_x J_y - J_{xy}^2}{J_x \left(J_y - \frac{R_0}{R_A^2} C_{yA} \right) - J_{xy} \left(J_{xy} - \frac{R_0}{R_A^2} C_{xA} \right)}
 \end{aligned}
 \tag{56.a~c}$$

なお、式 (55.c) は任意な極 S に関する式であるが、主極 S に対しては、式 (45.d,e), (55.a,b) を考慮して次式を得る；

$$\begin{aligned}
 C_{\omega s} = & \frac{R_s^5}{R_A^5} C_{\omega A} - \frac{R_s^4}{R_0 R_A^3} \left(x_s - \frac{R_s}{R_A} x_A \right) C_{xA} \\
 & + \frac{R_s^4}{R_A^4} (y_s - y_A) C_{yA} \dots\dots\dots (57)
 \end{aligned}$$

以上の式 (52)~(57) の諸式は、すでに文献 11) において別の方法で誘導されているものと等価である。

断面力と変形量との関係を示す式 (37) に、式 (45) の条件を適用すると、主座標を用いたせん断中心 S に関する断面力が次のように書かれる；

$$N_s = \frac{R_s}{R_0} EF (\epsilon_s + y_s \kappa_{xs} + x_s \kappa_{ys})$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_{xs} = & - \frac{R_s}{R_0} EF y_s (\epsilon_s + y_s \kappa_{xs} + x_s \kappa_{ys}) \\
 & - \frac{R_s}{R_0} E (J_x \kappa_{xs} + J_{xy} \kappa_{ys}) \\
 M_{ys} = & - \frac{R_s}{R_0} EF x_s (\epsilon_s + y_s \kappa_{xs} + x_s \kappa_{ys}) \\
 & - \frac{R_s}{R_0} E (J_{xy} \kappa_{xs} + J_y \kappa_{ys}) \\
 M_{\omega s} = & - EC_{\omega s} \vartheta_s \\
 T_{S_i, v} = & GJ_{Ts} \phi_s
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58.a~e)$$

一方、極を中立点 O に選ぶと、式 (36.a~c) よりサフィクス s を O に代えて、中立点 O に関する断面力 N ($\equiv N_{x0}$), M_x ($\equiv M_{x0}$), M_y ($\equiv M_{y0}$) が次のように書ける；

$$\left. \begin{aligned}
 N = & EF \epsilon_0 \\
 M_x = & -EJ_x \kappa_{x0} - EJ_{xy} \kappa_{y0} - EC_{x0} \vartheta_0 \\
 M_y = & -EJ_{xy} \kappa_{x0} - EJ_y \kappa_{y0} - EC_{y0} \vartheta_0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59.a~c)$$

ここに、 ϵ_0 , κ_{x0} , κ_{y0} および ϑ_0 は、それぞれ中立点 O を連ねた軸線の伸び率、 y - θ 面内、 x - θ 面内における曲率の変化および曲げねじれ率を表わし、式 (31) で S を O とする量である。

任意点 A を中立点 O に一致させ、式 (53.e~g), (55.a,b), (45.d,e) を考慮すると、式 (59) の中立点 O に関する断面力が、せん断中心 S を連ねた軸線の変形量で表わされる；

$$\left. \begin{aligned}
 N = & \frac{R_s}{R_0} EF (\epsilon_s + y_s \kappa_{xs} + x_s \kappa_{ys}) \\
 M_x = & - \frac{R_s}{R_0} (EJ_x \kappa_{xs} + EJ_{xy} \kappa_{ys}) \\
 M_y = & - \frac{R_s}{R_0} (EJ_{xy} \kappa_{xs} + EJ_y \kappa_{ys})
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60.a~c)$$

なお、式 (60) を知れば、式 (58.a~c) より

$$\left. \begin{aligned}
 N_s = & N \\
 M_{xs} = & M_x - y_s N \\
 M_{ys} = & M_y - x_s N
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61.a~c)$$

を得る。したがって、式 (40.a,b) のせん断力は

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{xs} = & \frac{1}{R_s} (M_y' - x_s N' - T_{zs}) - m_{ys} \\
 Q_{ys} = & \frac{1}{R_s} (M_x' - y_s N') - m_{xs}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (62)$$

また、力のつり合いの微分方程式 (39) は中立点 O に関する断面力 N , M_x , M_y とせん断中心 S に関する断面力 $T_{S_i, s}$, $M_{\omega s}$ を用いて次のように表わされる；

$$\left. \begin{aligned}
 N' - \frac{1}{R_s} (M_x' - y_s N') + R_s q_{zs} + m_{xs} = & 0 \\
 M_x'' - y_s N'' + R_s N + R_s^2 q_{ys} - R_s m_{xs}' = & 0 \\
 M_y'' - x_s N'' - T_{S_i, s}' - \frac{M_{\omega s}''}{R_s} + R_s^2 q_{xs} - & R_s m_{ys}' + m_{\omega s}' = 0
 \end{aligned} \right\}$$

表-2 主座標で表わした曲りばりの弾性方程式：式 (64.a~d)

$$D = \frac{d}{d\theta}$$

w_s	v_s	u_s	$R_s\varphi$	1
$\frac{R_s}{R_0} E(J_x + FR_0^2) D^2$	$\frac{R_s}{R_0} E(J_x + Fy_s R_0) D^2$ $- EFR_s^2 D$	$\frac{R_s}{R_0} E(J_{xy} + Fx_s R_0) D^2$	$\frac{R_s}{R_0} E(J_{xy} + Fx_s R_0) D$	$= -R_s^4 q_{zs}$ $- R_s^2 m_{xs}$
$\frac{R_s}{R_0} E(J_x + Fy_s R_0) D^2$ $- EFR_s^2 D$	$\frac{R_s}{R_0} E(J_x + Fy_s^2) D^4$ $-\frac{R_s}{R_0} E F y_s R_s D^2$ $+\frac{R_s}{R_0} E F R_s^2$	$\frac{R_s}{R_0} E(J_{xy} + Fx_s y_s) D^4$ $-\frac{R_s}{R_0} E F x_s R_s D^2$	$\frac{R_s}{R_0} E(J_{xy} + Fx_s y_s) D^2$ $-\frac{R_s}{R_0} E F x_s R_s$	$= R_s^4 q_{ys}$ $- R_s^2 m_{xs}'$
$\frac{R_s}{R_0} E(J_{xy} + Fx_s R_0) D^2$	$\frac{R_s}{R_0} E(J_{xy} + Fx_s y_s) D^4$ $-\frac{R_s}{R_0} E F x_s R_s D^2$	$E \left\{ \frac{R_s}{R_0} (J_y + Fx_s^2) + \frac{C_{ws}}{R_s^2} \right\} D^4 - GJ_{TS} D^2$	$-\frac{1}{R_s^2} EC_{ws} D^4$ $+\left\{ \frac{R_s}{R_0} E(J_y + Fx_s^2) + GJ_{TS} \right\} D^2$	$= R_s^4 q_{xs}$ $- R_s^2 m_{ys}'$ $+ R_s^2 m_{ws}'$
$\frac{R_s}{R_0} E(J_{xy} + Fx_s R_0) D$	$\frac{R_s}{R_0} E(J_{xy} + Fx_s y_s) D^2$ $-\frac{R_s}{R_0} E F x_s R_s$	$-\frac{1}{R_s^2} EC_{ws} D^4$ $+\left\{ \frac{R_s}{R_0} E(J_y + Fx_s^2) + GJ_{TS} \right\} D^2$	$\frac{1}{R_s^2} EC_{ws} D^4 - GJ_{TS} D^2$ $+\frac{R_s}{R_0} E(J_y + Fx_s^2)$	$= R_s^2 m_{zs}$ $- R_s^2 m_{ws}'$

$$T_{S1,s} + \frac{M_{ws}''}{R_s} + M_y - x_s N + R_s m_{zs} - m_{ws}' = 0 \quad \dots\dots\dots (63.a \sim d)$$

最後に、変形量に関する曲りばりの支配方程式は、主座標を用いて表わせば、表-2の式(64)のように書かれる。これは、式(63)に式(60)、(58.d,e)を代入し、さらに式(21.c)、(31)を用いても得られるし、また表-1の式(44)に式(45)の直交条件を直接適用しても得られることはいうまでもない。

なお、この場合の境界条件は、式(42)に対し式(61)、(34.h,k,l)を考慮して、次のように表わされる；はりの両端部 $\theta=0$ および $\theta=\theta$ に対して

$$\left. \begin{aligned} w_s &= C_1 \text{ あるいは } N = \bar{N} \\ v_s &= C_2 \text{ あるいは } Q_{ys} = \bar{Q}_y \\ u_s &= C_3 \text{ あるいは } Q_{xs} = \bar{Q}_x \\ \varphi_s &= C_4 \text{ あるいは } T_{zs} = \bar{T}_{zs} \\ \phi_{xs} &= C_5 \text{ あるいは } M_x = \bar{M}_x \\ \phi_{ys} &= C_6 \text{ あるいは } M_y = \bar{M}_y \\ \phi_s &= C_7 \text{ あるいは } M_{ws} = \bar{M}_{ws} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (65.a \sim g)$$

ここに、 $C_1 \sim C_7$ は定数を意味し、また

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_x &= \sum_{i=1}^n (\bar{M}_{xi} + \bar{N}_i y_i) \\ \bar{M}_y &= \sum_{i=1}^n (\bar{M}_{yi} + \bar{N}_i x_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (66.a, b)$$

5. 応力と断面力

(1) 直応力と断面力

板帯 i 上の任意点 $P(\bar{x}, y)$ における母線方向の直応力 σ_θ は、式(4.a)に式(29.a~c)を代入し、 $\sigma_\theta =$

$E\varepsilon_\theta$ を考慮すると、次のように表わされる；

$$\sigma_\theta = \frac{R_s}{\rho} E \left[\varepsilon_s - (y_i + y - y_s) \kappa_{xs} - (x_i + \bar{x} - x_s) \kappa_{ys} - \left\{ \omega_{si} + \frac{R_s}{\rho_i} \bar{y} \left(x_i - x_s - \frac{\omega_{si}}{R_s} \right) - \frac{R_s}{\rho_i} \bar{x} (y_i - y_s) \right\} \vartheta_s \right] \dots\dots\dots (67)$$

ここで、式(53.d)より得られる中立点 O を連ねた軸線の伸び率 ε_0 に関する式

$$\varepsilon_0 = \frac{R_s}{R_0} (\varepsilon_s + y_s \kappa_{xs} + x_s \kappa_{ys}) \dots\dots\dots (68)$$

を用い、また薄肉の前提にしたがい、直応力の板厚方向の変化を無視する(すなわち、 $\bar{x} = -\eta \sin \beta_i$, $y = \eta \cos \beta_i$ とする)と、式(67)は次のようになる；

$$\sigma_\theta = \frac{R_0}{\rho} E \varepsilon_0 - \frac{R_s}{\rho} E (y_i \kappa_{xs} + x_i \kappa_{ys} + \omega_{si} \vartheta_s) - \frac{R_s}{\rho} \left\{ \kappa_{xs} \cos \beta_i - \kappa_{ys} \sin \beta_i + \frac{R_s}{\rho_i} \left(r_{si} - \frac{\omega_{si}}{R_s} \cos \beta_i \right) \vartheta_s \right\} \eta \dots\dots\dots (67)'$$

一方、板帯 i の断面に作用する直応力の合力として次式を定義する；

$$N_i = \int_{F_i} \sigma_\theta dF_i, \quad M_i = \int_{F_i} \sigma_\theta \eta dF_i \dots\dots\dots (69.a, b)$$

式(69)に式(67)'を代入し、 ε, η 軸が板帯 i の断面の主軸に一致すること、および式(15)を考慮すると

$$\left. \begin{aligned} N_i &= E F_i \left\{ \frac{R_0}{\rho_i} \varepsilon_0 - \frac{R_s}{\rho_i} (y_i \kappa_{xs} + x_i \kappa_{ys} + \omega_{si} \vartheta_s) \right\} \\ M_i &= -\frac{R_s}{\rho_i} E J_{\xi i} \left\{ \kappa_{xs} \cos \beta_i - \kappa_{ys} \sin \beta_i + \frac{R_s}{\rho_i} \left(r_{si} - \frac{\omega_{si}}{R_s} \cos \beta_i \right) \vartheta_s \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (70.a, b)$$

を得る。したがって、式 (67)', (70) より次式が求まる ;

$$\sigma_\theta = \frac{\rho_i}{\rho} \left(\frac{N_i}{F_i} + \frac{M_i}{J_{\xi i}} \eta \right) \dots\dots\dots (71)$$

次に、全断面の断面力を次式で定義する ;

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_F \sigma_\theta dF, & M_x &= \int_F \sigma_\theta y dF \\ M_y &= \int_F \sigma_\theta x dF, & M_{\omega_s} &= \int_F \sigma_\theta \omega_s dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (72.a \sim d)$$

ここに、 x, y は式 (45.a,b) を満たす主座標であり、 ω_s は板帯 i の任意点における単位そりを表わし、式 (23), (26) より、次のように書ける ;

$$\omega_s = \omega_{si} + \frac{R_s}{\rho_i} \left(r_{si} - \frac{\omega_{si}}{R_s} \cos \beta_i \right) \eta \dots\dots\dots (73)$$

あるいは

$$\omega_s = \frac{\rho}{\rho_i} \omega_{si} + \frac{R_s}{\rho_i} r_{si} \eta \dots\dots\dots (73)'$$

式 (72) の全断面の断面力を式 (69) の各板帯の断面力で書き表わすと、次のようになる ;

$$\left. \begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^n N_i \\ M_x &= \sum_{i=1}^n (N_i y_i + M_i \cos \beta_i) \\ M_y &= \sum_{i=1}^n (N_i x_i - M_i \sin \beta_i) \\ M_{\omega_s} &= \sum_{i=1}^n \left\{ N_i \omega_{si} + \frac{R_s}{\rho_i} M_i \left(r_{si} - \frac{\omega_{si}}{R_s} \cos \beta_i \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (74.a \sim d)$$

ここで、式 (70) を代入し、式 (33.a~f), (35), (45), (48) を考慮すると式 (72) で定義された断面力と中立点およびせん断中心を連ねた軸線の変形量との関係式として

$$\begin{aligned} N &= EF \epsilon_s \\ M_x &= -\frac{R_s}{R_0} (E J_{xx} \kappa_{xs} + E J_{xy} \kappa_{ys}) \\ M_y &= -\frac{R_s}{R_0} (E J_{xy} \kappa_{xs} + E J_{yy} \kappa_{ys}) \\ M_{\omega_s} &= -E C_{\omega_s} \vartheta_s \end{aligned}$$

を得る。この 4 式は 3. において得られている式 (59.a), (60.b,c), (58.d) と一致する。またこの 4 式と式 (70) とより、式 (70) とは逆に板帯 i の断面力を全断面の断面力で次のように表わすことができる ;

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{R_0}{\rho_i} \frac{F_i}{F} N + \frac{R_0}{\rho_i} \frac{F_i (y_i J_y - x_i J_{xy})}{J_x J_y - J_{xy}^2} M_x \\ &\quad + \frac{R_0}{\rho_i} \frac{F_i (x_i J_x - y_i J_{xy})}{J_x J_y - J_{xy}^2} M_y \\ &\quad + \frac{R_s}{\rho_i} \frac{F_i \omega_{si}}{C_{\omega_s}} M_{\omega_s} \\ M_i &= \frac{R_0}{\rho_i} \frac{J_{\xi i} (J_y \cos \beta_i + J_{xy} \sin \beta_i)}{J_x J_y - J_{xy}^2} M_x \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{R_0}{\rho_i} \frac{J_{\xi i} (J_x \sin \beta_i + J_{xy} \cos \beta_i)}{J_x J_y - J_{xy}^2} M_y \\ & + \frac{R_s^2}{\rho_i} \frac{J_{\xi i} (r_{si} - \omega_{si} \cos \beta_i / R_s)}{C_{\omega_s}} M_{\omega_s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (75.a, b)$$

式 (75) を式 (71) に代入すると、直応力と全断面の断面力との間のすでに知られている次の関係式を得る ;

$$\sigma_\theta = \frac{R_0}{\rho} \left\{ \frac{N}{F} + \frac{J_y M_x - J_{xy} M_y}{J_x J_y - J_{xy}^2} y + \frac{J_x M_y - J_{xy} M_x}{J_x J_y - J_{xy}^2} x \right\} + \frac{R_s}{\rho} \frac{M_{\omega_s}}{C_{\omega_s}} \omega_s \dots (76)$$

(2) せん断応力と断面力

せん断ひずみは式 (4.b) で表わされている。これは St. Venant のねじりによるものであるから、これに対応するせん断応力を τ_{s_i} と書くことにし、式 (29.d) を考慮すると

$$\tau_{s_i} = 2 \frac{\rho_i^2}{\rho^2} G \xi \phi_i \text{ または } \tau_{s_i} = 2 \frac{\rho_s^2}{\rho^2} G \xi \psi_s \dots\dots\dots (77.a, b)$$

板帯 i および全断面の断面力をそれぞれ次式で定義する ;

$$T_{s_{i,i}} = \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} \tau_{s_i} (2 \xi) dF_i, \quad T_{s_{i,s}} = \sum_{i=1}^n \frac{R_s}{\rho_i} T_{s_{i,i}} \dots\dots\dots (78.a, b)$$

これらは、それぞれ板帯 i およびはりの St. Venant のねじりモーメントであり、式 (77.a) を用い、式 (7.d), (33.j) を考慮すると、ねじり率との関係が次式で表わされる ;

$$T_{s_{i,i}} = G J_{T_i} \phi_i, \quad T_{s_{i,s}} = G J_{T_s} \psi_s \dots\dots\dots (79.a, b)$$

せん断応力を断面力で表わすと、式 (77), (79) より

$$\tau_{s_i} = 2 \frac{\rho_i^2}{\rho^2} \frac{T_{s_{i,i}}}{J_{T_i}} \xi \text{ または } \tau_{s_i} = 2 \frac{R_s^2}{\rho^2} \frac{T_{s_{i,s}}}{J_{T_s}} \xi \dots\dots\dots (80.a, b)$$

となる。また、式 (79.a, b), (30.c) より次式が得られる ;

$$T_{s_{i,i}} = \frac{R_s^2}{\rho_i^2} \frac{J_{T_i}}{J_{T_s}} T_{s_{i,s}} \dots\dots\dots (81)$$

次に、通常行われているように、 σ_θ および外力のはり軸方向成分 p_θ とともに、はりの微小要素に作用する力のつり合い条件を満たすべきせん断応力を、修正せん断応力 τ_w として求める。板帯 i の微小要素 $t_i \rho d\theta d\eta$ に作用する力のはり軸方向のつり合い条件は、 σ_θ および τ_w の板厚方向の変動は微小であり、しかも近似的にもに直線変化であることに着目して、板厚中央線上の値 σ_θ^* および τ_w^* で代表させて表わすと、次のように書ける ;

$$\frac{1}{\rho^*} t_i \frac{\partial \sigma_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^{*2}} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho^{*2} \tau_w^* t_i) + \int_{-t_i/2}^{t_i/2} p_\theta d\xi = 0 \dots\dots\dots (82)$$

式 (82) に式 (76) を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho^{*2} \tau_w^* t_i) &= -\rho^{*2} \int_{-t_i/2}^{t_i/2} p_\theta d\xi \\ -R_0 t_i \left\{ \frac{N'}{F} + \frac{J_y M_x' - J_{xy} M_y'}{J_x J_y - J_{xy}^2} y^* \right. \\ &+ \left. \frac{J_x M_y' - J_{xy} M_x'}{J_x J_y - J_{xy}^2} x^* \right\} - R_s t_i \frac{M_{\omega_s'}}{C_{\omega_s}} \omega_s^* \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(83)$$

を得る。ここに *印は注 1) におけると同様に、板厚中央線上の値を意味する。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \rho^* &= \rho_i - \eta \cos \beta_i \\ x^* &= x_i - \eta \sin \beta_i \\ y^* &= y_i + \eta \cos \beta_i \\ \omega_s^* &= \omega_s + \eta \Gamma_{si} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(84. a \sim d)$$

微分方程式 (83) の解は、断面の自由縁で $\tau_w = 0$ なる境界条件を適用すると一般に次のような形で表わされる;

$$\begin{aligned} \tau_w^* t_i &= -\frac{R_0^2}{\rho^{*2}} \tilde{q}_z - \frac{R_0}{\rho^{*2}} \left\{ \frac{N'}{F} \tilde{F} + \frac{J_y M_x' - J_{xy} M_y'}{J_x J_y - J_{xy}^2} \tilde{Z}_x \right. \\ &+ \left. \frac{J_x M_y' - J_{xy} M_x'}{J_x J_y - J_{xy}^2} \tilde{Z}_y \right\} - \frac{R_s}{\rho^{*2}} \frac{M_{\omega_s'}}{C_{\omega_s}} \tilde{B}_{\omega_s} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(85)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_z &= \int_L \frac{\rho^{*2}}{R_0^2} \int_{-t_i/2}^{t_i/2} p_\theta d\xi d\eta \\ \tilde{Z}_x &= \int_{\tilde{F}} x^* d\tilde{F}, \quad \tilde{Z}_y = \int_{\tilde{F}} y^* d\tilde{F} \\ \tilde{B}_{\omega_s} &= \int_{\tilde{F}} \omega_s^* d\tilde{F} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(86. a \sim d)$$

式 (86) において、 \tilde{F} , $\int_{\tilde{F}} (\) d\tilde{F}$ および $\int_L (\) d\eta$ はそれぞれ着目点を通る ξ 軸に平行な線で 2 分された片側断面の断面積、片側断面に対する断面積分、および片側断面の板厚中心線の全長に対する線積分を意味する。

6. 考 察

(1) 断面上にない点の軸方向変位の定義

任意に選んだ極 S が断面上に直接のっていない場合、そのはり軸方向の変位 w_s は、本論文では次のように定義されている。

いま、板帯 i の断面の中立点 O_i の母線方向変位 w_i を全断面の中立点 O の変位で表わすと、式 (20)' と同様に

$$w_i = w_0 - y_i \phi_{x_0} - x_i \phi_{y_0} - \omega_{0i} \phi_0 \quad \dots\dots\dots(86)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \phi_{x_0} &= (1/R_0) (v_0' + w_0), \quad \phi_{y_0} = (1/R_0) u_0' \\ \phi_0 &= (1/R_0) (\varphi' - u_0'/R_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(87. a \sim c)$$

u_0, v_0 は中立点 O の x, y 方向変位、 ω_{0i} は板帯 i の

中立点 O_i における中立点 O を極とする単位そりである。

式 (86) に対し、直交条件式 (45. a~c) を適用すると、次式が導かれる;

$$w_0 = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^n \frac{R_0}{\rho_i} w_i F_i \quad \dots\dots\dots(88)$$

この式によって、中立点 O がはりの断面上にない場合でも、そのはり軸方向の変位 w_0 が定義される。すなわち、 w_0 ははり断面の母線方向の全変位の平均値的な意味をもつ。

はりの断面上にない極 S のはり軸方向変位 w_s は、式 (52) におけるサフィクス A の代りに 0 を用いて

$$w_s = w_0 - y_s \phi_{x_0} - x_s \phi_{y_0} \quad \dots\dots\dots(89)$$

と表わされる。したがって、 w_0 が定義されると、式 (89) により w_s の幾何学的意味も明確になる。すなわち、断面上にない点のはりの変形後もすべて中立点 O を含む平面上にあることになる。

(2) 直交条件に対するエネルギー論的考察

板帯 i の断面の中立点 O_i における母線方向の直ひずみを表わす式 (30. d) は、式 (68) を用いると

$$\varepsilon_i = \frac{R_0}{\rho_i} \varepsilon_0 - \frac{R_s}{\rho_i} (y_i \kappa_{xs} + x_i \kappa_{ys} + \omega_{si} \vartheta_s) \quad \dots\dots(90)$$

と書ける。はりの全ポテンシャルエネルギーの式 (32) を導く際、式 (30. d) の代りに式 (90) を用いると、式 (32) に代って次式が得られる;

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^\theta \left\{ \frac{R_0}{R_s} E F_0 \varepsilon_0^2 - 2 E Z_x \varepsilon_0 \kappa_{xs} - 2 E Z_y \varepsilon_0 \kappa_{ys} \right. \\ &- 2 \frac{R_0}{R_s} E B_{\omega_s} \varepsilon_0 \vartheta_s + \frac{R_s}{R_0} E J_x \kappa_{xs}^2 \\ &+ 2 \frac{R_s}{R_0} E J_{xy} \kappa_{xs} \kappa_{ys} + \frac{R_s}{R_0} E J_y \kappa_{ys}^2 \\ &+ 2 E C_{xs} \kappa_{xs} \vartheta_s + 2 E C_{ys} \kappa_{ys} \vartheta_s + E C_{\omega_s} \vartheta_s^2 \\ &+ G J_{TS} \phi_s^2 - 2 (q_{xs} u_s + q_{ys} v_s + q_{zs} w_s \\ &+ m_{zs} \varphi + m_{xs} \phi_{xs} + m_{ys} \phi_{ys} + m_{\omega_s} \phi_s) \left. \right\} R_s d\theta \\ &- \left[\bar{Q}_x u_s + \bar{Q}_y v_s + \bar{N} w_s + \bar{T}_{zs} \varphi - \bar{M}_{xs} \phi_{xs} \right. \\ &\left. - \bar{M}_{ys} \phi_{ys} - \bar{M}_{\omega_s} \phi_s \right]_0^\theta \quad \dots\dots\dots(91) \end{aligned}$$

式 (45) のいわゆる直交条件は、はりの全ポテンシャルエネルギーを表わす式 (91) において、coupling term — $\varepsilon_0 \kappa_{xs}, \varepsilon_0 \kappa_{ys}, \varepsilon_0 \vartheta_s, \kappa_{xs} \vartheta_s$ および $\kappa_{ys} \vartheta_s$ — が消滅する条件にはかならない。すなわち、任意の変形状態に対して軸力 (ε_0)、曲げ (κ_{xs} と κ_{ys}) および曲げねじれ (ϑ_s) は互に仕事をし合わないことを意味する。

(3) 中立点の軸方向変位による微分方程式の表示

式 (91) に直交条件式 (45) を適用すると

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} & \left\{ \frac{R_0}{R_s} EF \varepsilon_0^2 + \frac{R_s}{R_0} EJ_x \kappa_{x_s}^2 \right. \\ & + 2 \frac{R_s}{R_0} EJ_{xy} \kappa_{x_s} \kappa_{y_s} + \frac{R_s}{R_0} EJ_y \kappa_{y_s}^2 + EC \omega_s \vartheta_s^2 \\ & + GJ_{TS} \psi_s^2 - 2(q_{x_s} u_s + q_{y_s} v_s + q_{z_s} w_s) \\ & \left. + m_{z_s} \varphi + m_{x_s} \phi_{x_s} + m_{y_s} \phi_{y_s} + m_{\omega_s} \psi_s \right\} R_s d\theta \\ & - \left[\bar{Q}_x u_s + \bar{Q}_y v_s + \bar{N} w_s + \bar{T}_{z_s} \varphi - \bar{M}_{x_s} \phi_{x_s} \right. \\ & \left. - \bar{M}_{y_s} \phi_{y_s} - \bar{M}_{\omega_s} \psi_s \right]_0^{\theta} \dots\dots\dots (92) \end{aligned}$$

式 (32) に代ってこのポテンシャルエネルギーの式から、変分問題のオイラーの微分方程式として、はりの基礎微分方程式を導くこともできる。そのためには、 w_s の代りに w_0 を用い、式 (92) におけるすべての変形量を u_s, v_s, w_0 および φ で表わさなければならない。

まず、中立点 O とせん断中心 S の変位の関係は式 (49)、(52) を参照して、次のように書ける；

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_s + y_s \varphi \\ v_0 &= v_s - x_s \varphi \\ w_0 &= w_s + y_s \phi_{x_s} + x_s \phi_{y_s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (93. a \sim c)$$

したがって、式 (92) におけるすべての変形量を u_s, v_s, w_0 および φ で次のように表わすことができる；

$$\left. \begin{aligned} w_s &= \frac{R_s}{R_0} w_0 - \frac{x_s}{R_0} u_s' - \frac{y_s}{R_0} v_s' \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{R_0} (w_0' - v_s + x_s \varphi) \\ \phi_{x_s} &= \frac{1}{R_s} (v_s' + w_0 - \frac{x_s}{R_s} u_s') \\ \kappa_{y_s} &= \frac{1}{R_0 R_s} (v_s'' + w_0' - \frac{x_s}{R_s} u_s'') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (94. a \sim d)$$

$\phi_{y_s}, \psi_s, \kappa_{x_s}$ および ϑ_s は w_s を含まないので、式 (21. b, c), (31. c, d) をそのまま用いればよい。

このように、基本変位として、 u_s, v_s, w_0 および φ を用いて解析することもできるが¹²⁾、式の構成はむしろこのほうが複雑となるきらいがあり、その優位性は認められない。

(4) 中立軸の不伸長の仮定

はりの断面の中立点 O を連ねた軸線の伸縮を無視し得る場合には、次式を用いることができる；

$$\varepsilon_0 = \frac{R_s}{R_0} (\varepsilon_s + y_s \kappa_{x_s} + x_s \kappa_{y_s}) = 0 \dots\dots\dots (95)$$

すなわち、

$$w_s' = -\frac{R_s}{R_0} \left(\frac{y_s}{R_s} v_s'' - v_s + \frac{x_s}{R_s} u_s'' + x_s \varphi \right) \dots\dots\dots (95)'$$

一方、式 (63) より N を消去すると、力のつり合い式として次式を得る；

$$\left. \begin{aligned} M_x''' + M_x' + R_s y_s q_{z_s}'' - R_s^2 q_{z_s} + R_0 R_s q_{y_s}' \\ - R_s m_{x_s}'' - R_s m_{x_s} = 0 \\ M_y'' - (x_s/R_0) M_x'' - T_{S_i, s}' - M_{\omega_s}''/R_s \\ + (x_s/R_0) R_s^2 q_{z_s}' + R_s^2 q_{z_s} + (R_s/R_0) x_s m_{x_s}' \\ - R_s m_{y_s}' + m_{\omega_s} = 0 \\ T_{S_i, s}'' + M_{\omega_s}'''/R_s + M_y' - (x_0/R_0) M_x' \\ + (R_s/R_0) R_s x_s q_{z_s} + (R_s/R_0) x_s m_{x_s} \\ + R_s m_{z_s}' - m_{\omega_s}' = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (96. a \sim c)$$

式 (96) に対し、式 (60. b, c), (58. d, e), (31. b ~ d), (21. c) および (95)' を適用すると、 u_s, v_s および φ に関するはりの基礎微分方程式が得られる。これはかなり複雑な式となってしまうので、中立軸の不伸長を仮定し得る場合には、文献 11) の表—2 [式 (113)] のように、中立点 O を極に選び、 u_0, v_0 および φ を基本変位としたほうが、 C_{x_0}, C_{y_0} は残るがより有利といえる。すなわち、このような場合にはせん断中心にこだわる必要はない。

7. 結 語

慣用の曲げねじれ理論とは若干異なる手法によって、薄肉多角開断面の曲りばりの曲げねじれ問題の解析を行った。すなわち、はりの構成要素である板帯の解析を基本単位として出発し、それをはりとして集合することによって、曲げねじれ問題を解く方法を確立し、それを曲りばりの解析に適用した。

解析は、慣用の曲げねじれ理論と同レベルの、薄肉ばり理論としては比較的妥当と思われる変位場の仮定に基づき、エネルギー原理を適用して、系統的に行った。その結果、上記の解析手法の特徴を生かして、曲りばりの断面量の実用計算式を求めると、著者の前論文¹¹⁾において欠落している側面を補うという所期の目的は、ほぼ達せられたと思う。

本論文で新たに得られた成果を要約すると次のようである；

(1) はりの構成要素である板帯の解析を基本単位とし、それをはりとして集合することによって、曲げねじれ問題を解く方法を確立した。

(2) 薄肉多角断面の曲りばりの構成要素である円弧状板帯の解析によって、母線ごとの曲率の差異を考慮した断面量の算式を求め、また実用計算式を提案した (式 (17))。

(3) 薄肉多角開断面の曲りばりの断面量を、その構成板帯の断面量の代数和の形で求め得る算式を得た (式 (33) および (44))。これによって、従来の理論^{9)~12)}における曲率を含んだ面倒な断面積分の演算は避けられる

ことになった。

(4) はりの解析は任意座標によって行い、最も一般性があると思われる形の支配方程式を得た(表-1)。

(5) 直交条件を適用したいわゆる主座標によって、曲りばりの基本式を表示し、また応力、板帯断面の断面力およびはりの断面力などの相互関係を表わす基本式を得た。

(6) 従来の理論^{9)~11)}においては、断面上に直接のっていない点のはり軸方向変位の定義についての説明が欠けているが、それを明確にした。

謝 辞：本論文を草するにあたり、東京大学 伊藤学教授、東北大学 倉西茂教授ならびに東京大学 西野文雄助教授には、有益なアドバイスを戴いた。記して感謝の意を表したい。

参 考 文 献

- 1) Vlasov, V.Z. : Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translation, Ltd., Jerusalem, 1961.
- 2) Cheney, J.A. : Bending and Buckling of Thin-Walled Open-Section Rings, Proc. of ASCE, EM 5, Oct. 1963.
- 3) Dabrowski, R. : Zur Berechnung von gekrümmten dünnwandigen Trägern mit offenem Profil, Der Stahlbau, Heft 12, Dec. 1964.
- 4) Dabrowski, R. : Wälbkrafttorsion von gekrümmten Kastenträgern mit nichtverformbarem Profil, Der Stahlbau, Heft 5, May 1965.
- 5) Becker, G. : Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wörbkrafttorsion, Der

- Stahlbau, Heft 11, Nov. 1965.
- 6) Krahula, J.L. : Out of Bending of a Uniform Circular Ring, Pub. of IABSE, Vol. 25, 1965.
- 7) Kollbrunner, C.F. and N. Hajdin : Dünnwandige Stäbe, Band 1, Springer Verlag, Berlin, 1972.
- 8) Williams, H.E. : Linear Theory of Thin Rings, Proc. of ASCE, EM 5, Oct. 1972.
- 9) 小西一郎・小松定夫：薄肉曲線材の基礎理論，土木学会論文集，第 87 号，昭 37-11.
- 10) 倉西 茂：一般薄肉曲りばりの解析，土木学会論文集，第 108 号，昭 39-8.
- 11) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論，土木学会論文集，第 110 号，昭 39-10.
- 12) Nishino, F., K.M.A. Alam and S.L. Lee : On Elementary Theory of Thin-Walled Curved Girders, Proc. of ASCE, Structural Division 投稿中.
- 13) Bleich, F. and H. : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.
- 14) 深沢泰晴：並列主桁曲線橋の解析 (I)，土木技術，第 19 巻第 1 号，昭 39-12.
- 15) Meyer, C. and A.C. Scordelis : Analysis of Curved Folded Plate Structures, Proc. of ASCE, ST 10, Oct. 1971.
- 16) Chu, K.H. and S.G. Pinjarkar : Analysis of Horizontally Curved Box Girder Bridges, Proc. of ASCE, ST 10, Oct. 1971.
- 17) Cheung, M.S. and Y.K. Cheung : Analysis of Curved Box Girder Bridges by Finite Strip Method, Pub. of IABSE, Vol. 31-II, 1971.
- 18) Nitzsche, R.N. and R.E. Miller : Torsion and Flexure of Curved Walled Beams or Tubes, Proc. of ASCE, EM 4, Aug. 1972.
- 19) Alam, K.M.A., T. Hongladaromp and S.L. Lee : Curved Box Girder Bridges with Intermediate Diagrams and Supports, Pub. of IABSE, Vol. 33-II, 1973.

(1974. 7. 23・受付)