

# 折板理論解析による曲線桁橋の床版応力 と有効幅について

ON THE STRESS DISTRIBUTIONS AND EFFECTIVE WIDTH OF CURVED  
GIRDER BRIDGES BY THE FOLDED PLATE THEORY

芳村 仁\*・萑澤 憲吉\*\*

By Jin YOSHIMURA and Noriyoshi NIRASAWA

## 1. ま え が き

スパンに比べて広い幅員をもつ桁構造では、その応力や変形は、棒理論によって得られる値と著しく異なる。その床版においては、主桁の曲げによって曲げ変形とともにせん断変形が起こり、そのせん断ひずみのため、垂直応力は腹板との接合部の近傍において、棒理論から得られた応力よりかなり大きくなる。したがって、棒理論による設計の場合、有効幅を定めて合理的な設計を行う必要がある。

有効幅についての研究は、これまで、直線桁橋に関するものは数多く行われてきている<sup>1)~17)</sup>。しかし、曲線桁橋の有効幅についてはあまりみあたらず、薄木ら<sup>18)</sup>のフランジを扇形シャイベとして解析した研究、小松ら<sup>19)</sup>の Galerkin 法によって解析した研究のみのようである。

ところで、薄木板状部材による立体構造物を解析するには、折板理論<sup>20)~26)</sup>が有用な方法のひとつであることがすでに知られている。この理論によれば、板状部材の変形や応力は、板の弾性理論の厳密解から直接得られ、また横断面の変形をも許した解析ができるので、構造全体の解析にも局所的な解析にも適した方法と思われる。

この報告は、面内変形と面外変形をともに考慮した折板理論を曲線桁構造の立体解析に適用し、床版応力分布を解析し、それより曲線桁橋の有効幅を求めて、直線桁橋の有効幅と比較検討したものである。床版応力の解析例として自動車荷重 (T 荷重) が曲線桁橋の曲率中心に対して内側と外側に載荷された場合についてそれぞれ応力分布を求め考察を加える。次に合成桁橋の解析および 2 箱桁橋の床版応力について述べ、さらに、1 箱桁断面と 2 主桁断面の曲線桁橋の有効幅に関して、曲率半径、荷重状態、スパン長と幅員の相対比などの影響について

種々の考察を行ったものである。

曲線桁橋の有効幅について論じる場合は、もっぱら直線桁橋との比較という観点より行った。これは、直線桁橋における有効幅の値が曲線桁橋に適用可能か、という問題に焦点を合わせたことによる。現在の道路橋示方書<sup>27)</sup>の規定が直線桁橋のみならず曲線桁橋にも有効であると判断されれば、曲線桁橋の設計上有益となるであろうと思われるからである。

## 2. 折板理論

立体構造物をいくつかの複数列の板要素の集合体と考える。それらの板要素はその境界において互いに接合しているから、その接合部において変位が適合してかつ応力はつり合い状態にあることになる。いま、板要素の応力と変位が弾性理論のもとで表現され、接合部で伝達されている力が変位の適合を条件として得られるならば、板要素に作用する力はすべて明らかとなり、要素内部の応力や変位の値は計算される。

接合部が線状である場合には、その全域にわたって接合の条件を満足させなくてはならないが、フーリエ級数展開を用いることによって、それは可能となる。

ここで、曲線桁橋は両端において単純支持され、支持端のダイアフラムは、その面内には完全剛であり、面外方向の力には抵抗しない構造と考え、また、応力と変位は板の中央面において考えるものと仮定する。

### (1) 扇形板

曲線桁橋の床版は図-1 のような扇形板と考えられる。変形は微小であり、材料は等質等方性、かつ扇形板の面内変形と面外変形は互いに独立であると仮定する。

任意の基準長を  $l$  として、無次元化した座標  $r, z$ 、無次元化した変位  $v_r, v_z, v_\theta$  を次のように定義する。

\* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 北海道大学講師 工学部土木工学科

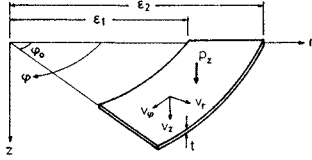


図-1 扇形板

$$\left. \begin{aligned} r &= r^*/l, \quad z = z^*/l \\ v_r &= v_r^*/l, \quad v_z = v_z^*/l, \quad v_\phi = v_\phi^*/l \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

ここで、 $r^*, z^*$  は有次元の座標、 $v_r^*, v_z^*, v_\phi^*$  は座標を図-1 のように選んだ場合の  $r$  方向、 $z$  方向、 $\phi$  方向の有次元の変位である。

ところで、扇形板の変形状態を表わす基礎微分方程式は、面内変形および面外変形に対して、

$$\Delta \Delta F = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\Delta \Delta v_z = p_z l^3 / D \dots\dots\dots(3)$$

である。ここに、

$$\Delta = (1/r) (\partial/\partial r) + (\partial^2/\partial r^2) + (1/r^2) (\partial^2/\partial \phi^2)$$

$F$  : Airy の応力関数

$p_z$  : 板に垂直に作用している分布荷重

$D = Et^3 / [12(1-\nu^2)]$  : 板の曲げ剛性

$t$  : 板の厚さ

$E$  : 板の材料のヤング率

$\nu$  : 板の材料のポアソン比

とする。

微分方程式 (2) および (3) の解を、直線辺の境界  $\phi=0, \phi=\phi_0$  で単純支持の条件を満足するように選べば、 $\omega \neq 0, \omega \neq 1$  のもとで、式 (2) に対して、

$$F = El^2 \sum_{n=1}^{\infty} (A_{1k \cdot n} r^{+\omega} + A_{2k \cdot n} r^{-\omega} + A_{3k \cdot n} r^{+\omega+2} + A_{4k \cdot n} r^{-\omega+2}) \sin \omega \phi \dots\dots(4)$$

また、式 (3) に対しては解を、 $v_z = v_{z1} + v_{z2}$  とし、

$$v_{z1} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{1i \cdot n} r^{+\omega} + A_{2i \cdot n} r^{-\omega} + A_{3i \cdot n} r^{+\omega+2} + A_{4i \cdot n} r^{-\omega+2}) \sin \omega \phi \dots\dots(5)$$

$$v_{z2} = \sum_{n=1}^{\infty} f(r, \omega) \sin \omega \phi \dots\dots\dots(6)$$

となる。ここで、

$A_{1k \cdot n} \sim A_{4k \cdot n}, A_{1i \cdot n} \sim A_{4i \cdot n}$  : 積分定数

$v_{z1}$  : 余関数

$v_{z2}$  : 特解

$f(r, \omega)$  : 荷重の分布状態によって決まる  $r$  と  $\omega$  の関数

$$\omega = n\pi/\phi_0 \quad (n=1, 2, \dots) \dots\dots\dots(7)$$

$\phi_0$  : 扇形板の中心角

である。

さて、扇形板の内側円弧辺の半径 (無次元) を  $\epsilon_1$ , 外側円弧辺の半径 (無次元) を  $\epsilon_2$  とし、境界  $r=\epsilon_1$ ,

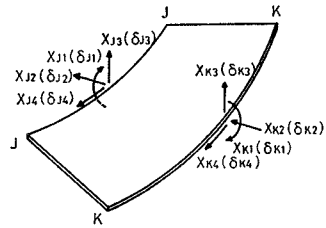


図-2 扇形板の境界力と境界変位

$r=\epsilon_2$  に分布する曲げモーメント、半径方向直応力、反力、円周方向接線力をそれぞれ  $X_{J1}(D/l), X_{J2}(Et), X_{J3}(D/l^2), X_{J4}(Et), X_{K1}(D/l), X_{K2}(Et), X_{K3}(D/l^2), X_{K4}(Et)$  とし、変位もまた、回転角および  $r$  方向、 $z$  方向、 $\phi$  方向の無次元変位をそれぞれ  $\delta_{J1}, \delta_{J2}, \delta_{J3}, \delta_{J4}, \delta_{K1}, \delta_{K2}, \delta_{K3}, \delta_{K4}$  と記号する。正の方向は力、変位ともに図-2 に定義し、それらを次のように級数展開されるものとする。

$$\left. \begin{aligned} X_{S1}(D/l) &= (D/l) \sum_{n=1}^{\infty} X_{S1 \cdot n} \sin \omega \phi \\ X_{S2}(Et) &= (Et) \sum_{n=1}^{\infty} X_{S2 \cdot n} \sin \omega \phi \\ X_{S3}(D/l^2) &= (D/l^2) \sum_{n=1}^{\infty} X_{S3 \cdot n} \sin \omega \phi \\ X_{S4}(Et) &= (Et) \sum_{n=1}^{\infty} X_{S4 \cdot n} \cos \omega \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{S1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{S1 \cdot n} \sin \omega \phi \\ \delta_{S2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{S2 \cdot n} \sin \omega \phi \\ \delta_{S3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{S3 \cdot n} \sin \omega \phi \\ \delta_{S4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{S4 \cdot n} \cos \omega \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 $S=J$  または  $K$  である。

ところで、境界力  $X$  と境界変位  $\delta$  は、 $F$  または  $v_z$  の関数であるから、式 (4), (5) を代入することより、その級数の係数  $X_{Sj \cdot n}, \delta_{Sj \cdot n}$  と積分定数  $A_{jk \cdot n}, A_{ji \cdot n}$  ( $j=1 \sim 4$ ) の間に次のような関係が得られる。

$$\{X_{i \cdot n}\} = [B_{i \cdot n}] \{A_{i \cdot n}\} \dots\dots\dots(10)$$

$$\{X_{k \cdot n}\} = [B_{k \cdot n}] \{A_{k \cdot n}\} \dots\dots\dots(11)$$

$$\{\delta_{i \cdot n}\} = [C_{i \cdot n}] \{A_{i \cdot n}\} \dots\dots\dots(12)$$

$$\{\delta_{k \cdot n}\} = [C_{k \cdot n}] \{A_{k \cdot n}\} \dots\dots\dots(13)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \{X_{i \cdot n}\} &= \{X_{J1 \cdot n} \quad X_{J3 \cdot n} \quad X_{K1 \cdot n} \quad X_{K3 \cdot n}\}^T \\ \{X_{k \cdot n}\} &= \{X_{J2 \cdot n} \quad X_{J4 \cdot n} \quad X_{K2 \cdot n} \quad X_{K4 \cdot n}\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\delta_{i \cdot n}\} &= \{\delta_{J1 \cdot n} \quad \delta_{J3 \cdot n} \quad \delta_{K1 \cdot n} \quad \delta_{K3 \cdot n}\}^T \\ \{\delta_{k \cdot n}\} &= \{\delta_{J2 \cdot n} \quad \delta_{J4 \cdot n} \quad \delta_{K2 \cdot n} \quad \delta_{K4 \cdot n}\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

表-1 [B<sub>i.n</sub>] の要素

B <sub>i.n</sub>		column			
		1	2	3	4
row	1	$-\omega(\omega-1)(1-\nu)\epsilon_1^{+\omega-2}$	$-\omega(\omega+1)(1-\nu)\epsilon_1^{-\omega-2}$	$-(\omega+1)\{(\omega+2)-\nu(\omega-2)\}\epsilon_1^{+\omega}$	$-(\omega-1)\{(\omega-2)-\nu(\omega+2)\}\epsilon_1^{-\omega}$
	2	$+\omega^2(\omega-1)(1-\nu)\epsilon_1^{+\omega-3}$	$-\omega^2(\omega+1)(1-\nu)\epsilon_1^{-\omega-3}$	$+\omega(\omega+1)\{(\omega-4)-\nu\omega\}\epsilon_1^{+\omega-1}$	$-\omega(\omega-1)\{(\omega+4)-\nu\omega\}\epsilon_1^{-\omega-1}$
	3	$+\omega(\omega-1)(1-\nu)\epsilon_2^{+\omega-2}$	$+\omega(\omega+1)(1-\nu)\epsilon_2^{-\omega-2}$	$+(\omega+1)\{(\omega+2)-\nu(\omega-2)\}\epsilon_2^{+\omega}$	$+(\omega-1)\{(\omega-2)-\nu(\omega+2)\}\epsilon_2^{-\omega}$
	4	$-\omega^2(\omega-1)(1-\nu)\epsilon_2^{+\omega-3}$	$+\omega^2(\omega+1)(1-\nu)\epsilon_2^{-\omega-3}$	$-\omega(\omega+1)\{(\omega-4)-\nu\omega\}\epsilon_2^{+\omega-1}$	$+\omega(\omega-1)\{(\omega+4)-\nu\omega\}\epsilon_2^{-\omega-1}$

表-2 [B<sub>k.n</sub>] の要素

B <sub>k.n</sub>		column			
		1	2	3	4
row	1	$-\omega(\omega-1)\epsilon_1^{+\omega-2}$	$-\omega(\omega+1)\epsilon_1^{-\omega-2}$	$-(\omega+1)(\omega-2)\epsilon_1^{+\omega}$	$-(\omega+2)(\omega-1)\epsilon_1^{-\omega}$
	2	$+\omega(\omega-1)\epsilon_1^{+\omega-2}$	$-\omega(\omega+1)\epsilon_1^{-\omega-2}$	$+\omega(\omega+1)\epsilon_1^{+\omega}$	$-\omega(\omega-1)\epsilon_1^{-\omega}$
	3	$+\omega(\omega-1)\epsilon_2^{+\omega-2}$	$+\omega(\omega+1)\epsilon_2^{-\omega-2}$	$+(\omega+1)(\omega-2)\epsilon_2^{+\omega}$	$+(\omega+2)(\omega-1)\epsilon_2^{-\omega}$
	4	$-\omega(\omega-1)\epsilon_2^{+\omega-2}$	$+\omega(\omega+1)\epsilon_2^{-\omega-2}$	$-\omega(\omega+1)\epsilon_2^{+\omega}$	$+\omega(\omega-1)\epsilon_2^{-\omega}$

表-3 [C<sub>i.n</sub>] の要素

C <sub>i.n</sub>		column			
		1	2	3	4
row	1	$+\omega\epsilon_1^{+\omega-1}$	$-\omega\epsilon_1^{-\omega-1}$	$+(\omega+2)\epsilon_1^{+\omega+1}$	$-(\omega-2)\epsilon_1^{-\omega+1}$
	2	$-\epsilon_1^{+\omega}$	$-\epsilon_1^{-\omega}$	$-\epsilon_1^{+\omega+2}$	$-\epsilon_1^{-\omega+2}$
	3	$+\omega\epsilon_2^{+\omega-1}$	$-\omega\epsilon_2^{-\omega-1}$	$+(\omega+2)\epsilon_2^{+\omega+1}$	$-(\omega-2)\epsilon_2^{-\omega+1}$
	4	$-\epsilon_2^{+\omega}$	$-\epsilon_2^{-\omega}$	$-\epsilon_2^{+\omega+2}$	$-\epsilon_2^{-\omega+2}$

$$\left. \begin{aligned} \{A_{i.n}\} &= \{A_{1i.n} \ A_{2i.n} \ A_{3i.n} \ A_{4i.n}\}^T \\ \{A_{k.n}\} &= \{A_{1k.n} \ A_{2k.n} \ A_{3k.n} \ A_{4k.n}\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

また, [B<sub>i.n</sub>], [B<sub>k.n</sub>], [C<sub>i.n</sub>], [C<sub>k.n</sub>] は (4×4) マトリクスであり, それらの要素を表-1~4 に示す。

この式 (10)~(13) より, {A<sub>i.n</sub>} と {A<sub>k.n</sub>} を消去すると, 境界力 {X} と境界変位 {δ} との関係が次のように得られる。

$$\{\delta_{i.n}\} = [C_{i.n}][B_{i.n}]^{-1}\{X_{i.n}\} \dots\dots\dots(17)$$

$$\{\delta_{k.n}\} = [C_{k.n}][B_{k.n}]^{-1}\{X_{k.n}\} \dots\dots\dots(18)$$

次に荷重 p<sub>z</sub> による境界変位は, 特解を考慮して, 境界 r=ε<sub>1</sub>, r=ε<sub>2</sub> において曲げモーメントと反力が 0 であるという条件から得られる。それを,

$$\{\delta_{i.n}^p\} = \{\delta_{J1.n}^p \ \delta_{J3.n}^p \ \delta_{K1.n}^p \ \delta_{K3.n}^p\}^T \dots\dots\dots(19)$$

と記号すると, 荷重をも考慮した面外方向の境界変位は,

$$\{\delta_{i.n}\} = [C_{i.n}][B_{i.n}]^{-1}\{X_{i.n}\} + \{\delta_{i.n}^p\} \dots\dots(20)$$

と表現される。

ここで, [C<sub>i.n</sub>][B<sub>i.n</sub>]<sup>-1</sup> および [C<sub>k.n</sub>][B<sub>k.n</sub>]<sup>-1</sup> は, である。

表-4 [C<sub>k.n</sub>] の要素

C <sub>k.n</sub>		column			
		1	2	3	4
row	1	$+\omega(1+\nu)\epsilon_1^{+\omega-1}$	$-\omega(1+\nu)\epsilon_1^{-\omega-1}$	$+\{(\omega-2)+\nu(\omega+2)\}\epsilon_1^{+\omega+1}$	$-\{(\omega+2)+\nu(\omega-2)\}\epsilon_1^{-\omega+1}$
	2	$-\omega(1+\nu)\epsilon_1^{+\omega-1}$	$-\omega(1+\nu)\epsilon_1^{-\omega-1}$	$-\{(\omega+4)+\nu\omega\}\epsilon_1^{+\omega+1}$	$-\{(\omega-4)+\nu\omega\}\epsilon_1^{-\omega+1}$
	3	$+\omega(1+\nu)\epsilon_2^{+\omega-1}$	$-\omega(1+\nu)\epsilon_2^{-\omega-1}$	$+\{(\omega-2)+\nu(\omega+2)\}\epsilon_2^{+\omega+1}$	$-\{(\omega+2)+\nu(\omega-2)\}\epsilon_2^{-\omega+1}$
	4	$-\omega(1+\nu)\epsilon_2^{+\omega-1}$	$-\omega(1+\nu)\epsilon_2^{-\omega-1}$	$-\{(\omega+4)+\nu\omega\}\epsilon_2^{+\omega+1}$	$-\{(\omega-4)+\nu\omega\}\epsilon_2^{-\omega+1}$

扇形板の撓性マトリクスと考えられる。

(2) 円筒シェル

曲線桁橋の腹板は, 円筒シェルの一部と考えられる。円筒シェルの変形を表わす方程式として Donnell<sup>28)</sup> によって導かれた平衡条件式を用いる。この式は Flügge<sup>29)</sup> の厳密式に対して簡略式といえるが, その解の精度に関しては Kempner<sup>30)</sup>, Hoff<sup>31)</sup> によって検討されていて, 変形が円周方向に三角級数展開される時, 中心角が π/4 以下では十分に良好な近似を与えることがわかって

いる。さて, 扇形板と同様に, 任意の基準長を l として無次元座標と無次元変位を式 (1) と同じく定義すると, 円筒シェルの平衡条件式は, 図-3 の座標系において, 次のように表わされる。

$$V^8 v_r + \frac{12(1-\nu^2)}{\epsilon^2(t_s/l)^2} \frac{\partial^4 v_r}{\partial x^4} = 0 \dots\dots\dots(21)$$

$$V^4 v_z = \frac{1}{\epsilon} \left( -\nu \frac{\partial^3 v_r}{\partial x^3} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^3 v_r}{\partial r \partial \varphi^2} \right) \dots\dots\dots(22)$$

$$V^4 v_\varphi = \frac{1}{\epsilon^2} \left\{ -(2+\nu) \frac{\partial^3 v_r}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^3 v_r}{\partial \varphi^3} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

ここで,

$$V^2 = (\partial^2/\partial x^2) + (1/\epsilon^2)(\partial^2/\partial \varphi^2)$$

ν: シェルの材料のポアソン比

ε: シェルの曲率半径 (無次元)

t<sub>s</sub>: シェルの厚さ

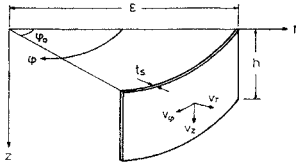


図-3 円筒シェル

この連立微分方程式 (21)~(23) の解は, Hoff<sup>32)</sup> によって得られていて\*, 最終的に変位  $v_r, v_z, v_\phi$  は 8 個の積分定数  $A_{1,n}, A_{2,n}, \dots, A_{8,n}$  を含む級数式で表現される。

$$v_r = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^8 A_{m,n} f_{m1}(z) \right\} \sin \omega \phi \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$v_z = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^8 A_{m,n} f_{m2}(z) \right\} \sin \omega \phi \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$v_\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^8 A_{m,n} f_{m3}(z) \right\} \cos \omega \phi \quad \dots\dots\dots(26)$$

ここで,  $f_{m1}(z), f_{m2}(z), f_{m3}(z)$  は  $z$  の関数であることを意味する。また, 円筒シェルの中心角を  $\phi_0$  として,  $\omega$  を式 (7) のように定めれば, 直線辺の境界  $\phi=0, \phi=\phi_0$  で単純支持の条件を満足する解となる。

円筒シェルの応力は変位  $v_r, v_z, v_\phi$  の関数であるから式(24)~(26)より積分定数を含む級数式に誘導される。

さて, 円筒シェルの円弧辺  $z=0, z=h$  (無次元) に分布する曲げモーメント, 反力, 直応力, 接線力を,  $D_s$  をシェルの曲げ剛性,  $E$  をヤング率として, それぞれ  $X_{J1}(D_s/l), X_{J2}(D_s/l^2), X_{J3}(Et_s), X_{J4}(Et_s), X_{K1}(D/l), X_{K2}(D_s/l^2), X_{K3}(Et_s), X_{K4}(Et_s)$  とし, 変位も回転角および  $r$  方向,  $z$  方向,  $\phi$  方向の無次元変位をそれぞれ  $\delta_{J1}, \delta_{J2}, \delta_{J3}, \delta_{J4}, \delta_{K1}, \delta_{K2}, \delta_{K3}, \delta_{K4}$  と記号し, 正の方向を図-4 に定義する。それらの境界力  $X$  と境界変位  $\delta$  が式 (8), (9) と同じように級数展開されると考えると, 扇形板と同様な考えのもとで, 係数

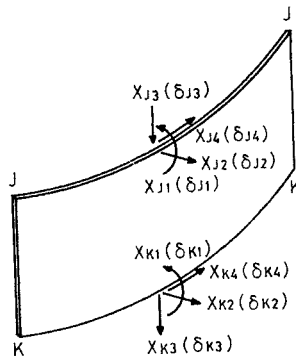


図-4 円筒シェルの境界力と境界変位

と積分定数の間に次の関係が成り立つ。

$$\{X_n\} = [B_n] \{A_n\} \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$\{\delta_n\} = [C_n] \{A_n\} \quad \dots\dots\dots(28)$$

ここで,

$$\{X_n\} = \{X_{J1,n} \ X_{J2,n} \ X_{J3,n} \ X_{J4,n} \ X_{K1,n} \ X_{K2,n} \ X_{K3,n} \ X_{K4,n}\}^T \quad \dots\dots\dots(29)$$

$$\{\delta_n\} = \{\delta_{J1,n} \ \delta_{J2,n} \ \delta_{J3,n} \ \delta_{J4,n} \ \delta_{K1,n} \ \delta_{K2,n} \ \delta_{K3,n} \ \delta_{K4,n}\}^T \quad \dots\dots\dots(30)$$

$$\{A_n\} = \{A_{1,n} \ A_{2,n} \ A_{3,n} \ A_{4,n} \ A_{5,n} \ A_{6,n} \ A_{7,n} \ A_{8,n}\}^T \quad \dots\dots\dots(31)$$

であり,  $[B_n], [C_n]$  は  $(8 \times 8)$  マトリクスである。式 (27), (28) より  $\{A_n\}$  を消去すると,

$$\{\delta_n\} = [C_n][B_n]^{-1} \{X_n\} \quad \dots\dots\dots(32)$$

これは, 境界変位と境界力との関係を表わしている式であり,  $[C_n][B_n]^{-1}$  は撓性マトリクスといえる。

(3) 接合条件

曲線桁橋の床版と腹板を接合部で切り離し, そこで伝達していた断面力に相当する不静定力を導入すると, 接合状態にあった床版と腹板の境界辺の変位は, その辺に沿って全域にわたって互いに等しい大きさとなるはずである (図-5)。これは, その不静定力と変位をスパン長方向 ( $\phi$  方向) に級数展開したとき, 要素どうしの対応する変位について級数の各項ごとにその係数が等しい大きさとなることである。したがって, 曲線桁橋全体の接合条件 (変位の適合条件) は, 級数項ごとに板要素の撓性マトリクスの重ね合わせによって得られ, マトリクス演算から未知力は決定される。

接合部で伝達している力が決定されれば, 板要素内部の応力, 変位の解析は単一板の理論のもとで行うことができる。

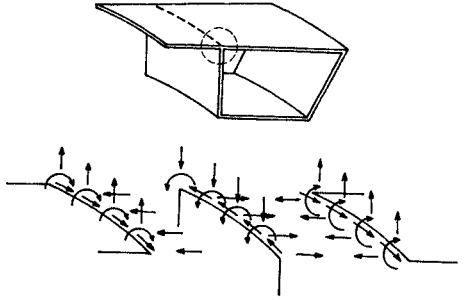


図-5 接合部の応力と変位

3. 有効幅の定義

直線桁橋の有効幅の定義については, その目的とするものによって,

\* Hoff の論文の最終結果の式群中にミスプリントと思われる数箇所がある。

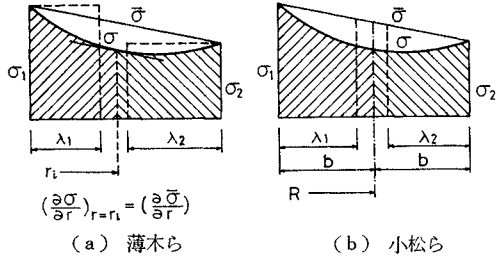
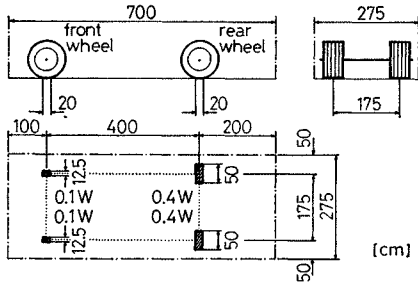


図-6 有効幅の定義



$W = 20t, \quad p = 8 \text{ kg/cm}^2$

図-7 自動車荷重 (T-20)

- (1) 桁の曲げによって生じる床版内の垂直応力を算定するための有効幅<sup>(1), (3)~(7), (10), (11), (14), (16), (17)</sup>
- (2) 桁のたわみを算定するための有効幅<sup>(2), (12)</sup>
- (3) 桁にプレストレスを導入したときの床版の垂直応力を算定するための有効幅<sup>(6), (12), (14)</sup>

と区分され、(1)においてもその定義の方法は過去にいくつか提案されている。

一方、曲線桁橋の有効幅の定義については、薄木ら<sup>(8)</sup>、小松ら<sup>(9)</sup>によって図-6のように、床版応力分布からの有効幅算定で異なる方法が提案されている。

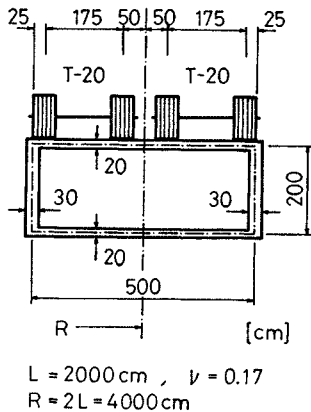


図-8 解析断面と自動車荷重位置

この報告では、有効幅定義の目的として(1)の床版応力算定のためとし、その算定方法としては、曲線桁橋に曲げ理論を適用したときの応力分布は台形分布となることを考えて、小松らの提案式を用いることにする。すなわち、床版の垂直応力分布 $\sigma$ の接合部における極大値を結んだ勾配をもった直線 $\bar{\sigma}$ を、曲げ理論を適用したときの垂直応力分布に近似させ、床版を曲率中心に対し内側と外側の部分に二分し、

$$\left. \begin{aligned} \int_{R-b}^{R-b+\lambda_1} \bar{\sigma} dr &= \int_{R-b}^R \sigma dr \\ \int_{R+b}^{R+b-\lambda_2} \bar{\sigma} dr &= \int_R^{R+b} \sigma dr \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

と有効幅 $\lambda_1, \lambda_2$ を定義する。ここで、 $R$ は桁中心線の曲率半径、 $2b$ は床版幅である。

#### 4. 曲線桁橋の床版応力の解析例

##### (1) 自動車荷重による曲線桁橋の床版応力

床版上に載荷する自動車荷重は、T-20荷重<sup>(27)</sup>(図-7)とする。T-20荷重を曲線桁橋に載荷するにあたり、車輪の接地面を扇形分布に近似し、また前後輪の車軸の

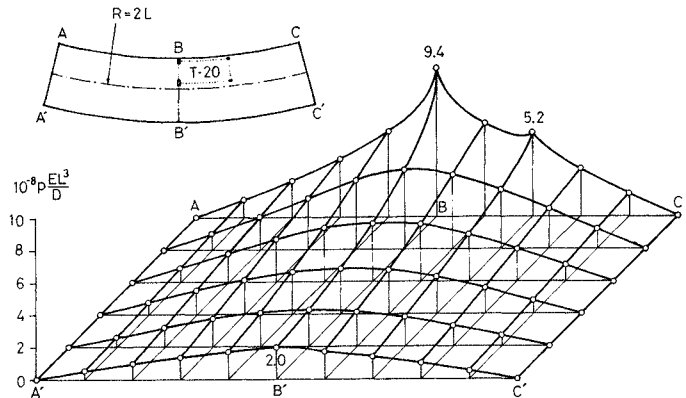


図-9 (a) T-20 による床版応力分布 (内側載荷)

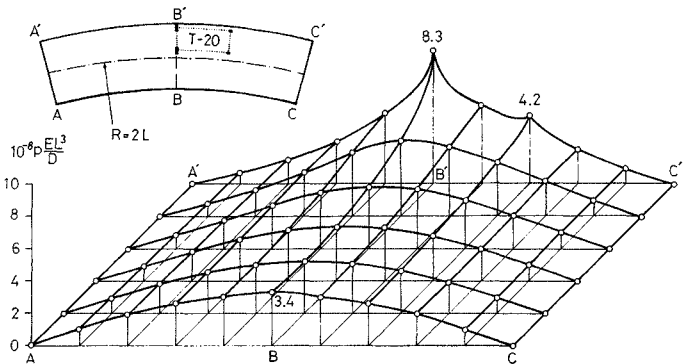


図-9 (b) T-20 による床版応力分布 (外側載荷)

延長線は曲率中心で交わると仮定する。

自動車の位置は、図-8 に示すように曲率中心に対して内側にある場合と外側にある場合を考え、後輪はスパン中央線上にあるものとする。

桁橋は両端単純支持桁とし、図-8 のような断面を考え、材料のポアソン比は 0.17 とした。

自動車荷重 (T-20) が曲線桁橋の内側および外側に載ったときに上床版に生じる垂直応力分布を解析した結果を図-9 に示す。この曲線桁橋の曲率半径  $R$  はスパン長  $L$  の 2 倍である。また図-10 は同じ結果を直線桁橋の場合 ( $R = \infty$ ) も含めて、等応力線で表現した図である。

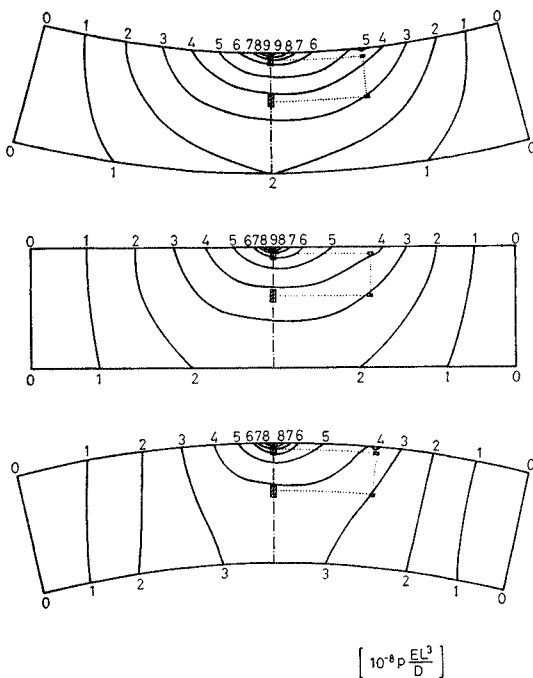


図-10 等応力線で表わした床版応力分布

床版応力分布は、自動車荷重が曲線桁橋の内側にある場合と外側にある場合のいずれも、スパン中央部において著しいせん断おくれの現象を示し、載荷側の腹板との接合部の後輪位置において最大の応力となることが図-9, 10 より知られる。しかし、載荷位置によって床版応力分布が異なり、また直線桁橋の場合との比較から、曲率が応力分布に影響することも明らかである。この解析例では、応力分布全体としては、内側載荷のほうが外側載荷と比べて応力の集中化の傾向が強くなり、直線桁橋の応力分布が両者の中間にあるような結果が得られた。

(2) 合成桁橋の解析と床版応力

主桁材料が鋼、床版材料がコンクリートのような合成

桁構造を解析するには、鋼板とコンクリート版の厚さが著しく異なるので、接合部での応力のつり合いや変位の適合を互いの中央面の交線上で考えることには無理がある。よって、このような場合には、上フランジとコンクリート版の接触部において応力のつり合いと変位の適合を考えるのが合理的であると思われる。

そのときには、コンクリート版の中央面での応力や変位を版の下面での応力および変位に変換することが必要であり、図-11 のように中立面での応力  $X$  と変位  $\delta$  が、

$$\left. \begin{aligned} X_1 &: X_{1,n}(D/l) \sin \omega\varphi \\ X_2 &: X_{2,n}(Et) \sin \omega\varphi \\ X_3 &: X_{3,n}(D/l^2) \sin \omega\varphi \\ X_4 &: X_{4,n}(Et) \cos \omega\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &: \delta_{1,n} \sin \omega\varphi \\ \delta_2 &: \delta_{2,n} \sin \omega\varphi \\ \delta_3 &: \delta_{3,n} \sin \omega\varphi \\ \delta_4 &: \delta_{4,n} \cos \omega\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

と表わされるならば、版の下面での応力  $Y$  と変位  $\eta$  にそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &: \{X_{1,n} - X_{2,n} \cdot 6(1-\nu^2)/(t/l)\} (D/l) \sin \omega\varphi \\ Y_2 &: X_{2,n}(Et) \sin \omega\varphi \\ Y_3 &: \{X_{3,n} - X_{4,n} \cdot 6(1-\nu^2)(\omega/r_0)/(t/l)\} \\ &\quad \cdot (D/l^2) \sin \omega\varphi \\ Y_4 &: X_{4,n}(Et) \cos \omega\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &: \delta_{1,n} \sin \omega\varphi \\ \eta_2 &: \{\delta_{2,n} + \delta_{1,n}(t/2L)\} \sin \omega\varphi \\ \eta_3 &: \delta_{3,n} \sin \omega\varphi \\ \eta_4 &: \{\delta_{4,n} + \delta_{3,n}(t/2L)(\omega/r_0)\} \cos \omega\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots (37)$$

と変換される。ここで、 $r_0$  はその接合部の曲率半径 (無次元) である。

これらのことを考慮して、図-12 の断面をもつ曲線合成単純桁に、等分布満載荷重  $p$  が作用する場合、および等分布半径方向線荷重  $p'$  が径間中央に作用する場

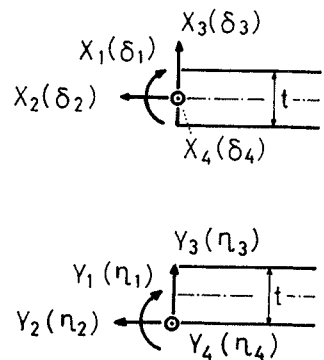
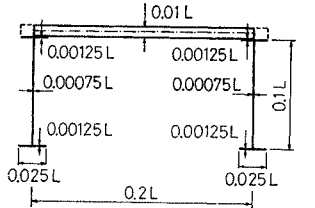


図-11 中央面の応力・変位と版の下面の応力・変位



$E_s/E_c = 7, \nu_s = 0.3, \nu_c = 0.17$   
 $E_s, \nu_s$  for steel ;  $E_c, \nu_c$  for concrete

図-12 合成桁断面

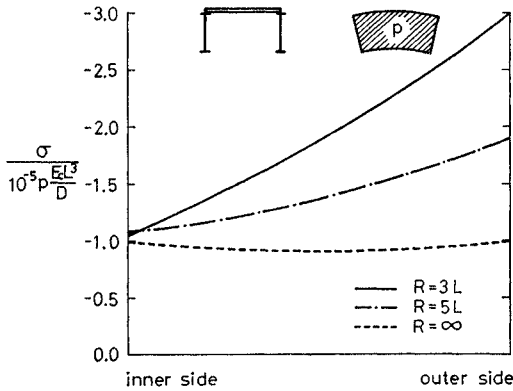


図-13 床版の垂直応力分布 (等分布満載荷重)

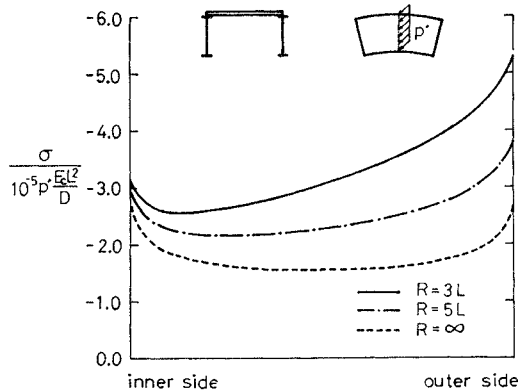


図-14 床版の垂直応力分布 (等分布線荷重)

合を解析し、径間中央における床版の中央面での垂直応力  $\sigma$  の分布を示したのが、図-13, 14 である。

(3) 2 箱桁曲線橋の床版応力

曲線橋の床版が多くの主桁または腹板によって支持されている場合の解析例として、図-15 のような断面をもつ曲線単純桁を考える。この桁の位置 ( $r = 2.15L, \varphi = 0.5\varphi_0$ ) に集中荷重  $P$  が作用したときのスパン中央での床版応力分布を計算した結果が図-16 である。

図には直線桁の場合の応力分布も示したが、ともに載荷位置近傍において応力の急激なピークが認められるが、載荷点を離れると応力分布は直線勾配に近くなるこ

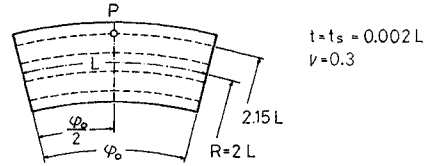
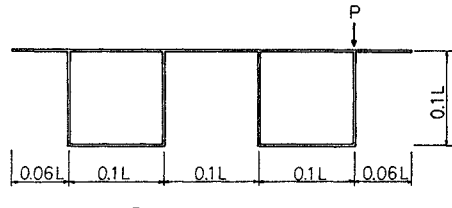


図-15 2 箱桁断面

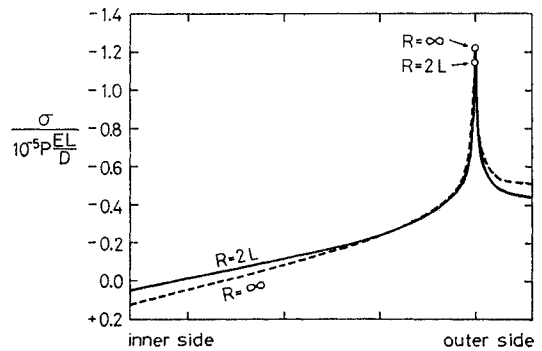


図-16 床版の垂直応力分布 (集中荷重)

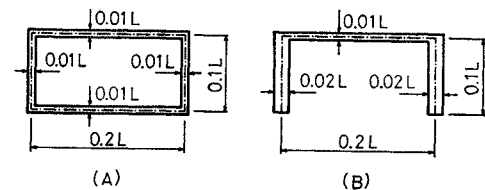
とがわかる。

5. 曲線桁橋の有効幅

曲線単純桁橋の有効幅の計算にあたり基準とした1箱桁断面 A と 2 主桁断面 B を図-17 に示す。これらの断面をもつ単純桁橋に等分布満載荷重  $p$  (以後、満載荷重という) が作用する場合、および等分布半径方向線荷重  $p'$  (以後、線荷重という) がスパン中央に作用する場合の、スパン中央での床版応力分布は、それぞれ曲率半径  $R = 2L, 4L, \infty$  ( $L$ : スパン長) に対して図-18~21 のように得られる。

(1) 有効幅のスパン方向の変化

基準断面 A, B の単純桁に満載荷重が作用する場合と



$L$ : span length  $\nu = 0.17$

図-17 基準とした断面 A, B

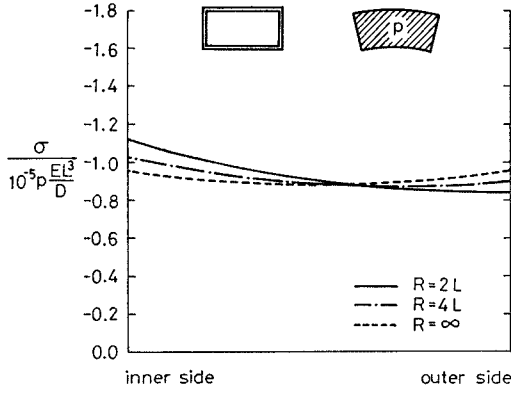


図-18 床版の垂直応力分布 (断面 A, 荷重  $p$ )

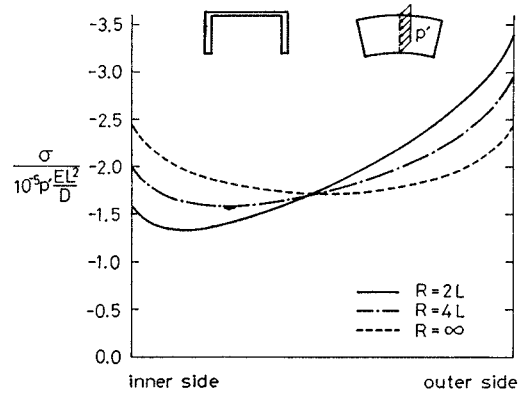


図-21 床版の垂直応力分布 (断面 B, 荷重  $p'$ )

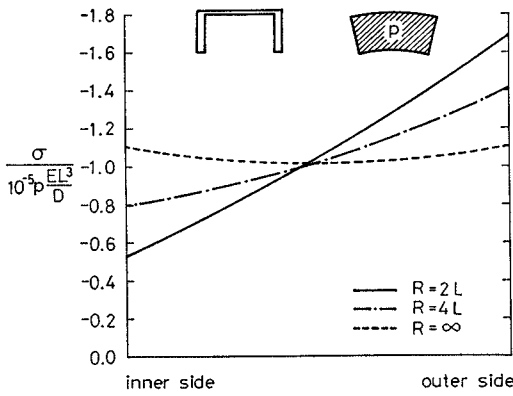


図-19 床版の垂直応力分布 (断面 B, 荷重  $p$ )

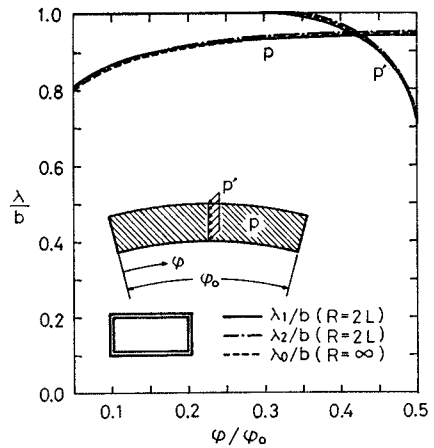


図-22 有効幅のスパン方向の変化 (断面 A)

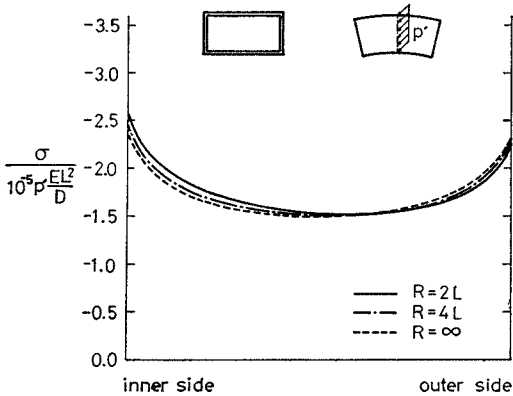


図-20 床版の垂直応力分布 (断面 A, 荷重  $p'$ )

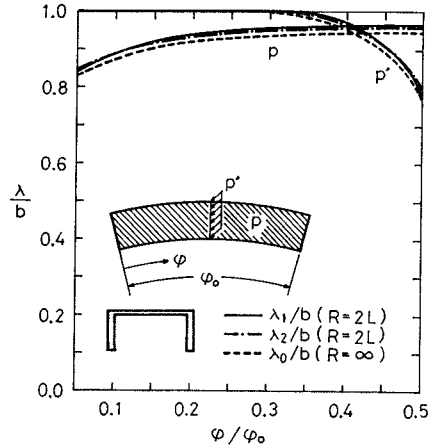


図-23 有効幅のスパン方向の変化 (断面 B)

線荷重が作用する場合について有効幅を計算し、スパン方向の変化を示したものが図-22, 23である。満載荷重が作用する場合にはスパン中央において有効幅は最大となり橋端に向うにしたがってゆるやかな減少を示すが、線荷重の場合ではこれと逆にスパン中央において有効幅は最小であり、これより離れるにつれて急激な増加を示すことがわかる。図には直線桁橋の有効幅  $\lambda_0$  も合わせて記入したが、曲線桁橋のこれらの傾向は直線桁橋

の傾向と同様であって、有効幅の値についても曲線桁橋と直線桁橋の間では大きな相違は認められないことがわかる。



## (2) 有効幅の曲率の影響

有効幅に与える曲率の影響を調べるために、基準断面 A, B および床版幅のみを基準断面の 2 倍とした断面をもつ 4 種類の単純桁に、満載荷重および線荷重が作用する場合を考え、その曲率半径  $R$  を変化させてスパン中央での有効幅を計算した結果が図-24 である。

曲線桁橋の内側有効幅  $\lambda_1$  と外側有効幅  $\lambda_2$  はともに、曲率半径  $R$  の増加に伴って直線桁橋の有効幅  $\lambda_0$  に漸近するが、 $R=4\sim 5L$  以上である場合には  $\lambda_1, \lambda_2$  と  $\lambda_0$  との差は実用上無視できることが図よりわかる。したがって、曲率が有効幅に与える影響は僅少であると思われる。

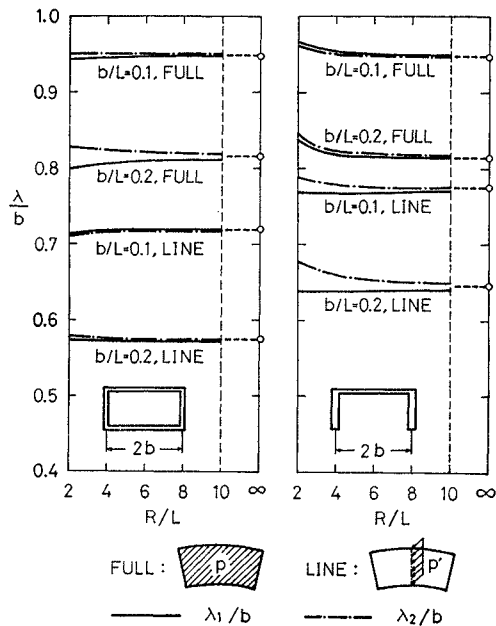
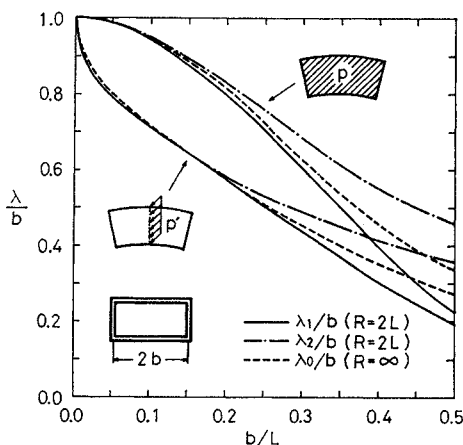
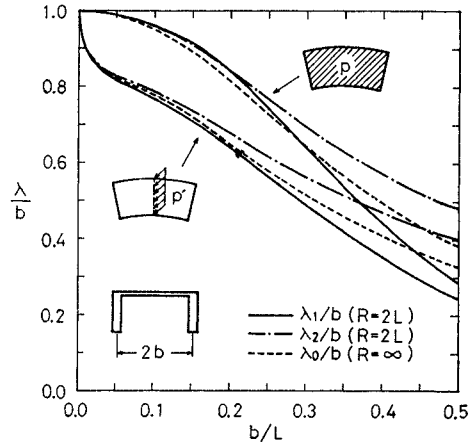


図-24 有効幅と曲率半径の関係

図-25 有効幅と  $b/L$  の関係 (断面 A)図-26 有効幅と  $b/L$  の関係 (断面 B)(3)  $b/L$  の影響

床版幅の半分  $b$  とスパン長  $L$  の比が曲線桁橋の有効幅に与える影響を調べるために、曲率半径  $R=2L$  とし、満載荷重および線荷重の作用する単純桁を考え、その断面として基準断面 A, B の床版幅を変化させた場合について、スパン中央の有効幅を計算した結果を示したのが図-25, 26 である。

曲線桁橋の内側有効幅  $\lambda_1$  と外側有効幅  $\lambda_2$  との差異は、 $b/L$  の増加にしたがってかなり大きくなるが、 $b/L$  が小さい場合には僅少であることが、これらの図よりわかる。また、図には直線桁橋の場合の有効幅の値も記入したが、これと比較すると、 $R=2L$  という強い曲率の桁橋との比較にもかかわらず、 $b=0.2L$  以下においては大きな相違は認められない。

## 6. 結 論

折板理論を用いた曲線桁橋の解析について述べ、床版応力分布がこの理論のもとで厳密な形で得られることを数値計算例で示した。さらに曲線桁橋の有効幅について種々の検討を行った結果、次のような結果が得られた。

(1) 曲線桁橋の有効幅のスパン方向の変化の傾向は直線桁橋のそれと同様であって、有効幅の値についても両者に大きな相違は認められない。

(2) 曲率が有効幅に与える影響については、曲率半径とスパン長の比が  $4\sim 5$  以上の場合では実用上無視できるほどに僅少である。

(3) 床版幅の半分  $b$  とスパン長  $L$  の比 ( $b/L$ ) と曲線桁橋の有効幅との間の関係は、 $b/L$  が異常に大きくない限り、直線桁橋の場合と比べて大きな相違はない。またこのとき、曲率中心に対して内側の床版有効幅と外側の床版有効幅はほぼ等しい値となる。

(4) 曲線桁橋の断面として、箱桁断面と2主桁断面のいずれにおいても上記(1)～(3)の結果が導かれた。

以上から、実際に施工される曲線桁橋の曲率半径および主桁間隔を考慮すると、曲線単純桁の有効幅は、同断面で等スパンの直線桁橋の有効幅に実用上近似できるものと考えられる。

この結論は断面変形を許した解析によって得られたものであるが、断面変形を許さずに解析した場合については小松らの研究<sup>19)</sup>によって同様な結論が得られている。

数値計算においては、級数の項数を5～24項、特別な場合でも70項までとることによって、1.0～0.5%以内の収束が得られた。

この報告は単純桁のみにとどまったが、今後、連続桁など他の形式の桁についても検討したいと考えている。

この研究の一部は文部省科学研究費の援助のもとに行われた。ここに記して謝意を表する。数値計算には北海道大学大型計算機センターのFACOM 230-60を用いた。

#### 参考文献

- 1) Chwalla E.: Die Formeln zur Berechnung der "voll mittragenden Breite" dünner Gurt- und Rippenplatten, Der Stahlbau, 9, pp. 73～78, 1936.
- 2) Marguerre K.: Über die Beanspruchung von Plattenträgern, Der Stahlbau, 21, pp. 129～132, 1952.
- 3) Rüscher H.: Die mitwirkende Plattenbreite bei Plattenbalken, Der Stahlbau, 22, pp. 12～14, 1953.
- 4) 伊藤 学: 函桁のフランジ有効幅について, 第3回日本道路会議論文集, pp. 330～333, 1965.
- 5) Dischinger F.: Die mittragende Breite des Plattenbalkens, in Schleicher, Taschenbuch für Bauingenieure, 1 Band, Springer-Verlag, pp. 842～847, 1955.
- 6) Bechert H.: Die voll mittragende Breite bei Plattenbalken, Beton- und Stahlbetonbau, 50, pp. 307～313, 1955.
- 7) Girkmann K.: Flächentragwerke, Springer-Verlag, pp. 119～127, 1956.
- 8) 小松定夫: 連続箱桁の Shear Lag について, 土木学会論文集, No. 58, pp. 1～9, 1958-9.
- 9) Brendel G.: Die "mitwirkende Plattenbreite" nach Theorie und Versuch, Beton- und Stahlbetonbau, 55, pp. 177～185, 1960.
- 10) 近藤和男・小松定夫・中井 博: 鋼床板桁橋の有効幅に関する研究, 土木学会論文集, No. 86, pp. 1～17, 1962-10.
- 11) Fukuda T.: Ein Beitrag zur Lösung der mitwirkenden Breite, Report of the Institute of Industrial Science, the Univ. of Tokyo, Vol. 12, No. 5, 1963.
- 12) Rose E.A.: Ein weiterer Beitrag zur Berechnung der mitwirkenden Breite bei Plattenbalken, Die Bautechnik, 42, pp. 65～71, 1965.
- 13) Klöppel K. und Thiele F.: Analytische und experimentelle Ermittlung der Spannungsverteilung in kastenförmigen Biegequerschnitten mit Konsolen bei örtlicher Kräfteinleitung (Mitttragende Breite), Der Stahlbau, 35, pp. 152～156, 1966.
- 14) Koepcke W. und Denecke G.: Die mitwirkende Breite der Gurt von Plattenbalken, Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton. H. 192, 1967.
- 15) 倉田宗章・園田恵一郎: T形ばりの極限状態における有効幅について, 土木学会論文報告集, No. 161, pp. 21～28, 1969-1.
- 16) Abdel S.G.: Effective width of steel deck-plate in bridges, Proc. of ASCE, ST 7, pp. 1459～1474, 1969-7.
- 17) Klement P.: Über die mittragende Breite symmetrischer Kastenträger, Stahlbau und Baustatik, pp. 336～344, 1965.
- 18) 薄木征三・菅原 登: 曲線箱桁のフランジ有効幅について, 土木学会年次学術講演会講演概要集, I-81, 1968.
- 19) 小松定夫・中井 博・北田俊行: 曲線桁橋の Shear lag と有効幅に関する研究, 土木学会論文報告集, No. 191, pp. 1～14, 1971-7.
- 20) Rüdiger D.: Die strenge Theorie der Faltwerke konstanter Krümmung, Öst. Ingenieur-Arch., 11/1, pp. 5～20, 1956.
- 21) 荻澤憲吉・芳村 仁: 折板理論による曲線桁構造の解析について, 土木学会年次学術講演会講演概要集, I-189, 1971.
- 22) 芳村 仁・荻澤憲吉: 折板理論による曲線桁構造の解析について(第2報), 土木学会年次学術講演会講演概要集, I-242, 1972.
- 23) 芳村 仁・荻澤憲吉: 折板理論による曲線桁構造の解析について, 土木学会北海道支部研究発表論文集, pp. 265～268, 1973.
- 24) 荻澤憲吉: 曲り梁と曲線スラブからなる構造の解析について, 北海道大学工学部研究報告, 第68号, pp. 1～10, 1973.
- 25) 芳村 仁・荻澤憲吉: 折板理論による曲線桁構造の応力解析とその特性について, 北海道大学工学部研究報告, 第68号, pp. 25～34, 1973.
- 26) Chu K.H. and Pinjarker S.G.: Analysis of horizontally curved box girder bridges, Proc. of ASCE, ST 10, pp. 2481～2501, 1971.
- 27) 日本道路協会: 道路橋示方書, 1972-3.
- 28) Donnell L.H.: Stability of thin-walled tubes under torsion, NACA Technical Report No. 479, pp. 95～116, 1933.
- 29) Flüge W.: Statik und Dynamik der Schalen, 2. Aufl., Springer-Verlag, pp. 150, 1957.
- 30) Kempner J.: Remarks on Donnell's equations, Jour. of Applied Mech., pp. 117～118, 1955.
- 31) Hoff N.J.: The accuracy of Donnell's equations, Jour. of Applied Mech., pp. 329～334, 1955.
- 32) Hoff N.J.: Boundary-value problems of the thin-walled circular cylinder, Jour. of Applied Mech., pp. 343～350, 1954.

(1974. 6. 29・受付)