土木学会論文報告集
第 233 号・1975 年 1 月

伝達マトリックス法による曲げねじりを受ける薄肉直線桁橋の解析と断面力，変形量に関する研究*

APPLICATION OF TRANSFER MATRIX METHOD FOR ANALYZING THE STRESS-RESULTANTS AND DEFORMATIONS OF THIN-WALLED GIRDER BRIDGES SUBJECTED TO NON-UNIFORM TORSION

中 井 博**・事 口 寿 男***
By Hiroshi NAKAI and Hisao KOTOGUCHI

1. まえがき

そりが拘束されたI形ばりに，ねじり荷重を作用させると，はりは単純ねじりを受けた場合のように一様にはねじれず，non-uniform torsion を受けることが S.P. Timoshenko[1]によって明らかにされて以来，C. Wagner や S.U. Benscoter[2]らによってその理論が拡張され，いわゆる「工学的曲げねじり理論」として体系化されてきた。

この理論は，当初，はりのねじり座屈や横だおれ座屈を論ずるときに用いられていたが，長大プレートガーダー橋が各地で建設され，偏載荷重によるそりねじり応力解析が重要視されるようになってから，数多くの研究者によって活発な研究が行われるようになった。

わが国でもその先駆的研究として小西・小松の一連の研究[3),4)]が著名であり，それに引きつづく模型実験[5)]や現場実験[6)]によって曲げねじり理論の妥当性が確かめられるようになり，講習会[7),8)]や土木工学ハンドブック等でも実用公式が提示されている。また，昭和 48 年2月に刊行された道路橋示方書・同解説にも，プレートガーダー橋を設計する際のそりねじり応力の算定公式が明示されるようになったのは，その重要性が認められるに至ったからであると思われる。

ところで，曲げねじりによって生じる断面力や変形量の解析法としては，まず，基礎微分方程式を境界条件に応じて解いた小松の著書[9)]がある。そこでは，各種の支持条件を有する単径間ばりの断面力，変形量を種々な載荷状態に対して図表化している。そして，連続桁については応力法による解法が示されている。また，変断面連続桁に対しても積分方程式を用いて解析した研究[10)]がある。さらに，大地[11)]は曲げねじりに関する微分方程式を階差式におきかえて解いている。

一方，変形法を利用したものに鷹羽・成岡の研究[12)]があり，そりの影響を考慮した stiffness matrix が提示され，任意の薄肉構造物の曲げねじり解析に適用できることを示している。また，有限要素法的取扱いを行ったものに結城・前田の研究[13)]があり，各種のはりの静的挙動のほかにも安定性や振動の問題にまで発展させている。

これらの応力法と変形法の中間的な解法として伝達 matrix 法があり，C. Kollbrunner[14)]，V.Z. Vlasov[15)] はこの方法を活用して，曲げねじりに関する一般解，特解を与え，Field-matrix で表示している。しかしながら，連続桁に対しては小松の研究と同様に，弾性方程式を組み立てているのは，伝達 matrix 法の利点が十分活かされていないように思われる。

伝達 matrix 法は周知のように，(1) 境界条件がどのような形式でもあまり特殊な処理をせずに容易に取扱うことができ，また，変形量と断面力が同時に求められる。(2) 変断面の場合でも桁を適切に分割すれば高精度の近似ができる。(3) 比較的記憶容量の小さい電算機で演算可能である，などの利点を有している。

しかしながら，曲げねじり理論の場合のように微分方程式の特性根が正の実根を持つとき，方程式の解を matrix 表示した Field matrix 中に $\sinh \alpha x$, $\cosh \alpha x$ などの双曲線関数項を数多く含み，パラメーター αx が増大すると，$\sinh \alpha x$, $\cosh \alpha x$ の数値が著しく大きくなり，この方法特有のマトリックスを順次掛けていくことによる誤差が集積し，所要の計算精度が得られないことがしばしばある。このような構造解析上の計算精度に関しては，昭和 47 年土木学会年次学術講演会で併催されたパネルディスカッション「構造計算における電子計算機の役割」[16)] において種々な意見が出されたが，著者ら

---
* 土木学会第 28 回年次学術講演会で発表，I-14 (昭 48.10)
** 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科
*** 正会員 工修 大阪市立大学助手 工学部土木工学科

もやはり計算誤差を最小にするには，力学的特性をそしゃくし，かつ数学的処理方法にも十分検討することが必要であると考える。

そこで，本文は，伝達 matrix 法によって，曲げねじり解析を行う際，パラメーター αx が増大しても精度よく演算できる解法を種々考察するものである。

すなわち，まず，(1) Field matrix において双曲線関数項を含む項と含まない項に分離する。(2) このような処理をした Field matrix の 2，3 行目のすべての要素は双曲線関数項を含み，αx が大きくなると他の要素に比してこれらの値は非常に増大するので，それを防止するために双曲線関数項の単位化を行う。(3) 連続桁の解析に対しては，中間支点で未知不静定力が生ずるが，これに加えて新たに不静定量を導入して拘束度を強め，誤差が集積しないよう配慮する。次に，(4) 数値計算例によって，双曲線関数項を分離・単位化した方法が分離・単位化していない方法に比べて，αx が増大しても高精度の演算ができることを確かめる。最後に，(5) 変断面や弾性支持された連続桁の解析例を示し，連続桁の断面力や変形量の影響線を図表化する。さらに，道路橋設計示方書・同解説による，ねじりモーメントを考慮する範囲を連続桁についても考察し，設計計算上に有用な資料を提供するものである。

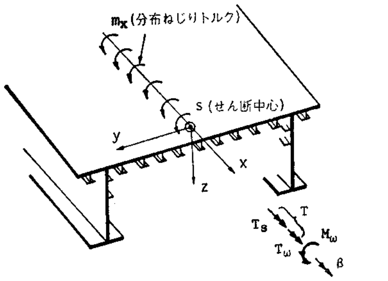
2. 記号の定義

薄肉断面で構成される直線桁の座標系 (x, y, z) を図—1 に示す。直線桁のせん断中心 S において，x 軸は橋軸方向，y 軸は水平方向，z 軸は鉛直下向方向の右手系直交座標を用いる。

x 軸まわりの変形量と断面力を，次のように定義する。

β：断面回転角（ねじり角），M_ω：そりモーメント，T_s：純ねじりモーメント，T_ω：そりねじりモーメント，$T=T_s+T_\omega$：合ねじりモーメント，m_x：作用分布ねじりモーメント。

以上の変形量，断面力，および荷重の符号（定義は文献 9) を参照）は，図—1 に示すように座標の増大する方向に増大する場合を正とする。



図—1 座標系

また，材料特性と断面定数は以下のとおりとする。

E：ヤング係数，G：せん断弾性係数，K：純ねじり定数，I_ω：そりねじり定数。

さらに，伝達 matrix 法に関しては，次のように定義する。

$\boldsymbol{F}_k$：格間 k の Field matrix，$\boldsymbol{P}_k$：格点 k の Point matrix，$\tilde{\boldsymbol{F}}_k$：双曲線関数項の分離・単位化された Field matrix，$\tilde{\boldsymbol{P}}_k$：双曲線関数項の分離・単位化された Point matrix，$\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,l}=\tilde{\boldsymbol{F}}_k\cdot\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,0}$：格間 k の右端の状態ベクトル（双曲線関数項は分離・単位化），$\tilde{\boldsymbol{y}}_{k+1,0}=\tilde{\boldsymbol{P}}_k\cdot\boldsymbol{y}_{k,l}$：格間 $k+1$ の左端の状態ベクトル（双曲線関数項は分離・単位化）。

これらのマトリックスやベクトルの右肩に * 印をつけた量（たとえば，$\tilde{\boldsymbol{F}}_k{}^*$）は，後述するように無次元化されたものを示す。

3. 直線桁の曲げねじり解析

(1) 基礎式

薄肉直線桁に分布ねじり荷重 m_x が作用したときのねじり角 β に関する微分方程式は，次式で表わされる[14]。

$$EI_\omega\rho\frac{d^4\beta}{dx^4}-GK\frac{d^2\beta}{dx^2}=m_x \quad\cdots\cdots(1)$$

いま，ねじりに関するパラメーターを

$$\alpha=\sqrt{GK/EI_\omega\rho} \quad\cdots\cdots(2)$$

と定義すると，断面力は次のようになる。

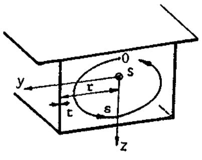
$$T_s=GK\frac{d\beta}{dx} \quad\cdots\cdots(3)$$

$$M_\omega=EI_\omega\rho\frac{d^2\beta}{dx^2} \quad\cdots\cdots(4)$$

$$T_\omega=-EI_\omega\rho\frac{d^3\beta}{dx^3} \quad\cdots\cdots(5)$$

ここに，ρ は文献[14]によると，次式で与えられ，

$$\rho=I_{rr}/(I_{rr}-K) \quad\cdots\cdots(6)$$



図—2 閉断面

閉断面の場合，図—2 に示す s 座標を用いると，式 (6) の I_{rr} は次式で求められる。

$$I_{rr}=\int_F r^2 t\,ds \quad\cdots\cdots(7)$$

特に，開断面の場合には，

$$\rho=1 \quad\cdots\cdots(8)$$

となり，いずれにしても式 (1) を基礎式とすればよい。

式 (1) を式 (2)～(5) を用いて解き，matrix 表示すると，次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_s \\ M_\omega \\ T_\omega \\ 1 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{GK}x & -\dfrac{1}{GK}(1-\cosh\alpha x) & \dfrac{1}{\alpha GK}(\alpha x-\sinh\alpha x) & -\dfrac{m_x}{\alpha^2 GK}\left\{1-\cosh\alpha x+\dfrac{(\alpha x)^2}{2}\right\} \\ 0 & 1 & \alpha\sinh\alpha x & 1-\cosh\alpha x & -\dfrac{m_x}{\alpha}(\alpha x-\sinh\alpha x) \\ 0 & 0 & \cosh\alpha x & -\dfrac{1}{\alpha}\sinh\alpha x & -\dfrac{m_x}{\alpha^2}(1-\cosh\alpha x) \\ 0 & 0 & -\alpha\sinh\alpha x & \cosh\alpha x & -\dfrac{m_x}{\alpha}\sinh\alpha x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ T_s \\ M_\omega \\ T_\omega \\ 1 \end{bmatrix}_0 \quad \cdots\cdots(9)$$

a) 双曲線関数項の分離

式 (9) は，一般に始点 x に 0 の状態ベクトル（初期ベクトル）から任意点 x の状態ベクトルを求める関係式である。すなわち，

$$\boldsymbol{y}_x=\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{y}_0 \quad \cdots\cdots(10)$$

となる。この $\boldsymbol{F}_x$ matrix の各要素に注目すると，双曲線関数項が混在しているので，まえがきに述べたように計算精度上好ましくない。そこで，双曲線関数項を分離するために

$$\beta_s=\beta-M_\omega/GK, \quad T=T_s+T_\omega \quad \cdots\cdots(11\cdot\text{a, b})$$

とおくと，式 (9) は次式のように変換される。

$$\begin{bmatrix} \beta_s \\ T_s \\ M_\omega \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{GK}x & -\dfrac{m_x}{2GK}x^2 \\ 0 & \cosh\alpha x & \alpha\sinh\alpha x & 1-\cosh\alpha x & \dfrac{m_x}{\alpha}(\sinh\alpha x-\alpha x) \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha}\sinh\alpha x & \cosh\alpha x & -\dfrac{1}{\alpha}\sinh\alpha x & -\dfrac{m_x}{\alpha^2}(1-\cosh\alpha x) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -m_x x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_s \\ T_s \\ M_\omega \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_0 \quad \cdots\cdots(12)$$

式 (9) と式 (12) とを比較すると，式 (12) の $\boldsymbol{F}_x$ matrix では，1 行目と 4 行目とが双曲線関数項を含まない点が式 (9) と著しく相違する。また，式 (12) の点線内の項を無視すると，

$$\frac{d^2\beta_s}{dx^2}=-\frac{m_x}{GK}, \quad T=GK\frac{d\beta_s}{dx} \quad \cdots\cdots(13)$$

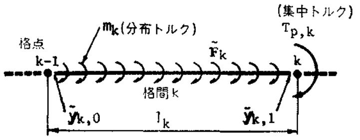
になり，単純ねじり理論により得られる結果と全く一致するので，β_s は単純ねじり理論によるねじり角と定義することができる。

b) 双曲線関数項の単位化

双曲線関数項を分離した式 (12) の 2 行目と 3 行目は双曲線関数項を含むが，この双曲線関数項は αx が大きくなると，他の要素に比して著しく大きな値になる。そこで，これを防止するために，

$$\left.\begin{aligned} \tilde{T}_s&=T_s/\cosh\alpha x \\ \tilde{M}_\omega&=M_\omega/\cosh\alpha x \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

とおく。すると，式 (10) は，図—3 に示すはり要素の場合次のように表わされる。



図—3

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,l}=\tilde{\boldsymbol{F}}_k\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,0} \quad \cdots\cdots(15)$$

ここに，サフィクス k は格間番号を示し，状態ベクトル

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{y}}_{k,0}&=\{\beta_{s,k}\tilde{T}_{s,k}\tilde{M}_{\omega,k}T_k \;\; 1\}_0 \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_{k,l}&=\{\beta_{s,k}\tilde{T}_{s,k}\tilde{M}_{\omega,k}T_k \;\; 1\}_l \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(16)$$

につけたサフィクス 0, (l) は格間の左端，(右端) を表わす。したがって，格間 k の Field matrix $\tilde{\boldsymbol{F}}_k$ は，

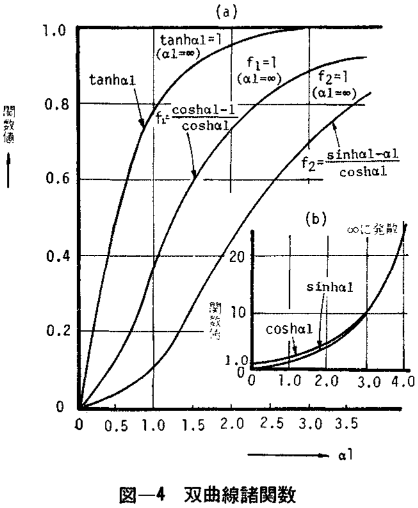
$$\tilde{\boldsymbol{F}}_k=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dfrac{l_k}{GK_k} & -\dfrac{m_k}{2\,GK_k}l_k^{\,2}\\ 0 & 1 & \alpha_k\tanh\alpha_k l_k & \dfrac{1-\cosh\alpha_k l_k}{\cosh\alpha_k l_k} & \dfrac{m_k}{\alpha_k}\,\dfrac{\sinh\alpha_k l_k-\alpha_k l_k}{\cosh\alpha_k l_k}\\ 0 & \dfrac{1}{\alpha_k}\tanh\alpha_k l_k & 1 & -\dfrac{1}{\alpha_k}\tanh\alpha_k l_k & -\dfrac{m_k}{\alpha_k^{\,2}}\,\dfrac{1-\cosh\alpha_k l_k}{\cosh\alpha_k l_k}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -m_k l_k\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdots\cdots(17)$$

と書くことができる。いま，単位化された双曲線関数を

$$f_1=\frac{\cosh\alpha l-1}{\cosh\alpha l}=\frac{\sinh^2(\alpha l/2)}{2\cosh\alpha l}\cdots\cdots(18)$$

$$f_2=\frac{\sinh\alpha l-\alpha l}{\cosh\alpha l}\cdots\cdots(19)$$

とおくと，これらの関数 f_1, f_2 は **図―4** からわかるように，$\tanh\alpha l$ とともに，$\alpha l=\infty$ のとき，いずれも 1.0 に収束する。したがって，式 (17) の Field matrix 中の双曲線関数項の値が著しく大きくなるのを防止することができる。



図―4　双曲線諸関数

一方，式 (17) において，$l_k=0$ とすれば，等断面の場合の Point matrix が次式のように得られる。

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_k=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \beta_{s,k}{}^s\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \tilde{T}_{s,k}{}^s\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \tilde{M}_{\omega,k}{}^s\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -T_{P,k}+T_k{}^s\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdots\cdots(20)$$

式中，$T_{P,k}$ は図―**3** に示したように，格点 k に作用する集中トルクである。また，上添字 s のついている荷重項は格点 k に生ずるステップ量とするが，後述するように，格点 k が中間支点である場合や，また，格点 k で断面が急変するような特異点以外では

$$\beta_{s,k}{}^s=\tilde{T}_{s,k}{}^s=\tilde{M}_{\omega,k}{}^s=T_k{}^s=0\cdots\cdots(21)$$

とする。

したがって，格間 $k+1$ の左端の状態ベクトル $\tilde{\boldsymbol{y}}_{k+1,0}$ は次式で求められる。

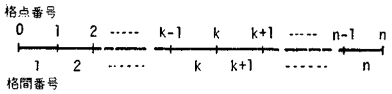
$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{k+1,0}=\tilde{\boldsymbol{P}}_k\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,l}\cdots\cdots(22)$$

ここに，

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{k+1,0}=\{\beta_{s,k+1}\tilde{T}_{s,k+1}\tilde{M}_{\omega,k+1}T_{k+1}\ \ 1\}_0\cdots\cdots(23)$$

（2）桁全体の計算方式

図―5 のように，n 個の格間を有する桁全体の計算は，式 (15)，(22) を順次利用して，次式によって行う。



図―5

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{n,l}=\tilde{\boldsymbol{F}}_n\tilde{\boldsymbol{P}}_{n-1}\tilde{\boldsymbol{F}}_{n-1}\tilde{\boldsymbol{P}}_{n-2}\cdots\tilde{\boldsymbol{P}}_k\tilde{\boldsymbol{F}}_k\cdots\tilde{\boldsymbol{F}}_2\tilde{\boldsymbol{P}}_1\tilde{\boldsymbol{F}}_1\boldsymbol{y}_{1,0}\cdots\cdots(24)$$

上式の計算を実行するとき，若干の工夫がいるので，これを簡単な例題で示す。

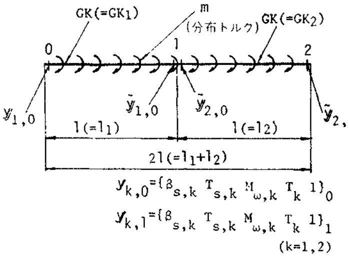
a） 等パネル，等断面の場合

図―6 は任意の境界条件を持つ等パネル，等断面で格間数 2 のはりとする。荷重は等分布トルク m が満載する。ある任意断面の変形量，断面力は初期ベクトルの一次関数で与えられるが，これを matrix 表示したものを State matrix を定義する。すると，まず，State matrix $\tilde{Y}_{2,0}=\tilde{P}_1\tilde{F}_1\tilde{Y}_{1,0}$ までは普通の方法で演算を進めることができる。ところが，これに $\tilde{F}_2$ を乗ずる際には若干の工夫を必要とする。すなわち，**表―1** に示すように，$\tilde{Y}_{2,0}$ の第 4 行目と第 5 行目は，元の値とそれを $\cosh\alpha l$ で割った 2 つのものを考える（**表―1** 中に印 { で 2 つの値を示してある）。そして，$\tilde{F}_2\tilde{Y}_{2,0}$ の第 1, 4, 5 行目の要素のスカラー積を計算する際は，上側に示した元の値を使用し，第 2, 3 行目の要素を求める際は，元の値を $\cosh\alpha l$ で割った下側に示した値を用いる。

すると，**表―1** に示すような解が得られる。この解は式 (14) を考慮すると，

$$T_{s,2,0}=\tilde{T}_{s,2,0}\cdot\cosh\alpha l,\ \ M_{\omega,2,0}=\tilde{M}_{\omega,2,0}\cdot\cosh\alpha l\cdots\cdots(25)$$

$$T_{s,2,l}=\tilde{T}_{s,2,l}\cdot\cosh^2\alpha l,\ \ M_{\omega,2,l}=\tilde{M}_{\omega,2,l}\cdot\cosh^2\alpha l\cdots\cdots(26)$$



図—6

表—1 計算方式

$$\begin{matrix}\beta_{s,1,0} & T_{s,1,0} & M_{\omega,1,0} & T_{1,0} & 1\end{matrix}$$

$$\tilde{P}_1\tilde{F}_1E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dfrac{l}{GK} & -\dfrac{m}{2GK}l^2\\ 0 & \dfrac{\cosh\alpha l}{\cosh\alpha l} & \alpha\dfrac{\sinh\alpha l}{\cosh\alpha l} & \dfrac{1-\cosh\alpha l}{\cosh\alpha l} & \dfrac{m}{\alpha}\,\dfrac{\sinh\alpha l-\alpha l}{\cosh\alpha l}\\ 0 & \dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{\sinh\alpha l}{\cosh\alpha l} & \dfrac{\cosh\alpha l}{\cosh\alpha l} & -\dfrac{\sinh\alpha l}{\alpha\cosh\alpha l} & -\dfrac{m}{\alpha^2}\,\dfrac{1-\cosh\alpha l}{\cosh\alpha l}\\ 0 & 0 & 0 & \begin{cases}1\\1/\cosh\alpha l\end{cases} & \begin{cases}-ml\\-ml/\cosh\alpha l\end{cases}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\tilde{Y}_{2,0}$$

$$\tilde{F}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dfrac{l}{GK} & -\dfrac{m}{2GK}l^2\\ 0 & 1 & \alpha\tanh\alpha l & \dfrac{1-\cosh\alpha l}{\cosh\alpha l} & \dfrac{m}{\alpha}\,\dfrac{\sinh\alpha l-\alpha l}{\cosh\alpha l}\\ 0 & \dfrac{1}{\alpha}\tanh\alpha l & 1 & -\dfrac{1}{\alpha}\tanh\alpha l & -\dfrac{m}{\alpha^2}\,\dfrac{1-\cosh\alpha l}{\cosh\alpha l}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -ml\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dfrac{2l}{GK} & -\dfrac{m}{2GK}(2l)^2\\ 0 & \dfrac{\cosh 2\alpha l}{\cosh^2\alpha l} & \alpha\dfrac{\sinh 2\alpha l}{\cosh^2\alpha l} & \dfrac{1-\cosh 2\alpha l}{\cosh^2\alpha l} & \dfrac{m}{\alpha}\,\dfrac{\sinh 2\alpha l-2\alpha l}{\cosh^2\alpha l}\\ 0 & \dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{\sinh 2\alpha l}{\cosh^2\alpha l} & \dfrac{\cosh 2\alpha l}{\cosh^2\alpha l} & -\dfrac{\sinh 2\alpha l}{\alpha\cosh^2\alpha l} & -\dfrac{m}{\alpha^2}\,\dfrac{1-\cosh 2\alpha l}{\cosh^2\alpha l}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -m\cdot 2l\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{cases}1\\1/\cosh\alpha l\end{cases}\end{bmatrix}=\tilde{F}_2\tilde{P}_1\tilde{F}_1E=\tilde{Y}_{2,l}$$

であるので，表—1 中の State matrix $\tilde{Y}_{2,l}$ は，式 (12) の x の代りに $2l$ を代入して得られる State matrix に全く一致し，表—1 に示した計算方式が正しいことがわかる。

$$\begin{matrix}\beta_{s,0} & T_{s,0} & M_{\omega,0} & T_0 & 1\end{matrix}$$

$$\tilde{Y}_{k+1,0}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dfrac{kl}{GK} & -\dfrac{m}{2GK}(kl)^2\\ 0 & \dfrac{\cosh k\alpha l}{\cosh^k\alpha l} & \alpha\dfrac{\sinh k\alpha l}{\cosh^k\alpha l} & \dfrac{1-\cosh k\alpha l}{\cosh^k\alpha l} & \dfrac{m}{\alpha}\,\dfrac{\sinh k\alpha l-k\alpha l}{\cosh^k\alpha l}\\ 0 & \dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{\sinh k\alpha l}{\cosh^k\alpha l} & \dfrac{\cosh k\alpha l}{\cosh^k\alpha l} & -\dfrac{\sinh k\alpha l}{\alpha\cosh^k\alpha l} & -\dfrac{m}{\alpha^2}\,\dfrac{1-\cosh k\alpha l}{\cosh^k\alpha l}\\ 0 & 0 & 0 & \begin{cases}1\\1/\cosh^k\alpha l\end{cases} & \begin{cases}-mkl\\-mkl/\cosh^k\alpha l\end{cases}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{cases}1\\1/\cosh^k\alpha l\end{cases}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(27)$$

一般に第 $k+1$ 格間の左端における State matrix $\tilde{Y}_{k+1,0}$ は，上記の計算方式にしたがうと，式 (27) のようになる。そして，式 (26) と同様に，純ねじりモーメント，および，そりモーメントは，

$$\left.\begin{aligned}T_{s,k,l}&=\tilde{T}_{s,k,l}\cdot\cosh^k\alpha l\\ M_{\omega,k,l}&=\tilde{M}_{\omega,k,l}\cdot\cosh^k\alpha l\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(28)$$

として求められる。

b) 不等パネルの場合

図—6 に示したはりが不等パネルを有する場合は，表—1 の計算方式にしたがって計算すればよいが，式 (27) 中の kl, $\cosh k\alpha l$, $\cosh^k\alpha l$ などは，次のように置きかえればよい。

$$\left.\begin{aligned}&kl\rightarrow l_1+l_2+\cdots+l_k=\sum_{i=1}^{k}l_i\\ &\cosh k\alpha l\rightarrow\cosh(\alpha_1l_1+\alpha_2l_2+\cdots\\ &\qquad\cdots+\alpha_kl_k)=\cosh\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_il_i\right)\\ &\cosh^k\alpha l\rightarrow\cosh\alpha_1l_1\cdot\cosh\alpha_2l_2\cdots\\ &\qquad\cdot\cosh\alpha_kl_k=\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_il_i\end{aligned}\right\}\quad(29\cdot a,b,c)$$

また，式 (28) は，一般に次のようになる。

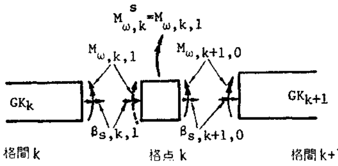
$$\left.\begin{aligned}T_{s,k,l}&=\tilde{T}_{s,k,l}\cdot\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_il_i\\ M_{\omega,k,l}&=\tilde{M}_{\omega,k,l}\cdot\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_il_i\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(30\cdot a,b)$$

c) 変断面の場合

図—6 に示したはりが変断面の場合も，表—1 の計算方式で計算すればよいが，式 (20) の Point matrix において若干修正する必要がある。

すなわち，図—7 に示すように，格点 k で断面が変化する場合，式 (11・a) より

$$\left.\begin{aligned}\beta_{s,k,l}&=\beta_{k,l}-M_{\omega,k,l}/GK_k\\ \beta_{s,k+1,0}&=\beta_{k+1,0}-M_{\omega,k+1,0}/GK_{k+1,0}\end{aligned}\right\}\quad(31\cdot a,b)$$



図—7

であり，また，次式の連続条件

$$\left.\begin{array}{l}\beta_{k+1,0}=\beta_{k,l},\ \beta_{k+1,0}'=\beta_{k,l}' \\ M_{\omega,k+1,0}=M_{\omega,k,l},\ T_{k+1,0}=T_{k,l}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(32)$$

と式 (30•b) を考慮すると，$\beta_{s,k+1,0}$ は次のように書ける。

$$\beta_{s,k+1,0}=\beta_{s,k,l}-\left(\frac{1}{GK_{k+1}}-\frac{1}{GK_k}\right)\prod_{i=1}^{k}\cdot\cosh\alpha_i l_i\tilde{M}_{\omega,k,l}\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

したがって，変断面を有する場合の Point matrix は，等断面に対する式 (20) の Point matrix の要素 $\tilde{\boldsymbol{P}}_{1,3}$ および，$\tilde{\boldsymbol{P}}_{2,2}$ において，

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\boldsymbol{P}}_{1,3}=-\left(\dfrac{1}{GK_{k+1}}-\dfrac{1}{GK_k}\right)\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i \\ \tilde{\boldsymbol{P}}_{2,2}=\dfrac{K_{k+1}}{K_k}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34\cdot a,b)$$

とすればよい。しかしながら，変断面のとき，$\tilde{\boldsymbol{P}}_k\tilde{\boldsymbol{F}}_k$ の掛け算を行ったとき，1行目には双曲線関数項を含む項と含まない項が混在する。それで，$\tilde{\boldsymbol{P}}_k\tilde{\boldsymbol{F}}_k$ を計算する際の処理法を以下に述べる。

① a) 等高断面の場合のように，$(1/K_{k+1}-1/K_k)$ が小さいとき；

b) 開断面の場合で $\alpha_i l_i$ が小さく，$\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i\fallingdotseq 1$ であるとき；

は，式 (34) を含んだ Point matrix をそのまま用いて計算すればよい。当然のことながら等断面のときは $\tilde{\boldsymbol{P}}_{1,3}=0$，$\tilde{\boldsymbol{P}}_{2,2}=1$ となる。

② a) 変断面の場合で，$(1/K_{k+1}-1/K_k)$ が大きいとき；

b) 閉断面でパネル割が粗く，$\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i$ が大きいとき；

は，双曲線関数項を以下のように分離することが望ましい。

いま，図—7 に示すように，新しい未知そりモーメント $M_{\omega,k}{}^s$ を格点 k に導入する。すると，式 (33) は，次のように書くことができる。

$$\beta_{s,k+1,0}=\beta_{s,k,l}-\left(\frac{1}{GK_{k+1}}-\frac{1}{GK_k}\right)M_{\omega,k}{}^s\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_{\omega,k,l}-\frac{M_{\omega,k}{}^s}{\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

ここで，式 (36) は新しく導入した未知量 $M_{\omega,k}{}^s$ を求める条件式となる。すなわち，式 (33) の代りに，式 (35)，(36) を用いたほうが，双曲線関数項を分離でき，しかも，スパンの中央点で条件式が1つ増し拘束度が大きくなるので，計算精度を向上することができる。

さらに，種々な数値計算を試みた結果，そりモーメントと共役対と考えられる純ねじりモーメントについても，格点 k に新しい未知量 $T_{s,k}{}^s$ を導入すると，

$$\tilde{\boldsymbol{T}}_{s,k,l}-\frac{T_{s,k}{}^s}{\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

の条件式が得られ，拘束度がさらに大きくなり，より高精度の結果を得ることができる。

一方，格間 $k+1$ の左端では，図—7 から

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{M}_{\omega,k+1,0}=\dfrac{M_{\omega,k}{}^s}{\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i} \\ \tilde{T}_{s,k+1,0}=\left(\dfrac{K_{k+1}}{K_k}\right)\dfrac{T_{s,k}{}^k}{\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

が成立することが明らかである。

結局，式 (35)，(38) を matrix 表示して，式 (20) の Point matrix を修正すると，式 (39) のようになる。

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_k=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -\left(\dfrac{1}{GK_{k+1}}-\dfrac{1}{GK_k}\right)M_{\omega,k}{}^s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\Big/\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i\left(\dfrac{K_{k+1}}{K_k}\right)T_{s,k}{}^s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\Big/\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i M_{\omega,k}{}^s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

あるいは計算機では代数計算ができないので，格点 k に導入した不静定量 $M_{\omega,k}{}^s$，$T_{s,k}{}^s$ をあらかじめ初期ベクトル中に加味し，任意の境界条件に対して，

$$\boldsymbol{y}_{1,0}=\{\beta_{s,1,0}\ T_{s,1,0}\ M_{\omega,1,0}\ T_{1,0}\ 1\ T_{s,k}{}^s\ M_{\omega,k}{}^s\cdots\}\cdots\cdots\cdots\cdots(23)'$$

と書くことにする。すると，格間 $k+1$ の左端の State matrix $\tilde{\boldsymbol{Y}}_{k+1,0}$ は式 (27) と対比して，式 (40) のように表わされる。

$$\tilde{Y}_{k+1,0}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}\beta_{s,1,0} & T_{s,1,0} & M_{\omega,1,0} & T_{1,0} & 1 & T_{s,k}{}^s & M_{\omega,k}{}^s\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc}1 & 0 & 0 & \dfrac{\sum_{i=1}^{k}l_i}{GK_k} & -\dfrac{m}{2GK_k}\left(\sum_{i=1}^{k}l_i\right)^2 & 0 & -\left(\dfrac{1}{GK_{k+1}}-\dfrac{1}{GK_k}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\dfrac{K_{k+1}}{K_k}\right)\Big/\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\Big/\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i \\ 0 & 0 & 0 & \begin{cases}1\\ 1\Big/\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i\end{cases} & \begin{cases}-m\left(\sum_{i=1}^{k}l_i\right)\\ -m\left(\sum_{i=1}^{k}l_i\right)\Big/\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i\end{cases} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{cases}1\\ 1\Big/\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i\end{cases} & 0 & 0\end{array}\right]\end{array}\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

ただし，式 (40) は，格間 k までは等断面 $(K_1=K_2\cdots=K_k)$ であり，格点 k で断面が急変する場合 $(K_k\neq K_{k+1})$ について示したものである。また，式 (40) 中，点線で囲んだ部分は，式 (39) でも明らかなように，Point matrix の要素 $\tilde{\boldsymbol{P}}_{1,3}=\tilde{\boldsymbol{P}}_{2,2}=\tilde{\boldsymbol{P}}_{3,3}=0$ としてあるためである。このように増加しつつあった matrix の要

素の数値がそこで消去され，より精度の高い計算が可能になる。

なお，上記に示した計算処理は，すべての格点で行う必要はなく，種々な数値計算から，連続桁橋で1スパンの αl が10程度であれば，各スパン中央点，および，中間支点で $T_{s,k}{}^s$，$M_{\omega,k}{}^s$ を導入すればよい（αl が非常に大きくなっても，各スパン4等分点，および，中間支点において $T_{s,k}{}^s$，$M_{\omega,k}{}^s$ を導入すればよい）ように思われる。

最後に，ねじり角 β は，式 (11･a) より逆に

$$\beta_{k,0(l)}=\beta_{s,k,0(l)}+\tilde{M}_{\omega,k,0(l)}\cdot\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i/GK_k \quad \cdots\cdots(41)$$

として求められる。

(3) 無次元化と双曲線関数項単位化による精度

a) 断面力，変形量の無次元化

(1) の **a)**，**b)** において，双曲線関数項の分離と単位化を行って，式 (9) のかわりに式 (17) の Field matrix を用いたほうが利点が多いことを示した。ここでは，さらに計算精度の向上をはかるために，変形量，断面力，および，荷重項を，次のように無次元化する。

$$\left.\begin{aligned}&\beta_s=P_c(l_c{}^2/GK_c)\beta_s{}^*,\ \tilde{T}_s=P_cl_c\tilde{T}_s{}^*\\&\tilde{M}_\omega=P_c(l_c/\alpha_c)\tilde{M}_\omega{}^*,\ T=P_cl_cT^*\\&m=P_cm^*,\quad T_p=P_cl_cT_p{}^*\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(42)$$

ここに，P_c：基準荷重，l_c：基準スパン，K_c：基準純ねじり定数，α_c：基準ねじりパラメーター，を示す。

すると，式 (17) を無次元化した Field matrix は，式 (43) のようになる。

$$\tilde{F}_k{}^*=\begin{bmatrix}1&0&0&\left(\frac{l_k}{l_c}\right)\left(\frac{K_c}{K_k}\right)&-\frac{m_k{}^*}{2}\left(\frac{l_k}{l_c}\right)^2\left(\frac{K_c}{K_k}\right)\\0&1&\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_c}\right)\tanh\alpha_kl_k&\frac{1-\cosh\alpha_kl_k}{\cosh\alpha_kl_k}&m_k{}^*\left(\frac{1}{\alpha_kl_c}\right)\frac{\sinh\alpha_kl_k-\alpha_kl_k}{\cosh\alpha_kl_k}\\0&\left(\frac{\alpha_c}{\alpha_k}\right)\tanh\alpha_kl_k&1&-\left(\frac{\alpha_c}{\alpha_k}\right)\tanh\alpha_kl_k&-m_k{}^*\left(\frac{\alpha_c}{\alpha_k}\right)\left(\frac{1}{\alpha_kl_c}\right)\frac{1-\cosh\alpha_kl_k}{\cosh\alpha_kl_k}\\0&0&0&1&-m_k{}^*\left(\frac{l_k}{l_c}\right)\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots(43)$$

一方，無次元化を行った Point matrix は，式 (44) のようになる。

$$\tilde{P}_k{}^*=\begin{bmatrix}1&0&\boxed{-\left(\frac{K_c}{\alpha_cl_c}\right)\left(\frac{1}{K_{k+1}}-\frac{1}{K_k}\right)\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_il_i}&0&0\\0&\boxed{\frac{K_{k+1}}{K_k}}&0&0&0\\0&0&\boxed{1}&0&0\\0&0&0&1&-T_{P,k}{}^*\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\cdots(44)$$

上式中，等断面のときは実線で囲んだ要素は0となる。また，変断面でも **(2)c)** で述べた ② のときは，点線で囲んだ要素を0とし，**(2)c)** で示した計算処理を行う。

以上，式 (43) と (44) を用いて，桁左端の初期ベクトル $\boldsymbol{y}_{1,0}{}^*$ から，格間 n の右端の状態ベクトルは，次式で求められる。

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{n,l}{}^*=\tilde{\boldsymbol{F}}_n{}^*\tilde{\boldsymbol{P}}_{n-1}{}^*\tilde{\boldsymbol{F}}_{n-1}{}^*\cdots\tilde{\boldsymbol{P}}_k{}^*\tilde{\boldsymbol{F}}_k{}^*\tilde{\boldsymbol{P}}_{k-1}{}^*\cdots$$
$$\cdots\tilde{\boldsymbol{F}}_2{}^*\tilde{\boldsymbol{P}}_1{}^*\tilde{\boldsymbol{F}}_1{}^*\boldsymbol{y}_{1,0}{}^*\ \cdots\cdots(45)$$

b) 双曲線関数項単位化による精度

簡単のため，等パネル，等断面に対して求められた式 (27) 中に現われる

$$\frac{\cosh k\alpha l}{\cosh^k\alpha l},\ \frac{\sinh k\alpha l}{\cosh^k\alpha l}\ (k=1,2,\cdots,n)$$

の数値について考察する。文献24) によると，次の展開式が得られ，αl が大きいときは，〈 〉に示す値に収束することがわかる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\cosh2\alpha l}{\cosh^2\alpha l}=2\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^2\alpha l}\right),\ \langle2\rangle\\&\frac{\cosh3\alpha l}{\cosh^3\alpha l}=4\left(1-\frac{3}{4}\frac{\cosh\alpha l}{\cosh^3\alpha l}\right),\ \langle4\rangle\\&\frac{\cosh4\alpha l}{\cosh^4\alpha l}=8\left(1-\frac{1}{2}\frac{\cosh2\alpha l}{\cosh^4\alpha l}-\frac{3}{8}\frac{1}{\cosh^4\alpha l}\right),\ \langle8\rangle\\&\frac{\cosh5\alpha l}{\cosh^5\alpha l}=16\left(1-\frac{5}{16}\frac{\cosh3\alpha l}{\cosh^5\alpha l}-\frac{5}{8}\frac{\cosh\alpha l}{\cosh^5\alpha l}\right),\ \langle16\rangle\end{aligned}\right\}\cdots(46)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sinh2\alpha l}{\cosh^2\alpha l}=2\left(\tanh^2\alpha l+\frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^2\alpha l}\right),\ \langle2\rangle\\&\frac{\sinh3\alpha l}{\cosh^3\alpha l}=4\left(\tanh^3\alpha l+\frac{3}{4}\frac{1}{\cosh^3\alpha l}\right),\ \langle4\rangle\\&\frac{\sinh4\alpha l}{\cosh^4\alpha l}=8\left(\tanh^4\alpha l+\frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^4\alpha l}-\frac{3}{8}\frac{1}{\cosh^4\alpha l}\right),\ \langle8\rangle\\&\frac{\sinh5\alpha l}{\cosh^5\alpha l}=16\left(\tanh^5\alpha l+\frac{5}{16}\frac{1}{\cosh^5\alpha l}-\frac{5}{8}\frac{1}{\cosh^5\alpha l}\right),\ \langle16\rangle\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(47)$$

すなわち，αl が大きくなると，次のように収束する。

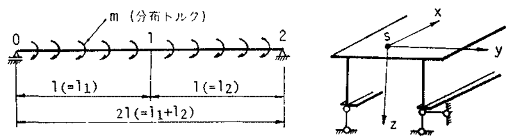
$$a_n=\lim_{\alpha l\to\infty}\frac{\cosh n\alpha l}{\cosh^n\alpha l}=\lim_{\alpha l\to\infty}\frac{\sinh n\alpha l}{\cosh^n\alpha l}=2^{n-1}$$
$$(n;\ \text{総格間数})\ \cdots\cdots(48)$$

すると，式 (43) のように，単位化された Field matrix を用い，**(2)** で述べた計算方式によって得られる State matrix の各要素は，αl が著しく大きくなっても，激増しないことがわかる。

一方，αl が小さいとき（ただし，$\alpha l\fallingdotseq0$）には，式 (46) は，

$$b_n=\lim_{\alpha l\to0}\frac{\cosh n\alpha l}{\cosh^n\alpha l}=1\ \cdots\cdots(49)$$

に収束し，式 (47) は，



(a)　　(b)

図—8

$$b_n=\lim_{\alpha l\to 0}\frac{\sinh n\alpha l}{\cosh^n\alpha l}=n\alpha l \quad \cdots\cdots(50)$$

となる。

次に，境界条件の詳細については後述するが，たとえば，図—8 (a),(b) に示した単純桁で両端の境界がねじりに対して固定されている回転拘束単純支持の場合，双曲線関数項の単位化と無次元化を行った計算によって得られる計算精度について考察する。

桁左端の境界条件は，

$$\beta_{1,0}{}^*=M_{\omega,1,0}{}^*=0 \quad \cdots\cdots(51)$$

であり，したがって，式 (11•a)，(51) より

$$\beta_{s,1,0}{}^*=0 \quad \cdots\cdots(52)$$

となる。また，初期ベクトル $\boldsymbol{y}_{1,0}{}^*$ は

$$\boldsymbol{y}_{1,0}{}^*=\{T_{s,1}{}^*\ T_1{}^*\ 1\}_0 \quad \cdots\cdots(53)$$

である。さらに，桁右端の境界条件は次式で得られる。

$$\beta_{s,2,l}{}^*=0,\ \tilde{M}_{\omega,2,l}{}^*=0 \quad \cdots\cdots(54)$$

それで，表—1 の計算方式にしたがって，未知量 $T_{s,1,0}{}^*$，$T_{1,0}{}^*$ がつくる係数行列式を求めると，次のようになる。

$$det\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 2\left(\frac{l}{l_c}\right)\left(\frac{K_c}{K}\right) \\ \left(\frac{\alpha_c}{\alpha}\right)\frac{\sinh 2\alpha l}{\cosh^2\alpha l} & -\left(\frac{\alpha_c}{\alpha}\right)\frac{\sinh 2\alpha l}{\cosh^2\alpha l}\end{bmatrix}$$

$$=-2\left(\frac{\alpha_c}{\alpha}\right)\left(\frac{l}{l_c}\right)\left(\frac{K_c}{K}\right)\frac{\sinh 2\alpha l}{\cosh^2\alpha l}\cdots(55)$$

ここで，基準量を $\alpha_c=\alpha$，$l_c=l$，$K_c=K$ に選べば，

$$det\ \boldsymbol{A}=-2\sinh 2\alpha l/\cosh^2\alpha l$$

となる。すると，

i）αl が大きい場合，式 (48) より

$$a_n=det\boldsymbol{A}=-2\cdot 2^{2-1}=-4\ll-\infty$$

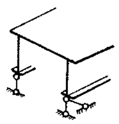
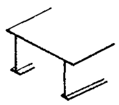
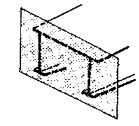
ii）αl が小さい場合，式 (50) より

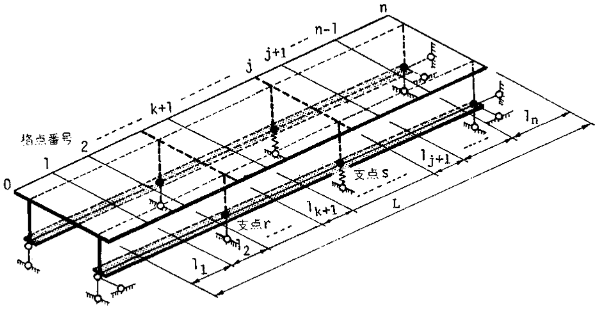
$$b_n=det\boldsymbol{A}=-4\alpha l\fallingdotseq 0$$

が得られる。したがって，係数行列式が $-\infty$ でも 0 でもないので，係数行列の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が精度よく存在する。ちなみに，双曲線関数項を単位化しなければ，$det\boldsymbol{A}=-2\sinh 2\alpha l$ となり，αl が大きいとき，$det\boldsymbol{A}=-\infty$ となり，このような場合には解が不安定となり精度が悪くなることは明らかである。したがって，本文のように双曲線関数項の単位化をすることは有意義であると思われる。

以上，等分布トルクが桁に満載した場合を対象にして，双曲線関数項の分離・単位化を行った計算方式と計算精度について考察したが，固定端，自由端などの任意の境界を持つはりに種々なねじり荷重が作用する場合でも，(2) で述べた計算方式にしたがって得られる結果は，小松[9]，Kollbrunner[14] の解析結果と全く一致するので，ここでは省略する。

表—2 初期条件

項目	回転拘束単純支持	自由端	固定端
桁左端の初期条件	 $\beta_{s,1,0}^*=0$, $M_{\omega,1,0}^*=0$	 $M_{\omega,1,0}^*=0$, $T_{1,0}^*=0$,	 $\beta_{s,1,0}^*=\left(\frac{1}{\alpha_c l_c}\right)\left(\frac{k_c}{kl}\right)M_{\omega,1,0}^*$, $T_{s,1,0}^*$
自由量	$T_{s,1,0}^*$, $T_{1,0}^*$	$\beta_{s,1,0}^*$, $T_{s,1,0}^*$	$M_{\omega,1,0}^*$, $T_{1,0}^*$



図—9 連続桁

(4) 境界条件

a) 桁の初期条件

桁左端がねじりに対して回転拘束単純支持，自由端，および，固定端である場合について，それぞれ，初期条件と自由量とを表—2 に総括する。

b) 桁の中間条件

i）剛支点の処理

図—9 に示す不等パネル，変断面の連続桁を考える。支点 r は図示のようにねじりに対して剛に支持されている。支点 r（格点番号 k）においては，次の変形量の連続条件，および，断面力のつり合い式を満足しなければならない。

$$\left.\begin{array}{l}\beta_{k+1,0}{}^*=\beta_{k,l}{}^*=0,\ \tilde{T}_{s,k+1,0}{}^*=\left(\dfrac{K_{k+1}}{K_k}\right)\tilde{T}_{s,k,l}{}^* \\ \tilde{M}_{\omega,k+1,0}{}^*=\tilde{M}_{\omega,k,l}{}^*,\ T_{k+1,0}{}^*=T_{k,l}{}^*-T_k{}^{s*}\end{array}\right\}$$

$$\cdots\cdots(56\cdot a\sim d)$$

ここに，$T_k{}^{s*}$ はねじり角が固定されているとき，格点 k に生ずる不静定トルクである。これを求める条件としては，ねじり角 $\beta_{k,l}{}^*=0$ と式 (11•a)，および，式 (31•

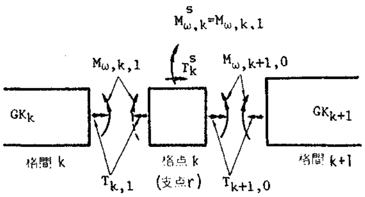
a）より

$$\beta_{s,k,l}^*+\left(\frac{1}{\alpha_c l_c}\right)\left(\frac{K_c}{K_k}\right)\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i \hat{M}_{\omega,k,l}^*=0 \quad\cdots\cdots(57)$$

とおくことができる。

しかしながら，式（57）を用いて，剛支点に対する条件式を作るとこの条件式は双曲線関数を含まない項（$\beta_{s,k,l}^*$）と，含む項（$\tilde{M}_{\omega,k,l}^*$）とがここでまた混在するので，精度上好ましくない。そこで，（**2**）**c**）で述べたのと同様な計算処理をする。

すなわち，図―**10** に示すように，中間支点 r（格点 k）のところに生ずる未知反力トルク $T_k{}^s$ の他に，新しい未知そりモーメント $M_{\omega,k}{}^s$，および，これと共役対と考えられる純ねじりモーメント $T_{s,k}{}^s$ を格点 k に導入すれば，式（57）の条件式の代りに，表―**3** に示す3つの拘束条件式が得られる。



図―10　剛支点における断面力

表―3　剛支点に対する中間条件式

未知量	中間条件式
$\tilde{M}_{\omega,k}{}^{s*}$	$M_{\omega,k,l}-\dfrac{M_{\omega,k}{}^{s*}}{\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i}=0$
$T_k{}^{s*}$	$\beta_{s,k,l}+\left(\dfrac{1}{\alpha_c l_c}\right)\left(\dfrac{K_c}{K_k}\right)M_{\omega,k}{}^{s*}=0$
$\tilde{T}_{s,k}{}^{s*}$	$T_{s,k,l}-\dfrac{T_{s,k}{}^{s*}}{\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i}=0$

一方，格間 $k+1$ の左端では，式（35），（37），（57）から，

$$\left.\begin{aligned}\beta_{s,k+1,0}^*&=-\left(\frac{1}{\alpha_c l_c}\right)\left(\frac{K_c}{K_{k+1}}\right)M_{\omega,k}{}^{s*}\\ \tilde{M}_{\omega,k+1,0}^*&=\frac{M_{\omega,k}{}^{s*}}{\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i}\\ \tilde{T}_{s,k+1,0}&=\left(\frac{K_{k+1}}{K_k}\right)\frac{T_{s,k}{}^{s*}}{\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(58)$$

が成立する。これらを matrix 表示して，剛支点に対する Point matrix $\tilde{\boldsymbol{P}}_k^*$，および，剛支点を越えた State matrix $\tilde{\boldsymbol{Y}}_{k+1,0}^*$ を（**2**）**c**）と同様にして求めると，それぞれ，式（59）と（60）が得られる。

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_k^*=\begin{bmatrix}\boxed{0}&0&\boxed{0}&0&0\\0&\boxed{0}&0&0&0\\0&0&\boxed{0}&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(59)$$

$$\tilde{Y}_{k+1,0}^*=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&\left(\frac{1}{\alpha_c l_c}\right)\left(\frac{K_c}{K_{k+1}}\right)\\0&0&0&0&\left(\frac{K_{k+1}}{K_k}\right)\Big/\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i&0\\0&0&0&0&0&1\Big/\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i\\0&\begin{cases}1\\1\Big/\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i\end{cases}&\begin{cases}-m_k{}^*kl_k\\-m_k{}^*kl_k\Big/\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i\end{cases}&\begin{cases}-1\\-1\Big/\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i\end{cases}&0&0\\0&0&\begin{cases}1\\1\Big/\prod_{i=1}^{k}\cosh\alpha_i l_i\end{cases}&0&0&0\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(60)$$

式（60）中，点線で囲んだ部分は，式（59）中の点線で囲んだ部分が0であるためである。また，式（60）は桁左端の境界がねじりに対して回転拘束単純支持とした場合であり，格点 k に生ずる不静定量はすべて初期ベクトル中に加味している。

ii）ばね支点の処理

ラーメン橋脚等を有する連続桁は，図―**11**(a) に示す系に置換でき，このときの回転ばね定数は文献[18]に示されているので省略する。ところが，図―**11**(b) に示すように連続桁の中間支点が，間隔 b で鉛直ばね定数 K_w を有するばねで弾性支持されている場合の回転ばね定数 K_β は，以下のようにして求める。

図―**11**(c) はせん断中心 S に集中トルク T が作用したときの変形状態を示すが，図―**11**（b）より，トルク T と反力 P との関係は，

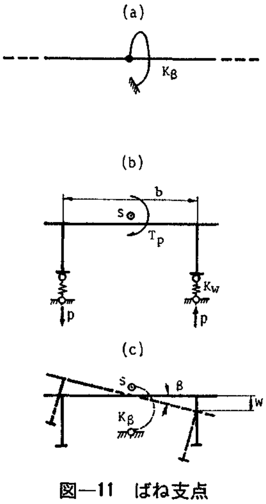
$$P=T/b \quad\cdots\cdots(61)$$

であり，図―**11**(c) より，ねじり角 β は，

$$\beta=w/(b/2)=(2/b)\cdot(P/K_w)=(2/b^2)\cdot(T/K_w) \quad\cdots\cdots(62)$$

となる。ここで，単位のねじり角を与えるトルクが回転ばね定数となり，次式で与えられる。

$$K_\beta=b^2K_w/2 \quad\cdots\cdots(63)$$



図―11　ばね支点

すなわち，橋軸直角方向に2個の鉛直ばねで弾性支持された状態（図―**11**（b））は図（c）のように，せん断中心まわりに，ねじり回転ばね K_β で弾性支持された状態と同じになる。

さて，図―**9** の支点 s（格点 j）における変形量の連続条件，断面力のつり合い式は式(56)と同じであるが，

ねじりモーメント T については，

$$T_{j+1,0}{}^*=T_{j,l}{}^*+K_{\beta,j}{}^*\beta_{j,l}{}^* \qquad (64)$$

となる。ここに，

$$K_{\beta,j}{}^*=K_{\beta,j}\cdot l_c/GK_c \qquad (65)$$

また，この場合もねじりに対して剛に支持されている場合と同様に，格点 j に新たな不静定量 $M_{\omega,j}{}^{s*}$，$T_{s,j}{}^{s*}$ を導入すると，

$$\left.\begin{aligned}\tilde{M}_{\omega,j,l}{}^*-\frac{M_{\omega,j}{}^{s*}}{\prod_{i=1}^{j}\cosh\alpha_i l_i}=0\\ \tilde{T}_{s,j,l}{}^*-\frac{T_{s,j}{}^{s*}}{\prod_{i=1}^{j}\cosh\alpha_i l_i}=0\end{aligned}\right\} \qquad (66\cdot\mathrm{a,b})$$

が $M_{\omega,j}{}^{s*}$，$T_{s,j}{}^{s*}$ を求める条件式となる。

一方，式 (64) は式 (31・a) を無次元化した式，および，式 (66・a) を考慮すると，次式のようになる。

$$T_{j+1,0}{}^*=T_{j,l}+K_{\beta,j}{}^*\Bigl\{\beta_{s,j,l}{}^*+\left(\frac{1}{\alpha_c l_c}\right)\left(\frac{K_c}{K_j}\right)M_{\omega,j}{}^{s*}\Bigr\} \qquad (67)$$

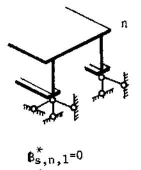
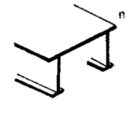
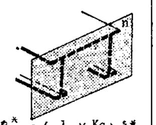
すなわち，式 (44) の Point matrix において，$\tilde{P}_{2,2}=\tilde{P}_{3,3}=0$ および，$\tilde{P}_{4,1}=K_{\beta,j}{}^*$ とする。そして，$\tilde{Y}_{j+1,0}{}^*$ の $M_{\omega,j}{}^{s*}$，$T_{s,j}{}^{s*}$ の列ベクトルに注目して書くと，次のようになる（ただし，等断面の場合である）。

$$\tilde{Y}_{j+1,0}{}^*=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}T_{s,j}{}^{s*} & M_{\omega,j}{}^{s*}\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 1\Big/\prod_{i=1}^{j}\cosh\alpha_i l_i & 0\\ 0 & 1\Big/\prod_{i=1}^{j}\cosh\alpha_i l_i\\ 0 & \left\{\begin{array}{l}K_{\beta,j}{}^*\left(\frac{1}{\alpha_c l_c}\right)\left(\frac{K_c}{K_j}\right)\\ K_{\beta,j}{}^*\left(\frac{1}{\alpha_c l_c}\right)\left(\frac{K_c}{K_j}\right)\Big/\prod_{i=1}^{j}\cosh\alpha_i l_i\end{array}\right.\\ 0 & 0\end{array}\right]\end{array} \qquad (68)$$

c) 桁の末端条件

桁右端がねじりに対して回転拘束単純支持，自由端，固定端である場合について，それぞれ，末端条件を表—4 に示す。ただし，表中の固定端の末端条件で，$M_{\omega,n}{}^{s*}$ は末端格点 n に導入した不静定そりモーメントである。

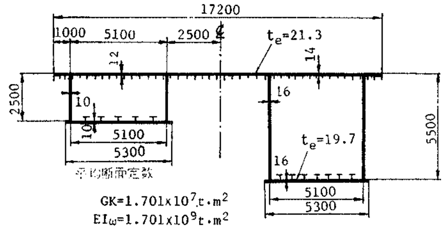
表—4 末 端 条 件

項　目	回転拘束単純支持	自　由　端	固　定　端
桁右端の末端条件	 $\tilde{\beta}_{s,n,l}{}^*=0$ $\tilde{M}_{\omega,n,l}{}^*=0$	 $\tilde{M}_{\omega,n,l}{}^*=0$ $\tilde{T}_{n,l}{}^*=0$	 $\tilde{\beta}_{s,n,l}{}^*-\left(\frac{1}{\alpha_c l_c}\right)\left(\frac{K_c}{K_n}\right)M_{\omega,n}{}^{s*}=0$ $\tilde{M}_{\omega,n,l}{}^*-\frac{M_{\omega,n}{}^{s*}}{\prod_{i=1}^{n}\cosh\alpha_i l_i}=0$ $\tilde{T}_{s,n,l}{}^*=0$

4. 数値計算例と考察

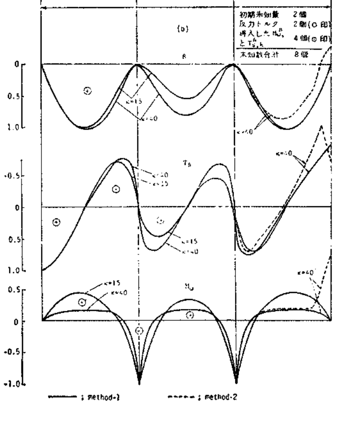
(1) 双曲線関数項の分離・単位化した方法と分離・単位化していない方法との計算結果の比較

直線桁のそりねじりの問題を数値解析するに先立ち，本文で述べた双曲線関数項を分離・単位化した解析結果が，分離・単位化しないものよりも，高精度であることをまず示す。なお，演算はすべて大阪市立大学計算センター設置の Facom 270-20/30 を使用し，倍精度の演算を行った。



図—12 鋼床版箱桁断面

図—12 は文献[10]に示された3径間連続鋼床版箱桁橋の断面図であるが，この平均断面を用いて，図—13 (a) に示す3径間連続桁に等分布トルク $m=1$ t・m/m を満載して，ねじり定数比 $\kappa(=L\sqrt{GK/EI_\omega}$，$L$ は全スパン長とする）を $\kappa=15$ と $\kappa=40$（スパン長を変化させる）にした場合，双曲線関数項の分離・単位化した解析方法（以下，method 1 とする）と分離・単位化しない方法（以下，method 2 とする）による計算結果の一例を図—13 (b) に示す。ただし，図中のねじり角 β，純ねじりモーメント T_s，そりモーメント M_ω の縦軸は，それぞ



図—13

表—5　計算結果の比較

		格点番号 0	5	10	15	20	25	30	有効桁数
変形量断面力									
$\kappa=15$ ($L=150^m$)	$\beta\times10^{-6}$ (rad) (1)	0	9.2838	0	5.1162	10^{-10}	9.2838	10^{-11}	10
	(2)	0	9.2838	0	5.1162	0	9.2838	10^{-15}	14
	(3)	0	9.2838	0	5.1162	0	9.2838	0	16
	$T_s\times10$ (t·m) (1)	1.1974	-0.1988	-0.1580	10^{-12}	0.1580	0.1988	-1.1974	9
	(2)	1.1974	-0.1988	-0.1580	10^{-16}	0.1580	0.1988	-1.1974	14
	(3)	1.1974	-0.1988	-0.1580	0	0.1580	0.1988	-1.1974	16
	$M_\omega\times10^2$ (t·m²) (1)	0	0.6988	-1.6941	0.5607	-1.6941	0.6988	10^{-10}	10
	(2)	0	0.6988	-1.6941	0.5607	-1.6941	0.6988	10^{-15}	15
	(3)	0	0.6988	-1.6941	0.5607	-1.6941	0.6988	0	16
$\kappa=40$ ($L=400^m$)	$\beta\times10^{-4}$ (rad) (1)	0	1.074	0	0.908	10^{-6}	0.925	10^{-1}	0
	(2)	0	1.0746	0	0.9020	10^{-16}	1.0746	10^{-14}	14
	(3)	0	1.0746	0	0.9020	0	1.0746	0	16
	$T_s\times10$ (t·m) (1)	5.233	-0.437	-0.212	10^{-2}	0.235	0.022	-3.98	0
	(2)	5.2235	-0.4340	-0.2280	10^{-16}	0.2208	0.4340	-5.2235	13
	(3)	5.2235	-0.4340	-0.2208	0	0.2208	0.4340	-5.2235	16
	$M_\omega\times10^2$ (t·m²) (1)	0	0.989	-5.894	0.983	5.671	0.993	10	0
	(2)	0	0.9899	-5.8858	0.9824	5.8858	0.9899	10^{-15}	14
	(3)	0	0.9899	-5.8858	0.9824	5.8858	0.9899	0	16

$GK=1.701\times10^7 tm^2$　　$EI_\omega=1.701\times10^9 tm^4$　　(1) method-2　(2) method-1　(3) 応力法

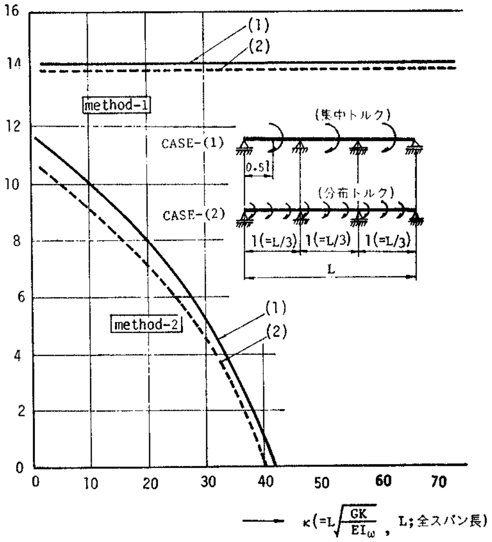
れの最大値で除して無次元化して表わしている。

図—13 (b) は格間数を 30 にとって計算したものであるが，この図よりわかるように，$\kappa=15$ では method 1 と method 2 の計算結果においては差異は生じない。しかし，method 2 で $\kappa=40$ になれば，末端の格点に近づくにつれて計算誤差が累積して，右端の有効けた数はほとんど 0 になる。また，表—5 は，図—13(a) に示す 3 径間連続桁に，$m=1$ t·m/m を満載し，$\kappa=15$, $\kappa=40$ にした場合につき，method 1 と method 2 によって求めた β, T_s, M_ω の計算値をそれぞれ示したものである。この表には応力法[9]による結果も併記してあるが，method 1 と応力法による計算値は 14 桁まで一致していることがわかる。また，表中の有効桁数とは，格間数を 30 にとった連続桁の始端と末端における計算結果の対称性から算出したものである。

図—14 は，ねじり定数比 κ を種々変化させた場合，method 1 と method 2 との計算精度がどのように異なるかを調べたものである。ただし，載荷状態は図中に示しているが，①各スパン中央に集中トルクが作用した場合，②全スパンにわたって等分布トルクが作用した場合の 2 case であり，それぞれの case について有効桁数をプロットしている。また，図—14 の縦軸の有効桁数は，変形量，断面力の計算結果の有効桁数を平均して求めたものである。

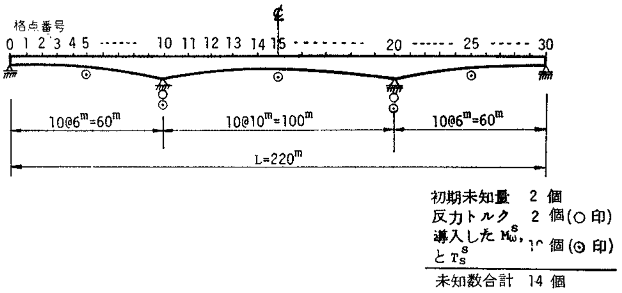
図—14 からわかるように method 2 によると，κ が 30 程度の場合，有効桁数は 5 桁ぐらいしか得られず，κ 値が増大するとともに計算精度が著しく減少する。一方，method 1 によると，$\kappa=70$ 以上になっても有効桁数は一定で，14 桁を確保しており，κ 値の増大に伴う計算精度の劣化はないことがわかる。

(2) 変断面連続桁の数値計算例

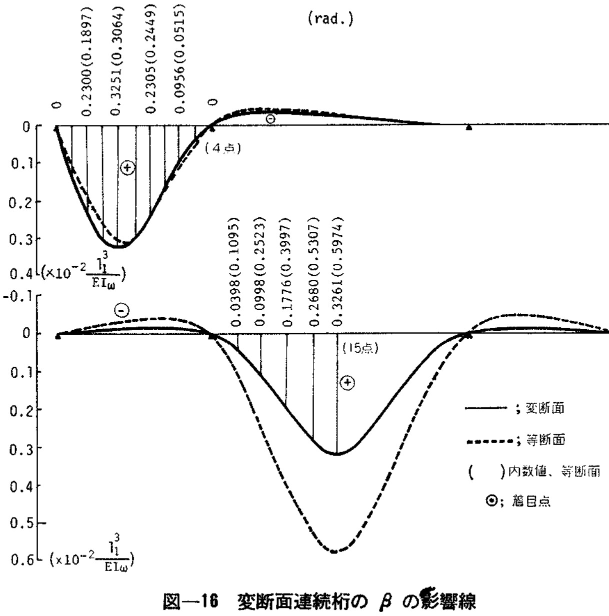


図—14　κ 値による計算精度

図—15，表—6 に示す 3 径間変断面連続桁の代表的な



図—15　3 径間変断面連続桁



図—16　変断面連続桁の β の影響線

表—6 断面諸量

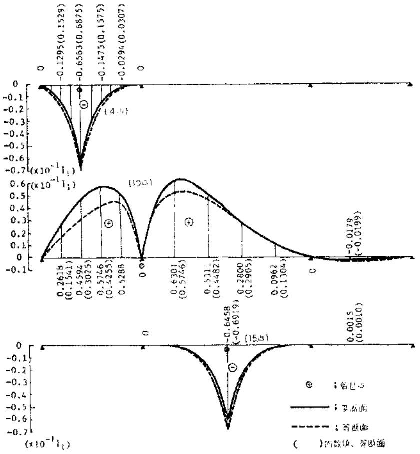
格間番号		断面諸量 $K(m^4)$	$I_\omega(\times10^2m^6)$
側径間	1	0.90627	0.18787
	2	1.1091	0.24265
	3	1.3120	0.29744
	4	1.5550	0.37327
	5	1.7981	0.44910
	6	2.0823	0.55079
	7	2.3666	0.65248
	8	2.6935	0.78532
	9	3.0204	0.91817
	10	3.7614	1.2578
中央径間	11	4.5927	1.6839
	12	3.6062	1.1834
	13	2.7486	0.80370
	14	2.0155	0.52367
	15	1.4027	0.32411
	⋮	対	称

着目点における β, T_s, T_ω, M_ω の影響線を求める。ただし，境界条件，中間条件はすべてねじりに対しては回転拘束支持とする。また，代表的な断面図は 図—12 に示したとおりである。

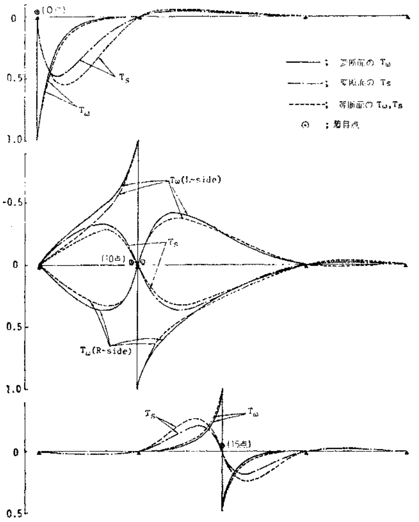
図—16～18 に代表的な着目点における β, M_ω, T_s, T_ω の影響線図を示す。図中，実線は表—6 の断面諸量を用いて変断面として解析したものであり，点線はその平均断面を用いて等断面 ($\kappa=l_1\sqrt{GK/EI_\omega}=7.207$, l_1 は第1スパン長) として計算したものである。

これらの数値計算において，図—15 中に⊙印で示すように各スパン中央にも $M_{\omega,k}{}^s$ と $T_{s,k}{}^s$ を導入すれば変断面であっても 14 桁の計算精度が確保されていることを確認してある。

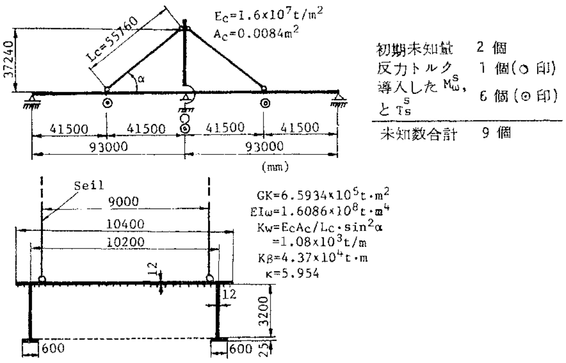
これらの図より，着目断面の断面力や変形量が最も不利になる荷重状態に対して考察すると，変断面の中間支点上の M_ω は等断面の場合の M_ω よりも大きくなる。一方，中央径間のスパン中央の β は，変断面のほうが



図—17 変断面連続桁の M_ω の影響線



図—18 変断面連続桁の T_ω, T_s の影響線



図—19 斜張橋の側面，断面図

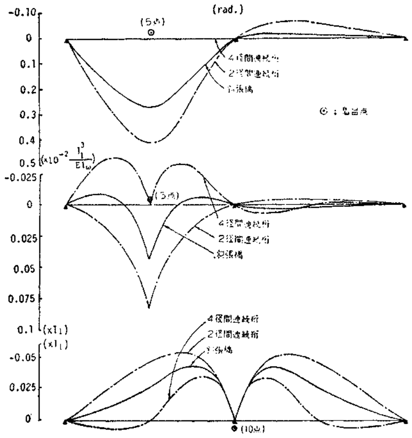
等断面よりもかなり小さいことがわかる。

(3) 斜張橋の数値計算例

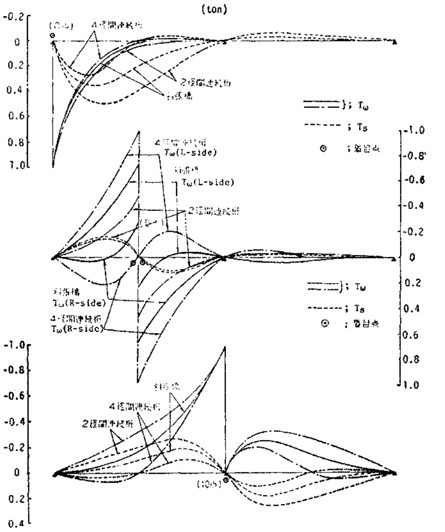
図—19 に示した2面ザイルの斜張橋は，そのザイル取付け点において，主桁は橋軸直角方向に2個のばねで支持されているので，ねじり荷重を受ける場合，ねじりに対して弾性支持された連続桁として解析することができる。

計算に用いた斜張橋のスパン，ザイル断面積，主桁の断面定数，回転ばね定数等は尾道大橋[25]を参考にして，図—19 中に示した値を用いた。ただし，タワーは変形しないものと考えている。

図—20～22 に斜張橋の設計上重要な着目点における β, M_ω, T_s, T_ω の影響線図を示す。そして，回転ばね定数が 0（2径間連続桁）と ∞（4径間連続桁）にした場合についての値もこれらの図に併記している。



図—20　斜張橋の β の影響線（上）
図—21　斜張橋の M_ω の影響線（下）

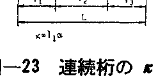


図—22　斜張橋の T_ω, T_s の影響線

（4） 連続桁の曲げねじり特性

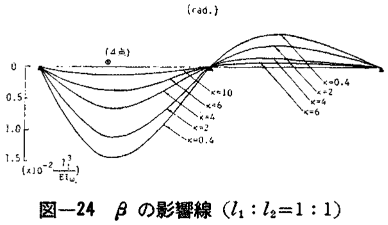
a） 等2径間，3径間（$l_1:l_2:l_3=1:1.2:1$）の変形量，断面力の影響線

まず，図—23 の連続桁のねじり定数比 κ を，次のように定義する。

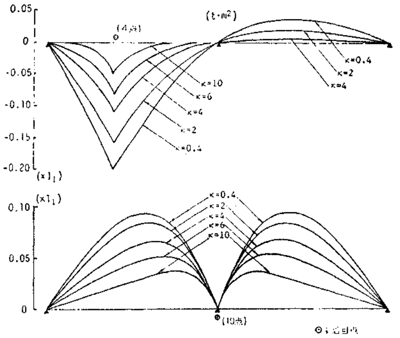


図—23　連続桁の κ 値

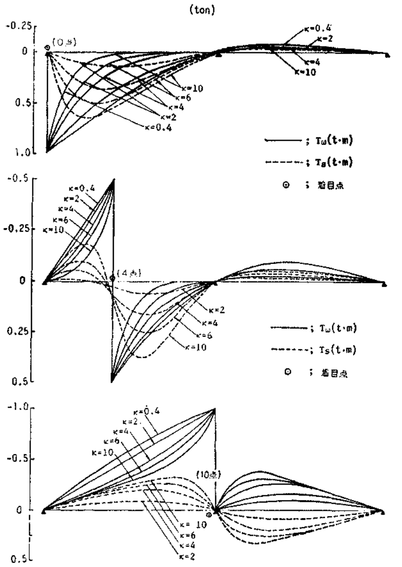
$$\kappa=l_1\sqrt{GK/EI_\omega}=l_1\alpha \quad\cdots\cdots(69)$$



図—24　β の影響線（$l_1:l_2=1:1$）



図—25　M_ω の影響線（$l_1:l_2=1:1$）



図—26　T_ω, T_s の影響線（$l_1:l_2=1:1$）

ここに，l_1 は第1径間のスパン長である。

そして，ねじり定数比 $\kappa(0.4\leq\kappa\leq10)$ をパラメーターにして，等2径間，および，3径間（$l_1:l_2:l_3=1:1.2:1$）連続桁の設計上重要な点における β, M_ω, T_s, T_ω の影響線図を **図—24～29** に示す。

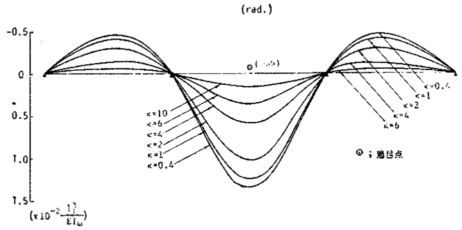
これらの図において，β, M_ω, T_s, T_ω の値は，それぞれ，次のように無次元化して求めている。

$$\left.\begin{array}{l}\beta_0=EI_\omega/(T_Pl_1^3)\cdot\beta,\ \ M_{\omega,0}=1/(T_Pl_1)\cdot M_\omega\\ T_{s,0}=1/(T_P)\cdot T_s,\ \ T_{\omega,0}=1/(T_P)\cdot T_\omega\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(70)$$

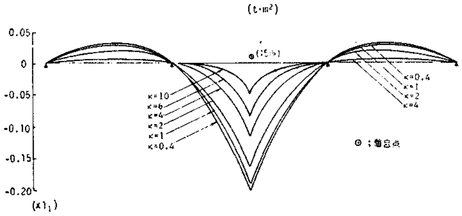
したがって，$T_P=1\,\mathrm{t\cdot m}$ とすると，ねじり角 β とそりモーメント M_ω の値は，図の縦軸に示す値に，それぞれ，次の係数を乗じて求めればよい。

$$\beta=\beta_0\cdot(l_1^3/EI_\omega),\ \ M_\omega=M_{\omega,0}\cdot(l_1)\cdots\cdots(71)$$

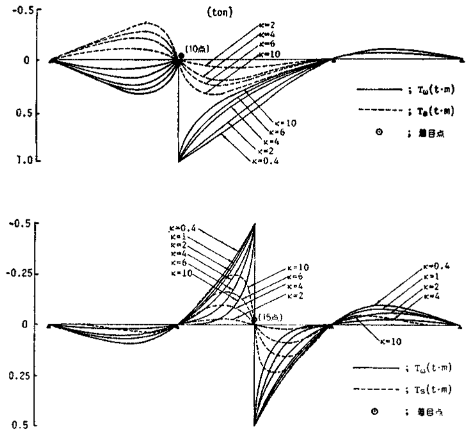
式 (70) のように無次元化した変形量，断面力の値は，式 (69) の κ 値が一定であれば，l_1, GK, EI_ω がどのような組み合せでも，同一の値となる。たとえば，$\kappa=$



図—27 β の影響線 ($l_1 : l_2 : l_3 = 1 : 1 : 1.2 : 1$)



図—28 M_ω の影響線 ($l_1 : l_2 : l_3 = 1 : 1.2 : 1$)



図—29 T_ω, T_S の影響線 ($l_1 : l_2 : l_3 = 1 : 1.2 : 1$)

10 にした場合，

i) $\alpha = 0.1\ \mathrm{m}^{-1}(GK = 1\ \mathrm{t \cdot m^2},\ EI_\omega = 100\ \mathrm{t \cdot m^4})$,

$l_1 = 100\ \mathrm{m}$

ii) $\alpha = 0.1\ \mathrm{m}^{-1}(GK = 0.1\ \mathrm{t \cdot m^2},\ EI_\omega = 10\ \mathrm{t \cdot m^4})$,

$l_1 = 100\ \mathrm{m}$

iii) $\alpha = 1\ \mathrm{m}^{-1}(GK = 1\ \mathrm{t \cdot m^2},\ EI_\omega = 1\ \mathrm{t \cdot m^4})$,

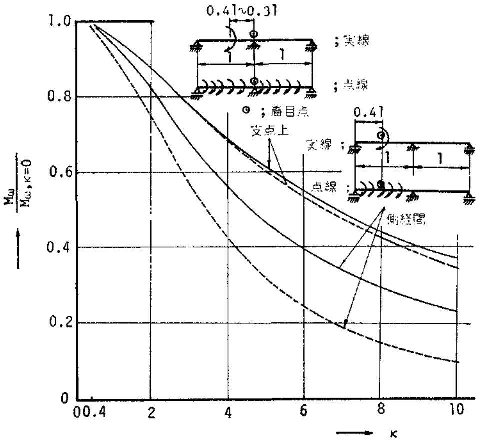
$l_1 = 10\ \mathrm{m}$

のいずれの断面諸量を用いても無次元化した β_0, $M_{\omega 0}$, T_{s0}, $T_{\omega,0}$ の値は同じになる。

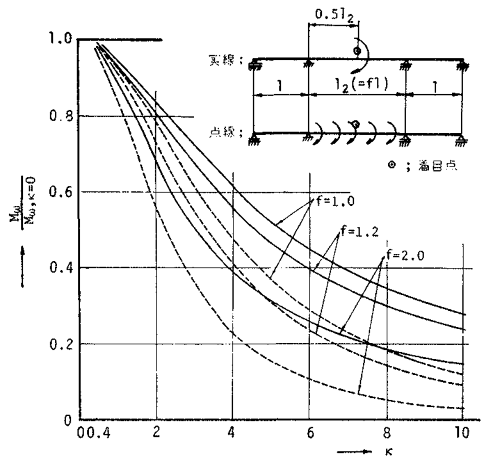
図—24～29 からわかる連続桁のねじりに対する力学的性質は，次のようである。

i) κ 値が大なるほど，ねじり角 β，そりモーメント M_ω は小さくなる。また，支間内の M_ω の影響線の最大値付近の形状は鋭くとがる。

ii) κ 値が小なるほど，合ねじりモーメント T のうちの純ねじりモーメント T_S の分担率は小さくなり，そりねじりモーメント T_ω の分担率が大きくなる。



図—30 $M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$ と κ の関係 (2 径間)



図—31 $M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$ と κ の関係 (3 径間)

b) κ 値による断面力，変形量について

式 (1) で $\alpha \to 0$ $(\kappa = 0)$ にすれば，

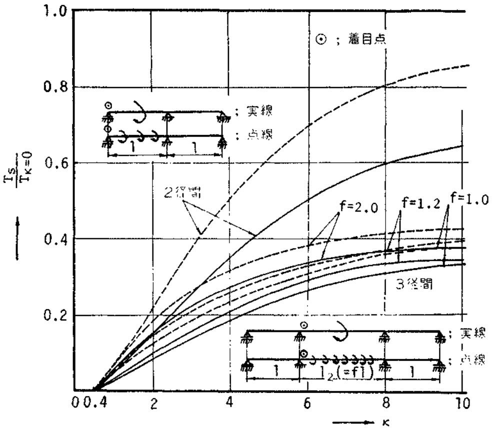
$$EI_\omega d^4\beta/dx^4 = m_x \quad \cdots\cdots(72)$$

となり，β の代りに w，m_x の代りに q_z，I_ω の代りに I とみなせば，式 (72) は曲げに関する微分方程式と全く同じになる。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \beta_{\kappa=0},\quad M_\omega = EI\frac{d^2w}{dx^2} = M_{\omega,\kappa=0} \\ T &= T_S + T_\omega = -EI\frac{d^3w}{dx^3} = T_{\kappa=0} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(73)$$

が成立する。したがって，$M_{\omega,\kappa=0}$, $T_{\kappa=0}$ は Anger の表における曲げモーメント，せん断力と同じ値になる。そして，ねじり角 β を求めるときは，l_1^3/EI の代りに l_1^3/EI_ω を乗ずればよい。

図—30，31 は横軸に κ 値 $(0 \leq \kappa \leq 10)$，縦軸に $M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$ をとり，2 径間，および，3 径間連続桁を対象にして設計上重要な点における $M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$ の最大値をプ



図—32 $T_s/T_{\kappa=0}$ と κ の関係

ロットしたものである。ただし，載荷状態は着目する断面に最も不利になるような集中トルクと分布トルクを作用させた 2 case を考えている。また，3 径間の場合，スパン割を $l_1:l_2:l_3=l:fl:l$ とし，f は 1〜2 まで変化させてプロットしている。

同様に図—**32** は，横軸に κ 値，縦軸に $T_s/T_{\kappa=0}$ をとって，各種荷重状態における $T_s/T_{\kappa=0}$ をプロットしたものである。

さらに，表—**7**，**8** は $\kappa=0.4$ と $\kappa=10$ に着目して，連続桁の側径間（着目点 4），支点上（着目点 10），中央径間（着目点 15）における $M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$ と $T_s/T_{\kappa=0}$ との値を，それぞれの載荷状態に対して求めたものである。

表—7 $\kappa=0.4$ における $M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$ と $T_s/T_{\kappa=0}$ 値

荷重状態＼着目点			$M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$ (%) 側径間(着目点4)	支点上(10)	中央径間(15)	$T_s/T_{\kappa=0}$ (%) 端支点(0)	中間支点(10)
2径間	集中トルク(T)		98.9	99.4	—	0.8	0.5
	分布トルク(m)		98.6	99.2	—	1.1	0.5
3径間	f=1.0	(T)	99.0	98.8	99.4	0.8	0.5
		(m)	98.6	99.4	98.8	1.2	0.5
	f=1.2	(T)	98.9	99.4	98.9	0.8	0.5
		(m)	98.5	99.4	98.4	1.2	0.7
	f=2.0	(T)	98.7	99.9	97.7	0.8	0.6
		(m)	98.1	98.3	98.8	1.2	1.3

表—8 $\kappa=10$ における $M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$ と $T_s/T_{\kappa=0}$ 値

荷重状態＼着目点			$M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$ (%) 側径間(着目点4)	支点上(10)	中央径間(15)	$T_s/T_{\kappa=0}$ (%) 端支点(0)	中間支点(10)
2径間	集中トルク(T)		24.1	38.4	—	65.4	33.2
	分布トルク(m)		10.2	35.5	—	86.4	32.0
径間	f=1.0	(T)	24.4	36.1	28.3	65.4	33.1
		(m)	9.8	37.1	12.7	84.2	37.9
	f=1.2	(T)	24.4	38.9	24.5	65.4	33.5
		(m)	9.5	34.9	9.5	83.3	39.4
	f=2.0	(T)	23.2	49.8	16.0	65.4	34.1
		(m)	9.0	23.3	4.0	80.8	42.6

これらの図と表から，道路橋設計示方書・同解説におけるそりモーメントを考慮する範囲を連続桁について考察する。

まず，図—**30〜32**，表—**7** からわかるように，$\kappa\leq 0.4$ では，どの着目断面においても

$$M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}\fallingdotseq 100\%,\quad T_s/T_{\kappa=0}\fallingdotseq 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(74)$$

であるので，連続桁においても，$\kappa\leq 0.4$ の範囲では，そりモーメント M_ω のみを考慮すればよいことがわかる。

一方，$\kappa=10$ に着目すると，図—**30〜32**，表—**8** から，分布トルクが作用したときの $M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$ 値は集中トルクが作用したときの値よりも小さくなり，逆に，$T_s/T_{\kappa=0}$ は分布トルクが作用したときのほうが大きくなることがわかる。

それで，長大プレートガーダー橋になるほど，分布トルク荷重によって生ずる断面力の方が集中トルクによるものよりも卓越するので，以下，分布トルク荷重に対して考察する。

支間上断面の $M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$，および，端支点上の $T_s/T_{\kappa=0}$ は，

$$M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}\fallingdotseq 10\%,\quad T_s/T_{\kappa=0}\fallingdotseq 85\% \quad\cdots\cdots\cdots(75)$$

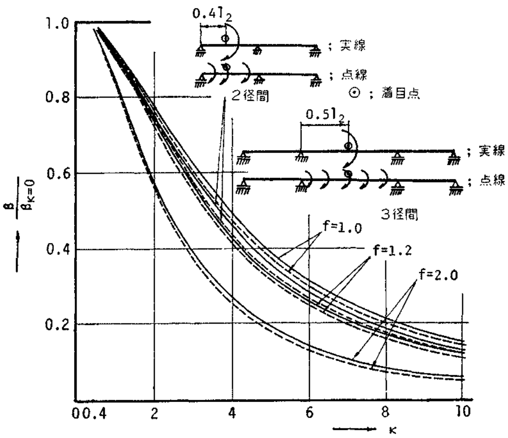
になる。また，中間支点上断面の $M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$，$T_s/T_{\kappa=0}$ の平均値を求めると，

$$M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}\fallingdotseq 35\%,\quad T_s/T_{\kappa=0}\fallingdotseq 40\% \quad\cdots\cdots\cdots(76)$$

となる。

道路橋示方書では，$\kappa=10$ のとき，そりモーメントによる垂直応力度の計算は省略できるとしているが，式 (75) によると，連続桁の支間断面については，これは妥当であるように思われる。

しかしながら，中間支点断面では，式 (76) よりわか



図—33 $\beta/\beta_{\kappa=0}$ と κ の関係

るように，$\kappa \geq 10$ になっても，そりモーメント M_ω，そりねじりモーメント T_ω の影響は未だ大である。したがって，$\kappa \geq 10$ でも連続桁の中間支点断面での各種応力照査などに対しては，M_ω と T_ω の影響も考慮しなければならないように思われる。

最後に，図―33 は，$\beta/\beta_{\kappa=0}$ と κ 値の関係をプロットしたものであるが，各種荷重状態に対する最大ねじり角 β は，この図から，$\beta_{\kappa=0}$ の値がわかれば容易に求めることができる。

5. 結　　言

本文は，直線桁橋の曲げねじり解析を伝達 matrix 法を用いて行う場合，ねじり定数比 κ が著しく増大してもその計算結果の精度に劣化が生じないよう種々考察したものである。また，数値計算例によって設計上有用な資料を提供したものである。以下，結論を要約すれば，次のとおりである。

(1) 直線桁のねじりに関する微分方程式と式 (11) で定義した新たな変形量 β_S を用いて，双曲線関数項を分離・単位化した Field matrix を誘導した。

(2) 各種橋梁構造物のそりねじり解析ができるよう，初期ベクトル，中間条件式，末端条件式を明示し，それに対する解析法を示した。

(3) 従来，曲げねじり問題等を伝達 matrix 法を用いて解析する場合，パラメーター κ が大きくなると計算精度が悪くなるといわれていたが，本文で述べた方法によると，精度が落ちないことを数値計算例によって明らかにすることができた。

(4) さらに，変断面連続桁や斜張橋のねじり解析を行った。また，2 径間，3 径間連続桁の設計上重要な点に関する変形量，断面力の影響線図を示した。

(5) 最後に，これらの着目点に最も不利な断面力や変形量が生ずる荷重状態に対して，κ 値と $M_\omega/M_{\omega,\kappa=0}$，$T_S/T_{\kappa=0}$ などの関係を示した。これらの図表から，道路橋設計示方書に規定してあるねじりによる垂直応力度やせん断応力度の計算を省略できる範囲を連続桁に対しても考察した。

参 考 文 献

1) たとえば，Timoshenko S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, pp. 224.
2) Benscoter S.U. : Secondary Stress in Thin-Walled Beams with Closed Section, Tech. Note 2529, NACA, 1951.
3) 小西一郎・小松定夫・大橋昭光 ： 合成箱桁橋の応力解析と設計計算法，土木学会論文集第 25 号，pp. 1～28, 1955 年 3 月.
4) 小西一郎・小松定夫 ： 箱桁橋の立体的応力解析，土木学会論文集第 43 号，pp. 1～10, 1957 年 1 月.
5) 近藤和夫・森 正英・小松定夫：合成箱桁橋（辰巳橋）の模形試験について，土木学会誌第 46 巻，3 号，pp. 11～20, 1960 年 3 月.
6) 城ヶ島大橋応力測定報告書 ： 城ヶ島大橋応力測定委員会編，技報堂，1961 年.
7) 小松定夫 ： 薄肉土木構造物の理論と設計，土木学会関西支部技術講座，1961 年 10 月.
8) 奥村敏恵 ： 薄板構造の設計施工における諸問題，土木学会編，pp. 207～242, 1964 年 8 月.
9) 小松定夫：薄肉構造物の理論と計算，山海堂，1969 年.
10) 小西一郎・小松定夫 ： 変断面連続箱桁橋の立体的応力解析，土木学会論文集第 69 号，別冊 3-3, pp. 1～34, 1960 年 9 月.
11) 大地羊三：電子計算機による構造設計，橋梁編纂会，昭和 43 年.
12) 鷹羽信勝・成岡昌夫 ： 変形法による任意形状の薄肉断面格子桁の解析，土木学会論文報告集第 178 号，pp. 1～9, 1970 年 6 月.
13) 結城皓昿・前田幸雄：薄肉断面構造の 3 次元挙動の解析，土木学会論文報告集第 224 号，pp. 67～78, 1974 年 4 月.
14) Kollbrunner C.F. und Hajin N. : Dünwandige Stäbe, Springer Verlag, 1972 年.
15) Vlasov, V.Z. : Thin-Walled Elastic Bars, 2nd-Ed. Fizmatgiz, Moscow, 1959 年.
16) 大地羊三 ： 構造計算における電子計算機の役割，土木学会誌 Vol. 58-4, pp. 8～14, 1973 年 4 月.
17) Pestel C.E. and Leckie, A.F. : Matrix Methods in Elastmechanics, McGraw-Hill, 1963 年.
18) Kersten R. : Das Reduction Verfahren in Baustatik, Springer, Verlag 1962 年.
19) 成岡昌夫・遠田良喜 ： 伝達マトリックス法，日本鋼構造協会編，培風館，1971 年.
20) 小松定夫・中井 博・向山寿孝 ： 斜支持箱桁橋の静的解析，土木学会論文報告集第 189 号，pp. 27～38, 1971 年 5 月.
21) Kollbrunner C.F. und Basler K. : Torsion, Springer, Verlag, 1966 年.
22) 小松定夫・中井 博・田井戸米好 ： ねじり定数比とねじり曲げ剛比から考察した曲線桁橋設計計算法への一提言，土木学会論文報告集第 224 号，pp. 55～66, 1974 年 4 月.
23) 道路橋示方書・同解説，日本道路協会，昭和 48 年 2 月.
24) 広田友義：双曲線函数解説，オーム社，1954 年.
25) 田村周平・笛吹昭光・出野 宏 ： 尾道大橋の設計について，橋梁 Vol. 4, pp. 58～67, 1968 年 6 月.

（1974.7.18・受付）