

## 構造解析におけるウェイト・マトリックスの研究

## STUDY ON WEIGHT MATRIX IN STRUCTURAL ANALYSIS

佐武正雄\*・新関茂\*\*

By Masao SATAKE and Shigeru NIISEKI

## 1. ま え が き

構造解析において理論解を求めることが困難な場合、連続量を離散化し数値的に取扱うことが有力な実際の解析手段としてしばしば行われている。複雑な境界をもつ連続体の非線形解析などは、このような離散化を行わなければ解析の困難な問題の例である。特に、近年、離散量の処理に適したデジタル計算機の発達は、連続量を離散化して解析する傾向をますます盛んにしてきたように思われる。力学的場の性質を有限個の離散点で代表させて解析するマトリックス解析法では、場の離散化に対応して、連続的な分布力をそれらの離散点での値、または分布力と等価な集中力に置き換えて取扱うことになる。有限要素法における等価節点力も、分布力を集中力に置き換えて解析する一つの例である。離散点における分布力の値を用いるか、集中力を用いるかは場の離散化の方法による問題で、差分法は前者の、また有限要素法は後者の例と考えることができる。分布力の離散点での値を用いる解析法では、集中力は等価な分布力に、また集中力を用いる解析法では、この逆の置換を行って解析しなければならない。このような分布力と集中力間の置換方法は、当然、解析結果に影響を与えることになり、その研究は構造解析における重要な問題と考えられる。

動的な問題における慣性質量については、従来の lumped mass による単純な離散化に対して、Archer<sup>1),2)</sup> は、はりの consistent mass matrix を誘導し、これを実際の解析に応用することによって、同じ分割数でも lumped mass による方法より高精度の解が得られることを示した。Archer の指摘は、従来の単純な離散化手法に対する反省を促す契機となったように思われる。小坪ら<sup>3)</sup>による提案も、lumped mass を用いずに連続に分

布する質量をできるだけ正確に離散化しようとした一つの試みと考えられる。一方、静的な問題においても、過剰支持問題の反力解析などのように、反力を未知関数とする第一種フレドホルム積分方程式を解かなければならない場合は、連続的な反力を等価な集中反力に置き換えて解析することが多い。また、第一種フレドホルム積分方程式の離散化には、従来、数値積分公式が用いられており、ニュートン・コーツの公式が、分割点が等間隔で実用上便利であるため、最も頻繁に応用されているようである。しかし、第一種フレドホルム積分方程式にニュートン・コーツの多分割公式を用いて、分布反力の離散化された値と集中反力との対応を計算してみると、その対応は実際から予想されるものとは非常にかけはなれたものとなる。図-1<sup>4)</sup>に 8 等分公式によって、等分布力に対応する集中力を求めた例を示す。上述のように分布力と集中力の等価置換の計算にニュートン・コーツの多分割公式を用いることは力学的に不合理であると思われるが、このようなことはチェビシエフ以外の積分公式に対してもいえることで、その原因は、数値積分公式では、各分割点における被積分関数の値にウェイトを乗じて求めた総和が単に積分値に近似するという条件しか考慮されていないことにあると考えられる。第一種フレドホルム積分方程式の数値解を求める場合のこのような困難を解決するためには、分布量と集中量間のより精密な等

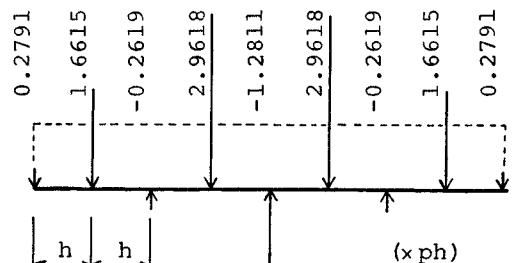


図-1 ニュートン・コーツの 8 等分公式による等分布荷重から集中荷重への置換

\* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 東北大学助手 工学部土木工学科

価置換の概念を用いる合理的な解析手法を導入することが必要であると思われる。

著者らはこのような分布量と集中量の等価置換の問題について、若干の考察を行ってきた<sup>4-10)</sup>。本論文は consistent mass matrix の概念を一般化し、分布力と集中力とをある力学量（たわみ、モーメント、せん断力、仕事など）に関して等価に置換する作用素としてウェイト・マトリックスを導入し、このウェイト・マトリックスを作成するいくつかの方法を系統的に述べたものである。構造の対象としては、主として単純なはりで説明しているが、方法によって、板その他の構造に拡張可能であることはいうまでもない。また考察として、これらの方法の特徴や適用性、ウェイト・マトリックスのもつ性質などについて述べることにする。

### 2. ウェイト・マトリックスの概念

例として、図-2 (a) に示すような分布荷重  $p(x)$  をうける一部材を考える。この部材を分割長  $h$  で  $N$  等分し、分割点における荷重値を  $p_i$  とし、分布荷重をベクトル

$$p = {}^t(p_0, p_1, p_2, \dots, p_N) \dots\dots\dots(2.1)$$

によって表現する。ここに肩の  $t$  はマトリックスの転置を示す。いま、この分布荷重を図-2 (c) の集中荷重列

$$P = {}^t(P_0, P_1, P_2, \dots, P_N) \dots\dots\dots(2.2)$$

に等価に置き換えることを考える。最も単純な置換の一

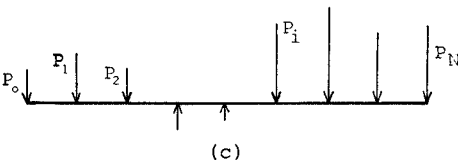
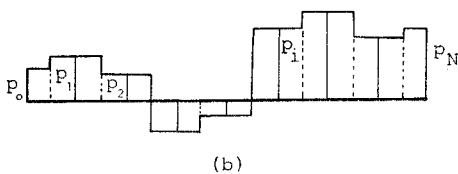
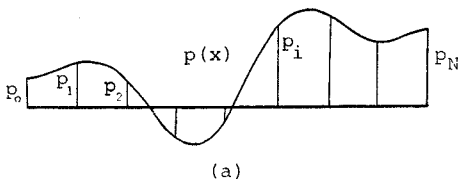


図-2

つは、分布荷重を図-2 (b) に示すような階段状の荷重で近似し、さらに各区間を集中力でおき換えて

$$P = h \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \dots & \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} p \dots\dots\dots(2.3)$$

とおく方法である。しかし、Archer も指摘しているように、上記の置換では、力学問題の解析において精度の高い結果を得ることはできない。したがって、本論文では、式(2.3)を拡張し、分布力  $p$  から集中力  $P$  への等価置換がマトリックス  $W$  を用いて一般に

$$P = Wp \dots\dots\dots(2.4)$$

で表わされるものとし、上式の  $W$  をウェイト・マトリックスとよぶことにする。式(2.4)の置換によって、分布力  $p$  と集中力  $P$  をあらゆる力学量に対して等価にすることはできないが、ある一つの力学量（たとえば、たわみ、曲げモーメント、せん断力等）の各分割点における値が等しくなるように、またはその力学系全体の仕事等しくなるようにすることはできる。したがって、ウェイト・マトリックスはどの力学量に関する等価置換を与えるものであるかを明示する必要がある。このようなウェイト・マトリックスは、一般に式(2.3)のように、単純な対角線成分だけではならず、後に示されるように、対角線の成分以外にも非零成分をもつマトリックスとなる。また、ウェイト・マトリックスが一般性をもち、実用上便利に使用されるためには、その成分が荷重に依存しない値をもつことが要求される。本論文でいうウェイト・マトリックスはこのように、一般に置換される量とは独立な値をもつものとする。 $W$  が正方正則ならば、逆に集中力から分布力への等価置換も可能である。すなわち、

$$p = W^{-1}P \dots\dots\dots(2.5)$$

と記すことができ、 $W^{-1}$  を逆ウェイト・マトリックスとよぶ。

### 3. ウェイト・マトリックスの誘導

本章では、微分と差分の置換、はりの高精度差分式、グリーン関数、仮想仕事原理などを応用して、ウェイト・マトリックスを誘導する方法と、その二、三の具体的な例題を示す。

#### (1) 微分と差分の置換を応用する方法

微分と差分の置換を用い、はりに作用する分布荷重系

と集中荷重系のせん断力およびモーメントの増分に関して、等価な置換を与えるウェイト・マトリックスを誘導することを考える。はりに関する微分方程式は、はりのある力学量を  $y(x)$ 、分布荷重を  $p(x)$ 、微分演算子を  $D=d/dx$ 、定係数を  $a$  として一般に

$$aD^n y(x) = p(x) \dots\dots\dots(3.1.1)$$

の形をとる。ここに、 $y(x)$ 、 $p(x)$  およびそれらの  $n$  次までの導関数は連続と仮定する。中央差分演算子を  $\Delta$  とすれば、

$$\Delta^n D^{-n} = h^n f_n(\Delta) \dots\dots\dots(3.1.2)$$

$$f_n(\Delta) = \left( \frac{\Delta/2}{\sinh^{-1}(\Delta/2)} \right)^n$$

$$= 1 + \frac{n}{24} \Delta^2 + \frac{5n^2 - 22n}{5760} \Delta^4$$

$$+ \frac{35n^3 - 462n^2 + 1528n}{2903040} \Delta^6 + \dots$$

\dots\dots\dots(3.1.3)

と記すことができるから、式 (3.1.1) は差分方程式

$$a\Delta^n y_x = h^n f_n(\Delta) p_x \dots\dots\dots(3.1.4)$$

によって厳密に書き換えられる。また、集中荷重についても差分方程式

$$a\Delta^n y_x = h^{n-1} g_n(\Delta) P_x \dots\dots\dots(3.1.5)$$

が成り立つならば、式 (3.1.4) と式 (3.1.5) の右辺を等置して、

$$h f_n(\Delta) p_x = g_n(\Delta) P_x \dots\dots\dots(3.1.6)$$

を得るが、これは、はりの量  $y$  の  $n$  階差分  $\Delta^n y_x$  について、 $p_x$  と  $P_x$  の等価な関係を表わすものと考えられる。

上記の微分と差分の置換を用い、はじめにせん断力の増分に関する等価置換について考察する。分布荷重  $p(x)$  とはりのせん断力  $Q(x)$  の間には微分方程式

$$-DQ(x) = p(x) \dots\dots\dots(3.1.7)$$

が成り立ち、これは差分方程式

$$-\Delta Q_x = \Delta D^{-1} p_x \dots\dots\dots(3.1.8)$$

に書き換えられる。一方、集中荷重  $P_x$  とせん断力  $Q_x$  の間には、差分方程式

$$-\Delta Q_x = P_x \dots\dots\dots(3.1.9)$$

が成り立つ (図-3 (b) 参照)。したがって、式 (3.1.8) と式 (3.1.9) より、集中荷重と分布荷重との関係

$$P_x = \Delta D^{-1} p_x = h f_1(\Delta) p_x \dots\dots\dots(3.1.10)$$

を得る。式 (3.1.3) において  $n=1$  とし、 $\Delta$  の4次または6次以上の項を無視すれば、それぞれ

$$P_x = \frac{h}{24} (p_{x-1} + 22 p_x + p_{x+1}) \dots\dots\dots(3.1.11)$$

または、

$$P_x = \frac{h}{5760} (-17 p_{x-2} + 308 p_{x-1} + 5178 p_x$$

$$+ 308 p_{x+1} - 17 p_{x+2}) \dots\dots\dots(3.1.12)$$

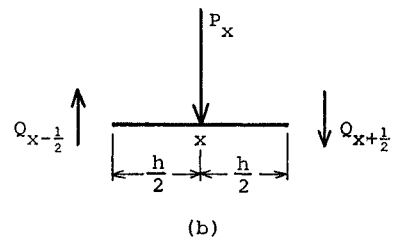
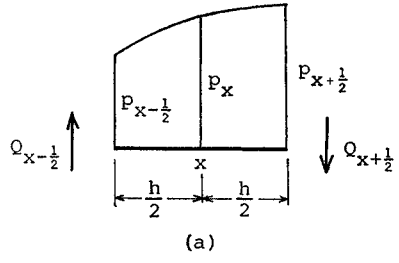


図-3

が得られる。端点では、次のような誘導を行う。左端点 0 については前進差分

$$\bar{\Delta} = e^{hD} - 1 \dots\dots\dots(3.1.13)$$

を用いることにすれば、

$$P_0 = -Q_{1/2} + Q_0 = -(e^{hD/2} - 1) Q_0$$

$$= -(\sqrt{\bar{\Delta} + 1} - 1) Q_0 \dots\dots\dots(3.1.14)$$

ゆえに、

$$(\sqrt{\bar{\Delta} + 1} - 1) D^{-1} = h \frac{\sqrt{\bar{\Delta} + 1} - 1}{\log(\bar{\Delta} + 1)} = h \bar{f}_1(\bar{\Delta})$$

\dots\dots\dots(3.1.15)

$$\bar{f}_1(\bar{\Delta}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \bar{\Delta} - \frac{1}{24} \bar{\Delta}^2 + \frac{3}{128} \bar{\Delta}^3 + \dots$$

\dots\dots\dots(3.1.16)

とおき、式 (3.1.7) の両辺に式 (3.1.15) を作用させれば、

$$-(\sqrt{\bar{\Delta} + 1} - 1) Q_0 = h \bar{f}_1(\bar{\Delta}) p_0 \dots\dots\dots(3.1.17)$$

を得、これと式 (3.1.14) より

$$P_0 = h \bar{f}_1(\bar{\Delta}) p_0 \dots\dots\dots(3.1.18)$$

を得る。式 (3.1.16) の第3項までとって計算すれば、

$$P_0 = \frac{h}{24} (8 p_0 + 5 p_1 - p_2) \dots\dots\dots(3.1.19)$$

となる。右端点  $N$  についても全く同様にして、

$$P_N = \frac{h}{24} (-p_{N-2} + 5 p_{N-1} + 8 p_N) \dots\dots\dots(3.1.20)$$

が成り立つから、等価置換として

$$P = W p \dots\dots\dots(3.1.21)$$

$$W = \frac{h}{24} \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 & & 0 \\ 1 & 22 & 1 & & \\ & 1 & 22 & 1 & \\ & & & 1 & 22 & 1 \\ 0 & & & & -1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.1.22)$$

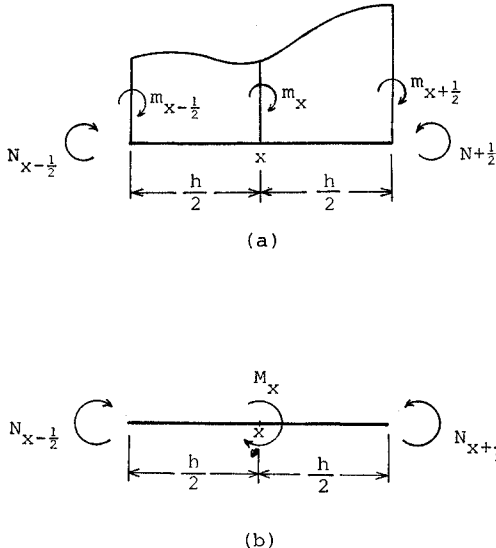


図-4

を得る。この場合、 $W$  は作用素  $4D^{-1}$  の高次項を無視して得られる離散的作用素 (マトリックス) となっている。

次に、曲げモーメント  $N$  の増分に関する分布荷重系と集中荷重系の等価置換について考察する。分布荷重系としては、通常の分布荷重  $p(x)$  と分布モーメント荷重  $m(x)$  を考慮するものとすれば、 $p(x)$ 、 $m(x)$ 、曲げモーメント  $N(x)$  およびせん断力  $Q(x)$  の間には、微分方程式

$$\begin{aligned} DN(x) &= m(x) + Q(x) \\ &= m(x) + xp(x) + D\{xQ(x)\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.1.23)$$

が成り立ち、式 (3.1.8) と同様に、差分方程式

$$\Delta N_x = 4D^{-1}m_x + h4D^{-1}(xp_x) + hx4Q_x + h\mu Q_x \quad \dots\dots\dots(3.1.24)$$

に厳密に書き換えられる。ここに、 $\mu$  は平均化演算子である。一方、集中荷重系に対しては、集中荷重を  $P_x$ 、集中モーメント荷重を  $M_x$  とすれば、差分方程式

$$\begin{aligned} \Delta N_x &= M_x + h\mu Q_x \\ &= M_x + hxP_x + hx4Q_x + h\mu Q_x \dots(3.1.25) \end{aligned}$$

が成立する。式 (3.1.24) と式 (3.1.25) のモーメント増分  $\Delta N_x$  を等置すれば、

$$M_x + hxP_x = 4D^{-1}m_x + h4D^{-1}(xp_x) \quad \dots\dots\dots(3.1.26)$$

を得る。式 (3.1.10) と式 (3.1.26) を組み合わせれば、

$$\left. \begin{aligned} P_x &= 4D^{-1}p_x \\ M_x &= 4D^{-1}m_x + h\{4D^{-1}(xp_x) - x4D^{-1}p_x\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.1.27)$$

を得る。これを具体的に計算すれば、式 (3.1.11) など

と同様な式となり、また端点については式 (3.1.19)、(3.1.20) と同様な式を得ることができる。 $p_x$  と  $P_x$  のいずれか、また  $m_x$  と  $M_x$  のいずれかが与えられれば、それぞれ他の量を上述の置換により求めることができる。また、モーメント荷重を考えない場合、式(3.1.26) は

$$xP_x = 4D^{-1}(xp_x) \quad \dots\dots\dots(3.1.28)$$

となり、これは曲げモーメントの増分について等価な分布荷重  $p$  と集中荷重列  $P$  の変換を与えることになる(注1)。

(2) 高精度差分式を応用する方法<sup>5),6),8)</sup>

高精度差分式<sup>11)</sup>を応用し、ウェイト・マトリックスを誘導する方法を、単純ばりに作用する分布荷重をたわみに関して等価な集中荷重列へ置き換える問題を例題として説明する。

はりのたわみの等分割点での値を表わすベクトルを  $w$  とすれば、集中荷重列  $P$  と  $w$ 、および分布荷重  $P$  と  $w$  の関係は、高精度差分式を用い、それぞれ

$$Sw = AP \quad \dots\dots\dots(3.2.1)$$

$$Sw = Bp \quad \dots\dots\dots(3.2.2)$$

と表わすことができる。たとえば、 $N=8$  の場合、 $S$ 、 $A$ 、 $B$  は次のように記される<sup>11)</sup>。

$$S = \frac{EI}{h^4} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & & & & & \\ & 6 & -4 & 1 & & & & 0 \\ & & 6 & -4 & 1 & & & \\ & & & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & & 6 & -4 & 1 & \\ \text{Sym.} & & & & & 6 & -4 & \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(3.2.3)$$

注 1) モーメント荷重を考えない場合、曲げモーメントの2階差分についての等価置換を考え、次のような誘導も可能である。式 (3.1.23) より

$$\begin{aligned} D^2N(x) &= Dm(x) + DQ(x) \\ &= Dm(x) - p(x) \dots\dots\dots(a) \end{aligned}$$

また、式 (3.1.25) より  $D^2N_x = \Delta M_x + h\mu \Delta Q_x = \Delta M_x - h\mu P_x \dots(b)$

したがって、モーメント荷重の項を省略すれば、式 (a) は式 (3.1.2)、(3.1.3) を用いて、

$$D^2N_x = -h^2f_2(D)p_x \quad \dots\dots\dots(c)$$

また、式 (b) は  $D^2N_x = -h\sqrt{1 + \frac{D^2}{4}} P_x \dots\dots\dots(d)$

となる。式 (c)、(d) の右辺を等価することにより、

$$\begin{aligned} P_x &= h \frac{f_2(D)}{\sqrt{1 + \frac{D^2}{4}}} p_x \\ &= h \left( 1 - \frac{D^2}{24} + \frac{17}{1920} D^4 + \dots \right) p_x \dots\dots\dots(e) \end{aligned}$$

が得られる。

$$A = \frac{1}{6h} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ & 4 & 1 & & 0 \\ & & 4 & 1 & \\ & & & 4 & 1 \\ \text{Sym.} & & & & 4 & 1 \\ & & & & & 4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.2.4)$$

$$B = \frac{1}{360} \begin{pmatrix} 28 & 245 & 56 & 1 & & & & & & & 0 \\ 1 & 56 & 246 & 56 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 56 & 246 & 56 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 56 & 246 & 56 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 56 & 246 & 56 & 1 & & & \\ 0 & & & & 1 & 56 & 246 & 56 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 56 & 245 & 28 & & \\ & & & & & & & & & & \dots\dots\dots(3.2.5) \end{pmatrix}$$

$$W = h \begin{pmatrix} 0.1238 & 1.0274 & -0.0264 & 0.0115 & -0.0031 & 0.0008 & -0.0002 & 0.0001 & 0.0000 \\ -0.0287 & -0.0264 & 1.0390 & -0.0295 & 0.0124 & -0.0033 & 0.0009 & -0.0002 & -0.0001 \\ 0.0077 & 0.0115 & -0.0295 & 1.0398 & -0.0297 & 0.0124 & -0.0033 & 0.0008 & 0.0006 \\ -0.0021 & -0.0031 & 0.0124 & -0.0297 & 1.0399 & -0.0297 & 0.0124 & -0.0031 & -0.0021 \\ 0.0006 & 0.0008 & -0.0033 & 0.0124 & -0.0297 & 1.0398 & -0.0295 & 0.0115 & 0.0077 \\ -0.0001 & -0.0002 & 0.0009 & -0.0033 & 0.0124 & -0.0295 & 1.0390 & -0.0264 & -0.0287 \\ 0.0000 & 0.0001 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0031 & 0.0115 & -0.0264 & 1.0274 & 0.1238 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.2.9)$$

この場合、 $B$  したがって  $W$  は正方マトリクスとはなっていないので、 $W^{-1}$  は求められない。すなわち、この例では  $P$  と等価な  $p$  は一意的には決定できないことになる（支点上の分布荷重の値  $p_0, p_N$  を与えれば一意的に定まる）。たわみを等価量とするウェイト・マトリクスについて説明したが、高精度差分式を用いることにより、同様にしてモーメントまたはせん断力を等価量とするウェイト・マトリクスを導くことも可能である<sup>9)</sup>。式 (3.2.10) は、単純ばりのモーメントに関する

集中荷重列によるたわみと分布荷重によるたわみがすべての分割点において等しいとすれば、式 (3.2.1) および式 (3.2.2) より、

$$AP = Bp \dots\dots\dots(3.2.6)$$

したがって、次式を得る。

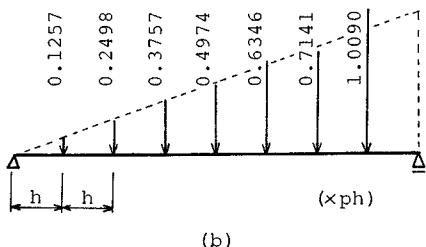
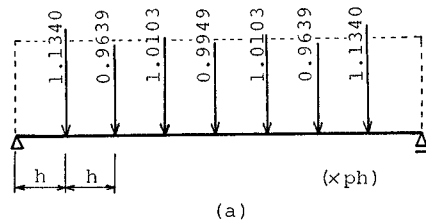
$$P = Wp \dots\dots\dots(3.2.7)$$

$$W = A^{-1}B \dots\dots\dots(3.2.8)$$

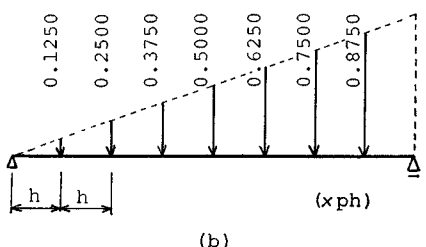
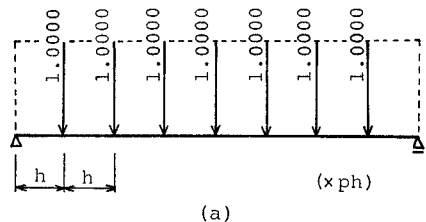
$W$  は分布荷重  $p$  をたわみに関して等価な集中荷重列  $P$  に置換するウェイト・マトリクスである。式(3.2.9)はこの  $W$  を式 (3.2.4), (3.2.5) から求めたものを示す。

るウェイト・マトリクスを示したものである。

$$W = \frac{h}{12} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & 10 & 1 & & & & & & & & 0 \\ & & 1 & 10 & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & 10 & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & 10 & 1 & & & & & \\ 0 & & & & & 1 & 10 & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & 10 & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & 10 & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & \dots\dots\dots(3.2.10) \end{pmatrix}$$



図—5 単純ばりのたわみに関する等価置換



図—6 単純ばりのモーメントに関する等価置換

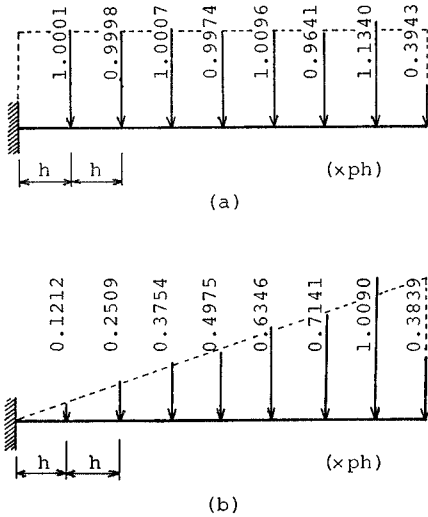


図-7 片持ばりのたわみに関する等価置換

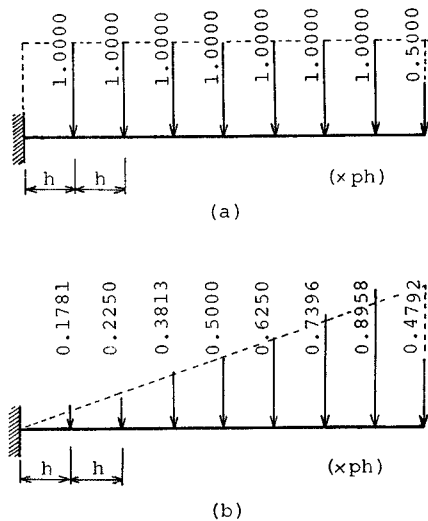


図-8 片持ばりのモーメントに関する等価置換

上述のようにして求めたウェイト・マトリックスにおいては境界条件も考慮されているので、はりの種類によって異なったものが得られることになる。図-5, 6 は、単純ばりについて、それぞれ式 (3.2.9), (3.2.10) のウェイト・マトリックスにより等分布荷重および三角形分布荷重を集中荷重列へ等価置換した例を示し、図-7, 8 は片持ばりについて、同様の例を示したものである。ここで用いた高精度差分式は分布荷重が各分割区間で、2次関数以下の連続な曲線となっている場合、厳密な解を与えるので、これを用いて導かれたウェイト・マトリックスもその範囲で厳密な等価置換を与えることになる。

(3) グリーン関数を応用する方法<sup>4),8)</sup>

グリーン関数を応用してウェイト・マトリックスを導

く方法について説明する。はじめに前節と同様、たわみを等価量とするウェイト・マトリックスについて考察する。

グリーン関数  $K(x, \xi)$  よりフレキシビリティ・マトリックスは  $K_{ij} = K(x_i, \xi_j)$  として容易に導かれる。したがって、各分割点におけるたわみおよび集中荷重列を表わすベクトルをそれぞれ  $w, P$  とすれば、集中荷重とたわみの関係

$$w = KP \dots\dots\dots(3.3.1)$$

を得る。一方、分布荷重  $p(\xi)$  を受ける場合のたわみ  $w(x)$  はグリーン関数  $K(x, \xi)$  を用いて、

$$w(x) = \int K(x, \xi) p(\xi) d\xi \dots\dots\dots(3.3.2)$$

と表わされる。ここで、分布荷重を広義の有限フーリエ級数

$$\bar{p}(x) = \sum_{i=0}^N A_i \varphi_i(x) \dots\dots\dots(3.3.3)$$

によって近似することを考える。ここに  $\varphi_i(x)$  は互に独立な  $(N+1)$  個の基底関数である。 $(N+1)$  個の分割点  $j$  で  $\bar{p}(x)$  は  $p(x)$  と一致した値  $p_j$  をとるものとするれば、

$$p_j = \sum_{i=0}^N A_i \varphi_i(jh) \dots\dots\dots(3.3.4)$$

関数  $\varphi_i(x)$  の分割点での値を成分とするベクトルを

$$\varphi_i = {}^t\{\varphi_i(0), \varphi_i(h), \dots, \varphi_i(Nh)\} \dots\dots(3.3.5)$$

とすれば、これらの  $(N+1)$  個のベクトルのグラム行列は

$$C_{ij} = {}^t\varphi_i \varphi_j \dots\dots\dots(3.3.6)$$

によって定義される。 $C_{ij}$  の逆マトリックスを  $\bar{C}_{ij}^{-1}$  とすれば、

$$\varphi_i^* = \sum_{j=1}^N \bar{C}_{ij}^{-1} \varphi_j \dots\dots\dots(3.3.7)$$

によって定義される  $\varphi_i^*$  は、 $\varphi_i$  の双対ベクトルとよばれるもので、これら2組のベクトルの間には直交関係

$${}^t\varphi_i \varphi_j^* = \delta_{ij} \dots\dots\dots(3.3.8)$$

が成り立つ。これは書き換えれば、次のように記される。

$$\sum_{k=0}^N \varphi_i(kh) \varphi_j^*(kh) = \delta_{ij} \dots\dots\dots(3.3.9)$$

式 (3.3.4) に直交条件 (3.3.9) を用いれば、

$$A_i = \sum_j p_j \varphi_i^*(jh) \dots\dots\dots(3.3.10)$$

を得るから、式 (3.3.3) は

$$\bar{p}(x) = \sum_i p_i \psi_i(x) \dots\dots\dots(3.3.11)$$

$$\psi_i(x) = \sum_j \varphi_j^*(jh) \varphi_j(x) \dots\dots\dots(3.3.12)$$

と記すことができる。ここに、 $\psi_i(x)$  は一つの補関数となっている。式 (3.3.11) より、

$$p_k = \sum_i p_i \psi_i(kh) \dots\dots\dots(3.3.13)$$

または,

$$p = \Psi p \quad \dots\dots\dots(3.3.14)$$

$$\Psi_{ij} = \psi_j(ih) \quad \dots\dots\dots(3.3.15)$$

を得る。ここで、 $p$  は任意のベクトルであるから、 $\Psi_{ij} = \delta_{ij}$  でなければならない。すなわち、

$$\psi_j(ih) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(ih) \varphi_k^*(jh) = \delta_{ij} \quad \dots\dots(3.3.16)$$

である。式 (3.3.11) を  $p(x)$  の近似式として用いれば、式 (3.3.2) は

$$w(x) = \sum_i p_i \int K(x, \xi) \psi_i(\xi) d\xi \quad \dots\dots(3.3.17)$$

となり、分割点でのたわみ  $w_i = w(ih)$  は

$$w_i = \sum_j p_j \int K(ih, \xi) \psi_j(\xi) d\xi \quad \dots\dots(3.3.18)$$

と表わすことができる。上式をさらに

$$w = K' p \quad \dots\dots\dots(3.3.19)$$

とおけば、

$$K'_{ij} = \int K(ih, \xi) \psi_j(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots(3.3.20)$$

であるが、この  $K'$  は一般に対称マトリックスとはなっていない。式 (3.3.1) と式 (3.3.19) のたわみ  $w$  を等置すれば、

$$P = W p \quad \dots\dots\dots(3.3.21)$$

$$W = K^{-1} K' \quad \dots\dots\dots(3.3.22)$$

を得る。

次に、仕事に関して等価置換を与えるウェイト・マトリックスについて考察する。分布荷重  $p(x)$  による全仕事は

$$U = \frac{1}{2} \int p(x) w(x) dx \quad \dots\dots\dots(3.3.23)$$

と記すことができる。上式に式(3.3.2)および式(3.3.11)を代入すれば、 $U$  の近似式として

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} p_i p_j \iint K(x, \xi) \psi_i(x) \psi_j(\xi) dx d\xi \quad \dots\dots\dots(3.3.24)$$

を得、これは次のように書き換えられる。

$$\bar{U} = \frac{1}{2} {}^t p K'' p \quad \dots\dots\dots(3.3.25)$$

ここに、 $K''$  は対称となり、

$$K''_{ij} = K''_{ji} = \iint K(x, \xi) \psi_i(x) \psi_j(\xi) dx d\xi \quad \dots\dots\dots(3.3.26)$$

である。一方、集中荷重列  $P$  による仕事は、式 (3.3.1) より、

$$U = \frac{1}{2} {}^t P w = \frac{1}{2} {}^t P K P \quad \dots\dots\dots(3.3.27)$$

とかけるから、分布荷重から集中荷重列への等価置換を

$$P = W p \quad \dots\dots\dots(3.3.28)$$

とおき、式 (3.3.27) に代入すれば、

$$U = \frac{1}{2} {}^t p {}^t W K W p \quad \dots\dots\dots(3.3.29)$$

を得、式 (3.3.25) の  $\bar{U}$  と式 (3.3.29) の  $U$  を等置すれば、

$$K'' = {}^t W K W \quad \dots\dots\dots(3.3.30)$$

を得る。この関係から  $W$  を求めるため、マトリックス  $K$  と  $K''$  の固有値、固有ベクトルをそれぞれ  $\lambda_i, v_i, \lambda'_i, v'_i$  とおけば、

$$K = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} v_i {}^t v_i \quad \dots\dots\dots(3.3.31)$$

$$K'' = \sum_i \frac{1}{\lambda'_i} v'_i {}^t v'_i \quad \dots\dots\dots(3.3.32)$$

ただし、

$${}^t v_i v_j = {}^t v'_i v'_j = \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots(3.3.33)$$

と記すことができる。これらを式 (3.3.30) に代入すれば、

$$\sum_i \frac{1}{\lambda'_i} v'_i {}^t v'_i = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} {}^t W v_i {}^t v_i W \quad \dots\dots(3.3.34)$$

これより

$$W = \sum_i \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda'_i}} v_i {}^t v'_i \quad \dots\dots\dots(3.3.35)$$

が求められる。

基底関数系  $\varphi_i(x)$  としては、たとえば

$$\varphi_i(x) = u \left\{ x - \left( i - \frac{1}{2} \right) h \right\} - u \left\{ x - \left( i + \frac{1}{2} \right) h \right\} \quad \dots\dots\dots(3.3.36)$$

を採用することができる<sup>4)</sup>。ここに  $u(x)$  はヘヴィサイドの階段関数である。この場合は  $p(x)$  を図-2 (b) に示すような荷重で近似したことになる。また、 $\varphi_i(x)$  として積分方程式 (3.3.2) の固有関数を採用することができるが、この場合については考察 4. (2) で述べることにする。

(4) 仮想仕事原理を応用する方法<sup>9), 10), 12)</sup>

たわみまたは一般に変位の関数  $w(x)$  を式 (3.3.11) の場合と同様に、

$$\bar{w}(x) = \sum_i w_i \psi_i(x) \quad \dots\dots\dots(3.4.1)$$

の形に近似し、仮想仕事原理によってウェイト・マトリックスを導く方法を説明する。 $\psi_i(x)$  を成分とするベクトルを  $\psi$  とすれば、式 (3.4.1) は

$$\bar{w}(x) = {}^t w \psi \quad \dots\dots\dots(3.4.2)$$

と記すことができる。仮想変位  $\delta w(x)$  の分布荷重  $p(x)$  に対する仮想仕事は

$$\delta \bar{U} = \int \delta \bar{w}(x) p(x) dx = {}^t \delta w \int \psi p(x) dx \quad \dots\dots\dots(3.4.3)$$

で近似される。一方、集中荷重列  $P$  に対する仮想仕事は

$$\delta U = {}^t \delta w P \quad \dots\dots\dots(3.4.4)$$

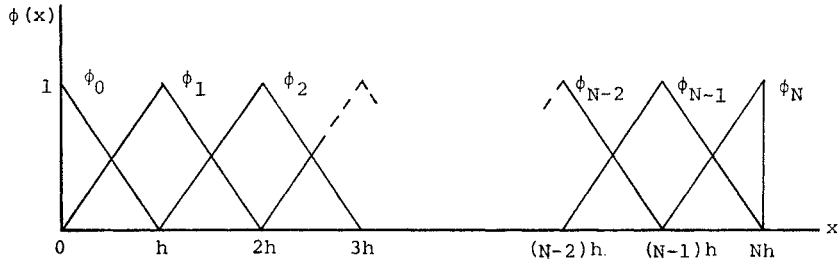


図-9

であるから、この二つの仮想仕事量  $\delta\bar{U}, \delta U$  を等置し、 $\delta w \neq 0$  を考慮すれば、

$$P = \int \psi p(x) dx \dots\dots\dots(3.4.5)$$

を得る。分布荷重  $p(x)$  も、 $w(x)$  と同様に

$$\bar{p}(x) = \psi^t \mathbf{p} \dots\dots\dots(3.4.6)$$

と近似すれば、式 (3.4.5) は

$$P = W \mathbf{p} \dots\dots\dots(3.4.7)$$

$$W = \int \psi^t \psi dx \dots\dots\dots(3.4.8)$$

と記することができる。式 (3.4.8) の  $W$  は分布荷重  $\mathbf{p}$  を仕事に関して等価な集中荷重列  $P$  に置換するウェイト・マトリックスである。式 (3.4.7) を用いるほうが式 (3.4.5) の積分を行うより容易なことはいまでもない。分布荷重を表わす関数  $p(x)$  が、補間関数  $\psi_i(x)$  の張る関数空間  $\mathcal{V}$  に属す場合は  $\bar{p}(x) = p(x)$  となり、式 (3.4.7) は式 (3.4.5) と厳密に同一の結果を与えることになる。また、式 (3.4.8) は、 $W$  が空間  $\mathcal{V}$  のグラム行列となっていることを示している。したがって、 $\psi_i(x)$  が互いに独立ならば、 $|W| \neq 0$  であるから、一般に  $W$  の逆マトリックス  $W^{-1}$  が存在し、集中荷重列  $P$  から仕事に関して等価な分布荷重  $\mathbf{p}$  への置換

$$\mathbf{p} = W^{-1} P \dots\dots\dots(3.4.9)$$

が得られる。

ここで述べた方法によりウェイト・マトリックスを誘導する一例を次に示す。まず、基底関数  $\varphi_i(x)$  として図-9 に示すような関数を用いる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\xi) &= -\xi + 1 & (0 \leq \xi \leq 1) \\ \varphi_i(\xi) &= \xi - i + 1 - 2(\xi - i)u(\xi - i) & (i-1 \leq \xi \leq i+1) \\ \varphi_N(\xi) &= \xi - N + 1 & (N-1 \leq \xi \leq N) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.4.10)$$

ここに、 $h$  は分割長であり  $\xi = x/h$ ,  $Nh = l$ , また  $\varphi_i(\xi)$  は式 (3.4.10) の定義域以外では 0 であるとする。式 (3.4.10) の  $\varphi_i(\xi)$  に対して、式 (3.3.6) のグラム行列は  $C_{ij} = \delta_{ij}$ , したがって、 $\psi_i(\xi) = \varphi_i(\xi)$  となる。この補間関数を用い、 $N=4$  の場合の逆ウェイト・マトリックス  $W^{-1}$  を計算すれば、

$$W^{-1} = \frac{1}{28h} \begin{bmatrix} 97 & -26 & 7 & -2 & 1 \\ & 52 & -14 & 4 & -2 \\ & & 49 & -14 & 7 \\ & & & 52 & -26 \\ \text{Sym.} & & & & 97 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.4.11)$$

となる。

有限要素法は仮想仕事原理を用いて定式化されており、式 (3.4.5) は有限要素法における等価節点力を求める手法と同一である。小坪ら<sup>3)</sup>の方法は仮想仕事原理の応用によっても導くことができ、仕事に関して等価な置換となっている。また、上述の方法は、特に共役射影理論と密接な関係があるが、この点については考察 4.(3) に述べることにする。なお、仮想仕事原理による等価置換では、補間関数の選択が不適当な場合 (たとえば、ある領域全体をどの部分領域でも恒等的に 0 とならないラグランジュの補間関数で近似する場合)、図-1 に示したような力学的不合理を生じることがあるので注意しなければならない。

## 4. 考 察

### (1) ウェイト・マトリックスの誘導方法の比較

3.(1),(2) で述べた方法は、基礎微分方程式を差分によって離散化し、スティフネスからウェイト・マトリックスを誘導しているが、3.(3) の方法は微分方程式の逆変換である積分方程式を離散化し、フレキシビリティのほうからウェイト・マトリックスを導いている。また、3.(4) の方法は変位または分布荷重を分割点での値と補間関数によって近似し、仮想仕事原理を応用してウェイトマトリックスを導いた。

上述のようにウェイト・マトリックスを誘導する方法は、大きく分けて三つの立場があるように思われる。3.(3) における分布荷重の近似に用いられる基底関数  $\varphi_i(x)$  が各分割点で

$$\varphi_i(jh) = \delta_{ij} \dots\dots\dots(4.1.1)$$

の条件を満たし、グリーン関数  $K(x, \xi)$  がフレキシビ



リティ・マトリックス  $K_{ij}$  と補間関数  $\varphi_i(x)$  を用い、  

$$K(x, \xi) = \sum_{i,j} K_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(\xi) \dots\dots\dots(4.1.2)$$

と記される場合、3.(3)の方法で導かれたたわみまたは仕事を等価量とするウェイト・マトリックスと3.(4)の仮想仕事原理によって導かれたウェイト・マトリックスは一致することになる。

また、いずれの場合も分布荷重  $p(x)$  は一般に近似表現となっているので、ウェイト・マトリックスの精度はこの近似の方法に依存していると思われる。したがって、少ない分割数で高い精度の等価置換を与えるウェイト・マトリックスを求めるためには、近似関数に用いられる補間関数を適切に選択することが必要となってくると思われる。

(2) グリーン関数の固有関数とウェイト・マトリックスの関係

式(3.3.2)におけるグリーン関数  $K(x, \xi)$  の固有関数を  $\varphi_i(x)$  とし、 $\varphi_i(x)$  とウェイト・マトリックスの関係について考察する。 $\varphi_i(x)$  に対応する  $K(x, \xi)$  の固有値を  $\mu_i$  とすれば、

$$\varphi_i(x) = \mu_i \int K(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi \dots\dots\dots(4.2.1)$$

および直交条件

$$\int \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = h \delta_{ij} \dots\dots\dots(4.2.2)$$

が成り立つ。

上述の固有関数  $\varphi_i(x)$  を式(3.3.3)に用いた基底関数として選ぶことができるが、その場合、式(3.3.20)は式(3.3.12)、(4.2.1)を考慮して

$$K'_{ij} = \sum_k \frac{1}{\mu_k} \varphi_k(ih) \varphi_k^*(jh) \dots\dots\dots(4.2.3)$$

または、

$$K' = \sum_k \frac{1}{\mu_k} \varphi_k^t \varphi_k^* \dots\dots\dots(4.2.4)$$

と記することができる。フレキシビリティ・マトリックス  $K$  の固有値、固有ベクトルを  $\lambda_i, v_i$  とすれば、式(3.3.31)を参照し、

$$K^{-1} = \sum_i \lambda_i v_i^t v_i \dots\dots\dots(4.2.5)$$

と記することができる。したがって、式(3.3.22)のたわみを等価量とするウェイト・マトリックスは

$$W = \sum_{i,j} \frac{\lambda_i}{\mu_j} v_i^t v_j \varphi_j^t \varphi_j^* \dots\dots\dots(4.2.6)$$

と記することができる。同様に、式(3.3.26)について式(3.3.12)、(4.2.1)、(4.2.2)を考慮すれば、

$$K''_{ij} = h \sum_k \frac{1}{\mu_k} \varphi_k^*(ih) \varphi_k^*(jh) \dots\dots\dots(4.2.7)$$

または、

$$K'' = h \sum_k \frac{1}{\mu_k} \varphi_k^*{}^t \varphi_k^* \dots\dots\dots(4.2.8)$$

を得る。上式を式(3.3.32)と比較すれば、

$$\lambda_i' = \mu_i / h \dots\dots\dots(4.2.9)$$

$$v_i' = \varphi_i^* \dots\dots\dots(4.2.10)$$

の関係が得られる。したがって、式(3.3.35)の仕事を等価量とするウェイト・マトリックスは、

$$W = \sum_i \sqrt{\frac{h \lambda_i}{\mu_i}} v_i^t \varphi_i^* \dots\dots\dots(4.2.11)$$

と記することができる。分割数  $N \rightarrow \infty$  に対応して、

$$v_i \rightarrow \varphi_i, \lambda_i \rightarrow \mu_i h \dots\dots\dots(4.2.12)$$

となると考えられるから、式(4.2.6)および式(4.2.11)のウェイト・マトリックスのいずれについても、

$$W \rightarrow hI \dots\dots\dots(4.2.13)$$

ここに  $I$  は単位マトリックス、となるが、これは離散量と分布量の等価置換を与える  $W$  のもつ当然の性質と考えることができる。単純ばりの場合、固有関数

$$\sqrt{2/N} \sin(n\pi x/l)$$

は離散化しても直交性をもつから、有限の  $N$  に対して  $W = hI$  の関係が成立する。一般には、有限の分割に対する  $W$  は  $K$  の固有ベクトルに近似した固有ベクトルをもつが、このことは式(4.2.12)、(4.2.13)から推定できる性質である。

(3) 共役射影理論とウェイト・マトリックスの関係<sup>9),10)</sup>

Oden<sup>13),14)</sup>によって提案された共役射影理論とウェイト・マトリックスの関係について説明する。連続体の領域  $R$  上で定義された関数のつくるヒルベルト空間  $H$  の  $(N+1)$ 次元の部分空間  $\Phi$  の一次独立な基底を  $\varphi_i(x)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, N$ ) とし、 $\varphi_i(x)$  は  $R$  上の分割点  $x_j$  で、

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \dots\dots\dots(4.3.1)$$

を満たすものとする。ここに、 $x$  は位置ベクトルであり、これは有限要素法で用いられる補間関数のもつ性質である。 $\varphi_i(x)$  を成分とするベクトルを

$$\varphi = {}^t(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \dots\dots\dots(4.3.2)$$

とおけば、 $\Phi$  のグラム行列は

$$C = \int_R \varphi^t \varphi dR = \langle \varphi, {}^t \varphi \rangle \dots\dots\dots(4.3.3) \text{注2)}$$

によって定義され、 $\Phi$  と共役な空間  $\Phi^*$  の基底  $\varphi_i^*$  を成分とするベクトルは

$$\varphi^* = C^{-1} \varphi \dots\dots\dots(4.3.4)$$

ここに、

$$\varphi^* = {}^t(\varphi_0^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_N^*) \dots\dots\dots(4.3.5)$$

である。この場合、 $\Phi$  は自己共役、すなわち、 $\Phi = \Phi^*$

注2)  $R$  で定義された二つの関数  $f(x), g(x) (\in H)$  に対し、 $\langle f, g \rangle = \int_R f(x)g(x)dR$  を  $f(x), g(x)$  の内積という。 $f(x), g(x)$  をベクトルとすれば、内積はマトリックスとなる。

となる。2組の基底  $\varphi$  と  $\varphi^*$  は

$$\langle \varphi, \varphi^* \rangle = I \dots \dots \dots (4.3.6)$$

を満足し、互いに双対基の関係にある。分布力を表わす関数を  $p(x)$  とし、ヒルベルト空間  $H$  からその部分空間  $\phi$  または  $\phi^*$  への射影作用素をそれぞれ、 $\Pi$  または  $\Pi^*$  とすれば、

$$\begin{aligned} \bar{p}(x) &= \Pi p(x) = {}^t p \varphi \\ &= \Pi^* p(x) = {}^t p^* \varphi^* \dots \dots \dots (4.3.7) \end{aligned}$$

ここに、

$$p^* = \langle p, \varphi \rangle, \quad p = \langle p, \varphi^* \rangle \dots \dots \dots (4.3.8)$$

$\bar{p}(x)$  の  $\phi$  上の成分  $p$  と  $\phi^*$  上の成分  $p^*$  との関係は式 (4.3.4), (4.3.8) より

$$p^* = C p, \quad p = C^{-1} p^* \dots \dots \dots (4.3.9)$$

と記すことができる。射影  $\Pi p$ , および  $\Pi^* p$  は共役射影とよばれるものである注3)。

$p(x) \in \phi$  ならば、 $\bar{p}(x) = p(x)$  で式(4.3.1)より  $p$  の成分  $p_i$  は関数  $p(x)$  の分割点  $x_i$  での値  $p(x_i)$  となっている。また、式 (3.4.8) と式 (4.3.3) とを比較すれば、

$$W = C \dots \dots \dots (4.3.10)$$

が得られ、共役射影理論における基本行列は、3.(4)で求めた仕事に関して等価置換を与えるウェイト・マトリックスと一致していることがわかる。したがって、 $p(x)$  を  $\phi^*$  に射影した  $\Pi^* p(x)$  の成分  $p^*$  は分布力  $p$  と仕事に関して等価な集中力を表わしていることになる。また、この性質は、ディラックのデルタ関数  $\delta(x-x_i)$  の  $\phi^*$  上への共役射影が  $\varphi_i^*(x)$  となっている<sup>13)</sup>こと、すなわち、

$$\Pi^* \delta(x-x_i) = \varphi_i^*(x) \dots \dots \dots (4.3.11)$$

に対応している性質である。

### 5. あとがき

分布力と集中力との等価置換を与えるウェイト・マトリックスをいくつかの方法で導入し、その方法や性質について系統的な考察を行った。本論文で述べたウェイト・マトリックスによるいくつかの等価置換例は、従来の lumped mass のような単純な考え方による置換とはかなり異なった結果を示しており、分布力と集中力の置

注3) 式(4.3.9)の関係は、最小自乗法

$$\int_R [p(x) - {}^t p \varphi]^2 dR = \min.$$

からも導くことができる。しかし、 $p, p^*$  に対し後述のような力学的意味の考察は、ウェイト・マトリックスの概念を用いないと得られない。

換は、本論文で提案したウェイト・マトリックスによる等価置換のほうが、より合理的であると思われる。ウェイト・マトリックスは一般に、離散量と分布量を等価置換する作用素であり、積分方程式の数値解法、選点法、有限要素法など構造解析以外の問題も含む広い分野への応用が可能と思われるが、構造解析以外の一般の場合には、離散量と分布量のいずれかに明確な物理的意味を与えられない場合もあると考えられる。実際の解析への応用やその精度などの考察については、稿を改めて詳細に述べたいと考えている。

### 参考文献

- 1) Archer, J.S. : Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems, ASCE, ST 4, pp. 161~178, 1963.
- 2) Archer, J.S. : Consistent Mass Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite-Element Techniques, AIAA Journal, 3, pp. 1910~1918, 1965.
- 3) 小坪清真・川人達男：連続弾性体を多質点系へ置換する場合の精度向上について，土木学会第24回年次学術講演会講演概要集，I-79, pp. 339~342, 1970.
- 4) 佐武正雄・新関 茂：分布量と離散量との等価置換に関する考察，昭和44年度土木学会東北支部技術研究発表会講演概要，pp. 83~86, 1970.
- 5) 新関 茂：構造解析におけるウェイト・マトリックスの研究，修士学位論文，東北大学，1970.
- 6) 佐武正雄・新関 茂：構造解析におけるウェイト・マトリックスに関する研究，土木学会第25回年次学術講演会講演概要集，I-113, pp. 339~342, 1970.
- 7) 佐武正雄・新関 茂：ウェイト・マトリックスの有限要素法への応用，昭和45年度土木学会東北支部技術研究発表会講演概要 pp. 205~206, 1971.
- 8) 佐武正雄・新関 茂：構造解析におけるウェイト・マトリックスとその応用，日本鋼構造協会第5回大会研究集会，マトリックス構造解析法研究発表論文集，pp. 119~125, 1971.
- 9) 佐武正雄・新関 茂：conjugate projectionの構造解析への一応用，土木学会第28回年次学術講演会講演概要集，I-48, pp. 100~101, 1973.
- 10) Niiseki, S. and Satake, M. : Some Applications of Topological Consideration and Weight-Matrix Method to Finite Element Analysis, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis (Proceedings of the 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis, ed. by Y. Yamada and R.H. Gallagher), University of Tokyo Press, pp. 61~73, 1973.
- 11) 佐武正雄：はりの高精度差分式について，土木学会論文報告集，第165号(1969)，pp. 53~58, 1969.
- 12) Zienkiewicz, O.C. : Finite Element Method in Engineering Science, MacGraw-Hill, pp. 23, 1971.
- 13) Oden, J.T. : Finite Elements of Nonlinear Continua, MacGraw-Hill, pp. 54~92, 1972.
- 14) Oden, J.T. : Theory of Conjugate Projections in Finite Element Analysis, Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics (ed. by J.T. Oden and E.R.A. Oliveira) UHA Press, pp. 41~75, 1973. (1974.5.31・受付)