

## 厚い長方形スラブの応力と変形

## STRESSES AND DEFORMATIONS IN THICK RECTANGULAR SLABS

島田 功\*・岡村 宏 \*\*

By Isao SHIMADA and Hirokazu OKAMURA

## 1. ま え が き

径間に対して高さの比率が大きいはり、いわゆる“ディープビーム”の問題については、すでに多くの研究者によって主として2次元等方弾性問題としての解析が行われ、平面保持の仮定にそぐわない応力分布状態、また、その解析結果に基づく設計上の配慮などについて論じられている<sup>3)~7)</sup>。

ところで、格間長に対して厚さの比率の大きいスラブ構造においても、上述のディープビーム的な性格がより複雑な形、すなわち3次元的に現われることが予想され、平面保持の仮定に基づく薄板理論によって扱うにはかなりの疑問がある。また、薄板理論よりの発展を試みた、E. Reissnerの厚板理論<sup>8)</sup>にしても、曲げ応力(直応力)の直線分布を仮定する点では薄板と同類であり、その適用範囲に限界のあることが、すでにS. Srinivas<sup>9)</sup>によって示唆されている。

厚いスラブにおける、上述の問題点に対処するには、結局3次元解析に基づくデータを提示することが必要である。しかしながら、その解析の煩雑さのためか、この種のデータは、目下のところほとんど見当たらないようである。

さて、本文の所論<sup>\*1)</sup>の要点は2つある。その1つは、厚いスラブにモデル化される鉄骨構造や、コンクリート構造などの実際構造物のパネルで散見される、この種の、スラブの理想化されたモデルとして周面固定のものを、材質を等方弾性体と仮定した上で、辺長、および厚さの比率をさまざまに変化させ、さらに、荷重として、表面に作用する全面等分布荷重、部分荷重、および体積力として自重を考慮した3次元解析を行い、1つの基本的データを提示したことである。もちろん、コンク

リート構造においては、内蔵される鉄骨や、鉄筋の持つ不均質性、さらにコンクリートのひびわれなどの影響について、今後、より詳細な議論が必要となるだろうが、前述のように、この種の構造に関する資料の乏しい現状では、ディープビームの研究にみられるような、等方弾性体としての解析データを示しておくことも、1次近似的な視点においては、十分意義のあることと考える。さらに1つの要点は、従来、板の力学の分野で、平面保持の仮定のもとに蓄積されてきた薄板理論、ならびにE. Reissnerの厚板理論の適用性を、3次元解析の結果から検討したことである。

ところで、筆者はすでに、3次元弾性問題の解析に有効な方法として、Integral methodに属する1つの実用解法を発表した<sup>10)</sup>。本文に提示するデータは、すべてこの方法により求められ、実用上、十分な精度のものが得られている。

## 2. 記 号

- $x, y, z$ : 直交座標
- $u, v, w$ :  $x, y, z$  方向の変位
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ : 直交座標系の直応力
- $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ : 直交座標系のせん断応力
- $a, b$ : スラブの辺長
- $h$ : スラブの厚さ
- $q$ : 表面に分布する荷重の強度
- $\rho$ : スラブの単位体積あたりの自重(体積力)
- $E$ : ヤング率
- $\nu$ : ポアソン比

図-1 に座標系および、諸元を示す。

## 3. 解 析 法

1. で述べたように、本文の解析は、前論文<sup>10)</sup>で提示した解法を、厚いスラブの解析に適応させたものであ

\* 正会員 東洋技研コンサルタント(株)研究室

\*\* 正会員 工博 大阪工業大学教授 土木教室

\*1) 本文は、土木学会の講演概要1), 2)を骨子とし、データを加えて構成したものである。

る。したがって、紙数の都合もあり、この問題に特有な要点を記述するとどめる。

さて、基本となる解は、図-2に示すような、半無限弾性体内の深さ $D$ の点に垂直、ならびに水平方向の集中力が作用する場合の、Mindlin 第1, 第2問題の解である。第1問題の解で $D=0$ とおけば、Boussinesqの解が得られ、この積分は、表面荷重による解を与える。また、自重については、半無限弾性体の自重関数として、

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\nu}{1-\nu} \rho z, \quad \sigma_z = -\rho z$$

で与えられ、これら、表面荷重および自重による解は、本解析の特解として利用される。

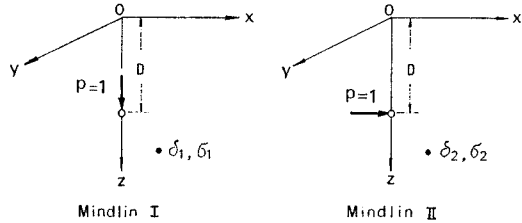


図-2

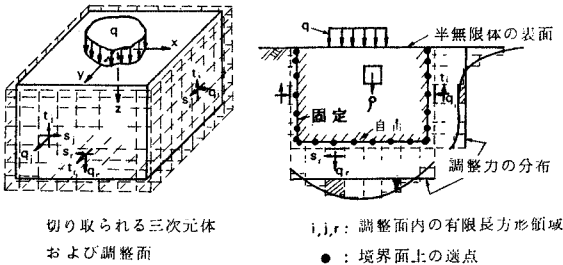


図-3

次に、スラブの他の境界面を作り出す方法について、図-3に見るように、表面荷重ならびに、自重が作用するような場合には、半無限体に、表面荷重、ならびに自重関数による応力成分、および変位成分を与え、同時に、求めるスラブ(直方体)を囲んで有限長方形領域( $i, j, r$ など)によって分割された調整面を設定する。さらに、各領域において等分布する調整力( $q_i, s_i, t_i$ など)を Mindlin 第1, 第2問題の解の積分によって与え、それらの作用によって、周面固定( $u=v=w=0$ )、ならびに底面自由( $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ )の条件を選点法によって調整する。したがって、調整力は、境界条件によって定まる未知量であり、有限領域の分割の粗密、調整面と

境界面の距離は、境界条件の精度に対応して定められる。なお、この解法の詳細については前論文<sup>10)</sup>を参照されたい。

#### 4. 計算データとその考察

2つの基本的な荷重状態の場合について、それぞれ、3次元解析による境界調整の精度、変形、応力の分布などについて述べる。なお、調整面の配置および、その分割は、それぞれ若干の検討の後に定められたものであり、また、ポアソン比( $\nu$ )は、すべて0.2である。

##### (1) 表面に全面等分布荷重( $q$ )を受ける場合

ここでは、辺長比( $b/a$ )=1.0, 1.5, 2.0の3種類に対し、スラブ厚比( $h/a$ )を0.25, 0.5, 1.0に変化させた場合の結果を示す。なお、解析上の特異性をさけるため、図-4にみるように、表面荷重は、固定の境界部

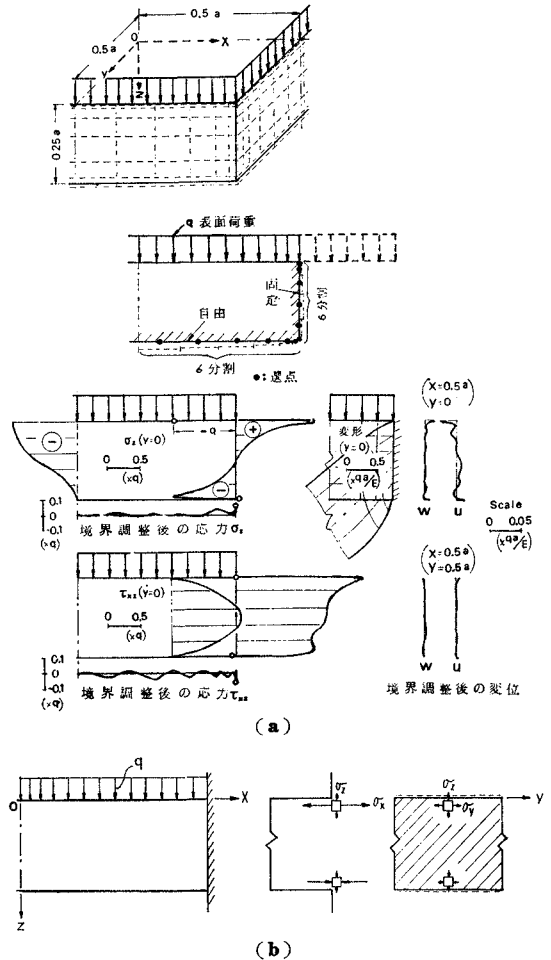


図-4 境界調整面と選点の配置ならびに境界調整の精度  
注) 表面近傍の $\sigma_x, \tau_{xz}$ の値は固定部分において、表面値から急変する。

表一 表面近傍での  $\sigma_x, \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  の計算値の比較 ( $b/a=1.0, x=0.5a, y=0$ )

z/h	h/a=0.25				h/a=1.0			
	$\sigma_x$	$\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_x$	$\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$
0	—	—	—	-1.0	—	—	—	-1.0
0.05	4.972	1.243	1.199	1.186	0.205	0.0512	0.0534	0.0503
0.10	2.935	0.734	0.792	0.751	-0.115	-0.0287	-0.0289	-0.0295
0.20	1.531	0.383	0.405	0.400	-0.219	-0.0548	-0.0541	-0.0552
0.80	-1.818	-0.455	-0.484	-0.488	-0.073	-0.0183	-0.0185	-0.0184
0.90	-3.256	-0.814	-0.874	-0.840	-0.066	-0.0165	-0.0163	-0.0168
0.95	-4.421	-1.105	-1.293	-1.123	-0.078	-0.0194	-0.0183	-0.0192
1.00	—	—	—	0.07	—	—	—	0.014

単位: q

分を越えて作用させ、その荷重とともに、境界調整が行われる。本解析の場合、境界調整の問題点は、周面より下面(自由面)の精度にあるが、本解析に限っての経験では、厚さが大きいほうが、その調整は容易であった。

図一4 (a), (b) は、特に注意を要する場合であった、厚さの比較的薄い(スラブ厚比  $(h/a)=0.25$ ) 正方形スラブについて調整の模様を示したものである。ところで、本解析では、前述のように理想化された周面の条件として、応力集中の度合いが顕著に現われる固定 ( $u=v=w=0$ ) の条件を選んでいる。したがって、まず、このような周面の拘束条件の充足度を応力のレベルで検査する場合には、次のような条件を考慮すればよい。すなわち、図一4 (a) に示される固定面 ( $y-z$ 面) では、

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z) = 0$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = 0$$

これより、

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x$$

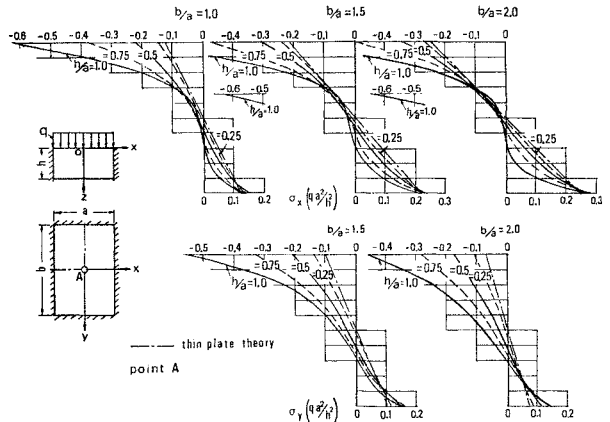
を得る。同様に他の固定面 ( $x-z$  面) では

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y$$

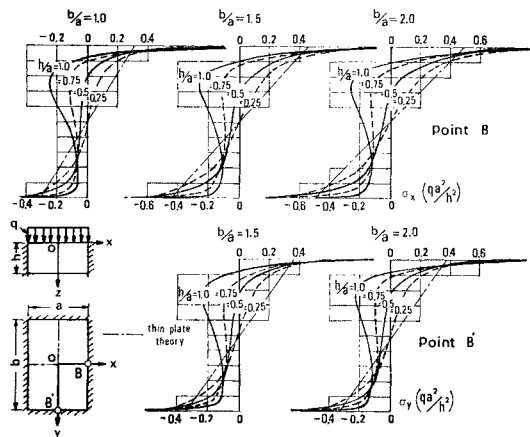
となる。これは1つの理想化された条件として、たとえば図一4 (b) に見るように、直応力(この場合  $\sigma_x$ ) に対して、ほぼポアソン比分に相当する拘束応力 ( $\sigma_y, \sigma_z$ ) が生じていることを意味する。したがって、表面近傍における  $\sigma_z, \tau_{xz}$  の値は、直応力  $\sigma_x$  の集中現象によって、図一4 (a) に見るように、表面の値から急変する。また表一は、前述の拘束条件の照査の結果を、特に誤差のでやすい、表面近傍の選点外の点について示したものであるが[板厚比の大きい場合 ( $h/a=1.0$ ) のデータも併記してある]、その誤差は、図一4 (a) に示した変位成分の残差とともに、小さいものであると判断した。なお、後述の図一17 の場合についても、同様な照査の結果を表一2 に示しているが、周面が荷重から離れている

場合の精度はさらによくなる。

一方、図一4 (a) には、下面(自由面)の選点外の点における  $\sigma_z, \tau_{xz}$  の調整後の残差の分布を示しているが、これらについても、その値のレベルから見て、解におよぼす影響は小さいと判断した。他の場合についても、同様の分割で、同等、もしくはより十分な精度で調整されており、データを省略した。



図一五 全面等分布荷重を受ける場合のスパン中央の水平応力分布



図一六 全面等分布荷重を受ける場合の固定部分の水平応力

図一5, 6 は、スパン中央および、固定部分の水平応力の分布を示したもので、スラブ厚比が大きくなると、表面近傍で応力は増大する傾向があり、特に固定部分では弾性解析の結果として、表面に応力集中現象が見られる。もちろん、これは表面に限られた特異性であって、実際の問題においては、表面近傍のある深さの全応力(有限な積分値)に抵抗できるような対策を考えることになり、後に掲げる成果表にも、このような点を配慮した。以上に述べた応力分布の性格は、ディープビームの場合に似たものがあり、表面近傍での補強が必要になる

ことを示している。一方、辺長比 ( $b/a$ ) が大きくなると、スパン中央では、短辺方向の応力 ( $\sigma_x$ ) の分布に、非線形性が顕著にあらわれ、同時に長辺方向の応力 ( $\sigma_y$ ) は、その傾向が緩和されることがよくわかる。

図一7 は、固定部分のせん断応力の分布を示したもので、薄板理論によるものとは、全く異なった分布が見られる。

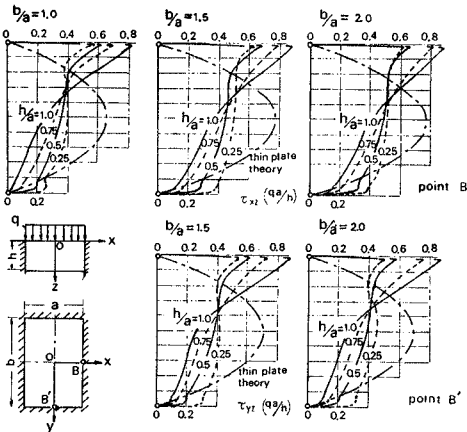
図一8, 9 は、スラブ厚比 ( $h/a$ ) = 0.5, 1.0 の場合について、中央断面の主応力分布を示したものである。

さらに、図一10~13 は、スパン中央、および固定部分の水平応力 ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) について、圧縮域、ならびに引張域の積分値を、グラフ化したものである。スパン中央で、スラブ厚比 ( $h/a$ ) の増大に伴い、圧縮力は急増し、引張力は減少する。なお、固定部分では、圧縮力、引張力ともにスラブ厚比 ( $h/a$ ) の増大に伴い、最初、減少するが、0.5 付近から増大する。

(2) 自重 ( $\rho$ ) による場合

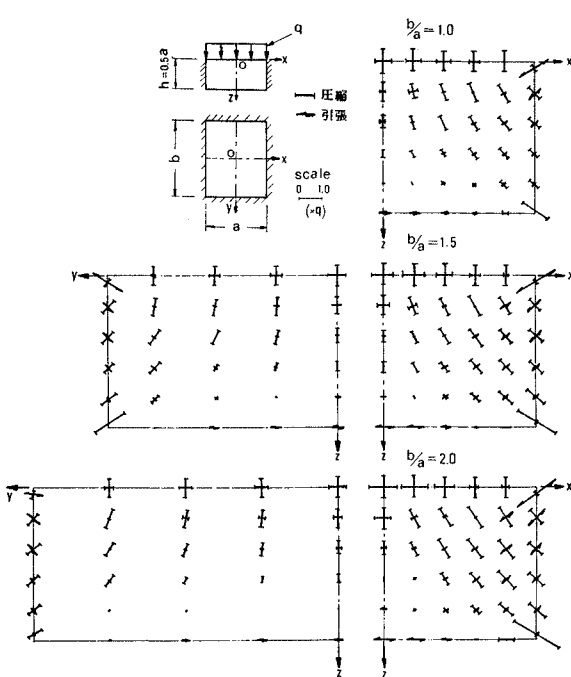
厚さの大きいスラブでは設計上、自重も無視できない要素であり、また、薄板の場合のように、それを表面等分布荷重として扱う場合と、体積力として厳密に扱う場合との差異を調べておく必要がある。ここでは、辺長比 ( $b/a$ ) = 1.0, スラブ厚比 ( $h/a$ ) = 0.5, 1.0 の2種類のスラブについて調べた結果を提示する。

この場合、調整面の配置と分割、また選点の配置は、

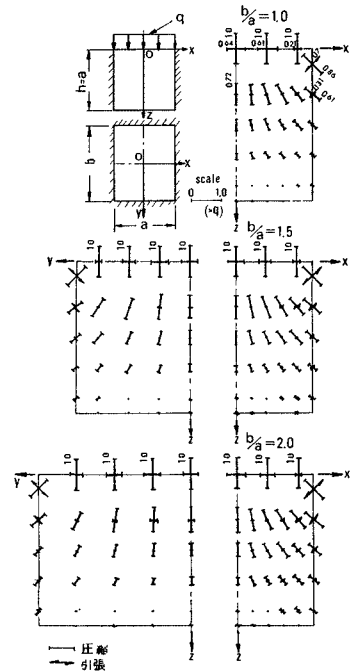


図一7 全面等分布荷重を受ける場合の固定部分のせん断応力分布

注) 表面近傍の  $\tau_{xz}$  の値は表面値=0 から急変する。



図一8 全面等分布荷重を受ける場合の中央断面の主応力分布



図一9 全面等分布荷重を受ける場合の中央断面の主応力分布

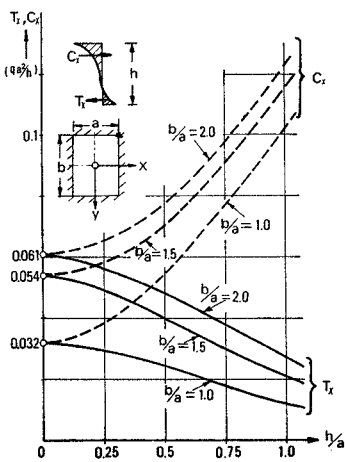


図-10

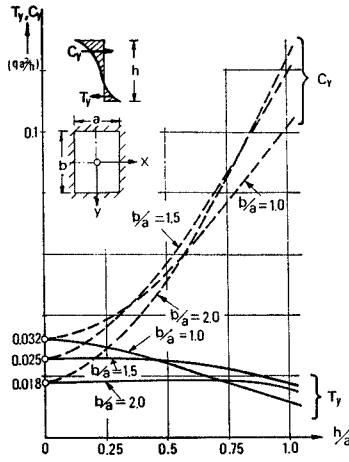


図-11

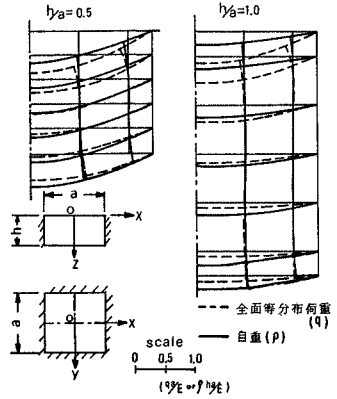


図-15

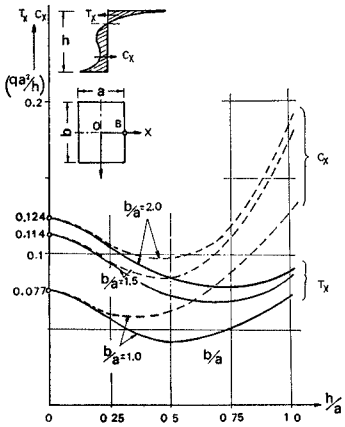


図-12

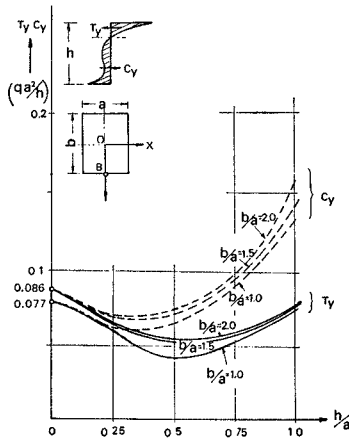


図-13

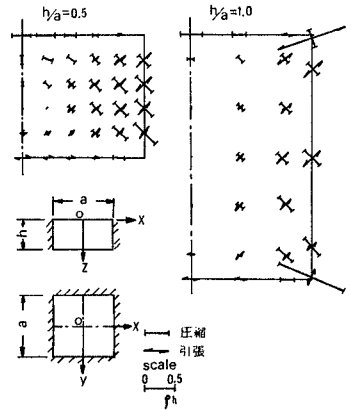


図-16 自重による中央断面の主応力分布

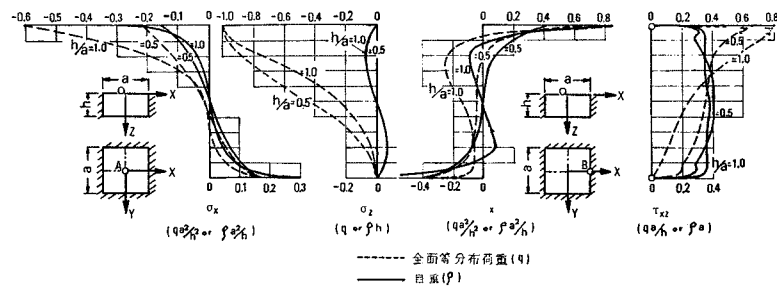


図-14

前問題と同様とした。境界調整の容易な、比較的厚い場合を扱っているので、境界条件も精度良く満足されており、調整の模様に関するデータは省略した。

図-14 は、自重 ( $\rho$ ) によるスパン中央、および固定部分の応力分布を、等価な全面等分布荷重による値と比較したものである。鉛直応力については、当然両者は、異なった分布状態となり、また、他の応力分布についても、スラブ厚比が大きくなると差異を生じている。特

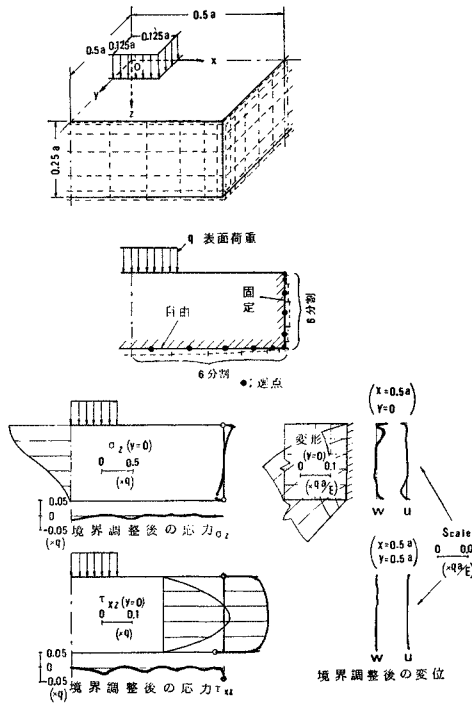
に、 $h/a=1.0$  の場合、表面近傍では、表面荷重として扱った場合の  $\sigma_x$  は、自重による場合の 2 倍以上の値を示し、下面では、逆に自重によるものが大きい値を示している。

図-15 は、中央断面の変形状態について、同様な比較をしたものである。

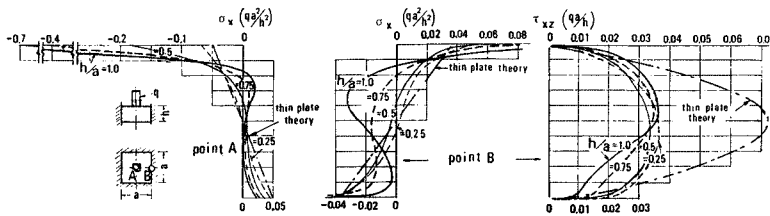
図-16 に中央断面における主応力の分布を示す。前節で示した、全面等分布荷重荷の場合と比較すると、その方向に差異が見られる。

(3) 表面に部分荷重 ( $q$ ) を受ける場合

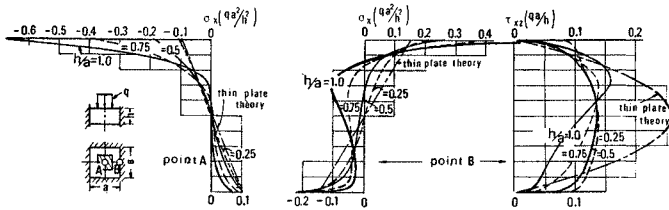
ここでは、辺長比 ( $b/a$ ) = 1.0 のものに対し、スラブ厚比 ( $h/a$ ) を 0.25, 0.5, 0.75, 1.0 と変化させ、2 種類の部分荷重 (荷重幅 = 0.25  $a$ , 0.5  $a$ ) を受ける場合の結果について述べる。



図一七 境界調整面と選点の配置  
ならびに境界調整の精度



図一八 部分荷重載荷の場合の応力分布



図一九 部分荷重載荷の場合の応力分布

図一七に、荷重幅=0.25a, h/a=0.25の場合の調整面の配置と分割, 選点の配置, ならびに境界面の調整の様態を示した。全面等分布荷重による場合と同様に, 実用上, 十分な精度で境界調整が行われており, 表一に示すように, 固定面の精度は, 前者の場合よりさらに良い。他の場合についても, 同じ分割数で, 同等, もしくはより十分な結果が得られている。

図一八, 一九は, 2種類の部分荷重についての, スパン中央および, 固定部分の水平応力ならびに, せん断応力

表一 表面近傍での  $\sigma_x, \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  の  
計算値の比較 ( $x=0.5a, y=0$ )

$z/h$	$\sigma_x$	$\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$
0	—	—	—	0.0
0.05	0.619	0.155	0.153	0.155
0.10	0.452	0.113	0.116	0.119
0.20	0.286	0.072	0.070	0.069
0.80	-0.278	-0.070	-0.069	-0.068
0.90	-0.502	-0.126	-0.125	-0.120
0.95	-0.667	-0.167	-0.162	-0.138
1.00	—	—	—	-0.007

単位: q

の分布を示したもので, 全面等分布荷重が作用した場合と同様に, h/a が大きくなると, 応力分布の非線形性が著しくなる。特に, 荷重分布幅が小さくなるに従って, 荷重載荷領域で表面近傍の応力の増大が顕著になる。

図一20, 21は, 中央断面の主応力分布を, スラブ厚を変えて示したものである。

なお, 図一22には, 特に表面分布荷重(q)を受ける場合(1), (3)の上下面の水平応力の分布について, 辺長比(b/a)=1.0のもので, スラブ厚比を変化させたときの結果を示した。載荷面の応力は, スラブ厚の変化により, 大きく変化するが, 下面のそれは, ほとんど変化しない。また, 部分荷重載荷の場合, スラブ厚比(h/a)が0.25を越えると, 荷重端で, 3次元的性格が強くなり, 応力が急変する。

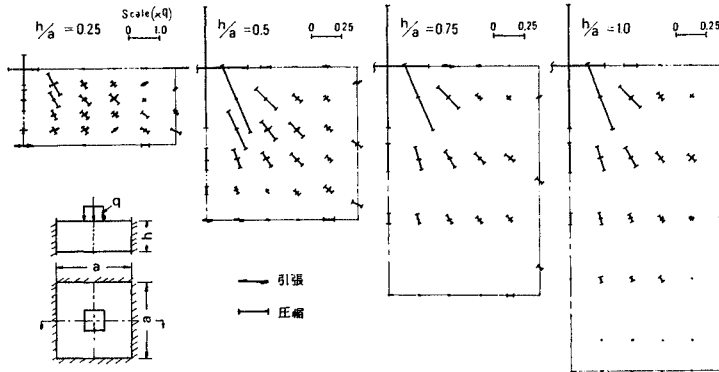
### 5. 薄板理論および Reissner の厚板理論の適性

前章において, 厚い長方形スラブの, 3次元解析による結果を述べてきたが, これらの結果をもとに行った, 薄板理論, および Reissner の厚板理論の適用範囲の検討とその評価について述べる。

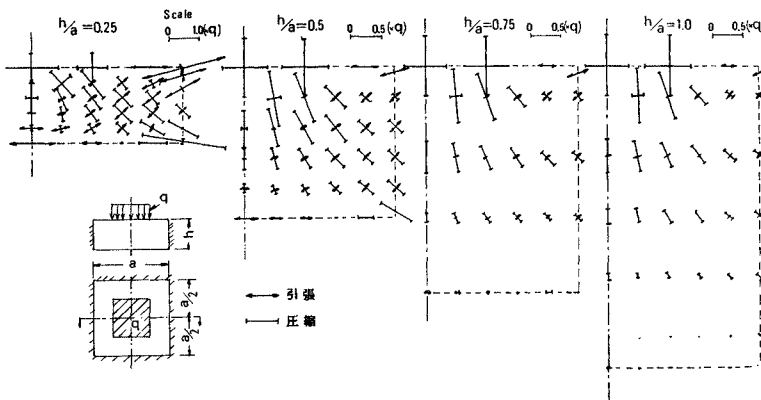
図一23は, 表面上に全面等分布荷重が作用した場合の, 固定部分のせん断力について, 薄板理論および, Reissner 理論による

ものと, 3次元解析によるせん断応力を厚さ方向に積分したものを比較したものである。h/a が 0.25 程度に増大する間に, B' 点のせん断力は急減し, 薄板理論によるものとは, 大差を生じるが, 一方, Reissner 理論に関しては, ほぼ近似性を持っているといえる。しかし 3次元解析の結果からもわかるように, 応力の分布状態は, 板理論による放物線分布とは, 著しく異なっている。

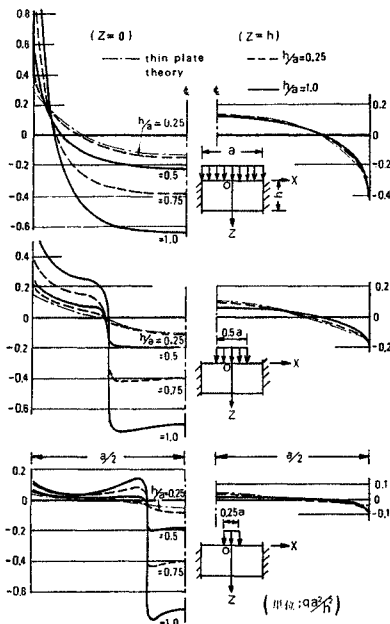
図一24, 25は, スパン中央, および固定部分のモーメントについて, 前と同様に, 3者の結果を比較して示



図—20 部分荷重載荷の場合の中央断面の主応力分布



図—21 部分荷重載荷の場合の中央断面の主応力分布

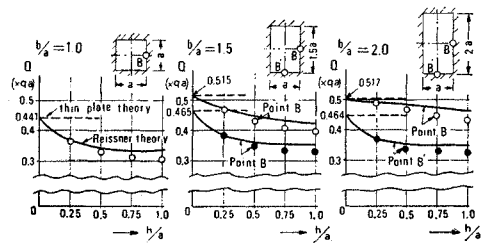


図—22 表面分布荷重を受ける場合の上下面の水平応力分布

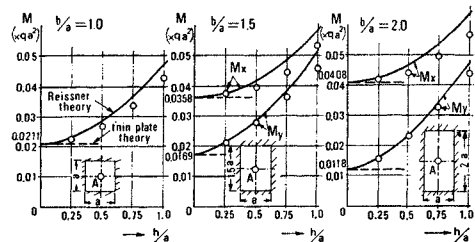
したものである。スラブ厚比 ( $h/a$ ) の増加とともに、モーメントは、スパン中央では急増し、同時に固定部分では急激な減少をして、薄板理論の近似性が失われることがわかる。一方、Reissner 理論についていえば、断面力に関する限りでは、3次元解析によるものと、同じような傾向を示しているのは興味のあることである。

図—26 は、スパン中央のたわみについて、前と同様に三者を比較したもので、たわみは、ほぼ  $h/a$  の 2 乗に比例して増加しており、薄板理論の適用範囲は、 $h/a=0.2$  程度までであろう。ただ、Reissner 理論によるものは、3次元解析による平均たわみとよく一致している。しかし、スラブ厚比 ( $h/a$ ) が 0.5 以上になると、スラブの上下面のたわみ差が大きくなる。

図—27, 28 は、部分荷重による、スパン中央のたわみ、モーメント、ならびに固定部分のモーメント、せん断力について、薄板理論、Reissner 理論と、3次元解析による結果とを比較したものであり、全面等分布荷重の場合と同様の傾向を示していることがわかる。



図—23



図—24

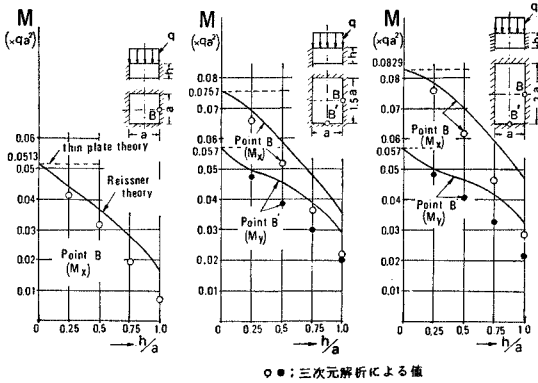


図-25

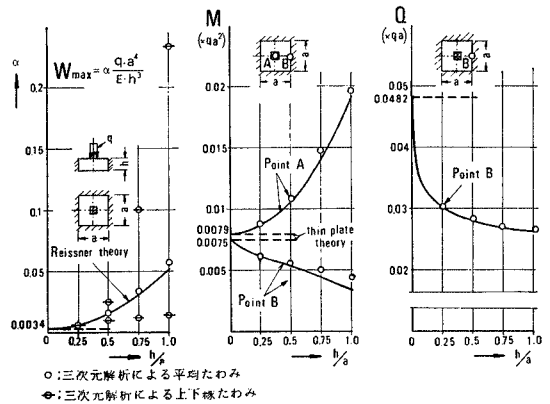


図-27

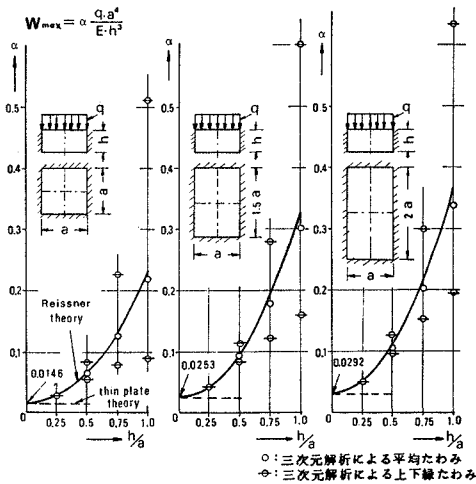


図-26

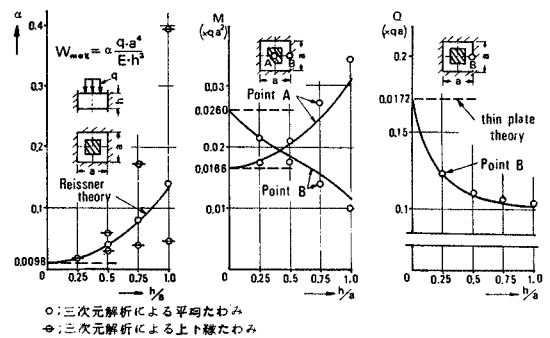


図-28

さて、本章のデータ、ならびに前章で示した応力分布に関するデータから、本文の解析の範囲内で、薄板理論、Reissner の厚板理論の適性について、次のような結論を述べる事ができる。

薄板理論の適用範囲は、スパン中央の諸量に関して、 $h/a \leq 0.2$  であり、固定部分では、その近似性は失われる。一方、Reissner の厚板理論が、応力の積分、およびひずみエネルギーの積分の意味をもつ断面力、平均たわみに対して、比較的良好な近似性を持っているのは注目すべきことである。しかし、応力分布に関しては、もともと直応力の直線分布を仮定する解法上の性格から、その適用範囲は、薄板理論の場合と同様である。

### 6. あとがき

既報の3次元弾性問題に対する1つの有効な解法<sup>10)</sup>を用い、等方弾性体、および周面固定と仮定した厚い長方形スラブの応力と変形について、荷重状態、構造諸元を変化させた多くの解析結果を示して、従来ほとんど解明

されていない、その力学的性格を明らかにした。さらに、従来、平板力学の分野で蓄積されてきた、薄板理論、ならびに Reissner の厚板理論による結果と比較して、それらの適性について論じた。以下に本解析の範囲内での全体的な結論を総括する。

- (1) スラブ厚比 ( $h/a$ ) が大きくなると、スラブの表面付近で応力が増大する傾向があり、特に部分荷重の載荷領域では、その傾向が大きい。
- (2) 厚さが大きくなると自重も無視できない要素となるが、薄板の場合のように、表面等分布荷重で扱っていると、応力分布に差異を生ずるので、注意を要する。
- (3)  $h/a$  が 0.2 を越えるようになると、変形は薄板理論によるものに比べ急激な増大を示し、また応力分布についても、非平面保持の性状が強くなり、薄板理論は、その近似性を失ってくる。
- (4) Reissner の厚板理論によるものも、応力分布については同様のことがいえるが、ただ、応力の積分、およびひずみエネルギーの積分の意味をもつ、断面力、および変形については、比較的良好な近似を与える結果となっていることは注目すべきことである。

厚いスラブ構造とみなされるものは、実際構造物では、鉄骨鉄筋コンクリート構造、あるいはこの種のスラ



ブにモデル化される鉄骨構造などに散見されるものである。特に前者においては、内蔵される鉄骨や、鉄筋の持つ不均質性、あるいはコンクリートのひびわれの影響などについて、今後より詳細な考察が必要である。その意味では、本文の所論における等方弾性体としての解析結果は、設計上、断面構成や補強の対策を考慮する場合に1次近似的な性格付けを与える上で意義がある。この点に関しては、たとえばディープビームの研究における、Li Chowらの論文<sup>9)</sup>にも見られるように、今後の研究課題が残されている。ただ、後者のような構造においては、この種の解析結果は、より直接的に利用できよう。

なお、実用の便に供するため、本文で扱ったモデルのすべてについて、その板厚を10等分し、それぞれの区間における全応力を計算したものを付録の数値表に集録してある。

参考文献

- 1) 岡村宏一・島田 功：厚いスラブの応力と変形，土木学会関西支部講演概要集，pp. I-5-1~4, 1973
- 2) 岡村宏一・島田 功：薄板および厚板理論の適性について，第28回土木学会講演概要集I，pp. 318~320, 1973
- 3) Schlee, W.: Bauteile mit zweiachsigen Spannungszustand, Beton-Kalender 1972, Teil II, S513~620, 1972: Wilh, Ernst & Sohn
- 4) Leonhardt, F.: Über die Kunst des Bewehrns von Stahlbetontragwerken, Beton-und Stahlbetonbau, H. 8, S 181~192, 1965
- 5) Geer, E.: Stresses in deep beams, Jour. A.C.I. No.

- 56-39, pp. 651~661, 1960
- 6) Chow, Li, Conway, H.D. and Winter, G.: Stresses in deep beams, Proc. A.S.C.E. Separate No. 127, Vol. 78, pp. 1~17, 1952
- 7) Design of deep girders, Concrete Information No. ST 66, Portland cement association, Chicago
- 8) Reissner, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech. Vol. 12, pp. A 69~A 77, 1945
- 9) Srinivas, S.: Flexure of simple supported thick homogeneous and laminated rectangular plates, Z.A.M. M. Vol. 49, pp. 449~458, 1969
- 10) 岡村宏一・島田 功：3次元弾性問題の1数値解法とその応用，土木学会論文報告集，No. 199, pp. 33~43, 1972

付 録

実用の便に供するため、本文で扱ったモデルについて、数値表を付録として示す。

表-3, 4 は、スパン中央の水平応力について、板厚を10等分し、それぞれの区間における全応力を示したものである。

表-5, 6 は、固定部分の水平応力について、同様に各区間の全応力を示したものである。

また、表-7, 8 は、固定部分のせん断応力について、最大値、および板厚全体にわたっての全せん断力を示したものである。

表-3 全面等分布荷重の場合

単位:  $qa^2/h$

Case	小区間 $z_1=0$ $z_2=0.1h$	$=0.1h$ $=0.2h$	$=0.2h$ $=0.3h$	$=0.3h$ $=0.4h$	$=0.4h$ $=0.5h$	$=0.5h$ $=0.6h$	$=0.6h$ $=0.7h$	$=0.7h$ $=0.8h$	$=0.8h$ $=0.9h$	$=0.9h$ $=h$	備 考	
$b/a=1.0$	薄板理論	-0.0114	-0.0089	-0.0063	-0.0038	-0.0012	0.0012	0.0038	0.0063	0.0089	0.0114	$(\int_{z_1}^{z_2} \sigma_x dz)$ $x=0$ $y=0$
	$h/a=0.25$	-0.0133	-0.0103	-0.0074	-0.0047	-0.0022	0.0003	0.0027	0.0053	0.0081	0.0115	
	$=0.5$	-0.0195	-0.0140	-0.0098	-0.0065	-0.0035	-0.0013	0.0013	0.0038	0.0073	0.0123	
	$=0.75$	-0.0315	-0.0208	-0.0129	-0.0073	-0.0039	-0.0017	0.0000	0.0023	0.0051	0.0113	
	$=1.0$	-0.0498	-0.0285	-0.0139	-0.0065	-0.0024	-0.0007	-0.0003	0.0004	0.0027	0.0087	
$b/a=1.5$	薄板理論	-0.0193	-0.0150	-0.0107	-0.0064	-0.0021	0.0021	0.0064	0.0107	0.0150	0.0193	$(\int_{z_1}^{z_2} \sigma_x dz)$ $x=0$ $y=0$
	$h/a=0.25$	-0.0212	-0.0162	-0.0116	-0.0073	-0.0033	0.0008	0.0047	0.0088	0.0134	0.0189	
	$=0.5$	-0.0265	-0.0188	-0.0128	-0.0080	-0.0043	-0.0001	0.0028	0.0068	0.0118	0.0193	
	$=0.75$	-0.0388	-0.0248	-0.0149	-0.0084	-0.0045	-0.0012	0.0006	0.0034	0.0084	0.0180	
	$=1.0$	-0.0583	-0.0297	-0.0152	-0.0082	-0.0036	-0.0017	-0.0004	0.0017	0.0056	0.0143	
$b/a=2.0$	薄板理論	-0.0091	-0.0071	-0.0051	-0.0030	-0.0010	0.0010	0.0030	0.0051	0.0071	0.0091	$(\int_{z_1}^{z_2} \sigma_y dz)$ $x=0$ $y=0$
	$h/a=0.25$	-0.0124	-0.0098	-0.0072	-0.0048	-0.0024	0.0001	0.0023	0.0047	0.0073	0.0103	
	$=0.5$	-0.0188	-0.0145	-0.0108	-0.0073	-0.0043	-0.0015	0.0013	0.0045	0.0080	0.0123	
	$=0.75$	-0.0293	-0.0219	-0.0158	-0.0107	-0.0068	-0.0034	0.0	0.0028	0.0068	0.0129	
	$=1.0$	-0.0443	-0.0291	-0.0193	-0.0122	-0.0077	-0.0041	-0.0014	0.0016	0.0048	0.0099	
$b/a=2.0$	薄板理論	-0.0220	-0.0171	-0.0122	-0.0073	-0.0024	0.0024	0.0073	0.0122	0.0171	0.0220	$(\int_{z_1}^{z_2} \sigma_x dz)$ $x=0$ $y=0$
	$h/a=0.25$	-0.0243	-0.0184	-0.0132	-0.0080	-0.0035	0.0009	0.0058	0.0106	0.0152	0.0216	
	$=0.5$	-0.0300	-0.0212	-0.0138	-0.0082	-0.0035	0.0004	0.0045	0.0084	0.0133	0.0205	
	$=0.75$	-0.0422	-0.0244	-0.0139	-0.0079	-0.0036	-0.0003	0.0015	0.0049	0.0103	0.0215	
	$=1.0$	-0.0607	-0.0298	-0.0078	-0.0078	-0.0034	-0.0010	-0.0004	0.0018	0.0064	0.0170	
$b/a=2.0$	薄板理論	-0.0064	-0.0050	-0.0030	-0.0025	-0.0011	0.0007	0.0021	0.0035	0.0050	0.0064	$(\int_{z_1}^{z_2} \sigma_y dz)$ $x=0$ $y=0$
	$h/a=0.25$	-0.0096	-0.0076	-0.0058	-0.0039	-0.0021	-0.0003	0.0014	0.0033	0.0053	0.0076	
	$=0.5$	-0.0158	-0.0128	-0.0098	-0.0070	-0.0043	-0.0020	0.0003	0.0030	0.0060	0.0095	
	$=0.75$	-0.0255	-0.0194	-0.0140	-0.0100	-0.0064	-0.0038	-0.0005	0.0022	0.0056	0.0101	
	$=1.0$	-0.0398	-0.0297	-0.0208	-0.0143	-0.0095	-0.0053	-0.0016	0.0019	0.0057	0.0104	

表-4 部分荷重の場合

単位： $qa^2/h$

Case	小区間 $z_1=0$ $z_2=0.1h$	$=0.1h$ $=0.2h$	$=0.2h$ $=0.3h$	$=0.3h$ $=0.4h$	$=0.4h$ $=0.5h$	$=0.5h$ $=0.6h$	$=0.6h$ $=0.7h$	$=0.7h$ $=0.8h$	$=0.8h$ $=0.9h$	$=0.9h$ $=h$	備 考		
$b/a=1.0$	薄板理論	-0.0043	-0.0033	-0.0024	-0.0014	-0.0004	0.0004	0.0014	0.0024	0.0033	0.0043	$\left(\int \sigma_x dz\right)$ $x=0$ $y=0$ 荷重幅= $0.25a$	
	$h/a=0.25$	-0.0058	-0.0040	-0.0023	-0.0011	-0.0005	0.0003	0.0009	0.0016	0.0025	0.0037		
	$=0.5$	-0.0135	-0.0047	-0.0014	-0.0003	0.0005	0.0007	0.0009	0.0012	0.0018	0.0026		
	$=0.75$	-0.0198	-0.0032	0.0006	0.0010	0.0006	0.0005	0.0006	0.0006	0.0011	0.0019		
	$=1.0$	-0.0334	-0.0022	0.0018	0.0014	0.0006	0.0004	0.0000	0.0002	0.0005	0.0014		
	薄板理論	-0.0089	-0.0069	-0.0049	-0.0029	-0.0009	0.0009	0.0029	0.0049	0.0069	0.0089		$\left(\int \sigma_x dz\right)$ $x=0$ $y=0$ 荷重幅= $0.5a$
	$h/a=0.25$	-0.0092	-0.0066	-0.0046	-0.0036	-0.0017	0.0004	0.0018	0.0039	0.0061	0.0085		
	$=0.5$	-0.0161	-0.0104	-0.0056	-0.0034	-0.0008	0.0008	0.0019	0.0028	0.0053	0.0082		
$=0.75$	-0.0275	-0.0134	-0.0066	-0.0017	0.0005	0.0007	0.0011	0.0016	0.0031	0.0071			
$=1.0$	-0.0458	-0.0139	-0.0027	0.0002	0.0008	0.0005	0.0004	0.0007	0.0013	0.0040			

表-5 全面等分布荷重の場合

単位： $qa^2/h$

Case	小区間 $z_1=0$ $z_2=0.1h$	$=0.1h$ $=0.2h$	$=0.2h$ $=0.3h$	$=0.3h$ $=0.4h$	$=0.4h$ $=0.5h$	$=0.5h$ $=0.6h$	$=0.6h$ $=0.7h$	$=0.7h$ $=0.8h$	$=0.8h$ $=0.9h$	$=0.9h$ $=h$	備 考	
$b/a=1.0$	薄板理論	0.0277	0.0216	0.0154	0.0092	0.0031	-0.0031	-0.0092	-0.0154	-0.0216	-0.0277	$\left(\int_{z_1}^{z_2} \sigma_x dz\right)$ $x=0.5a$ $y=0$
	$h/a=0.25$	0.0317	0.0133	0.0065	0.0040	0.0014	-0.0016	-0.0039	-0.0081	-0.0153	-0.0289	
	$=0.5$	0.0379	0.0042	-0.0021	-0.0036	-0.0044	-0.0052	-0.0060	-0.0070	-0.0103	-0.0248	
	$=0.75$	0.0526	-0.0068	-0.0122	-0.0122	-0.0088	-0.0073	-0.0065	-0.0073	-0.0086	-0.0196	
	$=1.0$	0.0736	-0.0197	-0.0250	-0.0228	-0.0161	-0.0108	-0.0079	-0.0074	-0.0072	-0.0137	
$b/a=1.5$	薄板理論	0.0409	0.0318	0.0277	0.0136	0.0045	-0.0045	-0.0136	-0.0277	-0.0318	-0.0409	$\left(\int_{z_1}^{z_2} \sigma_x dz\right)$ $x=0.5a$ $y=0$
	$h/a=0.25$	0.0481	0.0235	0.0136	0.0078	0.0021	-0.0029	-0.0070	-0.0126	-0.0241	-0.0452	
	$=0.5$	0.0568	0.0130	0.0031	-0.0015	-0.0043	-0.0057	-0.0078	-0.0096	-0.0169	-0.0424	
	$=0.75$	0.0682	-0.0007	-0.0093	-0.0115	-0.0105	-0.0097	-0.0100	-0.0102	-0.0142	-0.0353	
	$=1.0$	0.0856	-0.0134	-0.0260	-0.0237	-0.0195	-0.0161	-0.0134	-0.0117	-0.0132	-0.0261	
$b/a=2.0$	薄板理論	0.0308	0.0240	0.0171	0.0103	0.0034	-0.0034	-0.0103	-0.0171	-0.0240	-0.0308	$\left(\int_{z_1}^{z_2} \sigma_y dz\right)$ $x=0$ $y=0.5b$
	$h/a=0.25$	0.0359	0.0155	0.0088	0.0047	0.0014	-0.0018	-0.0056	-0.0096	-0.0180	-0.0330	
	$=0.5$	0.0473	0.0073	-0.0011	-0.0031	-0.0044	-0.0057	-0.0065	-0.0062	-0.0136	-0.0296	
	$=0.75$	0.0587	-0.0031	-0.0112	-0.0117	-0.0093	-0.0083	-0.0085	-0.0096	-0.0119	-0.0250	
	$=1.0$	0.0773	-0.0159	-0.0236	-0.0223	-0.0175	-0.0142	-0.0123	-0.0106	-0.0108	-0.0212	
$b/a=2.0$	薄板理論	0.0448	0.0348	0.0249	0.0149	0.0050	-0.0050	-0.0149	-0.0249	-0.0348	-0.0448	$\left(\int_{z_1}^{z_2} \sigma_x dz\right)$ $x=0.5a$ $y=0$
	$h/a=0.25$	0.0511	0.0268	0.0158	0.0092	0.0023	-0.0031	-0.0088	-0.0159	-0.0270	-0.0512	
	$=0.5$	0.0648	0.0156	0.0051	-0.0008	-0.0040	-0.0058	-0.0080	-0.0116	-0.0190	-0.0497	
	$=0.75$	0.0775	0.0022	-0.0081	-0.0109	-0.0119	-0.0111	-0.0103	-0.0119	-0.0150	-0.0421	
	$=1.0$	0.0904	-0.0127	-0.0262	-0.0239	-0.0178	-0.0163	-0.0137	-0.0125	-0.0138	-0.0325	
$b/a=2.0$	薄板理論	0.0308	0.0239	0.0171	0.0103	0.0034	-0.0034	-0.0103	-0.0171	-0.0239	-0.0308	$\left(\int_{z_1}^{z_2} \sigma_y dz\right)$ $x=0$ $y=0.5b$
	$h/a=0.25$	0.0373	0.0159	0.0090	0.0050	0.0012	-0.0020	-0.0057	-0.0100	-0.0183	-0.0341	
	$=0.5$	0.0485	0.0077	-0.0008	-0.0029	-0.0044	-0.0059	-0.0067	-0.0095	-0.0140	-0.0326	
	$=0.75$	0.0592	-0.0025	-0.0103	-0.0112	-0.0096	-0.0086	-0.0087	-0.0098	-0.0122	-0.0288	
	$=1.0$	0.0777	-0.0150	-0.0230	-0.0220	-0.0177	-0.0148	-0.0128	-0.0110	-0.0110	-0.0230	

表-6 部分荷重の場合

単位： $qa^2/h$

Case	小区間 $z_1=0$ $z_2=0.1h$	$=0.1h$ $=0.2h$	$=0.2h$ $=0.3h$	$=0.3h$ $=0.4h$	$=0.4h$ $=0.5h$	$=0.5h$ $=0.6h$	$=0.6h$ $=0.7h$	$=0.7h$ $=0.8h$	$=0.8h$ $=0.9h$	$=0.9h$ $=h$	備 考	
$b/a=1.0$	薄板理論	0.00407	0.00316	0.00226	0.00136	0.00045	-0.00045	-0.00136	-0.00226	-0.00316	-0.00407	$\left(\int \sigma_x dz\right)$ $x=0.5a$ $y=0$ 荷重幅= $0.25a$
	$h/a=0.25$	0.00409	0.00251	0.00151	0.00088	0.00031	-0.00015	-0.00065	-0.00132	-0.00266	-0.00410	
	$=0.5$	0.00468	0.00175	0.00060	0.00013	-0.00030	-0.00062	-0.00109	-0.00173	-0.00231	-0.00394	
	$=0.75$	0.00582	0.00093	-0.00061	-0.00149	-0.00182	-0.00191	-0.00176	-0.00174	-0.00176	-0.00339	
	$=1.0$	0.00805	-0.00018	-0.00310	-0.00390	-0.00349	-0.00238	-0.00151	-0.00071	-0.00048	-0.00228	
$b/a=1.0$	薄板理論	0.0140	0.0109	0.0078	0.0047	0.0016	-0.0016	-0.0047	-0.0078	-0.0109	-0.0140	$\left(\int \sigma_x dz\right)$ $x=0.5a$ $y=0$ 荷重幅= $0.5a$
	$h/a=0.25$	0.0142	0.0081	0.0048	0.0026	0.0007	-0.0006	-0.0026	-0.0046	-0.0076	-0.0135	
	$=0.5$	0.0156	0.0039	0.0010	-0.0003	-0.0012	-0.0021	-0.0029	-0.0040	-0.0051	-0.0118	
	$=0.75$	0.0194	0.0004	-0.0034	-0.0047	-0.0049	-0.0043	-0.0040	-0.0036	-0.0038	-0.0090	
	$=1.0$	0.0259	-0.0004	-0.0093	-0.0110	-0.0076	-0.0063	-0.0044	-0.0033	-0.0027	-0.0064	

表-7 全面等分布荷重の場合

単位：全せん断力 (qa)    せん断応力 (qa/h)

	b/a=1.0		b/a=1.5				b/a=2.0			
	x=0.5 a, y=0		x=0.5 a, y=0		x=0, y=0.5 b		x=0.5 a, y=0		x=0, y=0.5 b	
	全せん断力 $Q_x$	$\tau_{xzmax}$	全せん断力 $Q_x$	$\tau_{xzmax}$	全せん断力 $Q_y$	$\tau_{yzmax}$	全せん断力 $Q_x$	$\tau_{xzmax}$	全せん断力 $Q_y$	$\tau_{yzmax}$
薄板理論	0.441	0.662	0.515	0.773	0.465	0.698	0.517	0.776	0.464	0.696
h/a=0.25	0.367	0.578	0.469	0.636	0.382	0.562	0.488	0.641	0.369	0.504
=0.5	0.329	0.629	0.430	0.690	0.349	0.632	0.467	0.694	0.338	0.599
=0.75	0.312	0.708	0.408	0.793	0.332	0.725	0.447	0.805	0.332	0.768
=1.0	0.304	0.795	0.397	0.889	0.328	0.854	0.434	0.891	0.323	0.868

表-8 部分荷重の場合

(1974.2.20・受付)

単位：全せん断力 (qa)    せん断応力 (qa/h)

x=0.5 a y=0	b/a=1.0			
	荷重幅=0.25 a		荷重幅=0.5 a	
	全せん断力 $Q_x$	$\tau_{xzmax}$	全せん断力 $Q_x$	$\tau_{xzmax}$
薄板理論	0.0482	0.0723	0.172	0.258
h/a=0.25	0.0304	0.0368	0.123	0.141
=0.5	0.0281	0.0332	0.110	0.138
=0.75	0.0270	0.0348	0.106	0.139
=1.0	0.0265	0.0356	0.103	0.158