

ある種の直交異方性板の応力集中と応力解析

STRESS CONCENTRATION AND STRESS ANALYSES FOR CERTAIN ORTHOTROPIC PLATES

長谷部 宣 男*
By Norio HASEBE

1. 結 言

直交異方性平面弾性問題において、異方性の主軸の方向と座標軸 x, y の方向とが一致するとき、応力関数を $F(x, y)$ とするとその基礎微分方程式は、

$$\frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_x}{E_x} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

と表わされる。ここに E_x, E_y はそれぞれ x, y 軸方向縦弾性定数, G_{xy} はせん断弾性定数, ν_x はポアソン比である。

上式の特性方程式

$$\mu^4 + (E_x/G_{xy} - 2\nu_x)\mu^2 + E_x/E_y = 0$$

の特性根は、弾性定数の間の関係より次の三通りの複素根を有する場合にわけられる^{1), 2)} (実根を有しないことは証明されている³⁾)。

すなわち、

Case I $\mu_1 = \alpha i, \mu_2 = \beta i$ (純虚数で等しくない場合)

Case II $\mu_1 = \mu_2 = \alpha i$ (純虚数で等しい場合)

Case III $\mu_1 = \alpha + \beta i, \mu_2 = -\alpha + \beta i$

である。

同様の分類が直交異方性薄板の面外曲げの問題の場合にも考察される。

本報告は、Case II の場合 ($\alpha=1$ が等方性の場合に相当する) を平面弾性問題、薄板の面外曲げの問題として有理写像関数を用いて解析したものである。有理写像関数の表わす形状に対してはそれぞれの問題の厳密解が閉じた形で得られる。

また、解析例としての弾性体の形状として三角形や半楕円形の切欠きを有する半無限板を用いている。切欠き付近の応力分布を弾性定数との関係において、また特に

応力集中について考察している。

形状的には外部きれつきの Model として、その弾性応力分布に関する知見は、基礎的な事項として参考になろう。等方性弾性体の平面弾性問題や薄板の面外曲げの応力集中に関しては、隅角部角度より求まる特性方程式の指数および隅角部の曲率半径を用いて表わされる一般の応力集中係数表示式を求めた⁴⁾。

本論文で扱う Case II の直交異方性弾性体についても同様の応力集中係数の表示式を求め、等方性の場合の表示式との関係を考察してみる。

上述のように本報告は、写像関数の適用による比較的任意の形状に対する応力解析の遂行、および応力分布や応力集中の特性、法則性に関する探求という点では、著者がさきに報告した論文^{4), 5), 6)} との一環をなすものである。

直交異方性弾性体の平面問題の解法については、まず Wolf⁷⁾ や大久保^{8), 9)} が弾性定数の間に特別な関係

$$G_{xy} = E_x E_y / [E_x + E_y (1 + 2\nu_x)]$$

を仮定して、半平面や円孔、楕円孔を有する無限板の解析を行っている。この関係は一般の直交異方性の Case I において $\alpha=1, \beta \neq 1$ なる特別な場合に相当している。さらに弾性定数の間に特別な関係を用いることなく、Lekhnitskii¹⁾ が複素変数を用いた一般の異方性の、池田²⁾ は直交異方性の解法を示している。

そして前述のように弾性定数の間の関係により直交異方性弾性体に Case I, II, III の場合のあることを示している。Lekhnitskii や池田の直交異方性の解法は数学的にはきわめて美しい形で表わされている。

しかし、実際問題として一般の異方性はもちろん、直交異方性に対しても、解析的に得られている解は形状的にもかなり限られているようである。

たとえば、円板、楕円板、放物線や双曲線形の境界を有する無限板、半無限板、長方形板のような形状の他、孔としては楕円孔、円孔を有する無限板が (いずれも文

* 正会員 工修 名古屋工業大学講師 土木工学科

献 1) に掲載されている), また摂動法を用いた 楕円孔を含む半無限板¹⁰⁾, 2 楕円孔を含む無限板¹¹⁾, 円孔を有する帯板^{12), 13)}の平面問題の解などが見当る。いずれにしても形状的にも得られている解析解は多くはない。このことは等方性弾性体の平面弾性問題や薄板の面外曲げの解析解が非常に多く得られ, 形状的にもかなり任意の形状の解析解が得られているのに比べてかなり違っている。

これは基礎微分方程式 (1) が, 等方性のそれに比して複雑であり, 特性根が Case I や Case III の場合は, アフィン変換して得られる形状が 2 通り作られて, 写像関数の適用が難しいためと思われる, このため等方性の場合ほど任意の形状の解析がなされていないようである。

しかし, Case II の場合は, アフィン変換して得られる形状が 1 通りであり, 写像関数の導入も容易で, その解法は等方性の場合に準じ, したがって比較的任意の形状の解析解が得られる。

上述のような意味で, 本論文中に扱う直交異方性弾性体も Case II の特別な場合である。

この場合実用的な観点からの一番の問題点は, Case II の直交異方性弾性体を実際問題として遭遇するかどうかである。このことについては結語において少しふれたい。

2. 平面弾性問題としての解析

弾性定数の間に

$$\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_x}{E_x} = \frac{2}{\sqrt{E_x E_y}} \dots\dots\dots(2.1)$$

なる関係があるとき, 緒言に述べた Case II の場合が成り立つ。また物理的に y 方向に引張ったときの x 方向の縮みに関するポアソン比を ν_y とすると, Maxwell の相反定理より $\nu_x/E_x = \nu_y/E_y$ が成立つ。

ここで,

$$x_1 = x, \quad y_1 = \sqrt{E_x/E_y} y \dots\dots\dots(2.2)$$

なる変数変換を行うと, 基礎微分方程式は

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y_1^4} = 0 \dots\dots\dots(2.3)$$

となって, 応力関数 F は x_1, y_1 を引数とする重調和関数であることがわかる。したがって, その解法は等方性の場合のそれに準じたものとなる。

(1) 写像関数

解法について論ずる前に, 解法に導入される写像関数についてまず述べておく。後ほど解析例として示す形状を例に説明する。図-1 (a) に示すのが解析すべき物理平面の領域である。これを式 (2.2) の変数変換すなわちアフィン変換を行うと x_1, y_1 座標面の領域 図-1 (b)

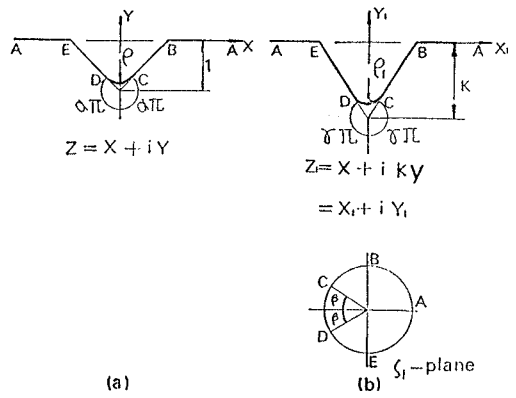


図-1 物理面 (z 平面) とアフィン変換して得られる座標面 (z_1 平面)

を得る。

以下平面弾性問題においては $k = \sqrt{E_x E_y}$ とおく。そしてさらに複素変数 $z_1 = x_1 + i y_1 = x + i k y$ を導入し, この z_1 平面の領域を単位円内部に等角写像する関数 $z_1 = \omega_1(\zeta_1)$ を作る。

次節で述べるように写像関数 $\omega_1(\zeta_1)$ が有理関数であれば, 等方性の平面弾性問題と同じようにこの場合も Fredholm の積分方程式を解くことなく多元一次連立方程式を解くことによって閉じた解を得ることができる。

図-1 (b) に示す z_1 平面の切欠きを有する半無限領域を単位円内部に等角写像する有理写像関数は, 今の場合隅角部角度 2π , 隅角部に曲線の付いていない場合の切欠き深さが k であることを考慮して, 文献 4) に示した有理写像関数と全く同様に作られる。

さらに後ほど解析に示す半楕円切欠きを有する半無限領域の場合は, 図-2 を参照して (a) に示すのが解析すべき領域, (b) に示すのが式 (2.2) のアフィン変換して得られる領域で, その切欠き深さは $k(b/a)$ となる。この z_1 平面の領域を ζ_1 平面の単位円内部に等角写像する有理写像関数は, 文献 5) と同様の方法で作るのならば

$$z_1 = \omega_1(\zeta_1) = -i \frac{1 + \zeta_1}{1 - \zeta_1} - i \frac{kb}{a} \frac{\sqrt{2}}{1 - \zeta_1}$$

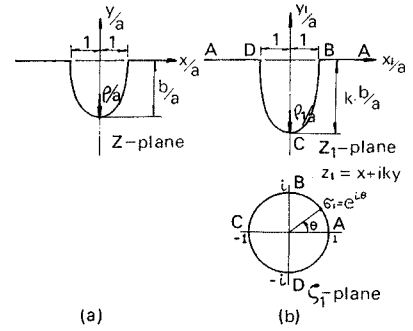


図-2 物理面 (z 平面) とアフィン変換して得られる座標面 (z_1 平面)

$$\cdot \left[\sum_{j=1}^{10} \left\{ \frac{-A_j}{1+\alpha_j \zeta_1^2} + A_j \right\} + 1 \right] \dots \dots \dots (2.4)$$

となる。ここに A_j, α_j は文献 4) 表-1 の値である。

上式は切欠き幅を一定にして深さを変えた場合であるが、切欠き深さを一定にして幅を変える写像関数の式は、上式右辺を b/a で除した式を用いればよい。

どちらかの写像関数での応力が求まれば、もう一方の写像関数での応力は簡単に求められる。

(2) 解 法

以下解法の概略とその結果式を述べよう。

複素変数 $z_1 = x_1 + iy_1 = x + ik y$ ($k = \sqrt{E_x/E_y}$) の正則な複素関数 $\varphi_1(z_1), \chi_1(z_1)$ を用いると、式 (2.3) の一般解は

$$F(x_1, y_1) = R_e[\bar{z}_1 \varphi_1(z_1) + \chi_1(z_1)]$$

である。ここに $R_e[]$ は $[]$ の実部を表わす。

さらに応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は、等方性の場合¹⁴⁾と同様にして

$$\begin{aligned} \sigma_x/k^2 + \sigma_y &= 2[\varphi_1'(z_1) + \overline{\varphi_1'(z_1)}] \\ \sigma_y - \sigma_x/k^2 + 2i\tau_{xy}/k &= 2[\bar{z}_1 \varphi_1''(z_1) + \psi_1'(z_1)] \end{aligned}$$

と表わされる。ここに $d\chi_1(z_1)/dz_1 = \psi_1(z_1)$ とおいてある。

また境界条件式は

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) + z_1 \overline{\varphi_1'(z_1)} + \overline{\psi_1(z_1)} \\ = \frac{\partial F}{\partial x_1} + i \frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{i}{k} \frac{\partial F}{\partial y} \\ = - \int p_y ds + \frac{i}{k} \int p_x ds \end{aligned}$$

となる。 p_x, p_y は境界線上 x, y 方向の単位長さ当りの外力、 s は境界線に沿う積分を表わす。

次に写像関数を用いた場合を述べよう。前節で述べた有理写像関数 $z_1 = \omega_1(\zeta_1)$ を用い、複素関数を

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &\equiv \varphi_1\{\omega_1(\zeta_1)\} \equiv \phi(\zeta_1) \\ \psi_1(z_1) &\equiv \Psi(\zeta_1) \\ \varphi_1'(z_1) &= \phi'(\zeta_1)/\omega_1'(\zeta_1) \end{aligned}$$

等と置き換えることにより応力成分や境界条件式を $\phi(\zeta_1), \Psi(\zeta_1)$ の関数で表わすことができる。

境界条件式は、 ζ_1 の単位円周上の値を $\sigma_1 = e^{i\theta}$ として

$$\begin{aligned} \phi(\sigma_1) + \frac{\omega_1(\sigma_1)}{\omega_1'(\sigma_1)} \overline{\phi'(\sigma_1)} + \overline{\Psi(\sigma_1)} \\ = i \int (p_x/k + i p_y) ds \equiv H(\sigma_1) \dots \dots \dots (2.5) \end{aligned}$$

と表わされる。

上式に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma_1}{\sigma_1 - \zeta_1}$ を乗じ単位円周上で積分すると

$$\begin{aligned} \phi(\zeta_1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega_1(\sigma_1)}{\omega_1'(\sigma_1)} \frac{\phi'(\sigma_1)}{\sigma_1 - \zeta_1} d\sigma_1 + \overline{\Psi(0)} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{H(\sigma)}{\sigma_1 - \zeta_1} d\sigma_1 \dots \dots \dots (2.6) \end{aligned}$$

となる。 \int_{γ} は単位円周上の積分を表わす。

これより複素関数 $\phi(\zeta_1), \Psi(\zeta_1)$ は、等方性の場合¹⁵⁾¹⁶⁾と同じようにして求められる。その結果式は次のようである。今の場合前項に述べた有理写像関数式は、これを部分分数に分解すると

$$\omega_1(\zeta_1) = \frac{E_{10}}{1 - \zeta_1} + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_{1k} - \zeta_1} + \text{定数項} \dots \dots \dots (2.7)$$

の形に書き表わされる。ここに、 n は 1 次分数式の個数で、たとえば式 (2.4) の場合は $n=20$ である。

求める複素関数 $\phi(\zeta_1)$ は、式 (2.6) より写像関数式 (2.7) が有理関数であることを考慮し、コーシーの積分定理を用いると

$$\phi(\zeta_1) + \sum_{k=1}^n \frac{\bar{C}_k \bar{A}_{k0} \zeta_{1k}^2}{\zeta_{1k} - \zeta_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{H(\sigma_1)}{\sigma_1 - \zeta_1} d\sigma_1 \dots \dots \dots (2.8)$$

と求められる。ここに、 C_k は $C_k = \bar{E}_k \zeta_{1k}^2 / \omega_1'(\zeta_{1k})$ であり、上式には定数項は応力の計算には無関係であるから省略してある。また未定複素定数 A_{k0} は、単位円内で正則な複素関数 $\phi(\zeta_1)$ の 1 次導関数 $\phi'(\zeta_1)$ を、 ζ_{1k} の単位円に対する鏡映の位置 $\zeta_{1k}' (= 1/\bar{\zeta}_{1k})$ でテーラー展開したときの第 1 項目の定数項を表わし

$$\phi'(\zeta_{1k}') = A_{k0}$$

である。

これより式 (2.8) の両辺を ζ_1 に関して 1 回微分し、 $\zeta_1 = \zeta_{1k}' (k=1 \sim n)$ を代入すると未定定数 A_{k0}, \bar{A}_{k0} に関する連立 1 次方程式を得る。

この連立方程式を実部、虚部に分解することによって、今の場合 $2n$ 元 1 次の連立方程式を得る。対称性の利用できるときは、 n 元 1 次の連立方程式にできる。

$\phi(\zeta_1)$ が求まれば、式 (2.5) の共役な式にコーシーの積分を行うことにより、 $\Psi(\zeta_1)$ は

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{H(\sigma_1)}}{\sigma_1 - \zeta_1} d\sigma_1 - \frac{\bar{\omega}_1(1/\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)} \phi'(\zeta_1) \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{C_k A_{k0}}{\zeta_1 - \zeta_{1k}'} \end{aligned}$$

と求まる。ここでも定数項は省略してある。

また、 x, y 座標応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を、境界線に沿う応力成分を求めたりするのに便利な、 $z_1 = \omega_1(\zeta_1)$ が表わす直交曲線座標応力成分 $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$ に変換するには、

$$\begin{aligned} \sigma_\rho + \sigma_\theta &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} &= e^{2i(n,x)} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \end{aligned}$$

を用いればよい。ここに (n, x) は曲線の法線と x 軸とのなす角で

$$e^{2i(n,x)} = \frac{\{(1+k)\omega_1'\zeta_1 + (1-k)\overline{\omega_1'\zeta_1}\}^2}{\{\omega_1'\zeta_1 + \overline{\omega_1'\zeta_1}\}^2 - k^2(\omega_1'\zeta_1 - \overline{\omega_1'\zeta_1})^2} \dots \dots \dots (2.9)$$

である⁵⁾。

(3) 計算例

(1) の写像関数の節でも述べたように、三角形切欠きや半楕円切欠きを有する半無限板に面内荷重の作用した場合の計算例を示そう。

作用する外力としては最も一般的と思われる x 方向一様引張りを考える。

この場合の求める複素応力関数を

$$\phi(\zeta_1) = \phi_0(\zeta_1) + \phi_1(\zeta_1)$$

$$\Psi(\zeta_1) = \Psi_0(\zeta_1) + \Psi_1(\zeta_1)$$

とし、 $\phi_1(\zeta_1)$ 、 $\Psi_1(\zeta_1)$ は大きさ p の x 方向一様引張りの応力場を表わすものとする

$$\phi_1(\zeta_1) = \omega_1(\zeta_1) \cdot p/4k^2$$

$$\Psi_1(\zeta_1) = -\omega_1(\zeta_1) \cdot p/2k^2$$

となる。したがって、今の場合境界線上に外力は作用していないから、式 (2.5) を多少の変形の のち $\phi_0(\zeta_1)$ 、 $\Psi_0(\zeta_1)$ は

$$\begin{aligned} \phi_0(\sigma_1) + \frac{\omega_1(\sigma)}{\omega_1'(\sigma_1)} \overline{\phi_0'(\sigma_1) + \Psi_0(\sigma_1)} \\ = -\frac{p}{2k^2} \{ \omega_1(\sigma_1) - \overline{\omega_1(\sigma_1)} \} \end{aligned}$$

より求めればよい。単位円周上 $\zeta_1=1$ が極であることに注意して上式右辺にコーシーの積分を適用し、得られる関数を $A(\zeta_1)$ とすると

$$A(\zeta_1) = -\frac{p}{2k^2} \left\{ \omega_1(\zeta_1) + \frac{\bar{E}_{10} - E_{10}}{2(1-\zeta_1)} \right\}$$

である。 E_{10} は式 (2.7) の $1/1-\zeta_1$ の係数である。

図-3 には、隅角部角度 $2\alpha\pi=360^\circ$ 、 $E_x/E_y=2$ の U 字形の切欠きの場合の境界線に沿う縁応力および対称軸上の σ_x 、 σ_y の応力分布を示す。

図-4 には、 $b/a=0.5$ の半楕円切欠きの場合で、 $E_x/E_y=0.1, 1$ (等方性), 10 の場合の応力分布を示す。 E_x/E_y の値により応力分布にかなりの違いがある。 E_x/E_y の大きいほど切欠き底の応力の値は大きい。また $E_x/E_y=0.1$ の場合の最大応力の生じる位置は切欠き

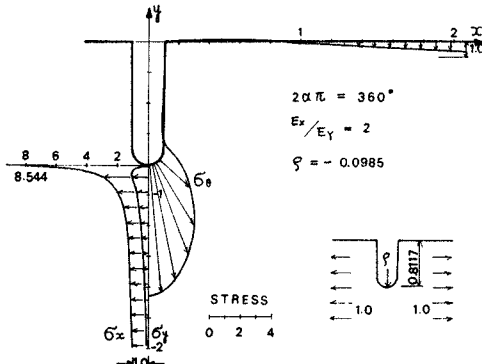


図-3 境界線上および対称軸上の応力

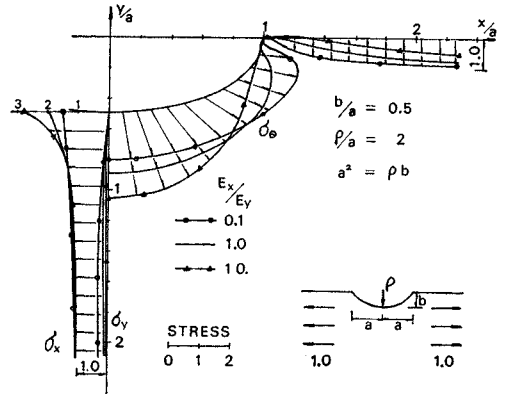


図-4 境界線上および対称軸上の応力

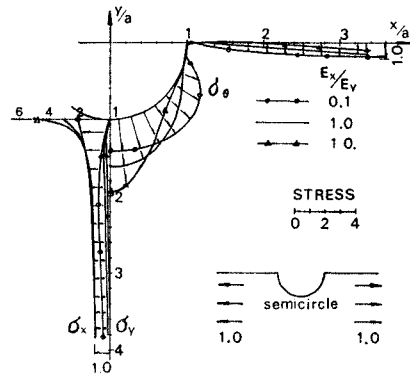


図-5 境界線上および対称軸上の応力

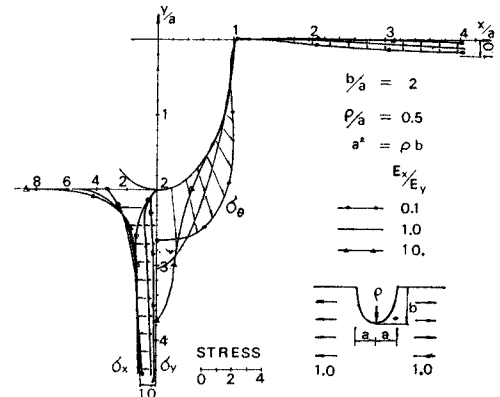


図-6 境界線上および対称軸上の応力

底でなく、別の位置に移動しているのがわかる。これは $E_x/E_y < 1$ のときアフィン変換して得られる z_1 平面の半楕円形状が、偏平な半楕円形となり、最小曲率の位置が切欠き底でなくなるためと思われる。突起部付近には小さな圧縮応力が生じている。

図-5 は半円切欠きの場合を示し、表-1 にはその応力値を示す (等方性の場合文献 5) 参照)。

$E_x/E_y=0.1$ の場合は、最大応力の発生位置は切欠き底以外の位置に移動しているが、 $E_x/E_y=0.2$ の場合を

表一 一様引張り（または曲げ）をうける半円切欠きを有する半無限板の応力分布

上段の値 E_x/E_y (or D_x/D_y)=0.1 の場合
 下段の値 E_x/E_y (or D_x/D_y)=10.0 の場合
 * ポアソン比 $\nu_x=\nu_y=0$ の場合

θ ラジアン	曲率半径 ρ/a	座 標		σ_θ	M_θ^*
		x/a	y/a		
π	-1.0000	0.0	-1.0	2.145	1.376
	-1.0000	0.0		4.738	2.192
2.9	-1.0000	0.1214	-0.9926	2.153	1.363
	-1.0000	0.1214		4.358	2.153
2.5	-0.9999	0.3323	-0.9432	2.204	1.278
	-0.9999	0.3323		2.613	1.864
2.0	-0.9999	0.6421	-0.7666	2.283	0.963
	-1.0004	0.6421		0.589	1.027
1.7	-1.0011	0.8785	-0.4778	1.652	0.563
	-0.9975	0.8785		0.029	0.375
1.59	-1.0948	0.9809	-0.1940	0.093	0.599
	-1.2558	0.9809		-0.021	0.115
1.578	-0.9547	0.9929	-0.1195	-0.089	0.593
	-0.8457	0.9931		-0.011	0.076
$\pi/2$	0.0169	1.0029	-0.0051	-0.001	0.176
	0.0303	1.0091		0.0003	0.043
1.56	-52.743	1.0939	-0.0001	-0.018	0.461
	-0.321×10^3	1.2734		-0.043	0.328
1.55	4.3168	1.1368	0.0001	0.016	0.552
	0.295×10^3	1.3873		-0.058	0.409
1.20	0.440×10^4	2.0612	0.0000	0.696	0.927
	0.168×10^3	3.3575		0.435	0.883
0.60	-0.129×10^7	4.9615	"	0.950	0.989
	-0.420×10^7	8.6995		0.889	0.983
0.20	-0.176×10^9	15.5430	"	0.995	0.999
	-0.559×10^9	27.6007		0.988	0.998
0.10	-0.835×10^9	31.2067	"	0.999	1.000
	-0.264×10^{10}	55.4748		0.997	1.000
ζ	y/a	σ_x	σ_y	M_x	M_y
-1.0	-1.0	2.145	0.0	1.376	0.0
	-1.0	4.738	0.0	2.192	0.0
-0.85	-1.1475	1.931	0.268	1.359	-0.092
	-1.0489	3.581	0.149	2.110	-0.049
-0.70	-1.3293	1.725	0.488	1.334	-0.166
	-1.1147	2.754	0.219	1.970	-0.070
-0.30	-2.0933	1.280	0.722	1.227	-0.233
	-1.4386	1.560	0.202	1.519	-0.059
0.001	-3.1975	1.095	0.553	1.128	-0.166
	-1.9791	1.198	0.125	1.249	-0.033
0.40	-6.6879	1.011	0.201	1.035	-0.052
	-3.8507	1.030	0.042	1.060	-0.009
0.60	-11.2362	1.002	0.082	1.013	-0.020
	-6.3725	1.007	0.017	1.021	-0.003

調べてみると切欠き底に生じている。 $E_x/E_y=0.1\sim 0.2$ の間で最大応力の発生位置は切欠き底よりずれるようになる。

図-6 は $b/a=2$ の場合の応力分布を示す。

(4) 応力集中

平面弾性問題における等方性弾性体の応力集中係数(S.C.F.)は、隅角部角度から求められる特性方程式の根 m_j および隅角部の曲率半径 ρ をもって

$$S.C.F. = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \rho^{m_j} \dots \dots \dots (2.10)$$

と表わされることを示したり。

本論文で扱う Case II の場合の直交異方性弾性体についても同様の考え方で応力集中係数の表示式を得ることができる。

隅角部における応力の order を p 、隅角部角度 $2\alpha\pi$ は式 (2.2) によるアフィン変換によって $2r\pi$ になったとする。このとき隅角部付近に外力の作用していない自由境界の場合の p を決める特性方程式として、等方性の場合⁴⁾と同様にして類似の式

$$(p+1) \sin 2r + \sin 2(p+1)r = 0 \dots \dots \dots (2.11)$$

$$(p+1) \sin 2r - \sin 2(p+1)r = 0 \dots \dots \dots (2.12)$$

を得る。ここに式 (2.11) は隅角部の 2 等分線に対称な応力状態の場合に、式 (2.12) は逆対称な応力状態の場合に成り立つ。

また、図-1 に示すようにアフィン変換して得られる隅角部の曲率半径を ρ_1 とすると、等方性の場合の解法との類似より応力集中係数は

$$S.C.F. = \sum_{j=1}^{\infty} k_j (\rho_1/k)^{p_j} \dots \dots \dots (2.13)$$

と表わされる (() 内の k は図-1 (b) を参照してアフィン変換して得られる切欠き深さが k になっていることによる)。

さらに式 (2.9) より切欠き底の曲率半径の間には

$$\rho = k \rho_1 \dots \dots \dots (2.14)$$

の関係がある。

したがって、Case II の場合の応力集中係数は、式 (2.13)、(2.14) より

$$S.C.F. = \sum_{j=1}^{\infty} k_j (\rho/k^2)^{p_j} \dots \dots \dots (2.15)$$

となる。

また等方性の解法との対応より上式中の k_j は、角度 $2r\pi$ が $2\alpha\pi$ に同じである等方性の場合の式 (2.10) の k_j と同じであることが考察される。

このことは等方性と直交異方性の縦せん断の問題における応力集中係数表示の関係⁵⁾に類似している。

したがって、アフィン変換して得られる形状と同じ形状の等方性弾性体の応力集中係数表示式が求まっていれば、Case II の場合の応力集中係数値は簡単に計算されることになる。

前節(3) 計算例で示した半楕円切欠きを有する半無限板が一様引張りを受ける場合の応力集中係数表示式を示してみよう。

今の場合隅角部角度は 360° であるから、アフィン変換して得られる隅角部角度は 360° である。また隅角部 2 等分線に対称な応力状態の場合の特性方程式 (2.11) の根 p は

$$p_j = 0.5j - 1 \quad (j=1, 2, \dots)$$

また、今切欠き深さが b であることを考慮すると、一般式 (2.15) は

$$S.C.F. = \sum_{j=1}^{\infty} k_j (\rho/k^2 b)^{0.5j-1} \dots \dots \dots (2.16)$$

となる。

ここで k_j は等方性の場合の半楕円切欠きに対して求められている k_j に同じである。

今上式の第3項および第4項まで採ったときの表示式

$$S.C.F. = k_1 \sqrt{k^2 b / \rho} + k_2 + k_3 \sqrt{\rho / k^2 b} \dots\dots (2.17)$$

$$S.C.F. = k_1 \sqrt{k^2 b / \rho} + k_2 + k_3 \sqrt{\rho / k^2 b} + k_4 \cdot \rho / k^2 b \dots\dots\dots (2.18)$$

を考えてみよう。ここに、 $k_1 \sim k_4$ の値として等方性の場合に求められている文献 5) 表-5 の値を用いよう。

この値は今一度表-2 に掲げる。

表-3 にはいく通りかの E_x/E_y の値および切欠き深さに対する応力集中係数の値、式 (2.17)、(2.18) の値およびその誤差を示す。

ほぼ 1~2% 以内の誤差で表わされていること、式 (2.17) より式 (2.18) の方が精度のよいことがわかる。 ρ/b の値が大きいかほど、 k の値が小さいほど多くの項を採る必要がある。

表-2 式 (2.17)、(2.18) の係数

	k_1	k_2	k_3	k_4
式 (2.16)	2.2105	0.8161	0.0332	—
式 (2.16)	2.2237	0.7160	0.1288	-0.0162

表-3 一様引張りの場合の応力集中係数と式 (2.16)、(2.17) の計算値とその誤差

b/a	ρ/b	E_x/E_y	応力集中		誤差%		誤差%	
			式(2.17) (1)	式(2.17) (2)	(1)-(2) (1)	式(2.18) (3)	(1)-(3) (1)	(2)-(3) (1)
0.4	6.25	0.5	1.679	1.658	1.25	1.704	-1.45	
		1.0	1.810	1.783	1.46	1.826	-0.91	
		2.0	1.966	1.937	1.44	1.973	-0.37	
0.8	1.5625	0.5	2.375	2.353	0.96	2.368	0.32	
		1.0	2.642	2.626	0.62	2.361	0.44	
		2.0	2.962	2.954	0.27	2.949	0.44	
1.0	1.0	0.5	2.729	2.714	0.52	2.716	0.46	
		1.0	3.065	3.060	0.18	3.052	0.42	
		2.0	3.469	3.473	-0.12	3.457	0.33	
2.0	0.25	0.5	4.529	4.553	-0.54	4.527	0.06	
		1.0	5.220	5.254	-0.64	5.224	-0.06	
		2.0	6.047	6.088	-0.67	6.056	-0.15	
4.0	0.0625	0.5	8.214	8.261	-0.57	8.233	-0.22	
		1.0	9.622	9.666	-0.46	9.642	-0.20	
		2.0	11.302	11.338	-0.32	11.320	-0.16	

3. 薄板の面外曲げの問題としての解析

薄板の面外曲げの解析は、数学的には平面弾性問題の場合と同じように解析される。

曲げ剛性の主軸の方向と座標軸が一致する場合、板のたわみ $w(x, y)$ に関する基礎微分方程式は

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_x \nu_y + 2 D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \dots\dots\dots (3.1)$$

ここに、 D_x, D_y は主軸方向曲げ剛さ、 D_{xy} はねじり剛さ、 ν_x, ν_y は曲げに関するポアソン比で、Maxwell の相反定理より $\nu_x/D_x = \nu_y/D_y$ 、 $q(x, y)$ は板に垂直に作用する単位面積当りの荷重である。

ここにおいてこれらの弾性定数の間に

$$D_x \nu_y + 2 D_{xy} = \sqrt{D_x D_y} \dots\dots\dots (3.2)$$

なる関係のあるとき

$$x_1 = x, \quad y_1 = \sqrt{D_x/D_y} y \dots\dots\dots (3.3)$$

なる変数変換を行うと、微分方程式 (3.1) は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y_1^4} = q(x_1, y_1) \dots\dots (3.4)$$

となる。 $q(x_1, y_1)$ は $q(x, y)$ を式 (3.3) より引数 x_1, y_1 で表わしたものとす。

本章では、関係式 (3.2) が成立する直交異方性薄板の問題を扱う。したがって、平面弾性問題の場合と同じようにその数学的取扱いは等方性の場合に準じたものになる。Huber はこのような Case II の場合のく形板の最大たわみや曲げモーメントなどについて詳細に研究している^{11,18)}。また以下では $q=0$ の場合、したがって荷重は境界線上にのみ作用する場合を論ずる。 $q \neq 0$ の場合は、たわみ w に q による特解を加えて扱えばよい。

(1) 解法

以下必要な式を掲げる。

薄板の面外曲げの問題においては $k = \sqrt{D_x/D_y}$ として、式 (3.3) に示す x_1, y_1 を用いて複素変数

$$z_1 = x_1 + i y_1 = x + i k y$$

を導入し、正則な複素関数 $\varphi_1(z_1), \chi_1(z_1)$ を用いると、式 (3.4) ($q=0$ のとき) の一般解は

$$w(x_1, y_1) = R_0 [\bar{\varphi}_1 \varphi_1(z_1) + \chi_1(z_1)]$$

である。

曲げモーメントは

$$\begin{aligned} M_x &= -D_x (w_{,xx} + \nu_y w_{,yy}) \\ &= -D_x (w_{,x_1 x_1} + \nu_y k^2 w_{,y_1 y_1}) \\ M_y &= -D_y (w_{,yy} + \nu_x w_{,xx}) \\ &= -D_x / k^2 (w_{,y_1 y_1} + \nu_y k^2 w_{,x_1 x_1}) \end{aligned}$$

ねじりモーメントは

$$H_{xy} = -2 D_{xy} w_{,xy} = -D_x (1 - k^2 \nu_y) / k w_{,x_1 y_1}$$

せん断力

$$\begin{aligned} N_x &= -(D_x w_{,xx} + D_{xy} w_{,yy})_{,x} \\ &= -D_x (w_{,x_1 x_1} + w_{,y_1 y_1})_{,x_1} \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} D_3 &= D_x \nu_y + 2 D_{xy} = \sqrt{D_x D_y} \quad (\text{式 (3.2) より}) \\ N_y &= -(D_3 w_{,xx} + D_{xy} w_{,yy})_{,y} \\ &= -D_x / k (w_{,x_1 x_1} + w_{,y_1 y_1})_{,y_1} \end{aligned}$$

である。ここに $w_{,xx}$ 等は $\partial^2 w / \partial x^2$ 等を表わす。

以上の式を見てわかるように、応力成分の式は曲げ剛

さ D_x , ポアソン比 $k^2\nu_y (= \nu_x/k^2)$ を有する等方性の式に類似していることがわかる。

等方性の式¹⁷⁾との類似より応力成分は複素関数を用いて、

$$\begin{aligned} k^2M_y - M_x + 2ikH_{xy} &= 2D_x(1-k^2\nu_y)[\bar{z}_1\phi_1''(z_1) + \psi_1'(z_1)] \\ M_x + k^2M_y &= -2D_x(1+k^2\nu_y)[\phi_1'(z_1) + \overline{\phi_1'(z_1)}] \\ &\dots\dots\dots(3.5) \end{aligned}$$

$$N_x - ikN_y = -4D_x\phi_1''(z_1)$$

と表わされる。ここに、 $dx_1(z_1)/dz_1 = \psi_1(z_1)$ とおいてある。

境界条件式は

$$\begin{aligned} -\frac{3+k^2\nu_y}{1-k^2\nu_y}\phi_1(z_1) + z_1\phi_1'(z_1) + \overline{\psi_1(z_1)} &= f_1 + if_2 \\ &\dots\dots\dots(3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 + if_2 &= \frac{1}{D_x(1-k^2\nu_y)} \int_0^s [m(s) + i \int_0^s p(s) ds] \\ &\cdot (dx_1 + idy_1) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $m(s)$ は、境界線に沿う単位長さ当りの曲げモーメント、 $p(s)$ は単位長さ当りの置換せん断力を表わす。

2.(1) で述べた写像関数(ただし、この場合 $k = \sqrt{D_x/D_y}$) を用い、

$$\phi_1(z_1) = \phi_1\{\omega_1(\zeta_1)\} \equiv \phi(\zeta_1), \quad \psi_1(z_1) \equiv \Psi(\zeta_1)$$

等と置き換えることにより、応力成分の式(3.5)、境界条件式(3.6)を $\phi(\zeta_1), \Psi(\zeta_1)$ で表わすことができる。境界条件式から複素関数 $\phi(\zeta_1), \Psi(\zeta_1)$ は、数学的には平面弾性問題の場合と全く同じようにして求められる。

また曲線座標応力成分 M_ρ, M_θ 等を求めるには

$$\begin{aligned} M_\rho + M_\theta &= M_x + M_y \\ M_\theta - M_\rho + 2iH_{\rho\theta} &= e^{2i(n,x)}(M_y - M_x + 2iH_{xy}) \\ N_\rho - iN_\theta &= e^{i(n,x)}(N_x - iN_y) \end{aligned}$$

を用いればよい。ここに $e^{2i(n,x)}$ は式(2.9)である。

(2) 計算例

最も基本的な外力と考えられる x 方向無限遠で大きさ M の一様曲げモーメントが作用する場合を考える。

求めたい複素関数を

$$\begin{aligned} \phi(\zeta_1) &= \phi_0(\zeta_1) + \phi_1(\zeta_1) \\ \Psi(\zeta_1) &= \Psi_0(\zeta_1) + \Psi_1(\zeta_1) \end{aligned}$$

とする。ここに、 $\phi_1(\zeta_1), \Psi_1(\zeta_1)$ は x 方向無限遠での一様曲げを表わし、式(3.5)から簡単に

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta_1) &= -\frac{M\omega_1(\zeta_1)}{4D_x(1+k^2\nu_y)} \\ \Psi_1(\zeta_1) &= -\frac{M\omega_1(\zeta_1)}{2D_x(1-k^2\nu_y)} \end{aligned}$$

である。境界上に外力の作用していないことより、複素関数 $\phi_0(\zeta_1), \Psi_0(\zeta_1)$ は、

$$\begin{aligned} &-\frac{3+k^2\nu_y}{1-k^2\nu_y}\phi_0(\sigma_1) + \frac{\omega_1(\sigma_1)}{\omega_1'(\sigma_1)}\overline{\phi_0'(\sigma_1)} + \overline{\Psi_0(\sigma_1)} \\ &= -\frac{M}{2D_x(1-k^2\nu_y)}\{\omega_1(\sigma_1) - \overline{\omega_1(\sigma_1)}\} \end{aligned}$$

より求めればよい。

図-7 には $2\alpha\pi = 360^\circ, D_x/D_y = 2, \nu_x = \nu_y = 0$ および

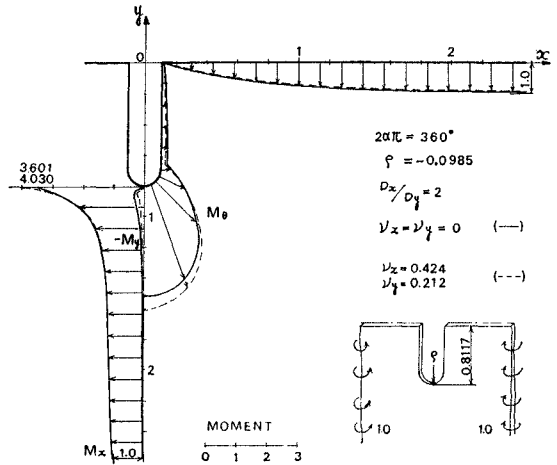


図-7 境界線上および対称軸上の曲げモーメント

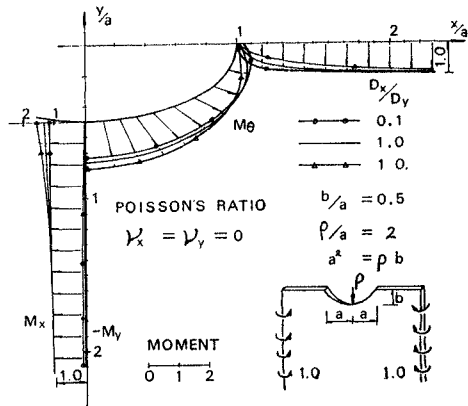


図-8 境界線上および対称軸上の曲げモーメント

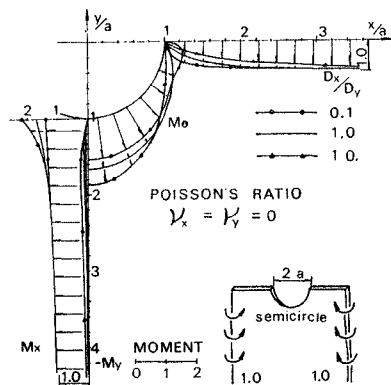


図-9 境界線上および対称軸上の曲げモーメント

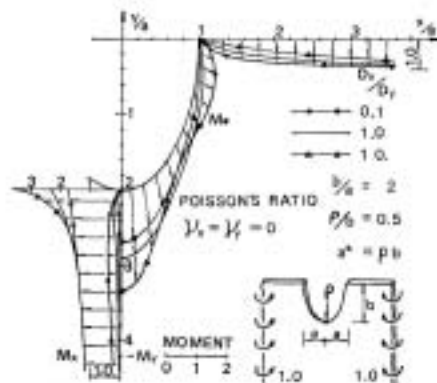


図-10 境界線上および対称軸上の曲げモーメント

$\nu_x=0.424$, $\nu_y=0.212$ ($k^2\nu_y=0.3$) の場合の対称軸上および境界線に沿う線曲げモーメントを示す。

図-8, 9, 10 にはそれぞれ $b/a=0.5, 1$ (半円切欠き), 2 の切欠き深さで $D_2/D_1=0.1, 1, 10$, ポアソン比 $\nu_x=\nu_y=0$ の場合の対称軸上の曲げモーメント M_x, M_y , 境界線に沿う曲げモーメント M_b を示す。 $D_2/D_1=0.1$ で突起部付近の M_b が少し大きくなっている。 D_2/D_1 が大きいほど切欠き底の最大曲げモーメントは大きい。

表-1 には $b/a=1$, $D_2/D_1=0.1, 10$, $\nu_x=\nu_y=0$ の場合の曲げモーメントの値を示す。

(3) 応力集中

等方性薄板の面外曲げにおける応力集中係数も、曲率半径 ρ , 面外曲げの問題における特性方程式の根 m を用いて式 (2.10) と同様の形

$$S.C.F. = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \rho^{m_j} \dots \dots \dots (3.7)$$

と表わされることを示した⁹⁾。

本論文で扱っている式 (3.2) を満足する Case II の直交異方性薄板の応力集中係数も同様に導くことができる。

図-1 を参照して、もとの隅角部角度を 2α , 式 (3.3) のアフィン変換して得られる隅角部角度を $2r\pi$, 応力の order を ρ で表わし, (1) の解法で述べたように等方性の場合のポアソン比と $k^2\nu_y$ とが対応していることに注目すると, 隅角部付近に外力の作用していないときの ρ を定める特性方程式は次のようになる。

隅角部 2 等分線に対称な応力状態の場合として

$$(3+k^2\nu_y)\sin 2(\rho+1)r\pi - (\rho+1)(1-k^2\nu_y)\sin 2r\pi = 0 \dots \dots \dots (3.8)$$

逆対称な応力状態の場合は

$$(3+k^2\nu_y)\sin 2(\rho+1)r\pi + (\rho+1)(1-k^2\nu_y)\sin 2r\pi = 0 \dots \dots \dots (3.9)$$

を得る。

上式より求められる ρ , アフィン変換して得られる隅

角部の曲率半径 ρ_s , 切欠き深さが k であることを考慮すると応力集中係数 (S.C.F.) は

$$S.C.F. = \sum_{j=1}^{\infty} k_j (\rho_s/k)^{m_j}$$

と表わされ, さらに式 (2.14) の関係を用いると

$$S.C.F. = \sum_{j=1}^{\infty} k_j (\rho/k^2)^{m_j} \dots \dots \dots (3.10)$$

となる。

上式中の k_j も $2r\pi$ が 2α と同じである等方性の場合の式 (3.7) の k_j と同じである。

今節節の計算例で示した半楕円切欠きを有する半無限板が一様面外曲げを受ける場合の応力集中係数について考察してみよう。

この場合は隅角部の 2 等分線に対称な応力状態であるから, 特性根 ρ は式 (3.8) の根で, $2r\pi=360^\circ$ より $k^2\nu_y$ の値に関係なく

$$\rho_j = 0.5j - 1 \quad (j=1, 2, 3, \dots)$$

である。

また切欠き深さ b を考慮すると応力集中係数表示式 (3.10) は今の場合

$$S.C.F. = \sum_{j=1}^{\infty} k_j (\rho/k^2 b)^{0.5j-1} \dots \dots \dots (3.11)$$

となる。

ここで等方性の場合の式 (3.7) の第 3 項まで採った応力集中係数の表示式

$$S.C.F. = k_1 \sqrt{\frac{b}{\rho}} + k_2 + k_3 \sqrt{\frac{\rho}{b}} \dots \dots \dots (3.12)$$

を考えてみよう。ポアソン比 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 の各場合について, いく通りかの ρ/b に対する応力集中係数の値より誤差の最小 2 乗法によって係数 k_1, k_2, k_3 を決めると表-4 の値を得る。

式 (3.11) の第 3 項まで採った式

$$S.C.F. = k_1 \sqrt{\frac{k^2 b}{\rho}} + k_2 + k_3 \sqrt{\frac{\rho}{k^2 b}} \dots \dots \dots (3.13)$$

より S.C.F. を計算するには, たとえば $k^2\nu_y=0$ のときは表-4 のポアソン比 0 の場合の k_1, k_2, k_3 の値を, $k^2\nu_y=0.1$ の場合はポアソン比 0.1 の場合の係数を用いればよい。 $k^2\nu_y$ が 0.0 と 0.1 の中間の値に対しては, S.C.F. とポアソン比の関係は, ほぼ直線的な関係にあるから, 内そうすることによって求めればよい。

表-5 には, $k^2\nu_y=0$ すなわち, $\nu_x=\nu_y=0$ および

表-4 式 (3.12) の係数

ポアソン比	k_1	k_2	k_3
0.0	0.6733	0.9660	0.0009
0.1	0.7150	0.9660	0.0007
0.2	0.7541	0.9660	0.0005
0.3	0.7910	0.9676	0.0004
0.4	0.8256	0.9683	0.0003
0.5	0.8587	0.9688	0.0002

表一五 一様曲げの場合の応力集中係数と式 (3.13) の計算値とその誤差

b/a	ρ/b	D _x /D _y	√D _x /D _y ・ν _y =0, (ν _x =ν _y =0)			√D _x /D _y ・ν _y =0.3				
			応力集中 (1)	式 (3.13) (2)	誤差 % (1)-(2) / (1)	ν _x	ν _y	応力集中 (3)	式 (3.13) (4)	誤差 % (3)-(4) / (3)
0.4	6.25	0.5	1.2245	1.2241	0.03	0.212	0.424	1.2651	1.2649	0.02
		2.0	1.3177	1.3172	0.04					
0.8	1.5625	0.5	1.4497	1.4493	0.03	0.212	0.424	1.3506	1.3503	0.02
		2.0	1.6365	1.6365	0.00					
1.0	1.0	0.5	1.5624	1.5622	0.01	0.212	0.424	1.6634	1.6632	0.01
		2.0	1.7962	1.7964	-0.01					
2.0	0.25	0.5	2.1272	2.1279	-0.03	0.212	0.424	2.3279	2.3281	-0.01
		2.0	2.5957	2.5968	-0.04					
4.0	0.0625	0.5	3.2588	3.2600	-0.04	0.212	0.424	3.6578	3.6583	-0.01
		2.0	4.1970	4.1980	-0.02					

k²ν_y=0.3 の場合の式 (3.13) の精度を示す例を掲げる。

誤差 0.05% 以下で十分よい精度であることがわかる。ρ/b の値が大きいくほど、k の値が小さいほど誤差は大きくなり、式 (3.11) の項を多く採る必要がある。しかしこの場合は第3項までも採れば十分であろう。

平面弾性問題の場合の式 (2.17), (2.18) に比べれば式 (3.13) の収束はかなり速い。

等方性の場合に限定して、応力集中係数表示式についてさらに考えをすすめてみよう。

式 (3.7) の係数 k_j は、境界条件やポアソン比等によって決められる値であるから、今ポアソン比に注目すると

$$k_j = k_{j0} + k_{j1}\nu + k_{j2}\nu^2 + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} k_{jl}\nu^l$$

と表わされるであろう。ここに ν はポアソン比である。したがって式 (3.7) は

$$S.C.F. = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} k_{jl}\nu^l \rho^m \dots \dots \dots (3.14)$$

となる。

今式 (3.14) を半楕円切欠きを有する半無限板の一樣曲げの場合を例にして述べてみよう。

式 (3.14) の l=1, j=3 まで採った場合

$$S.C.F. = (k_{10} + k_{11}\nu) \sqrt{b/\rho} + (k_{20} + k_{21}\nu) + (k_{30} + k_{31}\nu) \sqrt{\rho/b} \dots \dots \dots (3.15)$$

および l=2, j=3 まで採った場合

$$S.C.F. = (k_{10} + k_{11}\nu + k_{12}\nu^2) \sqrt{b/\rho} + (k_{20} + k_{21}\nu + k_{22}\nu^2) + (k_{30} + k_{31}\nu + k_{32}\nu^2) \sqrt{\rho/b} \dots \dots (3.16)$$

のおのおの場合で考えてみる。

式 (3.15) の k₁₀, k₂₀, k₃₀ は、ν=0 のときの値であるから表一四のポアソン比 0 の場合の k₁, k₂, k₃ の値にそれぞれ対応する。k₁₁, k₂₁, k₃₁ の値を表一四の ν=0.5 の場合から決めると、すなわち

$$k_{j1} = (k_j - k_{j0})/0.5 \quad (j=1, 2, 3)$$

表一六 式 (3.15) の係数

k ₁₀ =0.6733	k ₂₀ =0.9950	k ₃₀ =0.0009
k ₁₁ =-0.3708	k ₂₁ =0.0076	k ₃₁ =-0.0014

表一七 一様曲げの場合の応力集中係数と式 (3.15), (3.16) の計算値とその誤差

b/a	ρ/b	ポアソン比	式 (3.15)		式 (3.16)		
			応力集中 (1)	誤差 % (1)-(2) / (1)	応力集中 (3)	誤差 % (1)-(3) / (1)	
0.4	6.25	0.2	1.3003	1.2971	0.25	1.2998	0.035
		0.3	1.3153	1.3123	0.23	1.3150	0.023
		0.4	1.3296	1.3275	0.15	1.3294	0.014
0.8	1.5625	0.2	1.6010	1.5953	0.36	1.6007	0.022
		0.3	1.6311	1.6255	0.34	1.6309	0.010
		0.4	1.6594	1.6558	0.22	1.6594	0.001
1.0	1.0	0.2	1.7516	1.7446	0.40	1.7513	0.014
		0.3	1.7891	1.7823	0.38	1.7890	0.002
		0.4	1.8244	1.8200	0.24	1.8245	-0.006
2.0	0.25	0.2	2.5049	2.4918	0.53	2.5050	-0.002
		0.3	2.5794	2.5666	0.50	2.5798	-0.014
		0.4	2.6497	2.6415	0.31	2.6503	-0.020
4.0	0.0625	0.2	4.0129	3.9865	0.66	4.0126	0.008
		0.3	4.1612	4.1356	0.62	4.1617	-0.010
		0.4	4.3011	4.2846	0.38	4.3020	-0.021

表一八 式 (3.16) の係数

k ₁₀	0.6733	k ₂₀	0.9950	k ₃₀	0.0009
k ₁₁	0.4245	k ₂₁	0.0106	k ₃₁	-0.0021
k ₁₂	-0.1073	k ₂₂	-0.0060	k ₃₂	0.0013

で表一六となる。こうして決めた係数を用いて式 (3.15) の表わす精度を表一七に示す。

その誤差は ν=0.2 や 0.3 の誤差の大きくでるところでさえ 0.6~0.7% 程度である。ν=0, 0.5 の場合の誤差は文献 5) の表一六に示す。

式 (3.15) は、S.C.F. がポアソン比に対してほぼ線的に変化する⁵⁾ということに対応している。

同様にして表一四の ν=0, 0.3, 0.5 の係数 k₁, k₂, k₃ の値をもとにして式 (3.16) の係数を決めると表一八になる。式 (3.16) は、S.C.F. とポアソン比の関係を放物線形とみなしたことになる。

表一七には式 (3.16) の精度を示す。

式 (3.15) よりはるかに精度のよいのがわかる。

さらに本論文で扱った Case II の直交異方性の場合には、式 (3.15), (3.16) におけるポアソン比 ν の代わりに $k^2\nu_y (= \nu_x/k^2)$, ρ/b の代わりに ρ/k^2b を入れ換えた式を用いればよい。

4. 結 語

得られた主な結果や問題点、今後の研究点などについて述べてみよう。

本論文で扱った式 (2.1) や式 (3.2) を厳密に満足する Case II の場合の直交異方性弾性体は、材料的な異方性また構造的な異方性において、それに遭遇する場合は多くないと思われる。

しかし式 (2.1) や式 (3.2) を厳密に満足していなくても弾性定数の間の関係がこれらに近い関係にある直交異方性弾性体については、Case II の場合の解法が、解析的にあまり行われていない比較的任意の形状の Case I, III の直交異方性に対する次善の解として用いられ得るかもしれない。

しかしそれには式 (2.1) や式 (3.2) の関係の満足度と実際の解のずれとの相関関係をもっと調べ、Case I や Case III の直交異方性に対する Case II の解法の適用範囲を見出すことが必要である。しかしこのことについてはさらに今後の研究としたい。

また等方性とみなされないような弾性体でも解法上の問題から等方性として解析する場合がしばしばあると思われるが、等方性として解析するくらいなら本論文で扱った Case II の直交異方性弾性体として解析するほうがよりよい Model 化と考えられる。

Case II の直交異方性弾性体の応力集中係数が、平面弾性問題の場合には式 (2.15) で、薄板の面外曲げの場合には式 (3.10) で表わされること、しかも始めの数項でかなりよい精度で表わされること、そして等方性弾性体の場合と密接な関係があり、式 (2.2) や (3.2) のアフィン変換して得られる形状の等方性弾性体の応力集中係数表示式 (2.10) や (3.7) が求まっていけば、Case II の直交異方性の応力集中係数は簡単に計算されることなどがわかった。先人の研究の結果応力集中に関して異方性の場合にはあまり多いと思われないが、等方性の場合についてはかなりのデータが得られている。これらの結果を利用してある範囲内の直交異方性に対する応力集中係数の値が求められることになる。

しかしその適用範囲については前述のように今後の研究としたい。

Case II の場合の直交異方性の解法は、等方性の場合の解法に準じたものになり、アフィン変換して得られる形状を単位円に等角写像する有理写像関数が得られれば、平面弾性問題、薄板の面外曲げのそれぞれの問題に

対して、有理写像関数が表わす形状に対する厳密解が閉じた形で得られる。

したがって、解析すべき形状の有理写像関数を作ることが一番の問題であるが、分数式の和の形に有理関数を作れば比較的任意の形状の写像関数ができる。

本論文中に扱った計算例は半無限板の直線境界と弾性主軸の方向が平行な場合であるが、平行でない傾いた場合も解法は全く同じである。

しかし、一般にアフィン変換して得られる領域に対称性がなくなったりして、写像関数の作成は一般に難しくなる。論文中の例題でいえば、斜め三角形や斜め半楕円切欠きを有する半無限領域を単位円に写像する写像関数が必要になる。

今後の問題としては、前述の事項の他に次のような事項が考えられよう。

応力集中個所の特性を知るには応力集中部の曲線形と応力集中との関係を調べることがさらに必要と思われる。

また、Case II の直交異方性の応力集中係数表示式はわかったが、Case I の直交異方性の応力集中係数表示式を求める必要がある。しかしその表示式の形は等方性や Case II の場合と類似の方法で求められそうである。

本論文中の数値計算には全国共同利用名古屋大学大型計算機センターを利用した。

参 考 文 献

- 1) Lekhnitskii S.G. : Anisotropic Plates, Gordon and Breach Sciences Publishers, 1968.
- 2) 池田 健 : 直交異方性板の平面応力に就いて, 日本航空学会誌, 第9巻第90号, pp. 1209~1219, 1942.
- 3) Lekhnitskii S.G. : Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden Day, 1963.
- 4) 長谷部宣男 : 三角形切欠きおよび突起を有する半無限板の応力解析, 土木学会論文報告集, 第194号, pp. 29~40, 1971-10.
- 5) 長谷部宣男 : 半楕円切欠きを有する半無限板の応力解析, 名古屋工業大学学報, 第24巻, pp. 295~301, 1972.
- 6) 長谷部宣男 : 切欠きを有する半無限弾性体の縦せん断応力, 土木学会論文報告集, 第211号, pp. 11~18, 1973.
- 7) Wolf K. : Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und Halbraum bei anisotropem Material, Z.A.M.M. Bd. 15, Heft 5, pp. 249~254, 1935-10.
- 8) 大久保 肇 : 円孔を有する木板内の応力分布に就いて, 日本機械学会誌, 第45巻, 第306号, pp. 589~591, 1942-9.
同, 第47巻, 第324号, p. 185.
- 9) 南大路謙一・大久保 肇ほか2名 : 楕円孔を有する異方性板内の応力分布に就いて, 日本機械学会論文集, 第11巻, 第41号, pp. 23~30, 昭和20年.
- 10) 久保敏彦 : だ円孔を有する半無限直交異方性板の応力, 機械学会論文報告集, 第25巻, 第159号, pp. 1093~1100, 昭 34-11.
- 11) 久保敏彦 : だ円孔を含む直交異方性無限板の応力, 前掲 10), pp. 1101~1110.
- 12) 林 卓夫 : 円孔を有する直交異方性帯板の引張り, 前掲

- 10), pp. 1125~1133.
- 13) 林 卓夫：円孔を有する直交異方性帯板の面内曲げ，前掲 10)，pp. 1134~1140.
- 14) Muskhelishvili N.I. : Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, P. Noordhoff Ltd., 1963.
- 15) 前掲 14)，Chap. 15, § 85.
- 16) 長谷部寛男：十字形板の応力解析，土木学会論文報告集，第 185 号，pp. 9~20, 1971.
- 17) Savin G.N. : Stress Concentration Around Holes, Chapter VI, Pergamon Press, 1961.
- 18) Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. : Theory of Plates and Shells McGraw-Hill Book Company Chapter 11

(1963.8.13・受付)
