

# 有限振幅内部重複波に関する研究

## ON INTERNAL STANDING WAVES WITH FINITE AMPLITUDE

沢本正樹\*・加藤一正\*\*

By Masaki Sawamoto and Kazumasa Kato

### 1. 序 論

本研究は、強制振動された内部重複波について単純な条件のもとで理論的解析と実験を行い、有限振幅の内部重複波の基礎的性質を調べたものである。

内部重複波は、湖、湾のような比較的狭い境界を持つところに存在する温度躍層などに観察されるし、また、最近計画されている海底石油タンクで油水置換を行った場合などに観察されるであろう。しかし今回行った研究は、直接これら具体的な事例を考慮して行われたものではなく、むしろ、できるだけ単純なモデルのもとで、内部波の知識を増そうとの意図のもとに行われたものである。

最近の内部重複波の研究としては、Hunt (1961), Sekerzh-Zenkovich (1961) が上下水深無限大として有限振幅波を第 4 次近似まで求めたもの、Thorpe<sup>1)</sup> (1967) が上下水深有限で二流体間の密度差がきわめて小さいときの有限振幅波を第 2 次近似まで求めたもの、また、石川・椎貝<sup>2)</sup> (1972) が強制振動された円筒境界内での有限振幅波を第 2 次近似まで求めたものなどがある。これらの研究によると、表面重複波において顕著である第 2 次近似項の波形に及ぼす影響は、内部波の場合には減少し、また、周波数に及ぼす非線形性は、内部波の場合、第 3 次近似において初めてあらわれることなどが明らかにされている。強制振動された内部重複波の応答に関しても、Thorpe<sup>1)</sup>、椎貝・沢本・加藤<sup>3)</sup>、石川・椎貝<sup>2)</sup>の研究より、線型理論、あるいは、第 2 次近似解では十分に説明できないことが明らかとなっている。

本研究は、矩形水層内の上下水深同じの混り合わない成層二流体が、水平方向に外力を受けたときの内部波の応答を調べたものである。理論解析は、摂動法により第

3 近似まで求められており、結果は、実験と比較されている。

ここで得られた結果は、強制振動項を 0 にすれば、自由振動を表わし、また、上層密度を 0 とすると、表面波を表わすことになる。これらに関しても若干考察を行い従来の研究と比較検討してある。

### 2. 理論的解析

流体は非圧縮性、非粘性、非回転と仮定し、速度ポテンシャルを用いる。座標は、図-1 に示すように、水槽に固定し、外力は、この水槽全体を水平方向に単振動させるものと考えている。

摂動法を用いるにあたっては、Tadjbakhsh・Keller<sup>4)</sup>、合田・柿崎<sup>5)</sup>が表面波に用いた手法にならない、次のような無次元化を行う。

$$x = kX, \quad z = kZ, \quad d = kh \dots \dots \dots (2.1)$$

$k$  は波数で  $k = 2\pi/L$ ,  $L$  は内部波長,  $X, Z$  は座標,  $x, z$  は無次元座標,  $h$  は上下水深,  $d$  は無次元水深である。水面変動  $\zeta(X, T)$  は第 1 次近似の振幅  $a$  を用いて次のように無次元化する。

$$\varepsilon = ak, \quad \eta(x, t) = \frac{\zeta(X, T)}{a} = \frac{k}{\varepsilon} \zeta(X, T) \dots \dots \dots (2.2)$$

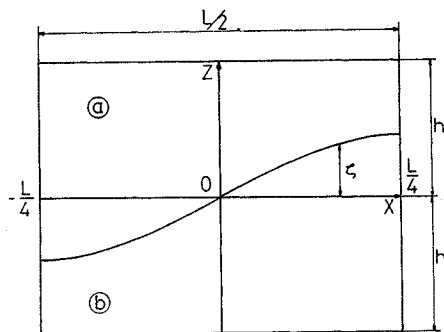


図-1 座 標 系

\* 正会員 東京工業大学助手 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所水工部

角振動数，時間，速度ポテンシャルは次のように無次元化する。

$$\omega = \frac{\sigma}{\sqrt{gk}}, \quad t = \sigma T = \sqrt{gk} \omega T \dots\dots\dots(2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_a(x, z, t) &= \frac{k^2}{\varepsilon \sqrt{gk}} \Phi_a(X, Z, T) \\ \phi_b(x, z, t) &= \frac{k^2}{\varepsilon \sqrt{gk}} \Phi_b(X, Z, T) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.4)$$

ここに， $\sigma$  は強制角振動数， $\omega$  は無次元振動数， $T$  は時間， $t$  は無次元時間， $\Phi_a, \Phi_b, \phi_a, \phi_b$  はそれぞれ有次元，無次元の上下層速度ポテンシャル， $g$  は重力の加速度である。

強制外力の加速度の振幅  $A_0$  は，重力の加速度を用いて無次元化する。

$$\alpha_0 = \frac{A_0}{g} \dots\dots\dots(2.5)$$

以上の無次元量を用いると，基礎方程式，境界条件は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{axx} + \phi_{azz} &= 0 \\ \phi_{bxx} + \phi_{bzz} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} x = \pm \frac{\pi}{2}, \quad z = d \quad &\text{で} \quad -\phi_{an} = 0 \\ x = \pm \frac{\pi}{2}, \quad z = -d \quad &\text{で} \quad -\phi_{bn} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} z = \varepsilon \eta \quad &\text{で} \\ \omega \cdot \eta_t - \varepsilon \cdot \phi_{ax} \cdot \eta_x &= -\phi_{az} \\ \omega \cdot \eta_t - \varepsilon \cdot \phi_{bx} \cdot \eta_x &= -\phi_{bz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} z = \varepsilon \eta \quad &\text{で} \\ \rho_a \left\{ \omega \phi_{at} - \eta - \frac{\varepsilon}{2} [(\phi_{ax})^2 + (\phi_{az})^2] - \Omega_0 \right\} \\ = \rho_b \left\{ \omega \phi_{bt} - \eta - \frac{\varepsilon}{2} [(\phi_{bx})^2 + (\phi_{bz})^2] - \Omega_0 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.9)$$

ここに，添字の  $t, x, z, n$  は，それぞれ  $t, x, z$ ，壁面に垂直方向の偏微分を表わす。また， $\rho_a, \rho_b$  は上下層流体の比重（密度ではない）， $\Omega_0$  は外力のポテンシャルである。以上の式の外に次の二つの付加条件を用いる。まず， $z=0$  が静止水面である条件として，

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \eta(x, z, t) dx = 0 \dots\dots\dots(2.10)$$

また，第1近似解の振幅を  $a$  としておくために，

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \eta(x, t) \sin x \cos t \, dt \, dx = \frac{\pi^2}{2} \dots\dots\dots(2.11)$$

外力として，水槽を水平方向に単振動させる場合を考えると， $\Omega_0$  は  $x$  に関してはフーリエ級数の形で表わすことができるが，強制振動の場合，外力の特定の成分に対応するモードの内部波が卓越的に応答するので，ここではその第1モードのみを問題とし， $\Omega_0$  を次の形に置く。

$$\Omega_0 = \frac{4\alpha_0}{\varepsilon\pi} \sin x \cdot \cos t \dots\dots\dots(2.12)$$

式 (2.6)~(2.11) 中の諸量を P.L.K. 法<sup>6)</sup>により  $\omega$  をも含め，次のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} \phi_a &= \phi_{a0} + \varepsilon \phi_{a1} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \phi_{a2} + \dots \\ \phi_b &= \phi_{b0} + \varepsilon \phi_{b1} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \phi_{b2} + \dots \\ \eta &= \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} \eta_2 + \dots \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} \omega_2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.13)$$

式 (2.12)，(2.13) を式 (2.6)~(2.11) に代入し  $\varepsilon$  のべき乗の係数を0とおくことにより，逐次近似解が得られるわけであるが，ここでその方法を形式的に採用すると不都合がおきる。というのは， $\Omega_0$  は  $\varepsilon^{-1}$  を含んでいるため，強制振動解は求まらなくなる。それでまず  $\Omega_0$  と  $\varepsilon^{-1}$  のオーダーの比較が必要となる。後に示す一連の実験の代表的な値を用いて  $\Omega_0$  と  $\varepsilon^{-1}$  とを求めると，

$$\frac{4\alpha_0}{\varepsilon\pi} = 0.06, \quad \varepsilon^{-1} = 3.18$$

となる。このように考えると  $4\alpha_0/\varepsilon\pi$  は見かけ上  $\varepsilon^{-1}$  を含んでいるが，オーダー的には  $\varepsilon^{-1}$  ではない。それで  $\Omega_0$  は一応， $\varepsilon^0$  のオーダーとして以下の議論を進める。 $\Omega_0$  を  $O(\varepsilon^0)$  とすることは，第1次近似として，線形化された応答関係を求めることに相当する。上述の比較のみから見る限り，このことは必ずしも適当とはいえないが，本研究に先立つ予備的な研究により，強制外力に対する内部波の応答は線形化理論である程度説明しうることが確かめられており，外力を  $\varepsilon^0$  のオーダーとすることはそれほど不都合はないであろう。

式 (2.12)，(2.13) を式 (2.6)~(2.11) に代入し，さらに式 (2.8)，(2.9) を  $z=0$  のまわりで Taylor 展開し， $\varepsilon$  のべき乗ごとに整理すると，漸次近似解が求まる。以下その結果のみを示す。演算の詳細については文献 7) を参照されたい。

第1次近似解は，微小振幅線形化理論と同じものであり容易に求まる。すなわち，

$$\eta_0 = \sin x \cos t \dots\dots\dots(2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{a0} &= -\frac{\omega_0}{\sinh d} \sin x \cosh(-z+d) \sin t \\ \phi_{b0} &= \frac{\omega_0}{\sinh d} \sin x \cosh(z+d) \sin t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} r\omega_0^2 &= \left( \frac{4\alpha_0}{\varepsilon\pi} + 1 \right) \tanh d \\ r &= (\rho_b + \rho_a) / (\rho_b - \rho_a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.16)$$

第2次近似解は，

$$\eta_1 = A_1 \cos 2x + A_2 \cos 2x \cos 2t \dots\dots\dots(2.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{a1} &= B_{a1}(t) + B_{a2} \cosh 2(-z+d) \cos 2x \sin 2t \\ \phi_{b1} &= B_{b1}(t) + B_{b2} \cosh 2(z+d) \cos 2x \sin 2t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.18)$$

$$\omega_1=0 \dots\dots\dots(2.19)$$

ただし,

$$A_1 = -\frac{\omega_0^2}{8} (1 + \coth^2 d)$$

$$A_2 = \frac{-\omega_0^4}{4(-2r\omega_0^2 + \tanh 2d)} \cdot \left\{ 3r - r \coth^2 d - \frac{2}{\omega_0^2} \coth d \right\} - \frac{\omega_0^2}{8} (3 - \coth^2 d)$$

$B_{a1}(t), B_{b1}(t)$  は  $t$  のみの関数

$$B_{a2} = \frac{\omega_0^3}{8 \cosh 2d (-2r\omega_0^2 + \tanh 2d)} \cdot \left( 1 - 3 \coth^2 d - 2r - 2r \coth^2 d + \frac{2 \coth d}{\omega_0^2} \right)$$

$$B_{b2} = \frac{-\omega_0^3}{8 \cosh 2d (-2r\omega_0^2 + \tanh 2d)} \cdot \left( 1 - 3 \coth^2 d + 2r + 2r \coth^2 d - \frac{2 \coth d}{\omega_0^2} \right)$$

第3次近似解は

$$\eta_2 = \sum_{m,n=1,3} K_{mn} \sin mx \cos nt \dots\dots\dots(2.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{a2} &= \sum_{m,n=1,3} I_{mn} \sin mx \cosh m(-z+d) \sin nt \\ \phi_{b2} &= \sum_{m,n=1,3} J_{mn} \sin mx \cosh m(z+d) \sin nt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.21)$$

$$\omega_2 = \frac{E_{11} \tanh d}{2r} \{1+r-2r \coth d\} - \frac{(1+r)F_{11} \tanh d}{2r} + \frac{G_{11}}{r\omega_0} \tanh d \dots\dots\dots(2.22)$$

ここに,  $\sum_{m,n=1,3}$  は

$$(m,n) = (1,1), (1,3), (3,1), (3,3)$$

の各添字の組合せの和を表わす。また, 各係数  $I_{mn}, J_{mn}, K_{mn}$  は次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} I_{11} &= -\frac{2\left(E_{11} + \frac{\omega_2}{2}\right)}{\sinh d} \\ I_{13} &= \frac{2}{\cosh d(-9r\omega_0^2 + \tanh d)} \cdot \left\{ 3\omega_0 G_{13} - E_{13} - \frac{9}{2}\omega_0^2(1+r)(F_{13} - E_{13}) \right\} \\ I_{31} &= \frac{2}{\cosh 3d(-r\omega_0^2 + 3 \tanh 3d)} \cdot \left\{ \omega_0 G_{31} - E_{31} - \frac{1}{6}\omega_0^2(1+r)(F_{31} - E_{31}) \right\} \\ I_{33} &= \frac{2}{3 \cosh 3d(-3\omega_0^2 r + \tanh 3d)} \end{aligned}$$

$$\cdot \left\{ 3\omega_0 G_{33} - E_{33} - \frac{3}{2}\omega_0^2(1+r)(F_{33} - E_{33}) \right\}$$

$$J_{mn} = -I_{mn} + \frac{2}{m \cosh md} (F_{mn} - E_{mn})$$

$$(m,n) = (1,1), (1,3), (3,1), (3,3)$$

$$K_{11} = 0$$

$$K_{mn} = -2G_{mn} - \frac{n(\rho_a I_{mn} - \rho_b J_{mn})}{\rho_b - \rho_a} \omega_0 \cosh md$$

$$(m,n) = (1,3), (3,1), (3,3)$$

ここに,  $E_{mn}, F_{mn}, G_{mn}$  はそれぞれ

$$E_{11} = \frac{1}{2} A_1 \omega_0 \coth d - \frac{A_2}{4} \omega_0 \coth d - \frac{\omega_0}{32} + \frac{B_{a2}}{2} \cosh 2d$$

$$E_{13} = \frac{1}{4} A_2 \omega_0 \coth d - \frac{\omega_0}{32} + \frac{B_{a2}}{2} \cosh 2d$$

$$E_{31} = \frac{3}{2} A_1 \omega_0 \coth d - \frac{3}{4} A_2 \omega_0 \coth d + \frac{3}{32} \omega_0 - \frac{3}{2} B_{a2} \cosh 2d$$

$$E_{33} = \frac{3}{4} A_2 \omega_0 \coth d + \frac{3}{32} \omega_0 - \frac{3}{2} B_{a2} \cosh 2d$$

$$F_{11} = -\frac{1}{2} A_1 \omega_0 \coth d + \frac{A_2}{4} \omega_0 \coth d - \frac{\omega_0}{32} + \frac{B_{b2}}{2} \cosh 2d$$

$$F_{13} = -\frac{1}{4} A_2 \omega_0 \coth d - \frac{\omega_0}{32} + \frac{B_{b2}}{2} \cosh 2d$$

$$F_{31} = -\frac{3}{2} A_1 \omega_0 \coth d + \frac{3}{4} A_2 \omega_0 \coth d + \frac{3}{32} \omega_0 - \frac{3}{2} B_{b2} \cosh 2d$$

$$F_{33} = -\frac{3}{4} A_2 \omega_0 \coth d + \frac{3}{32} \omega_0 - \frac{3}{2} B_{b2} \cosh 2d$$

$$G_{11} = \frac{\omega_0^2 A_1}{2} + \frac{\omega_0^2 A_2}{4} - \frac{r\omega_0^2}{32} \coth d + C\omega_0(\sinh 2d - \coth d \cosh 2d)$$

$$G_{13} = \frac{\omega_0^2 A_2}{4} - \frac{11}{32} r\omega_0^2 \coth d + C\omega_0(3 \sinh 2d + \coth d \cosh 2d)$$

$$G_{31} = -\frac{\omega_0^2 A_2}{4} - \frac{\omega_0^2 A_1}{2} + \frac{3}{32} r\omega_0^2 \coth d + C\omega_0(-\sinh 2d - \coth d \cosh 2d)$$

$$G_{33} = -\frac{\omega_0^2 A_2}{4} + \frac{r}{32} \omega_0^2 \coth d + C\omega_0(-3 \sinh 2d + \coth d \cosh 2d)$$

$$C = \frac{\rho_a B_{a2} + \rho_b B_{b2}}{2(\rho_b - \rho_a)} \dots\dots\dots(2.23)$$

である。

3. 応答曲線および波形

前章の結果求まった  $\varepsilon \sim \omega$  関係 (応答曲線) は、

$$\omega = \omega_0 + \frac{\varepsilon^2}{2} \omega_2 \dots\dots\dots (3.1)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{r} \left( \frac{4\alpha_0}{\varepsilon\pi} + \tanh d \right)$$

$$\omega_2 = \frac{E_{11} \tanh d}{2r} \{1+r-2r \coth d\}$$

$$-\frac{(1+r)F_{11}}{2r} \tanh d + \frac{G_{11}}{r\omega_0} \tanh d$$

で表わされる。この式の中には、多くのパラメーターが含まれているので、後に示す実験の代表値を用いて、それらを固定して  $\varepsilon$  と  $\omega$  の関係を考察する。すなわち、 $\alpha_0=0.0115$  (これは強制振動振幅 1.65 cm, 周期 2.40 秒に相当する),  $L=80$  cm,  $h=14$  cm, さらに用いた流体、水とテレピン油の密度比より  $r=8.6432$  とする。これらの値を用いて横軸に無次元周波数  $\omega$ , 縦軸に  $\varepsilon/\alpha_0$  をとって、式 (3.1) の関係を示したものが 図-2 である。図中には、第 1 次近似 (第 2 次近似も同じ曲線である) で得られる、いわゆる線形微小振幅波理論の結果も、一点鎖線で示してある。この図を見るとき、注意すべきことは、縦軸は第 1 次近似波の振幅をとっているから、実際の振幅を表わすものではないということである。そこで、わかりやすくするために、次のような補正を行って、振幅と周波数との関係を求める。

波形は、式 (2.14), (2.17), (2.20) より得られ、 $K_{11}=0$  であることを考慮すると、

$$\eta = \sin x \cos t + \varepsilon (A_1 \cos 2x + A_2 \cos 2x \cos 2t)$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} K_{33} \sin 3x \cos 3t + K_{31} \sin 3x \cos t$$

$$+ K_{13} \cos x \cos 3t \dots\dots\dots (3.2)$$

となる。壁面  $x=\pi/2$  で観測される境界面変位は、

$$\eta = -\varepsilon A_1 + \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} K_{31}\right) \cos t - \varepsilon A_2 \cos 2t$$

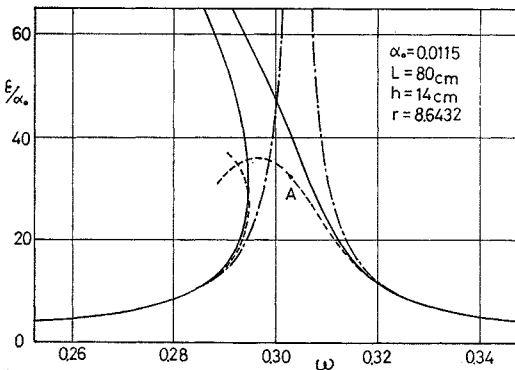


図-2 応答曲線

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} (K_{13} - K_{33}) \cos 3t \dots\dots\dots (3.3)$$

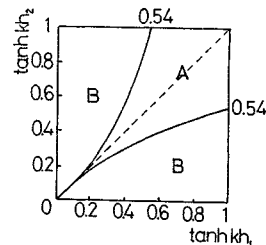
となる。 $\varepsilon A_1, \varepsilon A_2, \varepsilon^2 K_{31}, \varepsilon^2 K_{13}, \varepsilon^2 K_{33}$  が、それぞれ 1 に比べて小さいときは最大値、最小値を  $\cos t = \pm 1$  で近似してもよい。よって、波高は

$$\eta_{\max} - \eta_{\min} = 2 + \varepsilon^2 (K_{13} - K_{33} - K_{31}) \dots\dots (3.4)$$

で近似される。ただし、この近似は、 $K_{33}, K_{31}$  が正、 $K_{13}$  が負であることが確かめられるから、 $\varepsilon$  が大きい場合に、実際の波高より、小さめの値を与える。式 (3.4) を用いて補正した結果を、図-2 の中に破線で示してある。より詳細な演算を行えば、実際の応答曲線は、実線と破線との間に求められるはずである。

図-2 より、応答曲線は周波数の小さいほうへ傾くことがわかる。この結果、ある周波数の範囲では一つの周波数に対し三つの共役波高が存在し、非線形振動論でいうところの跳躍現象が起きる。このように応答曲線が左へ傾く現象は、Taylor<sup>8)</sup> が表面重複波について実験的に調べた結果と一致する。また、Thorpe<sup>1)</sup> は、二流体の密度差が小さい場合に、上下水深の大きさによって自由振動内部重複波の波高と周波数の間には 図-3 の関係があることを明らかにしたが、本研究の実験した範囲は、図中の破線の上に相当し、応答曲線が左へ傾くことは、十分に予測されたことである。

図-2 における A 点の波形を描いたものが 図-4 であ



領域 A: 波高の増大により周波数が減少  
領域 B: 波高の増大により周波数が増大  
 $h_1$ : 上層水深  $h_2$ : 下層水深

図-3 自由振動の波向と周波数の関係

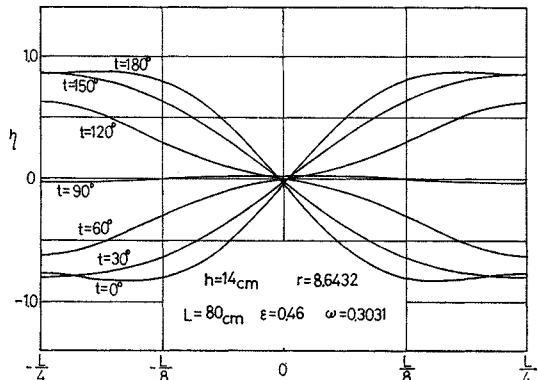


図-4 波形の一例

る。すなわち、 $h=14$  cm,  $r=8.6432$ ,  $L=80$  cm,  $\varepsilon=0.46$ ,  $\omega=0.3031$  である。これより明らかなことは、

- (i) 峰の部分, 谷の部分ととも平らになり, 線形解に比べ波高は減少する。
- (ii) 節での波形の勾配が増大し, 全体として矩形波に近い形状になる。
- (iii) 小さく波うちながら大きく外力の周期で振動する。

である。これらは, 第3次近似項による効果であり, 表面波の場合に, 第2次近似項が波形に大きな効果を及ぼすことと対称的である。特に, 表面波の場合, 有限振幅波の不安定が, 波の峰で起こって碎波が発生するのに対し, 内部重複波では, 峰が尖ることはなく, むしろ節での勾配が急になり不安定が起きるのであろうということが予測される。

#### 4. 自由振動

強制振動の理論解析における外力項を0とすれば, 自由振動の解となる。その結果上下同一な有限水深での有限振幅内部重複波の近似解が得られるが, これは, 上下無限水深として Hunt が行った近似解, 上下有限水深で二流体の密度差がきわめて小さいとして Thorpe<sup>1)</sup> が示した近似解を補足するものとなる。

外力項を0とおくことは, 式 (2.10), (2.11) で示される付加条件以外にさらに次の条件を必要とする。

第1次近似解としては,  $\sin x \sin t$  と  $\sin x \cos t$  とが考えられるが, ここでは波形として後者をとりとして,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \eta(x, t) \cdot \sin x \sin t \, dt \, dx = 0 \dots (4.1)$$

さらに, 現象が  $t$  に関して周期的であることは,

$$\eta(x, t + 2\pi) = \eta(x, t) \dots (4.2)$$

で表わされる。

波形, 周波数について結果を示すと次のとおりである。

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \eta_2 \dots (4.3)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \omega_2 \dots (4.4)$$

##### 第1次近似解

$$\eta_0 = \sin x \cos t \dots (4.5)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{r} \tanh d \dots (4.6)$$

$$r = (\rho_b + \rho_a) / (\rho_b - \rho_a)$$

##### 第2次近似解

$$\eta_1 = A_1 \cos 2x + A_2 \cos 2x \cos 2t \dots (4.7)$$

$$\omega_1 = 0 \dots (4.8)$$

$$A_1 = -\frac{1}{8} \left( \omega_0^2 + \frac{1}{r^2 \omega_0^2} \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{r^2 \omega_0^2} - \frac{3}{r^4 \omega_0^6} \right)$$

##### 第3次近似解

$$\eta_2 = \sum_{m,n=1,3} K_{mn} \sin mx \cos nt \dots (4.9)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{32(r+r^2\omega_0^4)} \left( -2r^2\omega_0^9 - 3r^3\omega_0^7 - 3r^2\omega_0^7 + 3r^2\omega_0^5 - 2r\omega_0^5 - 4r\omega_0^3 - 4\omega_0^3 - 4r\omega_0 + 4\omega_0 - \frac{7\omega_0}{r} + \frac{5}{r\omega_0} + \frac{5}{r^2\omega_0} - \frac{4}{r\omega_0^3} - \frac{5}{r^2\omega_0^3} - \frac{4}{r^3\omega_0^3} + \frac{6}{r^3\omega_0^5} + \frac{6}{r^4\omega_0^5} - \frac{6}{r^4\omega_0^7} + \frac{3}{r^5\omega_0^7} \right) \dots (4.10)$$

$$K_{11} = 0$$

$$K_{13} = \frac{1}{128(1+r^2\omega_0^4)} \left( -3r^2\omega_0^6 - 3r\omega_0^6 + 3r\omega_0^4 + 8\omega_0^4 + 6\omega_0^2 + \frac{6\omega_0^2}{r} - 4 - \frac{6}{r} - \frac{15}{r^2} + \frac{9}{r^2\omega_0^2} + \frac{9}{r^3\omega_0^2} - \frac{4}{r^2\omega_0^4} - \frac{9}{r^3\omega_0^4} - \frac{26}{r^4\omega_0^4} - \frac{3}{r^5\omega_0^8} \right)$$

$$K_{31} = \frac{1}{128(1+r^2\omega_0^4)} \left( -6r^4\omega_0^{12} + 3r^3\omega_0^{10} + 3r^4\omega_0^{10} - 9r^3\omega_0^8 - 18r^2\omega_0^8 + 27r^2\omega_0^6 + 27r\omega_0^6 + 12r^2\omega_0^4 - 57r\omega_0^4 - 27\omega_0^4 + 69\omega_0^2 + \frac{69\omega_0^2}{r} + 24 - \frac{63}{r} - \frac{123}{r^2} + \frac{45}{r^2\omega_0^2} + \frac{45}{r^3\omega_0^2} + \frac{12}{r^2\omega_0^4} - \frac{15}{r^3\omega_0^4} - \frac{135}{r^4\omega_0^4} - \frac{27}{r^5\omega_0^8} \right)$$

$$K_{33} = \frac{1}{128(1+r^2\omega_0^4)} \left( 3r^2\omega_0^6 + 3r\omega_0^6 - 9r\omega_0^4 - 6\omega_0^4 + 9\omega_0^2 + \frac{9\omega_0^2}{r^2} - 4 - \frac{3}{r} - \frac{5}{r^2} - \frac{21}{r^2\omega_0^2} - \frac{21}{r^3\omega_0^2} + \frac{8}{r^2\omega_0^4} + \frac{63}{r^3\omega_0^4} + \frac{55}{r^4\omega_0^4} - \frac{81}{r^4\omega_0^6} - \frac{81}{r^5\omega_0^6} + \frac{12}{r^4\omega_0^8} + \frac{75}{r^5\omega_0^8} + \frac{45}{r^6\omega_0^8} - \frac{54}{r^6\omega_0^{10}} - \frac{54}{r^7\omega_0^{10}} + \frac{18}{r^7\omega_0^{12}} - \frac{9}{r^8\omega_0^{12}} \right)$$

第2次近似解の波形の係数  $A_1, A_2$  は式 (4.7) を用いると

$$A_1 = -\frac{1}{8r} \left( \tanh d + \frac{1}{\tanh d} \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{8r} \left( \frac{1}{\tanh d} - \tanh^3 d \right)$$

と書きかえられる。 $\tanh d$  は上下水深のみにより決定

されるから、 $A_1, A_2$  は二流体間の密度差が小さくなるにつれて、0 に漸近することがわかる。 $A_1, A_2, K_{mn}$  の値を縦軸にとり、横軸に  $r$  をとって  $h=14\text{ cm}$ 、 $L=80\text{ cm}$  として図示したものが図-5 である。このことより内部波形は二流体間の密度差が小さくなると、第2次近似項の影響は小さくなり、第3次近似項が効いてくる。第3次近似項の係数のうち  $K_{33}, K_{31}$  は  $r \geq 2$  で正

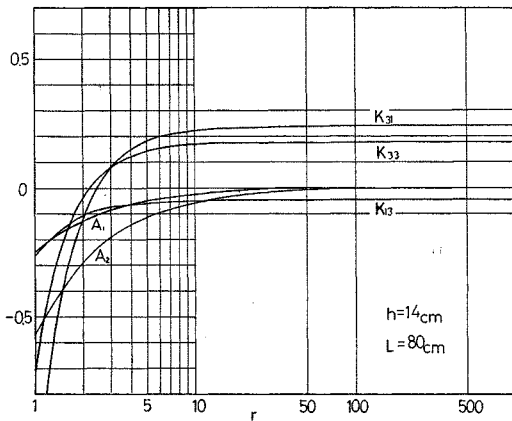


図-5  $A_1, A_2, K_{mn}$  と  $r$  との関係

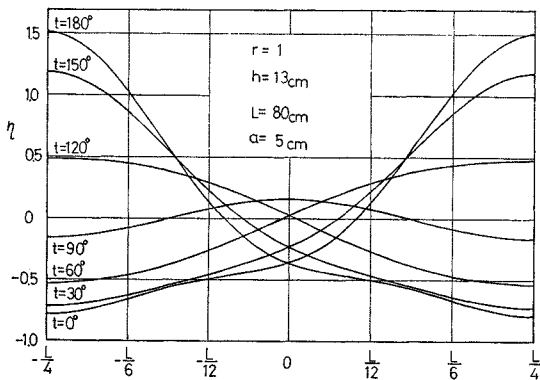


図-6 自由振動 (表面波)

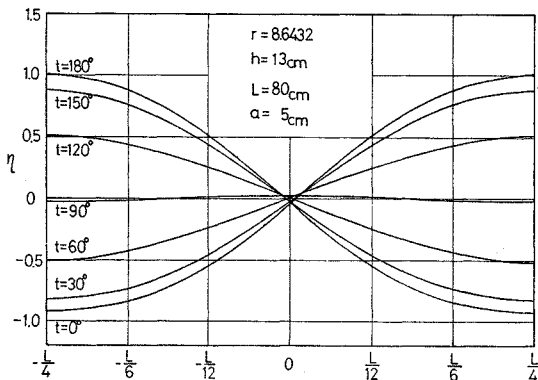


図-7 自由振動 (水とテレピン油)

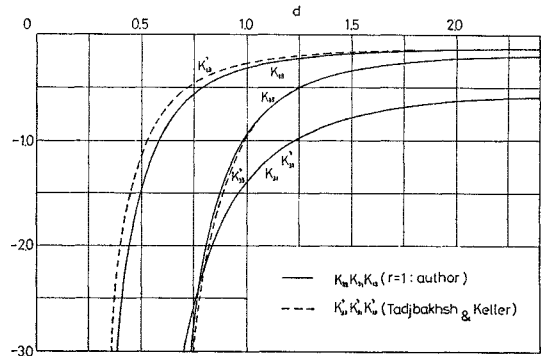


図-8  $K_{mn}$  と  $d$  との関係

であるから、第1次近似波が最大になるとき、峰を低く、谷を浅くするように作用する。また、節での波形の勾配を増大させる。

代表的な諸量の値で波形を描いた例が図-6, 7 である。これらは、それぞれ  $r=1$  (上層流体密度=0),  $r=8.6432$  (水とテレピン油) であり、ともに  $h/L=13/80$ ,  $a/L=5/80$  のときのものである。

内部波で得られた結果を  $r=1(\rho_a=0)$  とおくと表面波とみなすことができる。それによると、第2次近似までは Tadjbaksh・Keller<sup>(4)</sup> の結果と完全に一致する。ところが、第3次近似については、多少異なる。このことを示すために、 $K_{mn}$  と  $d$  の関係を図化したものが図-8 である。このように、始めから表面圧力=0 として求めたものと、内部波として計算をして後に、上層の密度=0 としたものと間に差が出ることは興味あることである。しかし、この差も、波形に関してはそれほど大きなものではない。

波形と同様に興味ある点は、周波数に関することである。周波数は、 $\varepsilon$  の2次関数として求められた。

$$\omega = \omega_0 + \frac{\varepsilon^2}{2} \omega_2 \dots\dots\dots(4.12)$$

ここで問題となるのは、 $\omega_2$  の符号である。 $\omega_2$  は式(4.11)で与えられているが、これを図示したものが図-9 である。計算に用いたパラメーターは  $r=1$  (水と空気),  $r=8.6432$  (水とテレピン油),  $r=81$  (淡水と海水) である。図には、Tadjbaksh・Keller<sup>(4)</sup> が表面波で求めた  $\omega_2'$  も描きいれてある。ここで求めた内部波の範囲では、 $\omega_2$  の値は常に負であるから波長を一定とすれば、第1次近似波の振幅  $a$  が增大すると、常に周波数  $\omega$  が減少することになる。この傾向は、 $r$  が極端に1に近い値をとらないかぎり、密度差が大きいほど、水深が小さいほど顕著である。次に  $r=1$  の場合を考える。内部波として解析をすすめた後で  $\rho_a=0$  とした結果と、始めから自由表面の圧力=0 として求めた結果との間に差があることは、波形に関する議論でも述べたとおりで

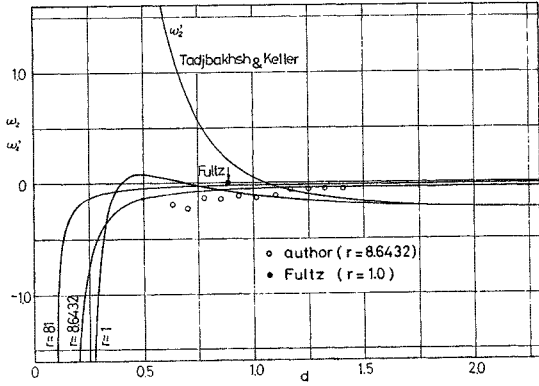


図-9  $\omega_2$  と  $d$  との関係

ある。周波数の場合、特に  $d$  の小さい範囲でその差は著しい。 $\omega_2'$ ,  $\omega_2$  はそれぞれ  $d=0.70$ ,  $d=1.068$  において、その値が0となる。この点は、周波数が波高によらず一定となる水深を表わすものである。Fultz<sup>9)</sup> は1962年に実験により、この点が  $d=0.88$  であることを確認している。これは、Tadjbaksh・Kellerの結果と著者らの結果のちょうど中間に位置している。 $d=0.88$  のときの  $\omega_2$ ,  $\omega_2'$  を比較してみると、Tadjbaksh・Kellerの結果では  $\omega_2'=0.2$ 、著者らの結果では  $\omega_2=0.08$  となっており、 $d$  のこのあたりの範囲では、内部波として計算をして後に  $\rho_a=0$  とおいた場合のほうが、多少近似の度合がよいようである。

6. 実験およびその考察

前章までの結果の妥当性を調べるために、いくつかの実験を行った。

実験装置は、図-10に示すとおりである。長さ40 cm、幅20 cm、高さ40 cmの透明アクリル製水槽を用い、おもりをつけた中蓋を調整することにより、各種の水深の二成層を作ることができる。この水槽を台車にのせ、台車を水平方向に往復運動させることにより強制内部波を起こし、その周期、波高、波形を測定した。周期はストップウォッチで、数十周期の時間を求め、その平

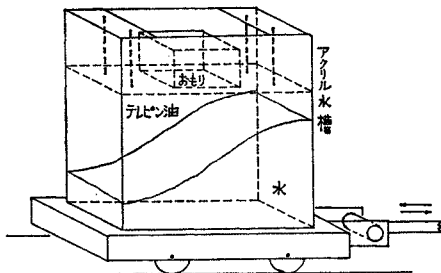


図-10 実験装置

均より決定した。波高は、水槽に取り付けた物指で、波形は写真撮影により求めた。実験に用いた流体は、上層がテレピン油、下層が水道水である。テレピン油を用いた理由は、密度を除いては、めだって水と異なった挙動をすることもなく、境界面張力などで不自然な波形になることも少ないことが確かめられたからである。

(1) 応答曲線

図-11に、 $h=10$  cm, 14 cm の二ケースの応答曲線を示してある。ただし、この応答曲線は  $\alpha_0$  =一定ではなく、振動台の振幅を一定としたときのものである。これは、実験で  $\alpha_0$  =一定にするよりも、振動台の振幅を一定とするほうが容易であるからである。このようにしても、実際には  $\alpha_0$  の変化は小さく、図-2とほとんど同じ曲線が得られる。実験は45ケース行われたが、他の43ケースもすべて同じ傾向を示している。グラフ中、一点鎖線、破線は図-2と同じく、それぞれ、線形化理論に基づくもの(第1次近似解)、全波高に修正したものである。(i)全体としてみると、応答曲線が左へ傾くことを実験値はよく示している。微小振幅波理論では実験値の一部は応答曲線の上側にプロットされることになるが、第3近似まで考慮すると、実験値はすべて応答曲線の下側におさまる。(ii)理論解析による応答は、跳躍現象を起こすが実験からは、そのことは認められない。これは理論解析では、流体を完全流体としているが、実際には粘性による境界面、壁面での摩擦があり、理論解析の結果ほどには波高が大きくなり得ないためであろう。

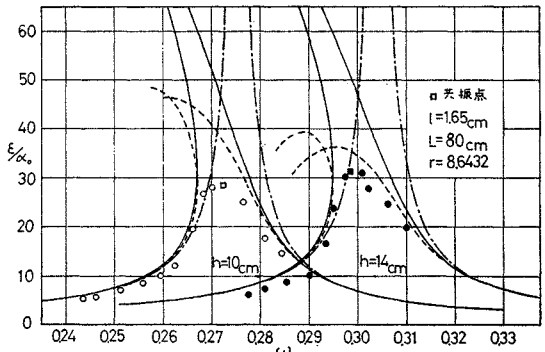


図-11 応答曲線(実験)

(2) 波 形

台車の振幅  $l=1.95$  cm, 上下水深  $h=15$  cm, 周期  $T_0=2.46$  秒,  $r=9.1850$  のときの波形を、図-12に示してある。図では、縦軸は、横軸の2倍に拡大してある。図中、①は最大波形時のもの、②、③は①にひき続くものであるが、その位相は意味のあるものではな

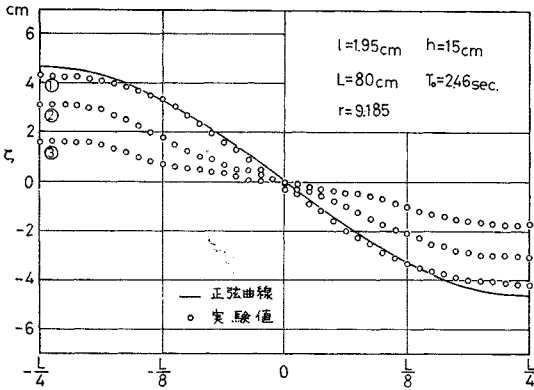


図-12 波形 (実験)

い。図-11 からも明らかなように、理論解は常に実験値より大きくなるので、理論解は図示していない。実線は比較のために正弦曲線を描いたものである。これによると、理論解析の検討で明らかにされた特性を、実験値もよく示している。すなわち、(i) 峰と谷の部分が平らになり、節の部分で波形の勾配が大きくなっている。(ii) ③ で明らかなように  $\sin 3x$  に相当する波形が現われる。

(3) 共振周波数と波高との関係

自由振動の周期は式 (4.12) に示されるように、波高によって変化する。実際の場合、系は減衰系であるため、同一波高を保ちながら自由振動に関する実験を行うことは不可能である。そこで、ここでは強制振動の実験において、外力と波形との位相差が  $90^\circ$  になる点を共振点とし、共振点周期と波高の関係を式 (4.12) で表わされる関係と比較した。測った全波高を補正して第 1 次近似の振幅  $a$  を求め、 $\omega$  との関係を図示したものが図-13 である。実線は、式 (4.12) で示される理論値である。実験による共振周波数と、理論による自由振動周波数とは、同一の傾向を示している。すなわち、波高の増大とともに  $\omega$  は左へ傾いている。しかし、その度合は、前者が後者よりもはげしい。これらの実験値より  $\omega_2$  を逆算した結果を図-9 に併せて示してある。これによると、共振周波数から求めた  $\omega_2$  は、いずれも自由振動の理論値よりも小さくなっている。特に  $d$  が小さい範囲で著しい。この違いは、元来共振周波数と自由振動周波数という異なったものを比較しているの、ある程度は当然であるが、そればかりでなく、さらに理論解の近似がまだ十分でないこと、理論では完全流体として取り扱っているため、減衰項がなく、実際の波高より大きめの波高を見つめることになるなどの理由も大きく効いていると考えられる。

内部波に関する実験を行っている、前述の理論的取

り扱いだけでは説明しえないいくつかの現象が観察される。これらについて述べてみよう。

内部波の波高が大きくなると、節の部分に波長の短い波が現われる。以後、この波を二次波、外力に応答している内部波を一次波とよぶことにする。この二次波は、一次波の変位がほぼ水平になったときに現われ (写真-1)、その後、一次波の変位が最大になるときまでの間に完全に消えてしまう。この現象については、前章までの議論では全く説明できないが、完全流体の安定問題として大体納得のいく解釈ができる。すなわち、互に混り合わない相対速度をもつ二流体間の内部波の必要安定条件は、よく知られているように<sup>10)</sup>,

$$F_i \leq \sqrt{\frac{(\rho_a + \rho_b)^2}{2\rho_a\rho_b}} \sqrt{\frac{1}{\mu} \tanh \mu} \dots\dots\dots (6.1)$$

と与えられる。ここに  $F_i$  は内部フルード数で

$$F_i = \frac{U_b - U_a}{\sqrt{\frac{2(\rho_b - \rho_a)}{\rho_b + \rho_a} gh}} \dots\dots\dots (6.2)$$

$U_b - U_a$  は上下層の相対速度、 $\mu$  は  $\mu = 2\pi h/\lambda$  で  $\lambda$  は波長である。微小振幅波理論 (第 1 次近似解) の結果を用いると共振周期  $T_{0,1}$  は

$$T_{0,1} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_b + \rho_a}{\rho_b - \rho_a}} \sqrt{\frac{L}{2\pi g} \coth \frac{2\pi}{L} h} \dots\dots\dots (6.3)$$

となる。式 (6.2), (6.3) および微小振幅波理論によ

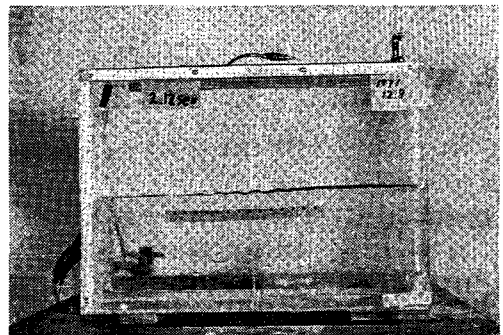


写真-1 二次波

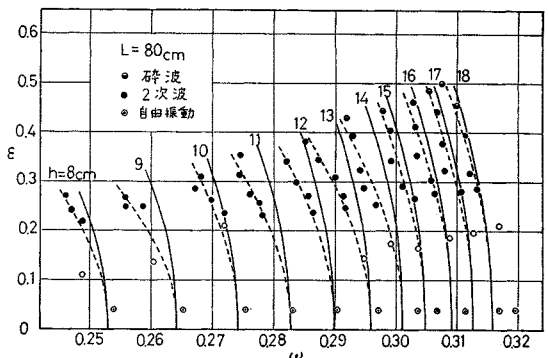


図-13 周波数と波高の関係



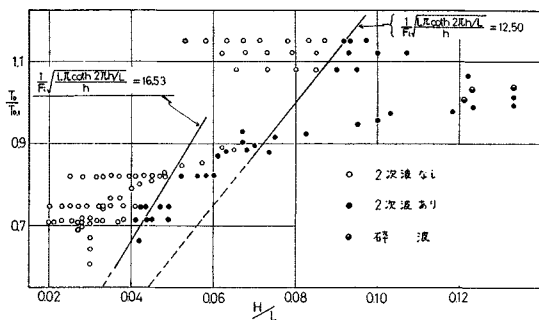


図-14 二次波に関する実験値

る，上下層の最大相対速度を用いると，次の式が得られる。

$$\frac{T_0}{T_{0.1}} = \frac{1}{F_i} \sqrt{\frac{L\pi \coth \frac{2\pi}{L} h}{h}} \cdot \frac{H}{L} \dots (6.4)$$

ここに， $T_0$  は外力の周期である。そこで，縦軸に  $T_0/T_{0.1}$ ，横軸に  $H/L$  をとって，実験での二次波の有無をプロットしたものが図-14 である。この図では

$$\frac{1}{F_i} \sqrt{\frac{L\pi \coth \frac{2\pi}{L} h}{h}}$$

が一定の場合の式 (6.4) の関係は原点を通る直線となる。図-14 では，

$$\frac{1}{F_i} \sqrt{\frac{L\pi \coth \frac{2\pi}{L} h}{h}}$$

が 12.50 の場合と 16.53 の場合の直線が描いてあるが，二次波の有無の限界は，ほぼこの二直線の間にあるといえよう。すなわち，実験の結果より，

$$\frac{1}{F_i} \sqrt{\frac{L\pi \coth \frac{2\pi}{L} h}{h}} = 12.50 \sim 16.53 \dots (6.5)$$

であることがわかる。さらに実験で観察される二次波の波長を用い，式 (6.5) と，式 (6.1) で示される関係とを比較したものが，図-15 である。これによると，今回二次波の観察された限界は，ほぼ式 (6.1) で表わされる限界上にあり，これら二次波は上下層流体のせん断流によるものと考えられることができる。

理論解析，実験はすべて二次元運動に関するものであるが，ある条件がそろうと，内部波は三次元的になり，いわゆる cross wave が観察される。すなわち，外力が共振周波数より少し大きい周波数をとると， $X$  方向のみの外力を与えているにもかかわらず，内部波は  $Y$  方向にも運動を始める。cross wave は本実験に用いた長  $40 \times$  幅  $20 \times$  高  $40$  cm の水槽では観察されなかったが， $30 \times 10 \times 20$  cm の水槽 (水+テレピン油)， $98 \times 20 \times 30$  cm の水槽 (水+塩水) で観察され，振動モードは図-16 に示す三種類が存在した。Thorpe<sup>1)</sup> は，B から C

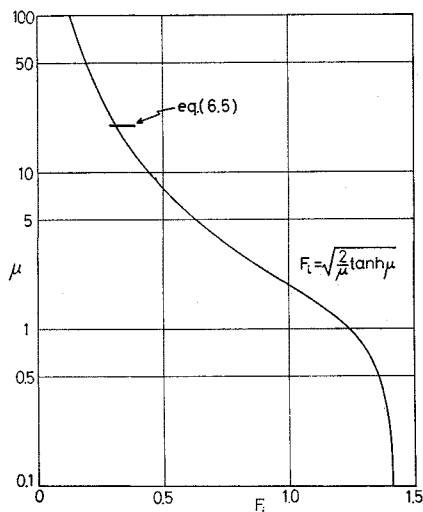


図-15 二次波の発生限界

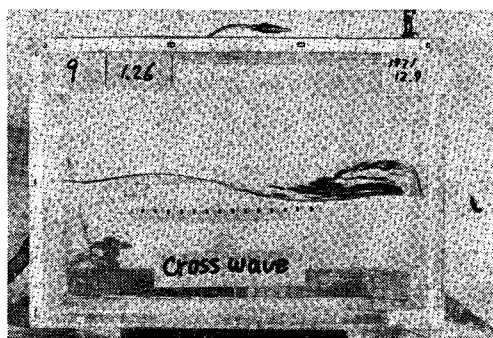


写真-2 cross wave

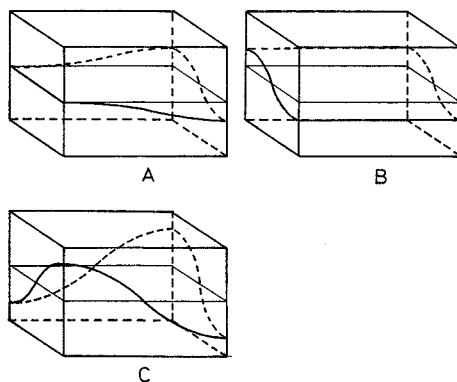


図-16 cross wave

へのモードの変化は観察されたが，その逆はないと述べているが，今回の実験では，実験中にモードが変化することはなく，外力を与え始めてから数分後に完全に周期的な cross wave が観察された。

波高を増していくと，ついには碎波を起こす。しかし内部重複波の碎波は表面波と異なり節の部分で発生する。これは，理論解析で示したように，重複波の場合，

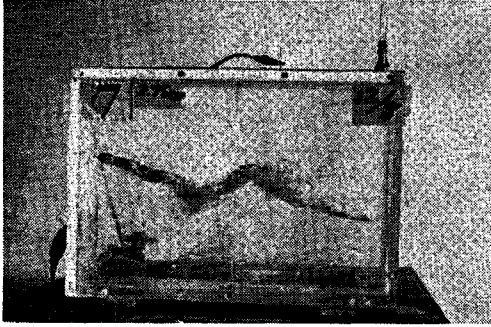


写真-3 砕波

峰が尖ることはなく、逆になだらかになるからである。一方、節の部分では、勾配がきつくなり、また、上下層にはげしいせん断流があるため、この部分で不安定が生じ、上下層が互に巻き込むような形で砕波が生じる。砕波が生じると、水とテレピン油のように混りあわない流体の場合には上下層の流体が細かい粒になって、他方の流体中に入りこみ、一方、淡塩水の場合には、砕波と同時にげしい混合が引きおこされ、躍層は急速に破壊される。

7. 終章

上下水深同一かつ自由表面を持たない有限振幅内部重複波について次のことが結論される。

- (1) 応答曲線は周波数の低い方へ傾く。これは、第3次近似まで求めることより十分に説明できる。
- (2) 波形は峰と谷が平らになり、節で勾配が急になる。このため、節の部分で不安定が生じ、砕波は節の部分からはじまる。
- (3) 自由振動周波数は、波長を一定とすると波高の増大とともに減少する。
- (4) 2次波は、上下層の相対速度による不安定問題として説明できる。

今回の解析は、第3次近似まで求めたものである。これは、近似として十分なものではない。しかし、線型理論で説明しえなかつたいくつかの現象については、だいたい説明できるようである。今後、さらに近似をあげることは、それほど重要なことではないだろう。むしろ、今回まったく無視した粘性の考慮、砕波の限界などについて調べることのほうが意味があるだろう。

本研究を遂行するにあたり、東京工業大学土木工学科吉川秀夫教授、椎貝博美助教授より適切な指導と助言を頂いた。ここに記して謝意を表したい。

参考文献

1) Thorpe, S.A. : On standing internal gravity waves of finite amplitude, J. Fluid Mech., Vol. 32, part 2, pp. 489~528, 1968.

2) 石川忠晴・椎貝博美：円形水槽内 2 層流体における内部波について，土木学会論文報告集，第 219 号，pp. 45~53, 1973.

3) 椎貝博美・沢本正樹・加藤一正：内部波の安定性に関する研究，土木学会第 27 回年次学術講演会概要集，pp. 132, 1972.

4) Tadjbaksh, I., Keller, J.B. : Standing surface waves of finite amplitude, J. Fluid Mech., Vol. 8, pp. 442~451, 1960.

5) 合田良実・柿崎秀作：有限振幅重複波 および その波圧に関する研究，港湾技術研究所報告，第 5 巻，10 号，1966.

6) Stoker, J.J. : Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems, Interscience Publishers

7) 加藤一正：二次元 および 三次元有限振幅内部重複波に関する研究，修士論文，東京工業大学，1974.

8) Taylor, G.I. : An experimental study of standing waves, Proc. Royal Society A, Vol. CCOXIII, pp. 44-59, 1953.

9) Fultz, D. : An experimental note on finite-amplitude standing gravity waves, J. Fluid Mech. Vol. 13, pp. 193-212, 1962.

10) 嶋 祐之：密度流論，水工学シリーズ，65-11，土木学会水理委員会，1965.

【Appendix】 摂動法の概要

ここでは本文中で省略した摂動法計算のあらましを説明する。

式 (2.12), (2.13) を式 (2.6)~(2.11) に代入し，さらに式 (2.8), (2.9) を  $z=0$  のまわりで Taylor 展開し， $\epsilon$  のべき乗ごとに整理すると，次のようになる。

$\epsilon^0$  のオーダー

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_{a0} &= \nabla^2 \phi_{b0} = 0 \\ \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial \phi_{a0}}{\partial n} &= 0 : x = \pm \frac{\pi}{2}, z = d \\ -\frac{\partial \phi_{a0}}{\partial n} &= 0 : x = \pm \frac{\pi}{2}, z = -d \end{aligned} \right. \\ \omega_0 \eta_{0t} &= -\phi_{a0z} = -\phi_{b0z} : z = 0 \\ \rho_a \left( \omega_0 \phi_{a0t} - \eta_0 - \frac{4\alpha_0}{\epsilon\pi} \sin x \cos t \right) \\ &= \rho_b \left( \omega_0 \phi_{b0t} - \eta_0 - \frac{4\alpha_0}{\epsilon\pi} \sin x \cos t \right) : z = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(A-1)$$

$\epsilon^1$  のオーダー

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_{a1} &= \nabla^2 \phi_{b1} = 0 \\ \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial \phi_{a1}}{\partial n} &= 0 : x = \pm \frac{\pi}{2}, z = d \\ -\frac{\partial \phi_{b1}}{\partial n} &= 0 : x = \pm \frac{\pi}{2}, z = -d \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \phi_{a1z} + \omega_0 \eta_{1t} &= \phi_{a0z} \eta_{0x} - \eta_0 \phi_{a0zx} - \omega_1 \eta_{0t} \\ \phi_{b1z} + \omega_0 \eta_{1t} &= \phi_{b0z} \eta_{0x} - \eta_0 \phi_{b0zx} - \omega_1 \eta_{0t} \end{aligned} \right. \\ & : z = 0 \\ \rho_a \left\{ \omega_0 \phi_{a1t} - \eta_1 + \omega_1 \phi_{a0t} + \omega_0 \eta_0 \phi_{a0tz} \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1}{2}(\phi_{a0x}^2 + \phi_{a0z}^2) \Big\} \\ & = \rho_b \left\{ \omega_0 \phi_{b1t} - \eta_1 + \omega_1 \phi_{b0t} + \omega_0 \eta_0 \phi_{b0tz} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}(\phi_{b0x}^2 + \phi_{b0z}^2) \right\} : z=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(A-2)$$

$\varepsilon^2$  のオーダー

$$\left. \begin{aligned} & \nabla^2 \phi_{a2} = \nabla^2 \phi_{b2} = 0 \\ & \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial \phi_{a2}}{\partial n} = 0 : x = \pm \frac{\pi}{2}, z = d \\ -\frac{\partial \phi_{b2}}{\partial n} = 0 : x = \pm \frac{\pi}{2}, z = -d \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \omega_2 \eta_{0t} + \frac{1}{2} \omega_0 \eta_{2t} - \eta_0 \eta_{0x} \phi_{a0xz} - \eta_{0x} \phi_{a1x} \\ & \quad - \eta_{1x} \phi_{a0x} \\ & = -\eta_1 \phi_{a0zz} - \frac{1}{2} \eta_0^2 \phi_{a0zzz} - \eta_0 \phi_{a1zz} \\ & \quad - \frac{1}{2} \phi_{a2z} \\ & \frac{1}{2} \omega_2 \eta_{0t} + \frac{1}{2} \omega_0 \eta_{2t} - \eta_0 \eta_{0x} \phi_{b0xz} - \eta_{0x} \phi_{b1x} \\ & \quad - \eta_{1x} \phi_{b0x} \\ & = -\eta_1 \phi_{b0zz} - \frac{1}{2} \eta_0^2 \phi_{b0zzz} - \eta_0 \phi_{b1zz} \\ & \quad - \frac{1}{2} \phi_{b2z} : z=0 \end{aligned} \right. \\ & \rho_a \left[ \omega_0 \left\{ \eta_1 \phi_{a0tz} + \frac{1}{2} \eta_0^2 \phi_{a0tzz} + \eta_0 \phi_{a1tz} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \phi_{a2t} \right\} + \frac{1}{2} \omega_2 \phi_{a0t} - \frac{1}{2} \eta_2 \right. \\ & \quad \left. - \{ \phi_{a0x} (\eta_0 \phi_{a0xz} + \phi_{a1x}) \right. \\ & \quad \left. + \phi_{a0z} (\eta_0 \phi_{a0zz} + \phi_{a1z}) \} \right] \\ & = \rho_b \left[ \omega_0 \left\{ \eta_1 \phi_{b0tz} + \frac{1}{2} \eta_0^2 \phi_{b0tzz} + \eta_0 \phi_{b1tz} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \phi_{b2t} \right\} + \frac{1}{2} \omega_2 \phi_{b0t} - \frac{1}{2} \eta_2 \right. \\ & \quad \left. + \{ \phi_{b0x} (\eta_0 \phi_{b0xz} + \phi_{b1x}) \right. \\ & \quad \left. + \phi_{b0z} (\eta_0 \phi_{b0zz} + \phi_{b1z}) \} \right] : z=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(A-3)$$

ただし、式 (A-1), (A-2) を解くと  $\omega_1=0$  となるので式 (A-3) でははじめから  $\omega_1$  は省略してある。

式 (A-1) は線形の微小振幅波理論と同じであるから解は容易に求まる。すなわち、第1次近似の波高で無次元化を行っているから、 $\eta_0$  を式 (2.14) の形におくと、式 (2.15), (2.16) が得られる。

第1次近似解を式 (A-2) に代入し、さらに  $\phi_{a1}, \phi_{b1}$  を次の式 (A-4) のように仮定すると、式 (A-2) の系は時間に関する常微分方程式となり、式 (2.17) ~ (2.19) が解として得られる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{a1} & = B_{a1}(t) + \alpha_a(t) \cosh(-z+d) \sin x \\ & \quad + \alpha_a(t) \cosh 2(-z+d) \cos 2x \\ \phi_{b1} & = B_{b1}(t) - \alpha_b(t) \cosh(z+d) \sin x \\ & \quad + \alpha_b(t) \cosh 2(z+d) \cos 2x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(A-4)$$

第2次近似解を式 (A-3) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \omega_0 \eta_{2t} + \frac{1}{2} \phi_{a2z} & = \sum_{m,n=1,3} E_{mn}' \sin mx \sin nt \\ \frac{1}{2} \omega_0 \eta_{2t} + \frac{1}{2} \phi_{b2z} & = \sum_{m,n=1,3} F_{mn}' \sin mx \sin nt \\ \frac{1}{2} \eta_2 + \frac{\omega_0}{2} \frac{\rho_a \phi_{a2t} - \rho_b \phi_{b2t}}{\rho_b - \rho_a} & \\ & = \sum_{m,n=1,3} G_{mn}' \sin mx \sin t : z=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(A-5)$$

となる。ここで、 $E_{mn}', F_{mn}', G_{mn}'$  は式 (2.23) で与えられている  $E_{mn}, F_{mn}, G_{mn}$  を用いて次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} E_{mn}' & = E_{mn} \\ F_{mn}' & = F_{mn} \\ G_{mn}' & = G_{mn} \end{aligned} \right\} (m, n) = (1, 3), (3, 1), (3, 3)$$

$$E_{11}' = E_{11} + \frac{\omega^2}{2}$$

$$F_{11}' = F_{11} + \frac{\omega_2}{2}$$

$$G_{11}' = G_{11} - \frac{\omega_2}{2\omega_0}$$

さらに、 $\phi_{a2}, \phi_{b2}$  を式 (2.21) のようにおくことにより、第3次近似解を求めることができる。

(1974.5.21・受付)