

有限要素法の基礎としての変分原理に関する一考察

ON THE VARIATIONAL PRINCIPLES IN THE FINITE ELEMENT METHOD

吉 田 裕*

By Yutaka Yoshida

1. 序 論

有限要素法の基礎関係式の誘導に関しては種々の定式過程が提示されており、それぞれの過程の基礎となる変分原理によって分類されている^{1)~3)}。有限要素法は、連続体を有限の大きさの要素の集合として理想化し、解析する方法であるから、与えられた連続体の中に設定される、個々の要素間の境界の数が有限の数となり、解析に先立って仮定される変位形ないしは応力分布形に対して原理的に要求される連続の条件を、要素境界に沿っては拘束条件およびそれに対応する Lagrange の乗数によって導入することによって、緩和することができる。したがって、基本的なポテンシャルエネルギー原理、相補エネルギー原理および Reissner の原理から、有限要素解析に対する修正変分原理を構成することができ、実際に数多くの一般化された形の変分原理が与えられ^{4)~11)}、具体的な有限要素の誘導およびそれらによる解析が行われてきた^{12)~19)}。

変分原理によって与えられるものは、仮定された変位分布形ないしは応力分布形を重み関数とした積分の意味における等価な平衡方程式ないしは適合条件式であり、その意味における近似解析法であることはいうまでもないが、これらの変分原理によって、要素分割を細かくしていったときに解が正しい解に収束するかどうかの保証が得られることになる。反面、基礎理論的に要求される適合条件を満たさない変位仮定に基づいて、個々の要素の剛性マトリックスを直接誘導して用いる非適合直接剛性法も、具体的な解析においては頻繁に使用されている。このような非適合要素の収束性に関して数学的に検討した論文²⁰⁾なども見られるが、一般的には、実際の数値計算結果によって正しい解に収束する状況が示されることによって、その要素の信頼性を考える手がかりとしてい

る。いいかえれば、非適合直接剛性法による解析においても、正しい解に収束する場合が多く存在するということである。

先に述べたように、これまでに与えられてきた種々の有限要素モデルは、対象とする連続体の全体系を基準とする立場から説明され与えられている。一方、プログラム化等の実際の解析過程においては、要素マトリックスを集合して全体系を構成するという意味で、要素単位が基準となるのが普通である。要素単位を基準とした具体的解析過程の信頼性を、実際の解析の対象としての全体系の面から理論的に保証しようとするのであるから、これまでに与えられてきた理論的立場に矛盾はない。しかし、非適合直接剛性法のように、全体系の面から原理的に必要とされる条件を満たさない形で、要素単位を基準として定式化される場合においても、正しい解に収束するものが多く存在するという、経験的事実を考えると、有限要素法の基礎としての変分原理を、要素単位を基準とする立場から整理し直してみることもまた意義のあることであると考えられる。

本論文では、独立に存在する要素単位を集合して全体系を構成するという立場から、これまでに個々に与えられてきた有限要素モデルを統一的に説明することができることを示し、発展的に非適合直接剛性法の位置づけを行う。なお、平衡方程式の表示等の形式上の煩雑さの中に論点が不明確になることを避けるために、本論文においては、対象を Kirchhoff の仮定に基づいた平板曲げの問題に限定して話をすすめているが、ベクトル表示している変位成分や力量の成分等の内容と平衡方程式の表記等を一般形に置き換えれば、ただちに論点を一般化することができる。

2. 基礎事項

初めに、Kirchhoff の仮定に基づいた平板曲げの問題

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

を対象として、次のような 6 つの変分汎関数を列挙する。

$$\Pi_p = \int_A \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{p} w \right\} dA - \int_{S_{eo}} \bar{\mathbf{f}}_e^T \mathbf{u}_e dS \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Pi_{M_p} = \int_A \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{p} w \right\} dA - \int_{S_{eo}} \bar{\mathbf{f}}_e^T \mathbf{u}_e dS - \int_{S_{eu}} \boldsymbol{\beta}_e^T \{ \mathbf{u}_e - \bar{\mathbf{u}}_e \} dS \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\Pi_{R_1} = \int_A \left\{ \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} - \bar{p} w \right\} dA - \int_{S_{eu}} \bar{\mathbf{f}}_e^T \mathbf{u}_e dS - \int_{S_{eu}} \mathbf{f}_e^T \{ \mathbf{u}_e - \bar{\mathbf{u}}_e \} dS \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\Pi_c = \int_A \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} dA - \int_{S_{eu}} \mathbf{f}_e^T \bar{\mathbf{u}}_e dS \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\Pi_{M_c} = \int_A \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} dA - \int_{S_{eu}} \mathbf{f}_e^T \bar{\mathbf{u}}_e dS - \int_{S_{eo}} \boldsymbol{\alpha}_e^T \{ \mathbf{f}_e - \bar{\mathbf{f}}_e \} dS \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\Pi_{R_2} = \int_A \left\{ \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \right\} dA - \int_{S_{eu}} \mathbf{f}_e^T \bar{\mathbf{u}}_e dS - \int_{S_{eo}} \mathbf{u}_e^T \{ \mathbf{f}_e - \bar{\mathbf{f}}_e \} dS \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 A は対象全体の面積、 S_e は対象の全外周、 S_{eo} は S_e のうち力学的境界条件の与えられている部分、 S_{eu} は幾何学的境界条件の与えられている部分、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は曲率のベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}$ は曲げおよびねじりモーメントのベクトルである。

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \langle -M_x \quad -M_y \quad -M_{xy} \rangle \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \langle w_{,xx} \quad w_{,yy} \quad 2w_{,xy} \rangle \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、 \bar{p} は与えられた外力、 w は面に垂直方向の変位、 \mathbf{f}_e は外周 S_e における境界力のベクトル、 \mathbf{u}_e は \mathbf{f}_e に対応する変位成分のベクトルである。なお、 $w_{,xx} \equiv \partial^2 w / \partial x^2$ 、……である。

$$\mathbf{f}_e^T = \langle Q_n \quad -M_{ns} \quad -M_n \rangle_e \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\mathbf{u}_e^T = \langle w \quad w_{,s} \quad w_{,n} \rangle_e \quad \dots\dots\dots (10)$$

さらに、 $\bar{\mathbf{f}}_e$ は S_{eo} 上に境界条件として与えられた力のベクトル、 $\bar{\mathbf{u}}_e$ は S_{eu} 上に境界条件として与えられた変位のベクトルである。 \mathbf{D} および \mathbf{N} は弾性定数のマトリックスである。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} \quad \dots\dots\dots (12)$$

また、 $\boldsymbol{\alpha}_e$ および $\boldsymbol{\beta}_e$ は、境界条件に対応する拘束条件に対応して導入された Lagrange の乗数のベクトルである。

式 (2) は、幾何学的境界条件を拘束条件とし、この条件に対応する Lagrange の乗数 $\boldsymbol{\beta}_e$ を導入して、式 (1) のポテンシャルエネルギー関数を修正したものである。

式 (2) の汎関数の変分は、次式のように示される。

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{M_p} = & - \int_A \{ M, {}^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \bar{p} \} \delta w dA \\ & + \int_{S_{eo}} \{ \mathbf{f}_e(\boldsymbol{\varepsilon}) - \bar{\mathbf{f}}_e \}^T \delta \mathbf{u}_e dS \\ & + \int_{S_{eu}} [\{ \mathbf{f}_e(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\beta}_e \}^T \delta \mathbf{u}_e \\ & - \{ \mathbf{u}_e - \bar{\mathbf{u}}_e \}^T \delta \boldsymbol{\beta}_e] dS \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

式 (5) は、力学的境界条件を拘束条件とし、この条件に対応する Lagrange の乗数 $\boldsymbol{\alpha}_e$ を導入して、式 (4) の相補エネルギー関数を修正したものである。式 (5) における応力場 $\boldsymbol{\sigma}$ が、平衡方程式

$$M, {}^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\sigma}) + \bar{p} = 0 \quad \text{in } A \quad \dots\dots\dots (14)$$

を満足するとき、式 (5) の汎関数の変分は、次式のように示される。

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{M_c} = & \int_{S_{eu}} \{ \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\mathbf{u}}_e \}^T \delta \mathbf{f}_e dS \\ & + \int_{S_{eo}} [\{ \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\alpha}_e \}^T \delta \mathbf{f}_e - \{ \mathbf{f}_e - \bar{\mathbf{f}}_e \}^T \\ & \cdot \delta \boldsymbol{\alpha}_e] dS \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

式 (13)～(15) から、変分問題が構成されるためには、仮定される変位関数ないしは応力分布形は、領域内においては、対応する Euler の微分方程式を満たすに十分なだけの微分まで存在し、連続であることが必要であり、境界においては、境界条件に対応する微分までが問題となることがわかる。

式 (3) は Reissner の変分汎関数であり、式 (6) は式 (3) に対応してつくられた汎関数である。

次に、本論の位置づけを明確にするために、対象の全体系を有限要素の集合として分割する立場について略述する。

3. 対象の全体系を有限要素の集合として分割すること

有限要素法は、連続体としての対象を有限の大きさの要素の集合として理想化し、定式化する。たとえば、対象領域内のすべての点で式 (14) の平衡方程式を満たし、対象の外周の境界で力学的境界条件を満たすような応力分布形 $\boldsymbol{\sigma}$ を仮定することができるならば、直接、式 (4) の相補エネルギー関数に基づいて定式化することができる。しかし、対象領域内のすべての点で式 (14) を満たすような応力分布形を仮定することは、一般的には、困難である。いま、分割された個々の要素内では平衡方程式を満足するような応力分布を仮定することができるものとし、対象の外周の境界 S_e および要素間の境界 S_i においては、平衡条件

$$\mathbf{f}_e - \bar{\mathbf{f}}_e = 0 \quad \text{on } S_{eo} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$f_i^+ + f_i^- - \bar{f}_i = 0 \text{ on } S_i \dots\dots\dots(17)$$

を拘束条件とし、これに対応する Lagrange の乗数 α を導入して、式 (4) を修正すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Pi_{M_c} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma dA \right] \\ & - \sum_i \left[\int_{S_i} \alpha_i^T \{ f_i^+ + f_i^- - \bar{f}_i \} dS \right] \\ & - \int_{S_{e\sigma}} \alpha_e^T \{ f_e - \bar{f}_e \} dS - \int_{S_{eu}} f_e^T \bar{u}_e dS \end{aligned} \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 A_m は個々の要素の面積、 S_i は要素間の境界を意味し、 \sum_i はすべての要素間の境界における、対応する値の総和を意味し、 \sum_m は各要素に関する対応す

る関数の総和を意味する。また、 S_i を共有する隣接する2つの要素の、その辺に対応する変数を肩つきの+と-によって区別している。

式 (18) における Lagrange の乗数 α は力量 f に対応する変位に等しいから、具体的な定式化においては、対象の外周の境界 S_e および各要素間の境界 S_i 上で、新たに変位 \bar{u} を、境界上で節点変位の関数として一義的に決まるように、また次の条件

$$\bar{u} = \bar{u}_e \text{ on } S_{eu} \dots\dots\dots(19)$$

を満たすように仮定し、次のように

$$\bar{u} = \alpha_i \text{ on } S_i \dots\dots\dots(20)$$

$$\bar{u} = \alpha_e \text{ on } S_{ee} \dots\dots\dots(21)$$

置き換えを行えば、式 (18) は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \Pi_{M_c} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma dA \right. \\ & \left. - \int_{S_m} \bar{u}^T f dS \right] + \int_{S_{ee}} \bar{u}^T \bar{f}_e dS \\ & + \sum_i \left[\int_{S_i} \bar{u}^T \bar{f}_i dS \right] \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

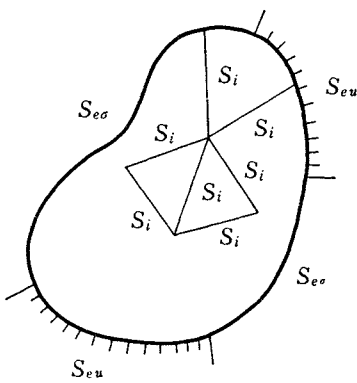
ここに、 S_m は各要素の全周を意味する。また、 f は要素境界における境界力のベクトルである。

式 (22) は、応力仮定の Hybrid 法⁹⁾の基礎となる変分汎関数である。式 (22) における最後の2つの項は要素境界上に実際に作用する線荷重の等価節点力を意味することになる。以上を図式化したものが図-1である。

次に、独立に存在する要素単位を集合して全体系を構成するという立場から、これまでに個々に与えられてきた有限要素モデルを統一的に説明することができることを示す。

4. 要素単位の集合として表わされたポテンシャルエネルギー系の変分原理

具体的な有限要素解析においては、個々の要素内では連続な変位関数が仮定される。いま、個々の要素を独立な単位と考えて、1つの要素 m の要素内と要素外周で閉じた形で式 (2) を適用すると、次式が得られる。



$$\begin{aligned} \sigma^T &= \langle -M_x - M_y - M_{xy} \rangle \\ f^T &= \langle Q_n - M_{ns} - M_n \rangle \\ u^T &= \langle w \quad w_{,s} \quad w_{,n} \rangle \end{aligned}$$

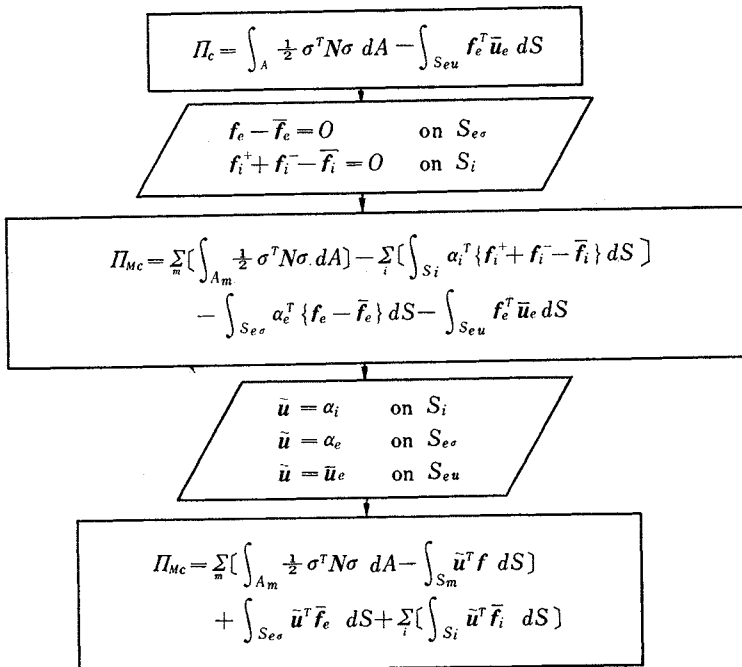


図-1 全体系を要素の集合として分割すること (応力仮定ハイブリッド)

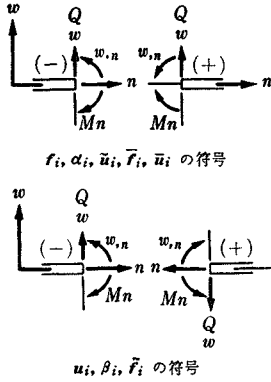


図-2 符号の規約

$$\Pi_{M_{pm}} = \int_{A_m} \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{p}w \right\} dA - \int_{S_{m\sigma}} \bar{f}^T \mathbf{u} dS - \int_{S_{mu}} \boldsymbol{\beta}^T \{ \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \} dS \dots (23)$$

ここで、全体系を構成する全要素の、それぞれに対応する関数を単純に加え合せてみると、次のような汎関数が得られる。

$$\begin{aligned} \Pi_{M_p} = & \sum_m \Pi_{M_{pm}} = \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{p}w \right\} dA \right] \\ & - \int_{S_{e\sigma}} \bar{f}_e^T \mathbf{u}_e dS - \int_{S_{eu}} \boldsymbol{\beta}_e^T \{ \mathbf{u}_e - \bar{\mathbf{u}}_e \} dS \\ & - \sum_i \left[\int_{S_{ie}} [-(\bar{f}_i^+)^T \mathbf{u}_i^+ + (\bar{f}_i^-)^T \mathbf{u}_i^-] dS \right. \\ & \left. + \int_{S_{iu}} [(\boldsymbol{\beta}_i^+)^T \{ \mathbf{u}_i^+ + \bar{\mathbf{u}}_i \} \right. \\ & \left. + (\boldsymbol{\beta}_i^-)^T \{ \mathbf{u}_i^- - \bar{\mathbf{u}}_i \}] dS \right] \dots (24) \end{aligned}$$

式 (24) においては、全体系における実際の外周の境界を S_e とし、要素分割によって仮想的に設定された内部要素間の境界を S_i として区別して表記している。なお、本論文を通して統一的な議論をすすめるために、やや煩雑になるが、力量および変位に関する各変数の符号を図-2 に示すように決める。図からわかるように(-)側の要素に関する変数の符号が、普通とられている符号と一致していることになる。

式 (24) の汎関数の停留条件から Euler の方程式が次のように得られることを示すことは容易である。

$$M_{,\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta} + \bar{p} = 0 \text{ in } A \dots (25)$$

$$f_e(\varepsilon) = \bar{f}_e \text{ on } S_{e\sigma} \dots (26)$$

$$u_e = \bar{u}_e, f_e(\varepsilon) = \boldsymbol{\beta}_e \text{ on } S_{eu} \dots (27)$$

$$f_i^+(\varepsilon) = -\bar{f}_i^+, f_i^-(\varepsilon) = \bar{f}_i \text{ on } S_{i\sigma} \dots (28)$$

$$u_i^+ = -\bar{u}_i, u_i^- = \bar{u}_i, f_i^+(\varepsilon) = -\boldsymbol{\beta}_i^+, f_i^-(\varepsilon) = \boldsymbol{\beta}_i^- \text{ on } S_{iu} \dots (29)$$

(1) 変位仮定のハイブリッド・モデル I

式 (24) における Lagrange の乗数 $\boldsymbol{\beta}$ は要素周辺上

における変位 \mathbf{u} に対応する力量に等しいから、対象全体の外周に位置する境界 S_e および各要素間に仮想的に設定される境界 S_i 上で、新たに力量 \bar{f} を一般化内力の関数として、次の条件

$$\bar{f}_i = -\bar{f}_i^+, \bar{f}_i = \bar{f}_i^- \text{ on } S_{i\sigma} \dots (30)$$

$$\bar{f}_i = \boldsymbol{\beta}_i^+, \bar{f}_i = \boldsymbol{\beta}_i^- \text{ on } S_{iu} \dots (31)$$

$$\bar{f}_e = \bar{f}_e \text{ on } S_{e\sigma} \dots (32)$$

$$\bar{f}_e = \boldsymbol{\beta}_e \text{ on } S_{eu} \dots (33)$$

を満たすように仮定し、置き換えを行えば、式 (24) は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \Pi_{M_p} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{p}w \right\} dA \right] \\ & - \int_{S_{e\sigma}} \bar{f}_e^T \mathbf{u}_e dS - \int_{S_{eu}} \bar{f}_e^T \{ \mathbf{u}_e - \bar{\mathbf{u}}_e \} dS \\ & - \sum_i \left[\int_{S_{i\sigma}} \bar{f}_i^T \{ \mathbf{u}_i^+ + \mathbf{u}_i^- \} dS \right] \\ = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{p}w \right\} dA \right. \\ & \left. - \int_{S_m} \bar{f}_B^T \mathbf{u}_B dS \right] + \int_{S_{eu}} \bar{f}_e^T \bar{\mathbf{u}}_e dS \dots (34) \end{aligned}$$

ここに、 f_B および u_B は、個々の要素の周辺における力量および変位を意味している。

式 (34) は、山本教授によって与えられた変位仮定のハイブリッド・モデル I⁸⁾ の基礎となる変分汎関数と等価な関数である。

式 (30) および式 (29) と (31) から、式 (34) に基づいた定式化においては、次の条件

$$\bar{f}_i^+ + \bar{f}_i^- = 0 \text{ on } S_{i\sigma} \dots (35)$$

$$f_i^+ + f_i^- = 0, \boldsymbol{\beta}_i^+ = \boldsymbol{\beta}_i^- \text{ on } S_{iu} \dots (36)$$

が強制されることがわかる。すなわち、作用外力としては要素内に分布する荷重 \bar{p} のみを対象としており、要素間の境界 S_i 上に作用する線荷重は対象としていない。

(2) 適合モデル

要素内の変位形が、それ自身において必然的に、要素境界に沿っての要素間の適合条件を満足するように仮定されるならば、すなわち、次の条件

$$u_i^+ + u_i^- = 0 \text{ on } S_i \dots (37)$$

が満たされる場合には、

$$u_i = -u_i^+ = u_i^- \dots (38)$$

と置くことによって、式 (24) の汎関数は次のように書き改められる。

$$\begin{aligned} \Pi_{M_p} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{p}w \right\} dA \right] \\ & - \int_{S_{e\sigma}} \bar{f}_e^T \mathbf{u}_e dS - \int_{S_{eu}} \boldsymbol{\beta}_e^T \{ \mathbf{u}_e - \bar{\mathbf{u}}_e \} dS \\ & - \sum_i \left[\int_{S_{i\sigma}} \{ \bar{f}_i^+ + \bar{f}_i^- \}^T \mathbf{u}_i dS \right] \end{aligned}$$

$$+ \int_{S_{iu}} \{-\beta_i^+ + \beta_i^-\}^T \{u_i - \bar{u}_i\} dS \quad (39)$$

さらに、仮定された変位形が要素境界に沿って与えられた幾何学的境界条件を満たすならば、すなわち、

$$u_i = \bar{u}_i \text{ on } S_{iu} \quad (40)$$

$$u_e = \bar{u}_e \text{ on } S_{eu} \quad (41)$$

であるならば、式 (39) の関数は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \Pi_{M_p} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^T D \epsilon - \bar{p} w \right\} dA \right] \\ & - \int_{S_{eo}} \bar{f}_e^T u_e dS - \sum_i \left[\int_{S_{io}} \bar{f}_i^T u_i dS \right] \quad (42) \end{aligned}$$

ここに、

$$\bar{f}_i = \bar{f}_i^+ + \bar{f}_i^- \text{ on } S_{io} \quad (43)$$

であり、 \bar{f}_i は S_{io} 上に実際に作用する線荷重を示している。式 (42) の汎関数は、最も基本的な有限要素モデルである、適合モデルの基礎となる変分汎関数と等価な関数である。

(3) 変位仮定のハイブリッド・モデル II

連続体内部に設定された内部要素間境界は、解析上仮想的に設定された境界であって、これらの内部要素間境界に沿っても、変位と応力の両方とも実際に連続である場合には、式 (24) において内部要素間境界に与えられた変位 u_i を、新たに付加される変数 \bar{u}_i と置き換え、さらに対象全体の外周の境界および内部要素間の境界上の変数 β を \bar{f} と書き換えることによって、次のような汎関数を与えることができる。

$$\Pi_{M_p} = \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^T D \epsilon - \bar{p} w \right\} dA \right]$$

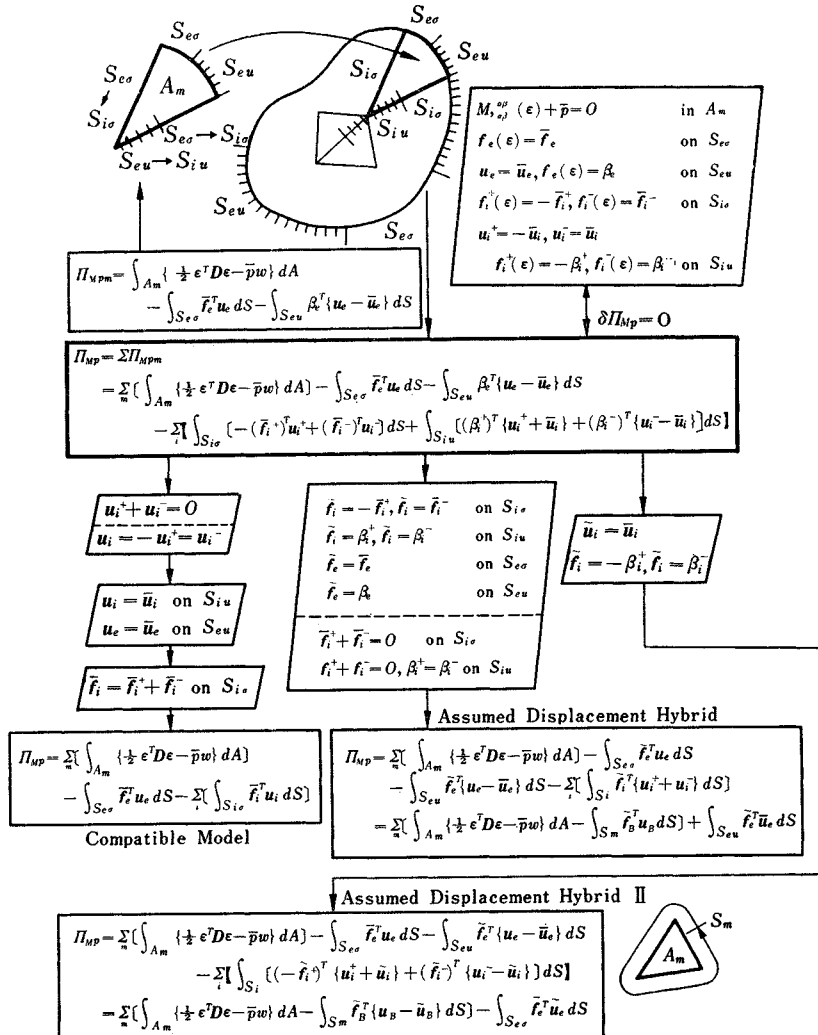


図-3 要素単位の集合として表わされたポテンシャルエネルギー系の変分汎関数

$$\begin{aligned}
& - \int_{S_{eo}} \bar{\mathbf{f}}_e^T \mathbf{u}_e dS - \int_{S_{eu}} \tilde{\mathbf{f}}_e^T \{ \mathbf{u}_e - \bar{\mathbf{u}}_e \} dS \\
& - \sum_i \left[\int_{S_i} [(-\tilde{\mathbf{f}}_i^+)^T \{ \mathbf{u}_i^+ + \bar{\mathbf{u}}_i \} \right. \\
& \quad \left. + (\tilde{\mathbf{f}}_i^-)^T \{ \mathbf{u}_i^- - \bar{\mathbf{u}}_i \} \right] dS \\
& = \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{p} w \right\} dA \right. \\
& \quad \left. - \int_{S_m} \tilde{\mathbf{f}}_B^T \{ \mathbf{u}_B - \bar{\mathbf{u}}_B \} dS \right] - \int_{S_{eo}} \bar{\mathbf{f}}_e^T \bar{\mathbf{u}}_e dS \\
& \quad \dots \dots \dots (44)
\end{aligned}$$

ここに、 $\bar{\mathbf{u}}_B$ は

$$\bar{\mathbf{u}}_B = \bar{\mathbf{u}}_e \quad \text{on } S_{eu} \dots \dots \dots (45)$$

を満たすように与えられるものとしている。

式 (28) および (29) から、式 (44) における変数 $\tilde{\mathbf{f}}_B$ は一般化内力の関数として要素境界上に与えられる力量であり、個々の要素において独立に与えることができるが、 $\bar{\mathbf{u}}_B$ は要素間境界を共有する隣接する要素間で同じ値をとるように仮定されなければならないことがわかる。また、式 (44) の停留条件から得られる Euler の方程式の 1 つとして、

$$\tilde{\mathbf{f}}^+ + \tilde{\mathbf{f}}^- = 0 \dots \dots \dots (46)$$

が与えられる。

式 (44) は、P. Tong によって与えられた変位仮定のハイブリッド・モデルⅡの基礎となる変分汎関数¹⁰⁾と等価な関数である。

以上に述べたポテンシャルエネルギー系の基礎方程式の誘導過程を、総括的に図式化したものが図-3 である。

5. 要素単位の集合として表わされた相補エネルギー系の変分原理

個々の要素内では、式 (14) の平衡方程式を満足するような、連続な応力分布 $\boldsymbol{\sigma}$ が仮定されるものとする。いま、1 つの要素 m を独立な単位と考えて、要素内と要素外周で閉じた形で式 (5) を適用すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\Pi_{M_{cm}} & = \int_{A_m} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} dA - \int_{S_{mu}} \mathbf{f}^T \bar{\mathbf{u}} dS \\
& \quad - \int_{S_{mo}} \boldsymbol{\alpha}^T \{ \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}} \} dS \dots \dots \dots (47)
\end{aligned}$$

ここで、全体系を構成する全要素の、それぞれに対応する関数を単純に加え合せてみると、次のような汎関数が得られる。

$$\begin{aligned}
\Pi_{M_c} & = \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} dA \right] - \int_{S_{eu}} \mathbf{f}_e^T \bar{\mathbf{u}}_e dS \\
& \quad - \int_{S_{eo}} \boldsymbol{\alpha}_e^T \{ \mathbf{f}_e - \bar{\mathbf{f}}_e \} dS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_i \left[\int_{S_{iu}} [(\mathbf{f}_i^+)^T \bar{\mathbf{u}}_i^+ + (\mathbf{f}_i^-)^T \bar{\mathbf{u}}_i^-] dS \right. \\
& \quad \left. + \int_{S_{io}} [(\boldsymbol{\alpha}_i^+)^T \{ \mathbf{f}_i^+ - \bar{\mathbf{f}}_i^+ \} \right. \\
& \quad \left. + (\boldsymbol{\alpha}_i^-)^T \{ \mathbf{f}_i^- - \bar{\mathbf{f}}_i^- \}] dS \right] \dots \dots \dots (48)
\end{aligned}$$

式 (48) において、付帯条件として

$$\bar{\mathbf{u}}_i^+ = \bar{\mathbf{u}}_i^- \quad \text{on } S_{iu} \dots \dots \dots (49)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i^+ = \boldsymbol{\alpha}_i^- \quad \text{on } S_{io} \dots \dots \dots (50)$$

が与えられると、式 (48) の汎関数は次のように書き改めることができる。

$$\begin{aligned}
\Pi_{M_c} & = \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} dA \right] - \int_{S_{eu}} \mathbf{f}_e^T \bar{\mathbf{u}}_e dS \\
& \quad - \int_{S_{eo}} \boldsymbol{\alpha}_e^T \{ \mathbf{f}_e - \bar{\mathbf{f}}_e \} dS \\
& \quad - \sum_i \left[\int_{S_{iu}} \{ \mathbf{f}_i^+ + \mathbf{f}_i^- \}^T \bar{\mathbf{u}}_i dS \right. \\
& \quad \left. + \int_{S_{io}} \boldsymbol{\alpha}_i^T \{ \mathbf{f}_i^+ + \mathbf{f}_i^- - \bar{\mathbf{f}}_i \} dS \right] \dots \dots \dots (51)
\end{aligned}$$

ここに、

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{u}}_i^+ = \bar{\mathbf{u}}_i^- \dots \dots \dots (52)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_i^+ = \boldsymbol{\alpha}_i^- \dots \dots \dots (53)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_i = \bar{\mathbf{f}}_i^+ + \bar{\mathbf{f}}_i^- \dots \dots \dots (54)$$

である。

式 (51) の汎関数の停留条件から、次のような Euler の方程式が得られる。

$$\mathbf{u}_e(\sigma) = \bar{\mathbf{u}}_e \quad \text{on } S_{eu} \dots \dots \dots (55)$$

$$\mathbf{f}_e = \bar{\mathbf{f}}_e, \quad \mathbf{u}_e(\sigma) = \boldsymbol{\alpha}_e \quad \text{on } S_{eo} \dots \dots \dots (56)$$

$$\mathbf{u}_i^+(\sigma) = -\bar{\mathbf{u}}_i, \quad \mathbf{u}_i^-(\sigma) = \bar{\mathbf{u}}_i \quad \text{on } S_{iu} \dots \dots \dots (57)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_i^+ + \mathbf{f}_i^- = \bar{\mathbf{f}}_i, \quad \mathbf{u}_i^+(\sigma) = -\boldsymbol{\alpha}_i, \quad \mathbf{u}_i^-(\sigma) = \boldsymbol{\alpha}_i \\
\text{on } S_{io} \dots \dots \dots (58)
\end{aligned}$$

(1) 応力仮定のハイブリッド・モデルⅠ

対象全体の外周に位置する境界 S_e および各要素間に仮想的に設定される境界 S_i 上で、新たに変位 $\bar{\mathbf{u}}$ を節点変位の関数として、次の条件

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{u}}_i \quad \text{on } S_{iu} \dots \dots \dots (59)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \boldsymbol{\alpha}_i \quad \text{on } S_{io} \dots \dots \dots (60)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_e = \bar{\mathbf{u}}_e \quad \text{on } S_{eu} \dots \dots \dots (61)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_e = \boldsymbol{\alpha}_e \quad \text{on } S_{eo} \dots \dots \dots (62)$$

を満たすように仮定し、置き換えを行えば、式 (51) は次のように書き改められる。

$$\begin{aligned}
\Pi_{M_c} & = \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} dA \right] \\
& \quad - \int_{S_{eu}} \mathbf{f}_e^T \bar{\mathbf{u}}_e dS - \int_{S_{eo}} \boldsymbol{\alpha}_e^T \{ \mathbf{f}_e - \bar{\mathbf{f}}_e \} dS \\
& \quad - \sum_i \left[\int_{S_i} \bar{\mathbf{u}}_i^T \{ \mathbf{f}_i^+ + \mathbf{f}_i^- \} dS - \int_{S_{io}} \bar{\mathbf{u}}_i^T \bar{\mathbf{f}}_i dS \right] \\
& = \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} dA - \int_{S_m} \bar{\mathbf{u}}_B^T \mathbf{f}_B dS \right]
\end{aligned}$$

$$+ \int_{S_{ee}} \bar{u}_e^T \bar{f}_e dS + \sum_i \left[\int_{S_{io}} \bar{u}_i^T \bar{f}_i dS \right] \dots\dots\dots (63)$$

ここに、 \bar{f}_i は要素間境界 S_{io} 上に実際に作用する線荷重を意味している。したがって、式 (63) の最後の 2 項は、 S_{ee} および S_{io} 上に作用する線荷重の等価節点力を与えることになる。

式 (63) の汎関数は、式 (22) に得られた汎関数と全く同じ内容のものであり、したがって、式 (63) は、T.H.H. Pian によって与えられた応力仮定のハイブリッド・モデル I⁶⁾ の基礎となる変分汎関数と等価な関数である。

(2) 平衡モデル

式 (51) を適用するにあたって、要素間境界 S_i は、解析のために連続体内部に仮想的に設定された境界であって、本来的に

$$f_i^+ + f_i^- = 0 \text{ on } S_i \dots\dots\dots (64)$$

したがって、 $\bar{f}_i = 0 \dots\dots\dots (65)$

であるという基本的立場を維持し、要素内に仮定される応力分布が、必然的に式 (64) および (65) を満たし、さらに本来の境界である、対象全体の外周に位置する境界において、次の条件

$$f_e = \bar{f}_e \text{ on } S_{ee} \dots\dots (66)$$

を満たすように仮定されるならば、式 (51) は次のように書き改めることができる。

$$\Pi_{Mc} = \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma dA \right] - \int_{S_{eu}} f_e^T \bar{u}_e dS \dots\dots (67)$$

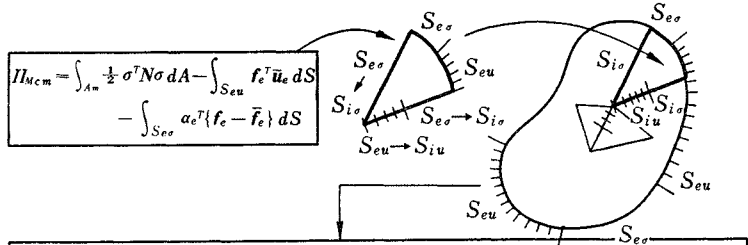
式 (67) の汎関数は、平衡モデルの基礎となる変分汎関数と等価な関数である。

(3) 応力仮定のハイブリッド・モデル II

連続体内部に設定された内部要素間境界は、解析上仮想的に設定された境界であって、これらの内部要素間境界に沿って、変位とともに力量も連続でなければならないという基本的立場

が維持される場合には、式 (48) において、要素間境界 S_i を共有する隣接する要素のそれぞれに対して、その境界辺上に与えられた力量 \bar{f}_i^+ および \bar{f}_i^- を、新たに S_i 上に仮定される変数 \tilde{f}_i と置き換え、さらに内部要素間境界および対象全体の外周の境界上に導入されている変数 α を \bar{u} と書き換えることによって、次のような汎関数を与えることができる。

$$\begin{aligned} \Pi_{Mc} &= \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma dA \right] - \int_{S_{eu}} f_e^T \bar{u}_e dS \\ &\quad - \int_{S_{ee}} \bar{u}_e^T \{f_e - \bar{f}_e\} dS \\ &\quad - \sum_i \left[\int_{S_i} [(\bar{u}_i^+)^T \{f_i^+ + \tilde{f}_i\} \right. \\ &\quad \left. + (\bar{u}_i^-)^T \{f_i^- - \tilde{f}_i\}] dS \right] \\ &= \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma dA \right] - \int_{S_m} \bar{u}_B^T \{f_B - \tilde{f}_B\} dS - \int_{S_{eu}} \tilde{f}_e^T \bar{u}_e dS \end{aligned}$$



$$\Pi_{Mc} = \sum_m \Pi_{Mc_m} = \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma dA \right] - \int_{S_{eu}} f_e^T \bar{u}_e dS - \int_{S_{ee}} \alpha_e^T \{f_e - \bar{f}_e\} dS - \sum_i \left[\int_{S_{iu}} [(\bar{f}_i^+)^T \bar{u}_i^+ + (f_i^-)^T \bar{u}_i^-] dS + \int_{S_{io}} [(\alpha_i^+)^T \{f_i^+ - \tilde{f}_i\} + (\alpha_i^-)^T \{f_i^- - \tilde{f}_i\}] dS \right]$$

$\begin{aligned} \bar{u}_i &= \bar{u}_i = \bar{u}_i & \text{on } S_{iu} \\ \alpha_i^+ &= \alpha_i^+ = \alpha_i & \text{on } S_{io} \\ \bar{f}_i &= \bar{f}_i^+ + \bar{f}_i^- & \end{aligned}$	$\begin{aligned} u_e(\sigma) &= \bar{u}_e & \text{on } S_{eu} \\ f_e &= \bar{f}_e, u_e(\sigma) = \alpha_e & \text{on } S_{ee} \\ u_i^+(\sigma) &= -\bar{u}_i, u_i^-(\sigma) = \bar{u}_i & \text{on } S_{iu} \\ f_i^+ + f_i^- &= \tilde{f}_i, u_i^+(\sigma) = -\alpha_i, u_i^-(\sigma) = \alpha_i & \text{on } S_{io} \end{aligned}$
---	---

$$\Pi_{Mc} = \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma dA \right] - \int_{S_{eu}} f_e^T \bar{u}_e dS - \int_{S_{ee}} \alpha_e^T \{f_e - \bar{f}_e\} dS - \sum_i \left[\int_{S_{iu}} \{f_i^+ + f_i^-\}^T \bar{u}_i dS + \int_{S_{io}} \alpha_i^T \{f_i^+ + f_i^- - \tilde{f}_i\} dS \right]$$

$\begin{aligned} \bar{u}_i &= \bar{u}_i & \text{on } S_{iu} \\ \bar{u}_i &= \alpha_i & \text{on } S_{io} \\ \bar{u}_e &= \bar{u}_e & \text{on } S_{eu} \\ \bar{u}_e &= \alpha_e & \text{on } S_{ee} \end{aligned}$	$\begin{aligned} f_i^+ + f_i^- &= 0 & \text{on } S_i \\ \bar{f}_i &= 0 & \text{on } S_{io} \\ f_e &= \bar{f}_e & \text{on } S_{ee} \end{aligned}$
--	---

Assumed Stress Hybrid Equilibrium Model

$\begin{aligned} \Pi_{Mc} &= \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma dA \right] - \int_{S_{eu}} f_e^T \bar{u}_e dS - \int_{S_{ee}} \bar{u}_e^T \{f_e - \bar{f}_e\} dS \\ &\quad - \sum_i \left[\int_{S_i} \bar{u}_i^T \{f_i^+ + f_i^-\} dS - \int_{S_{io}} \bar{u}_i^T \tilde{f}_i dS \right] \\ &= \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma dA - \int_{S_m} \bar{u}_B^T f_B dS \right] + \int_{S_{ee}} \bar{u}_e^T \bar{f}_e dS + \sum_i \left[\int_{S_{io}} \bar{u}_i^T \tilde{f}_i dS \right] \end{aligned}$	$\Pi_{Mc} = \sum_m \left[\int_{A_m} \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma dA \right] - \int_{S_{eu}} f_e^T \bar{u}_e dS$
--	---

図-4 (a)

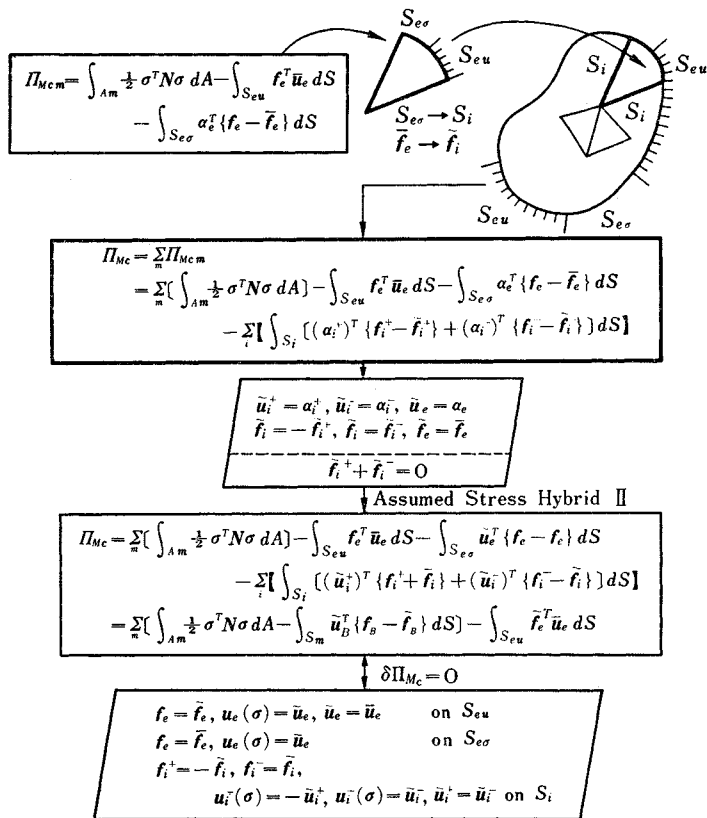


図-4 (b)

図-4 要素単位の集合として表わされた相補エネルギー系の変分汎関数

..... (68)

式 (68) から明らかなように、要素の周辺に新たに導入される変位 \bar{u}_B は、個々の要素において独立に与えることができるが、 \bar{f}_B は要素間境界を共有する隣接する要素間で同じ値をとるように、また次の条件

$\bar{f}_B = \bar{f}_e$ on S_{ee} (69)

を満たすように仮定されなければならない。

式 (68) の汎関数の停留条件から、次のような Euler の方程式が得られる。

$f_e = \bar{f}_e, u_e(\sigma) = \bar{u}_e, \bar{u}_e = \bar{u}_e$ on S_{eu} (70)

$f_e = \bar{f}_e, u_e(\sigma) = \bar{u}_e$ on S_{ee} (71)

$f_i^+ = -\bar{f}_i, f_i^- = \bar{f}_i, u_i^+(\sigma) = -\bar{u}_i^+, u_i^-(\sigma) = \bar{u}_i^-, \bar{u}_i^+ = \bar{u}_i^-$ on S_i (72)

式 (68) に得られた汎関数は、鷲津教授によって与えられた応力仮定のハイブリッド・モデルIIの基礎となる変分汎関数¹¹⁾と等価な関数である。

以上に述べた相補エネルギー系の基礎方程式の誘導過程を、総括的に図式化したものが図-4 である。

6. Reissner の変分原理の適用について

これまでに述べてきた汎関数における変数 α および β は、拘束条件としての平衡条件または適合条件に対応する Lagrange の乗数として、要素間境界 S_i および全体系の外周の境界 S_e 上に新たに導入された変数である。もし、要素内において、変位と応力の両方の分布を同時に、独立に仮定することを考えるならば、 α または β に対応する境界上の変数を、要素内に仮定された変位または応力の関数として導入することができる。

すなわち、式 (3) に与えられた Reissner の変分汎関数に基づいて、これを個々の要素 m に適用し、これらを単純に総和することによって、式 (24) に対応する汎関数が得られる。式 (30) および (31) においては、一般化内力の関数として新たに導入された要素間境界 S_i 上における力量 \bar{f} を、ここでは各要素内に仮定された応力 σ の関数として導入することによって、式 (34) に対応する関数として、次のような汎関数が得ら

れる。

$$\Pi_{R_1} = \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \sigma^T \epsilon - \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma - \bar{p} w \right\} dA - \int_{S_{eu}} \bar{f}_e^T u_e dS - \int_{S_{eu}} f_e^T \{u_e - \bar{u}_e\} dS - \sum_i \left[\int_{S_i} \bar{f}_i^T \{u_i^+ + u_i^-\} dS \right] \right] \dots\dots\dots (73)$$

ここに、

$\bar{f}_i = \bar{f}_i(\sigma) \dots\dots\dots (74)$

である。式 (74) の汎関数の停留条件から、次のような Euler の方程式が得られる。

$\epsilon = N \sigma, M, \alpha_{\beta}^{\alpha\beta}(\sigma) + \bar{p} = 0$ in A_m (75)

$f_e(\sigma) = \bar{f}_e$ on S_{ee} (76)

$u_e = \bar{u}_e$ on S_{eu} (77)

$u_i^+ + u_i^- = 0, f_i^+ = -\bar{f}_i, f_i^- = \bar{f}_i$ on S_i (78)

式 (73) における要素間境界 S_i 上の変数 \bar{f}_i は、境界 S_i を共有する隣接する2つの要素に対して共通の変数である。したがって、隣接する2つの要素のそれぞれの要素内に仮定される応力分布 σ の関数として表わされる要素間境界 S_i 上の力量 $-f_i^+$ および f_i^- が、本来的に同じ値をとるように仮定されない場合には、変数 \bar{f}_i はそれぞれの要素辺上の力量の線型結合として導入

することができる。すなわち、

$$\tilde{f}_i = -af_i^+ + bf_i^- \dots\dots\dots (79)$$

ここに、

$$f_i^+ = f_i(\sigma^+) \dots\dots\dots (80)$$

$$f_i^- = f_i(\sigma^-) \dots\dots\dots (81)$$

であり、 a および b は定数である。式 (73) の停留条件から式 (78) が得られるのであるから、式 (79) が意味のある仮定であるためには、式 (79) における定数 a および b は次の条件

$$1 - a - b = 0 \dots\dots\dots (82)$$

を満たすように決められなければならない。したがって、式 (79) は次のようになる。

$$\tilde{f}_i = -af_i^+ + (1-a)f_i^- \dots\dots\dots (83)$$

一方、式 (6) から式 (63) に対応する関数として、次のような汎関数が得られる。

$$\begin{aligned} \Pi_{R_2} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \sigma^T \epsilon - \frac{1}{2} \epsilon^T D \epsilon \right\} dA \right] \\ & - \int_{S_{eu}} f_e^T \tilde{u}_e dS - \int_{S_{ea}} u_e^T \{ f_e - \tilde{f}_e \} dS \\ & - \sum_i \left[\int_{S_i} \tilde{u}_i^T \{ f_i^+ + f_i^- \} dS - \int_{S_i} \tilde{u}_i^T \tilde{f}_i dS \right] \dots\dots\dots (84) \end{aligned}$$

ここに、

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(w) \dots\dots\dots (85)$$

である。応力 σ が要素内において平衡方程式を満足するとき、式 (84) の汎関数の停留条件から、次のような Euler の方程式が得られる。

$$\sigma = D \epsilon \quad \text{in } A_m \dots\dots\dots (86)$$

$$u_e = \tilde{u}_e \quad \text{on } S_{eu} \dots\dots\dots (87)$$

$$f_e = \tilde{f}_e \quad \text{on } S_{ea} \dots\dots\dots (88)$$

$$f_i^+ + f_i^- - \tilde{f}_i = 0 \quad \text{on } S_i \dots\dots\dots (89)$$

$$u_i^+ = -\tilde{u}_i, \quad u_i^- = \tilde{u}_i \quad \text{on } S_i \dots\dots\dots (90)$$

式 (84) における要素間境界 S_i 上の変数 \tilde{u}_i は、境界 S_i を共有する隣接する 2 つの要素に対して共通の変数である。したがって、隣接する 2 つの要素のそれぞれの要素内に仮定される変位分布から得られる要素間境界 S_i 上の変位 $-u_i^+$ および u_i^- が、本来的に同じ値をとるように仮定されない場合には、変数 \tilde{u}_i はそれぞれの要素辺上の変位の関数として、式 (83) と同じように、次のように導入することができる。すなわち、

$$\tilde{u}_i = -cu_i^+ + (1-c)u_i^- \dots\dots\dots (91)$$

ここに、 c は定数である。また、

$$u_i^+ = u_i(w^+) \dots\dots\dots (92)$$

$$u_i^- = u_i(w^-) \dots\dots\dots (93)$$

である。

7. 直接剛性法の位置づけについて

はじめに、式 (63) に与えられた応力仮定のハイブ

リッド法の基礎方程式の 1 つの適用例について述べる。式 (63) を適用するためには、まず個々の要素内で平衡方程式を満足するような応力分布を仮定しなければならない。しかし、応力・ひずみ関係式等の基礎関係式が明らかな対象に対しては、応力分布の代りに要素内の変位分布 w を与えることができる。すなわち、変位分布を一般化変位の関数として、たとえば多項式で仮定し、応力・ひずみ関係式から、多項式の係数ベクトルの関数として応力分布を表現し、式 (63) を適用するのである。この場合には、仮定された応力分布に対応する変位形が明確であるから、応力分布があらかじめ平衡方程式を満足するように仮定する必要はなく、式 (63) は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \Pi_{M_e} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left[\frac{1}{2} \epsilon^T(w) D \epsilon(w) - \bar{p} w \right] dA \right. \\ & \left. - \int_{S_m} \tilde{u}_B^T f_B(w) dS \right] + \int_{S_{ea}} \tilde{u}_e^T \tilde{f}_e dS \\ & + \sum_i \left[\int_{S_i} \tilde{u}_i^T \tilde{f}_i dS \right] \dots\dots\dots (94) \end{aligned}$$

式 (94) において要素周辺に導入される変位 \tilde{u} は、要素間境界 S_i を共有する隣接する 2 つの要素の、対応する辺上においては同じ値をとるように、個々の要素内に仮定した変位とは独立に、たとえば、節点変位の関数として新たに導入されるものである。

式 (94) は、変位仮定のハイブリッド・モデル II の基礎となる汎関数を変形したのとして P. Tong によって与えられ、具体的な適用例が示された基礎方程式¹⁰⁾と等価である。

以上の事実をふまえ、ここでは式 (73) および (84) を適用する際の変位と応力の両方を同時に、互に独立に仮定する代りに、独立な 2 つの変位分布 w_1 および w_2 を要素内に仮定することを考える。すなわち、ひずみ分布 ϵ および要素境界の変位 u は w_1 の関数として表現され、応力分布 σ および要素境界の力量 f は w_2 の関数として表わされるものとする。

いま、個々の要素内に仮定される、互に独立な 2 つの変位 w_1 および w_2 が両方とも、本来的には要素間境界に沿っての連続の条件を満たさないものとするれば、式 (73) および (84) における要素間境界上の変数 \tilde{f}_i および \tilde{u}_i は、境界 S_i を共有する隣接する 2 つの要素の、それぞれの要素内に仮定される応力または変位の関数として、式 (83) および (91) のように導入される。ここでは、これらの変数を、 S_i を共有する 2 つの要素から与えられる、それぞれの値の平均値にとるものとして、式 (83) および (91) の定数 a および c を

$$a = c = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (95)$$

のようにとるものとする。すなわち、

$$\tilde{f}_i = \frac{1}{2} \{-f_i^+ + f_i^-\} \dots\dots\dots (96)$$

$$\tilde{u}_i = \frac{1}{2} \{-u_i^+ + u_i^-\} \dots\dots\dots (97)$$

式 (96) および (97) を式 (73) および (84) に代入すると、次のような 2 つの汎関数を得られる。

$$\begin{aligned} \Pi_{R_1} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ (\boldsymbol{\sigma}(w_2))^T \boldsymbol{\varepsilon}(w_1) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}(w_2))^T \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}(w_2) - \bar{p} w_1 \right\} dA \right] \\ & - \int_{S_{eo}} \bar{f}_e^T \mathbf{u}_e(w_1) dS \\ & - \int_{S_{eu}} (\mathbf{f}_e(w_2))^T \{ \mathbf{u}_e(w_1) - \bar{u}_e \} dS \\ & - \sum_i \left[\int_{S_i} \frac{1}{2} \{-f_i^+(w_2) + f_i^-(w_2)\}^T \right. \\ & \left. \cdot \{u_i^+(w_1) + u_i^-(w_1)\} dS \right] \dots\dots\dots (98) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{R_2} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ (\boldsymbol{\sigma}(w_2))^T \boldsymbol{\varepsilon}(w_1) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}(w_1))^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(w_1) - \bar{p} w_2 \right\} dA \right] \\ & - \int_{S_{eu}} (\mathbf{f}_e(w_2))^T \bar{u}_e dS \\ & - \int_{S_{eo}} (\mathbf{u}_e(w_1))^T \{ \mathbf{f}_e(w_2) - \bar{f}_e \} dS \\ & - \sum_i \left[\int_{S_i} \frac{1}{2} \{-u_i^+(w_1) + u_i^-(w_1)\}^T \right. \\ & \left. \cdot \{f_i^+(w_2) + f_i^-(w_2)\} dS \right] \dots\dots\dots (99) \end{aligned}$$

式 (98) および (99) では、内部要素間境界 S_i は解析上連続体内部に仮想的に設定された境界であって、これらの要素間境界 S_i に沿って、変位も応力も連続であるという基本的立場を維持するものとしている。すなわち、要素間境界 S_i 上で

$$u_i^+ + u_i^- = 0 \dots\dots\dots (100)$$

$$f_i^+ + f_i^- = 0 \dots\dots\dots (101)$$

が満たされなければならないものとし、したがって

$$\tilde{f}_i = 0 \dots\dots\dots (102)$$

としている。

すなわち、式 (98) に基づく場合には Π_{R_1} の w_2 に関する変分 $\delta_{w_2} \Pi_{R_1} = 0$ より

$$\boldsymbol{\varepsilon}(w_1) = \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}(w_2) \text{ in } A_m \dots\dots\dots (103)$$

$$\mathbf{u}_e(w_1) = \bar{u}_e \text{ on } S_{eu} \dots\dots\dots (104)$$

$$u_i^+(w_1) + u_i^-(w_1) = 0 \text{ on } S_i \dots\dots\dots (105)$$

が得られ、 $\delta_{w_1} \Pi_{R_1} = 0$ より

$$M_{,\alpha\beta}{}^{\alpha\beta}(w_2) + \bar{p} = 0 \text{ in } A_m \dots\dots\dots (106)$$

$$\mathbf{f}_e(w_2) = \bar{f}_e \text{ on } S_{eo} \dots\dots\dots (107)$$

$$f_i^+(w_2) + f_i^-(w_2) = 0 \text{ on } S_i \dots\dots\dots (108)$$

が得られることになる。

また、式 (99) に基づく場合には $\delta_{w_1} \Pi_{R_2} = 0$ より

$$\boldsymbol{\sigma}(w_2) = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(w_1) \text{ in } A_m \dots\dots\dots (109)$$

$$\mathbf{f}_e(w_2) = \bar{f}_e \text{ on } S_{eo} \dots\dots\dots (110)$$

$$f_i^+(w_2) + f_i^-(w_2) = 0 \text{ on } S_i \dots\dots\dots (111)$$

が得られ、 $\delta_{w_2} \Pi_{R_2} = 0$ より

$$M_{,\alpha\beta}{}^{\alpha\beta}(w_1) + \bar{p} = 0 \text{ in } A_m \dots\dots\dots (112)$$

$$\mathbf{u}_e(w_1) = \bar{u}_e \text{ on } S_{eu} \dots\dots\dots (113)$$

$$u_i^+(w_1) + u_i^-(w_1) = 0 \text{ on } S_i \dots\dots\dots (114)$$

が得られることになる。

ここで、式 (98) および (99) に関する 1 つの事実を指摘することができる。いま、式 (98) および (99) の要素内部の項を、それぞれ Π_{I_1} および Π_{I_2} と書き、要素周辺に対応する境界の項を、それぞれ Π_{B_1} および Π_{B_2} と書くことにする。すなわち、

$$\Pi_{R_1} = \Pi_{I_1} + \Pi_{B_1} \dots\dots\dots (115)$$

$$\Pi_{R_2} = \Pi_{I_2} + \Pi_{B_2} \dots\dots\dots (116)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{I_1} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ (\boldsymbol{\sigma}(w_2))^T \boldsymbol{\varepsilon}(w_1) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}(w_2))^T \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}(w_2) - \bar{p} w_1 \right\} dA \right] \\ & \dots\dots\dots (117) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{I_2} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ (\boldsymbol{\sigma}(w_2))^T \boldsymbol{\varepsilon}(w_1) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}(w_1))^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(w_1) - \bar{p} w_2 \right\} dA \right] \\ & \dots\dots\dots (118) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{B_1} = & - \left[\int_{S_{eo}} \bar{f}_e^T \mathbf{u}_e(w_1) dS \right. \\ & + \int_{S_{eu}} (\mathbf{f}_e(w_2))^T \{ \mathbf{u}_e(w_1) - \bar{u}_e \} dS \\ & + \sum_i \left[\int_{S_i} \frac{1}{2} \{-f_i^+(w_2) + f_i^-(w_2)\}^T \right. \\ & \left. \cdot \{u_i^+(w_1) + u_i^-(w_1)\} dS \right] \dots\dots\dots (119) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{B_2} = & - \left[\int_{S_{eu}} (\mathbf{f}_e(w_2))^T \bar{u}_e dS \right. \\ & + \int_{S_{eo}} (\mathbf{u}_e(w_1))^T \{ \mathbf{f}_e(w_2) - \bar{f}_e \} dS \\ & + \sum_i \left[\int_{S_i} \frac{1}{2} \{-u_i^+(w_1) + u_i^-(w_1)\}^T \right. \\ & \left. \cdot \{f_i^+(w_2) + f_i^-(w_2)\} dS \right] \dots\dots\dots (120) \end{aligned}$$

である。

いま、 Π_{B_1} および Π_{B_2} の平均値をとってみると、式 (119) および (120) から、次のように示される。

$$\begin{aligned} \Pi_B = & \frac{1}{2} \{ \Pi_{B_1} + \Pi_{B_2} \} \\ = & - \left[\int_{S_e = S_{eo} + S_{eu}} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_e(w_1))^T \mathbf{f}_e(w_2) dS \right. \\ & + \sum_i \left[\int_{S_i} \frac{1}{2} \{-u_i^+(w_1)\}^T f_i^+(w_2) \right. \\ & \left. \left. + (u_i^-(w_1))^T f_i^-(w_2) \} dS \right] \right] \end{aligned}$$

$$= - \sum_m \left[\int_{s_m} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_B(w_1))^T \mathbf{f}_B(w_2) dS \right] \dots\dots\dots (121)$$

式 (121) から明らかなように、境界上の項の平均値は、個々の要素の要素周辺の項の単純な総和として表わされることがわかる。式 (121) より、式 (98) および (99) の境界の項 Π_{B_1} および Π_{B_2} は次のように書くことができる。

$$\Pi_{B_1} = \Pi_B + \Delta \Pi_B \dots\dots\dots (122)$$

$$\Pi_{B_2} = \Pi_B - \Delta \Pi_B \dots\dots\dots (123)$$

ここに

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_B = & - \left[\int_{s_{ea}} \left\{ \mathbf{u}_e^T \bar{\mathbf{f}}_e - \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e \right\} dS \right. \\ & + \int_{s_{eu}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{f}_e^T \mathbf{u}_e - \mathbf{f}_e^T \bar{\mathbf{u}}_e \right\} dS \\ & \left. + \sum_i \left[\int_{s_i} \frac{1}{2} \{ (\mathbf{u}_i^+)^T \mathbf{f}_i^- - (\mathbf{u}_i^-)^T \mathbf{f}_i^+ \} dS \right] \right] \dots\dots\dots (124) \end{aligned}$$

である。

要素内の2つの変位分布 w_1 と w_2 は、互に独立に仮定されたものであるから、互に無限に近づくことが可能である。式 (103) および (109) に対応して、付帯条件として

$$w_1 = w_2 \dots\dots\dots (125)$$

したがって、

$$\boldsymbol{\varepsilon}(w_2) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(w_1) \dots\dots\dots (126)$$

が与えられる場合には

$$w = w_1 = w_2 \dots\dots\dots (127)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \Pi_I = & \Pi_{I_1} = \Pi_{I_2} \\ = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}(w))^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(w) - \bar{p}w \right\} dA \right] \dots\dots\dots (128) \end{aligned}$$

となる。

ここで、式 (128) の Π_I と、 Π_{B_1} と Π_{B_2} の平均値として与えられた、式 (121) の Π_B とで構成される次のような関数を考えてみる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \Pi_I + \Pi_B \\ = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}(w))^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(w) - \bar{p}w \right\} dA \right. \\ & \left. - \int_{s_m} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_B(w))^T \mathbf{f}_B(w) dS \right] \dots\dots\dots (129) \end{aligned}$$

式 (129) は、一見してわかるように、個々の要素の要素内部と要素周辺とで閉じた形で与えられる関数の総和として与えられるものである。

一方、直接剛性法においては、要素内の変位分布を節点変位 \mathbf{u}_n の関数として

$$w = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{u}_n \dots\dots\dots (130)$$

のように与え、式 (130) を微分することによって、ひずみが

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P}\mathbf{u}_n \dots\dots\dots (131)$$

のように与えられる。したがって、1つの要素の節点力 \mathbf{f}_n は、仮想仕事の原理から、

$$(\delta \mathbf{u}_n)^T \mathbf{k}\mathbf{u}_n = (\delta \mathbf{u}_n)^T \mathbf{f}_n \dots\dots\dots (132)$$

のように得られる。ここに \mathbf{k} は要素の剛性マトリックスで

$$\mathbf{k} = \int_{A_m} \mathbf{P}^T \mathbf{D}\mathbf{P} dA \dots\dots\dots (133)$$

である。仮想仕事の原理より、1つの要素の節点力の意義は、

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{u}_n)^T \mathbf{f}_n = & \delta \left\{ \int_{A_m} \bar{p}w dA \right. \\ & \left. + \int_{s_m} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_B(w))^T \mathbf{f}_B(w) dS \right\} \dots\dots\dots (134) \end{aligned}$$

によって与えられるものである。したがって、式 (129) に与えられた汎関数は直接剛性法に対応する汎関数であることは明らかである。

式 (122) および (123) から、次の関係が成り立つことを示すことができる。

$$\Pi_{B_1} > \Pi_B > \Pi_{B_2} \quad \text{if } \Delta \Pi_B > 0 \dots\dots\dots (135)$$

$$\Pi_{B_1} = \Pi_B = \Pi_{B_2} \quad \text{if } \Delta \Pi_B = 0 \dots\dots\dots (136)$$

$$\Pi_{B_1} < \Pi_B < \Pi_{B_2} \quad \text{if } \Delta \Pi_B < 0 \dots\dots\dots (137)$$

上記の展開に先立って仮定された変位場 w は要素間の境界における適合条件を満たしていないものであった。したがって、もし式 (98) および (99) の汎関数に基づく2つの異なるハイブリッド・モデルの両方もが、次の条件

$$w_1 = w_2 \dots\dots\dots (138)$$

のもとで収束することが保証されるならば、非適合直接剛性法によるモデルもまた要素分割を細かくするとき、収束することがわかる。

8. 結 論

以上に、独立に存在する要素単位を集合して全体系を構成するという立場から、有限要素の基礎法として、これまでに個々に与えられてきた変分汎関数のそれぞれを、統一的に説明することができることを示し、発展的に非適合直接剛性法の位置づけを行った。

具体的な有限要素解析においては、たとえば、平面応力問題において要素内の変位を線型分布、したがって、ひずみ一定に仮定する場合とか、平板の曲げの問題に対して、たわみの分布を3次の多項式で仮定するといった場合が多く採られる。これらの変位仮定は、平衡方程式

の斉次形を満足するものである。また、具体的な応力仮定の定式化においても、要素内で平衡方程式の斉次形を満足するように応力分布を仮定する場合が普通である。

一方、工学上の問題においては、集中荷重とか線荷重といった理想化された外力を対象とする場合が多く存在し、有限要素法を適用する解析対象は、このような荷重条件としての特異点を対象とするほうがむしろ普通である。

したがって、要素内に仮定される変位分布ないしは応力分布が平衡方程式の斉次形を満足する場合には、要素間の境界上の線荷重などを対象とし得るかどうかということが重要になってくる。その意味で有効な汎関数は、式(42)の適合モデル、式(63)の応力仮定のハイブリッド・モデルIおよび式(84)の汎関数に基づくモデルの3つであることが本論文の考察によって明らかに示された。

有限要素法の定式化のもう1つの可能性は、要素内では変位または応力のどちらか一方を仮定する場合でも、要素周辺では、たとえば板曲げの問題におけるせん断力に対しては対応する変位を節点変位として残し、曲げおよびねじりモーメントに対してはモーメントの値そのものを節点における変数として残すといったように、節点に設定される変数を変位と力量との混合形にする方法である。このようなモデルは、Reissnerの変分原理に基づいた、いわゆる混合モデルとしてはよく知られているが、ハイブリッド型の変分汎関数に基づいて誘導することも容易であることが、本論文の考察から明らかである。

本論文において、変位仮定のハイブリッドおよび応力仮定のハイブリッドの2つのモデルに対応する変分汎関数と直接剛性法に対応する関数との間に存在する1つの事実を指摘し、非適合直接剛性法の位置づけを行った。直接剛性法の要素境界の項が、変位仮定のハイブリッドおよび応力仮定のハイブリッドに対応する2つの汎関数における境界上の項の間に狭まれるという事実から、ただちに非適合直接剛性法による解析結果が、要素分割を細かくとっていったときに、正しい解に収束するということができるかどうかは定かでないが、この事実は、直接剛性法の収束性を考える有力な手がかりになるものであると考える。

参 考 文 献

- 1) Pian, T.H. H. and Tong, P. : Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, Int. J. for Numerical Meth. in Eng., Vol. 1, 1969, pp. 3-28.
- 2) Fraeijns de Veubeke, B. : Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method, in Stress Analysis, Chap. 9, Wiley, London, 1965.

- 3) 鷲津久一郎 : 弾性学の変分原理概論, コンピュータによる構造工学講座, II-3-A, 培風館, 1972.
- 4) Melosh, R.J. : Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method, AIAA Jnl., Vol. 1, 1963, pp. 1631-1637.
- 5) Jones, R.E. : A Generalization of the Direct-Stiffness Method of Structural Analysis, AIAA Jnl., Vol. 2, 1964, pp. 821-826.
- 6) Pian, T.H.H. : Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distribution, AIAA Jnl., Vol. 2, 1964, pp. 1333-1336.
- 7) Herrmann, L.R. : A Bending Analysis for Plates, Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80, 1965, pp. 577-604.
- 8) Yamamoto, Y. : A Formulation of Matrix Displacement Method, Dept. of Aeronautics and Astronautics, M.I.T. 1966.
- 9) Green, B.E., Jones, R.E., McLay, R.W. and Strome, D.R. : Generalized Variational Principles in the Finite-Element Method, AIAA Jnl., Vol. 7, 1969, pp. 1254-1260.
- 10) Tong, P. : New Displacement Hybrid Finite Element Models for Solid Continua, Int. J. for Numerical Meth. in Eng., Vol. 2, 1970, pp. 73-83.
- 11) 鷲津久一郎・足立武司 : ハイブリッド型変分原理に関する一書, 日本鋼構造協会第5回大会研究集会, マトリックス構造解析法研究発表論文集, 1971, pp. 127-131.
- 12) Clough, R.W. and Tocher, J.L. : Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending, Proc. Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80, 1965, pp. 515-546.
- 13) Herrmann, L.R. : Finite Element Bending Analysis for Plates, J. of Engg. Mech. Div., ASCE, Vol. 93, EM 5, 1967, pp. 13-26.
- 14) Pian, T.H.H. and Tong, P. : Rationalization in Deriving Element Stiffness Matrix by Assumed Stress Approach, Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright Patterson A.F. Base, Ohio, 1968, pp. 441-469.
- 15) Anderheggen, E. : Finite Element Plate Bending Equilibrium Analysis, J. of Engg. Mech., Div., ASCE, Vol. 95, EM 4, 1969, pp. 841-857.
- 16) Allman, D.J. : Triangular Finite Elements for Plate Bending with Constant and Linearly Varying Bending Moments, Proc. I.U.T.A.M., Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures, University of Liege, Belgium, 1970, pp. 105-136.
- 17) 吉田 裕 : 有限要素マトリックスの定式過程に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第190号, 1971, pp. 49-59.
- 18) Yoshida, Y. : Equivalent Finite Elements on Different Bases, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J.T. Oden, R.W. Clough, and Y. Yamamoto (eds.), University of Alabama Press, 1972, pp. 133-149.
- 19) 吉田 裕・雨宮栄一郎・増田陳紀 : 立体構造解析のための薄板有限要素, 土木学会論文報告集, 第211号, 1973, pp. 19-28.
- 20) Oliveira, E.R.A. : Theoretical Foundations of the Finite Element Method, Int. J. Solids Structures, Vol. 4, 1968, pp. 929-952.