

## 二媒質写真測量学における解析的標定問題の理論的考察

THEORETICAL STUDY OF THE ANALYTICAL ORIENTATION  
PROBLEM IN THE TWO-MEDIUM PHOTOGRAMMETRY

岡本厚\*・森忠次\*\*

By Atsushi Okamoto and Chuji Mori

### 1. 緒 言

最近とみに重要になってきた海洋開発、また河川その他の水理現象の解明に写真測量学を利用することはきわめて有意義であると考えられる。この場合、写真的撮影方法には、一般的の測量用カメラを用いて空中から水中を撮影する方法と水中カメラを使用して直接水中で写真撮影を行う方法とがあり、前者を二媒質写真測量学、後者を水中写真測量学とよぶこととする。前者の利点は1枚の写真で広範囲の地域が撮影できること、水理実験の場合等には流れを乱すことなく遠隔撮影できることなどであり、その欠点は水が濁っている場合、水深が大きい場合等には水底をうまく撮影できないこと、撮影された写真是屈折の影響でひずんでいるため通常の図化機を用いて簡単には図化できないこと<sup>1), 2)</sup>などである。後者の場合にはおむね上の利点、欠点が逆になるが、水中測量用の精密水中カメラの開発が遅れているのが現状である。本研究では二媒質写真測量学について取扱うことにして、その基礎理論である二媒質写真の解析的標定問題についてこれまでの研究結果を比較検討し、かつ新しい考察を加えることとする。

二媒質写真の解析的標定問題の研究は1948年にオーストリアのK. Rinner<sup>3)</sup>によって開始され、その基礎理論はRinnerによってほぼ完成をみた。Rinnerは写真的標定要素の計算法について、実体写真的標定理論に基づき1対の二媒質写真的標定を相互標定と対地標定に分けて考える方法と単写真的標定理論に基づき個々の二媒質写真的外部標定要素を計算する方法を提案したが、これらの考え方方が以後の二媒質写真的標定問題の研究の根幹になっている。しかし、Rinnerの理論は屈折面が静水面である場合にのみ適用できるものであったし、ま

た、その理論が実際の場で使用されたときにどのような難易および精度をもつかについて実証的な研究がなされなかつたので以後発展をみなかつた。近年になって、1967年イスラエルのB. Schmutter and L. Bonfiglioli<sup>4)</sup>が二媒質写真的標定問題の研究に独自の考え方をとり入れ標定理論を整理したが、それはほとんどRinnerの域を出ないものであった。ついで、1971年に西ドイツのJ. Höhle<sup>5)</sup>が二媒質写真測量学および水中写真測量学に関する博士論文<sup>6)</sup>を発表し、その中で二媒質写真的標定問題を単写真的標定理論を用いて解析した。この研究は理論的および実証的に行われ、Höhleによってはじめて解析的二媒質写真測量が実際の場で一般の空中写真測量に対応する精度で実施できることが実証された。また、1971年2月より岡本厚、J. Höhleは1対の二媒質写真的解析的標定法についての研究<sup>7)</sup>を行い、任意の屈折面に適用できる一般的な方法を開発し、その実証的研究をも実施した。この標定法は独立モデル法（相互標定要素として左右写真的角度要素と屈折面を規定する要素を選ぶ）を使用したものであるが、その実証的研究によってモデル法を使った1対の二媒質写真的標定法の種々の特性が明らかにされた。1972年に入つて岡本・森は単写真的標定法に基づいて個々の二媒質写真的外部標定要素と屈折面を規定する要素を計算する方法について一連の研究<sup>8)</sup>を行い、2種類の一般的な方法を提案してそれらを実証的に検証した。また、1973年2月に岡本・桑波田は接続標定法を使って1対の二媒質写真を解析的に標定する方法<sup>9)</sup>を開発し、その実証的研究を実施して、再度実体写真的標定理論に基づく1対の二媒質写真的解析的標定問題における種々な特性を明らかにし、その実用化を完成した。

以上が二媒質写真的解析的標定問題の研究の流れであるが、本論文では著者らによって研究された各種方法の理論部分の比較考察を行うとともに、これらの方法を応用して考えられ、かつ二媒質写真を使った空中三角測量

\* 正会員 工修 京都大学助手 工学部交通土木工学科  
\*\* 正会員 工博 岡山大学教授 工学部土木工学科

を実施する場合有利であろうと思われる2種類の新しい方法を提案する。

## 2. 二媒質写真の解析的標定理論

## (1) 標定理論概說

二媒質写真の解析的標定法には、一般の空中写真の場合と同様に、単写真的標定理論に基づいて個々の二媒質写真的外部標定要素を計算する方法と、実体写真的標定の場合通常使用される方法、つまり1対の二媒質写真的標定を相互標定と対地標定の2段階に分けて実施する方法がある。前者の方法は一般に空中写真の場合には後者の方法より精度が悪いとされているが、二媒質写真的場合はその撮影条件によってかなり異なった結果を生じるであろう。というのは、もし屈折面の位置および形状が既知である場合は、標定を地上座標系を使って行えば、求めるべき要素は写真的外部標定要素 ( $\varphi, \omega, \kappa, X_0, Y_0, Z_0$ ) のみであり、標定問題が非常に簡単になるからである。一方、後者の場合、つまり実体写真的標定原理に基づいて二媒質写真的標定を行う場合は、相互標定段階において定義されるモデル座標系が任意にとられるから、たとえ屈折面の位置および形状が地上座標系において既知であっても、相互標定段階では屈折面の位置および形状をモデル座標系において規定する要素を相互標定要素として求めなければならず、未知数の数は増加する（もっとも屈折面の位置および形状が既知であれば、対地標定段階で対地標定要素の数を減ずることができるが）。このことは二媒質写真測量学において屈折面の位置および形状が既知の場合（一般に屈折面は高さ既知の静水面である場合が多いが）には、実体写真的原理を使って二媒質写真的標定を行うことが空中写真的場合と異なり有利とは限らないことを示している。

屈折面の位置および形状が未知である場合について考えると、1対の写真を対象とする場合二媒質写真的標定問題で求められるべき要素の数は単写真的標定理論に基づく場合も実体写真的標定原理を使用する場合も同じになる。たとえば、屈折面が未知平面である場合、平面を規定する要素は3個であるから、単写真的標定理論に従って標定を行う場合は求めるべき要素の数は、2枚の写真的外部標定要素12個と平面を規定する3個の要素の計15個であり、実体写真的標定原理を使用する場合は相互標定段階で通常の5個の外部標定要素とモデル座標系で平面を規定する3個の要素の計8個が必要となり、対地標定は通常の方法で行われるから7個の要素が使用され、全部で15個の要素が求められる。

以後二媒質写真の標定問題を単写真の標定理論に基づく

く場合と実体写真の標定原理を使用する場合とに分けて述べるが、この論文では標定要素を屈折面を規定する要素と写真の外部標定要素とにはっきり分けて考える手法をとる。なぜなら、このように考えることにより二媒質写真の標定問題の一般化が非常に容易に行えるからである。また、屈折法則を方向余弦を使って表わす<sup>9)</sup>ことにより、複雑な二媒質写真の標定問題の取扱いが非常に簡単化されている。

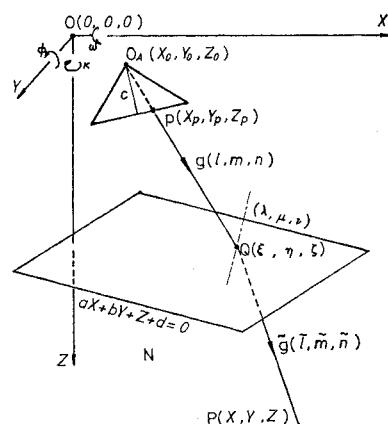
## (2) 単写真の標定理論に基づく二媒質写真の標定問題

#### a) 屈折光線を利用する方法

この方法については参考文献 7) で詳しく紹介されているので、ここでは屈折面が未知平面の場合についてその特性を明らかにする。まず地上座標系を  $(X, Y, Z)$  で表わし、標定要素はこの座標系において計算されるものとする。この座標系において屈折面の方程式は、

で表わされ、この場合求めるべき要素はカメラの外部標定要素 ( $\varphi, \omega, \kappa, X_0, Y_0, Z_0$ ) と屈折面の方程式 (1) の係数  $a, b, d$  の合計 9 個である。外部標定要素の定義は  $\omega, \varphi, \kappa$  をそれぞれ  $X, Y, Z$  軸のまわりの回転とし、回転の正方向を右ねじが座標軸の正方向に進む場合の回転方向とする。また平行移動量  $X_0, Y_0, Z_0$  は座標軸方向を正方向と定める。カメラの外部標定要素を上のように定義し、さらに回転移動量  $\omega, \varphi, \kappa$  の回転の順序を  $\varphi, \omega, \kappa$  の順とし、かつ座標軸そのものが回転するものと仮定する(図-1 参照)。

単写真の標定理論に基づく二媒質写真の標定を行うためには、まず最初に水中の点  $P(X, Y, Z)$  の写真像  $p$  の座標系  $(X, Y, Z)$  における空間的位置  $(X_p, Y_p, Z_p)$  を求める。写真像の写真座標を  $(x, y)$  とし、使用カメラの画面距離を  $c$  とすると、 $p(X_p, Y_p, Z_p)$  は次式のように書き表わすことができる。



### 図-1 屈折光線を利用する方法

$$\begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad \dots \dots \dots (2)$$

式(2)中には写真的撮影点の座標  $(X_0, Y_0, Z_0)$  が含まれているが、以後の計算に必要な方向余弦を求めるには、これらをとり除いたものを使用すると便利であるので、次のような置換を行う。すなわち、

$$\bar{X}_p = X_p - X_0, \bar{Y}_p = Y_p - Y_0, \bar{Z}_p = Z_p - Z_0 \quad \dots \dots \dots (2')$$

とすれば、入射光線  $g$  の方向余弦  $(l, m, n)$  は、

$$l = \frac{\bar{X}_p}{\sqrt{\bar{X}_p^2 + \bar{Y}_p^2 + \bar{Z}_p^2}}, m = \frac{\bar{Y}_p}{\sqrt{\bar{X}_p^2 + \bar{Y}_p^2 + \bar{Z}_p^2}}, n = \frac{\bar{Z}_p}{\sqrt{\bar{X}_p^2 + \bar{Y}_p^2 + \bar{Z}_p^2}} \quad \dots \dots \dots (3)$$

と書けるから、入射光線  $g$  の方程式は、

$$\frac{X - X_0}{l} = \frac{Y - Y_0}{m} = \frac{Z - Z_0}{n} = k \quad \dots \dots \dots (4)$$

となる。

また、屈折面の方程式は(1)式で与えられているから、入射光線  $g$  の屈折面への入射点  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  は簡単に、

$$Q(\xi, \eta, \zeta) = Q(kl + X_0, km + Y_0, kn + Z_0) \quad \dots \dots \dots (5)$$

で計算できる。ここに、補助数  $k$  は、

$$k = \frac{-aX_0 - bY_0 - Z_0 - d}{al + bm + n} \quad \dots \dots \dots (6)$$

である。

つぎに、屈折光線  $\tilde{g}$  の方向余弦  $(\tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n})$  は屈折の一般法則より、

$$\left. \begin{aligned} N\tilde{l} &= l - \lambda[\cos i - \sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 i}] \\ N\tilde{m} &= m - \mu[\cos i - \sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 i}] \\ N\tilde{n} &= n - \nu[\cos i - \sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 i}] \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (7)$$

として求められる。ここに、 $N$  は空気に対する水の屈折率、 $(\lambda, \mu, \nu)$  は光線の入射点における屈折面の法線の方向余弦であり、また  $\cos i$  は入射光線方向の単位ベクトル  $(l, m, n)$  と法線方向の単位ベクトル  $(\lambda, \mu, \nu)$  との内積であって、これらは次式で与えられる。

$$\text{grad}(aX + bY + Z + d) = (a, b, 1) \\ (\lambda, \mu, \nu) = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \right) \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$\cos i = l\lambda + m\mu + n\nu \quad \dots \dots \dots (9)$$

式(5), (7)を用いれば、屈折光線  $\tilde{g}(\tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n})$  の方程式は、

$$\frac{X - \xi}{\tilde{l}} = \frac{Y - \eta}{\tilde{m}} = \frac{Z - \zeta}{\tilde{n}} \quad \dots \dots \dots (10)$$

という形に書き表わすことができ、これを用いれば『水中の基準点  $P(X, Y, Z)$  がその写真像  $p(X_p, Y_p, Z_p)$  より求められる屈折光線  $\tilde{g}(\tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n})$  上に存在しなければならない』という条件を容易に書くことができ、この条件より写真的外部標定要素  $(\varphi, \omega, \kappa, X_0, Y_0, Z_0)$  および屈折面を規定する要素  $a, b, d$  が計算できる。つまり、水中の基準点  $P(X, Y, Z)$  を式(10)に代入し、式(10)が満足されるように  $(\varphi, \omega, \kappa, X_0, Y_0, Z_0, a, b, d)$  を決定すればよい。

数学的には、未知数の数が9個であるから、一義的な解を得るためにには、4個の水中の基準点の  $X, Y, Z$  座標と1個の基準点の  $X, Z$  座標または  $Y, Z$  座標が必要である。

実際に式(10)を解くにあたっては、まずこれを分解して、

$$\frac{X - \xi}{\tilde{l}} - \frac{Z - \zeta}{\tilde{n}} = 0, \quad \frac{Y - \eta}{\tilde{m}} - \frac{Z - \zeta}{\tilde{n}} = 0 \quad \dots \dots \dots (11)$$

のような形にし、さらにこれを変形して、

$$X = \xi + \frac{\tilde{l}}{\tilde{n}}(Z - \zeta), \quad Y = \eta + \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}(Z - \zeta) \quad \dots \dots \dots (12)$$

とする。式(12)が求める観測方程式であるが、標定計算を行なう際最小2乗法を適用するのが普通であるので、式(12)を変形して、

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= \xi + \frac{\tilde{l}}{\tilde{n}}(Z - \zeta) - X \\ \Delta Y &= \eta + \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}(Z - \zeta) - Y \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (13)$$

のような誤差方程式の形にしておくと便利である。ここで、 $\Delta X, \Delta Y$  は水中における基準点上の残存誤差を表す。

### b) Fermat の原理を利用する方法

屈折面上の点を見出すときには、Fermat の原理を使用すると便利である。ここでは Fermat の原理を利用して写真的外部標定要素、屈折面を規定する要素を求める方法について述べるが、具体的な場合は参考文献7)にゆずり、一般的な方針について説明を加えることにする。まず、光線の入射点  $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 、写真撮影点  $O_A(X_0, Y_0, Z_0)$ 、水中の基準点  $P(X, Y, Z)$  は Fermat の原理を満足しなければならない。換言すれば、写真撮影点  $O_A(X_0, Y_0, Z_0)$ 、屈折面の位置、および水中の基準点  $P(X, Y, Z)$  が与えられれば、それらに対応する光線の入射点が定まる。いまこれを  $Q'(\xi', \eta', \zeta')$  で表わせば(図-2参照)、1枚の二媒質写真的標定が完了した後では、 $Q'(\xi', \eta', \zeta')$  と写真像の地上座標系  $(X, Y, Z)$  における空間位置  $p(X_p, Y_p, Z_p)$  より計算される入射点  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  とは一致しなければならない。こ

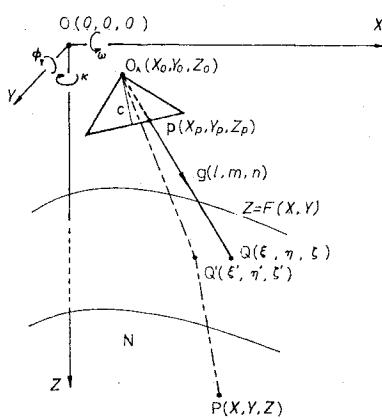


図-2 Fermat の原理を利用する方法

の条件を使えば、1枚の二媒質写真の外部標定要素  $(\varphi, \omega; \kappa, X_0, Y_0, Z_0)$  および屈折面を規定する要素が計算できる。

さて、屈折面が  $Z=F(X, Y)$  のような形で表わせるものと仮定して、この場合の Fermat の原理について考えてみよう。まず光線  $O_A Q' P$  の経路長は、

$$\begin{aligned} O_A Q' P &= \sqrt{(\xi' - X_0)^2 + (\eta' - Y_0)^2 + (\zeta' - Z_0)^2} \\ &\quad + \sqrt{(X - \xi')^2 + (Y - \eta')^2 + (Z - \zeta')^2} \end{aligned} \quad \dots \quad (14)$$

であり、光線の光路長  $L$  は、

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(\xi' - X_0)^2 + (\eta' - Y_0)^2 + (\zeta' - Z_0)^2} \\ &\quad + N \sqrt{(X - \xi')^2 + (Y - \eta')^2 + (Z - \zeta')^2} \end{aligned} \quad \dots \quad (15)$$

として表わされる。ここで、 $N$  は空気に対する水の屈折率である。Fermat によれば、光線は光路長  $L$  が極値をとるような経路を通過する。

いま、

$$L = G(\xi', \eta'; \zeta')$$

という一般的な形で考えてみると、光路長  $L$  の極値問題は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \xi'} &= \frac{\partial G}{\partial \xi'} + \frac{\partial G}{\partial \zeta'} \frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \eta'} &= \frac{\partial G}{\partial \eta'} + \frac{\partial G}{\partial \zeta'} \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (16)$$

$$\zeta' = F(\xi', \eta') \quad \dots \quad (17)$$

式 (16) を式 (15) を用いて詳しく書き下すと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \xi'} &= \frac{(\xi' - X_0) + (\zeta' - Z_0) \frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}}{\sqrt{(\xi' - X_0)^2 + (\eta' - Y_0)^2 + (\zeta' - Z_0)^2}} \\ &\quad - \frac{N \left[ (X - \xi') + (Z - \zeta') \frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'} \right]}{\sqrt{(X - \xi')^2 + (Y - \eta')^2 + (Z - \zeta')^2}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \eta'} &= \frac{(\eta' - Y_0) + (\zeta' - Z_0) \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}}{\sqrt{(\xi' - X_0)^2 + (\eta' - Y_0)^2 + (\zeta' - Z_0)^2}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &- \frac{N \left[ (Y - \eta') + (Z - \zeta') \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'} \right]}{\sqrt{(X - \xi')^2 + (Y - \eta')^2 + (Z - \zeta')^2}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (16)'$$

となる。この式 (16)' 中の  $Q'(\xi', \eta', \zeta')$  は標定が完了した後は  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  と一致しなければならない。すなわち、式 (16)' 中の  $Q'(\xi', \eta', \zeta')$  のかわりに  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  を用いても式 (16)' は満足されなければならない。ところが、 $Q(\xi, \eta, \zeta)$  は写真的外部標定要素と屈折面を規定する要素の関数（たとえば、屈折面が未知平面の場合  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  は式 (5) で与えられる）であるから、式 (16)' は写真的外部標定要素と屈折面を規定する要素の関数である。つまり、

$$\left. \begin{aligned} &(\xi - X_0) + (\zeta - Z_0) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \\ &\quad - \frac{N \left[ (X - \xi) + (Z - \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right]}{\sqrt{(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 + (Z - \zeta)^2}} = 0 \\ &(\eta - Y_0) + (\zeta - Z_0) \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \\ &\quad - \frac{N \left[ (Y - \eta) + (Z - \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right]}{\sqrt{(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 + (Z - \zeta)^2}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (18)$$

は写真的外部標定要素と屈折面を規定する要素が満たさなければならない条件である。このことは逆に式 (18) を必要な数の基準点についてたてれば、それより未知数（写真的外部標定要素および屈折面を規定する要素）が求められることを示している。

実際に式 (18) を用いて写真的外部標定要素と屈折面を規定する要素を求める場合、測定値（写真座標、使用カメラの内部標定要素、基準点座標その他）が誤差を含んでいることが予想されるので、式 (18) の分母が 0 に近い場合には得られた未知数の精度が悪くなることがある。このような欠点を避けるために、式 (18) の分母を払ったものを考え、これを観測方程式とする。つまり、

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{(\xi - X_0)^2 + (\eta - Y_0)^2 + (\zeta - Z_0)^2} \\ \beta &= \sqrt{(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 + (Z - \zeta)^2} \end{aligned}$$

とおき、式 (18) を

$$\left. \begin{aligned} &\beta \left\{ (\xi - X_0) + (\zeta - Z_0) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right\} \\ &\quad - \alpha N \left\{ (X - \xi) + (Z - \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right\} = 0 \\ &\beta \left\{ (\eta - Y_0) + (\zeta - Z_0) \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right\} \\ &\quad - \alpha N \left\{ (Y - \eta) + (Z - \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (18)$$

のような形に書き直し、これを写真的外部標定要素と屈

折面を規定する要素を求めるための観測方程式とする。すなわち、式(18)から明らかなように、この式(18)'は屈折点  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  の座標の関数であって、誤差がこの式によって与えられるものと考えられるわけである。

### (3) 実体写真の標定理論に基づく二媒質写真の解析的標定問題

#### a) 独立モデル法による1対の二媒質写真の解析的相互標定

(2) では単写真の標定理論に基づく二媒質写真の解析的標定問題を取扱ってきたが、つぎに実体写真の標定理論に基づく二媒質写真の標定問題について検討を加えることにする。ここでは、そのうち独立モデル法による1対の二媒質写真の相互標定法について述べるが、その詳細は参考文献6)に示されているので、屈折面が平面の場合の1対の二媒質写真の相互標定法を紹介するにとどめておく。

まず、モデル座標系  $(X, Y, Z)$  を次のように決定する。左写真の投影中心  $O_1$  を原点とし、 $X$  軸は左右の投影中心を結ぶ線分  $\overrightarrow{O_1 O_2}$  の方向にとり、 $Z$  軸は  $X$  軸に直角に下方にとる。また、 $Y$  軸は  $X, Z$  両軸に直交するように選ぶ(図-3 参照)。このようにモデル座標系を定義し、さらに左右カメラの外部標定要素は(2)の定義に従うものとする。屈折面はこのモデル座標系で、

$$aX + bY + Z + d = 0$$

で与えられるから、この場合の1対の二媒質写真の相互標定要素は  $(\varphi_1, \kappa_1, \varphi_2, \omega_2, \kappa_2, a, b, d)$  の8個である。以上のようにモデル座標系および相互標定要素を定義すると、1対の二媒質写真の相互標定を行うに必要な水中の屈折光線  $\tilde{g}_1(\tilde{l}_1, \tilde{m}_1, \tilde{n}_1)$  と  $\tilde{g}_2(\tilde{l}_2, \tilde{m}_2, \tilde{n}_2)$  (図-3 参照)の交会条件は次のようにして誘導できる。

まず、左右の写真像  $p_1, p_2$  のモデル座標系  $(X, Y, Z)$  における空間位置を  $p_1(X_{p1}, Y_{p1}, Z_{p1})$ ,  $p_2(X_{p2}, Y_{p2}, Z_{p2})$  とすると、これらは次のように書ける。左写

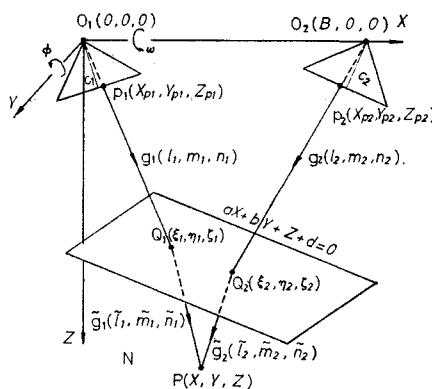


図-3 独立モデル法による相互標定法

真像については、

$$\begin{pmatrix} X_{p1} \\ Y_{p1} \\ Z_{p1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & 0 & \sin \varphi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & 0 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

ここに、 $(x_1, y_1)$  はコンパレーターによる左側写真座標測定値であり、 $c_1$  は左側カメラの画面距離である。また、右写真像については、

$$\begin{pmatrix} X_{p2} \\ Y_{p2} \\ Z_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_2 & -\sin \omega_2 \\ 0 & \sin \omega_2 & \cos \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

であり、 $(x_2, y_2)$  はコンパレーターによる右側写真座標測定値、 $c_2$  は右側カメラの画面距離を表わす。また、 $B$  は左右カメラの  $X$  方向の距離、すなわちこの場合は基線長である。

以下については、(2) a) の場合と全く同様にして、左右両方の光線についての計算を行えば、求める対応する2本の屈折光線  $\tilde{g}_1(\tilde{l}_1, \tilde{m}_1, \tilde{n}_1)$  と  $\tilde{g}_2(\tilde{l}_2, \tilde{m}_2, \tilde{n}_2)$  は次のような形で得ることができる。

$$\tilde{g}_1 : \frac{X-\xi_1}{\tilde{l}_1} = \frac{Y-\eta_1}{\tilde{m}_1} = \frac{Z-\zeta_1}{\tilde{n}_1} \quad \dots \dots \dots \quad (21)$$

$$\tilde{g}_2 : \frac{X-\xi_2}{\tilde{l}_2} = \frac{Y-\eta_2}{\tilde{m}_2} = \frac{Z-\zeta_2}{\tilde{n}_2} \quad \dots \dots \dots \quad (22)$$

これら対応する2本の屈折光線の交会条件は、

$$|S| = \begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_2 & \tilde{l}_1 & \tilde{l}_2 \\ \eta_1 - \eta_2 & \tilde{m}_1 & \tilde{m}_2 \\ \zeta_1 - \zeta_2 & \tilde{n}_1 & \tilde{n}_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (23)$$

である。この場合相互標定要素は  $(\varphi_1, \kappa_1, \varphi_2, \omega_2, \kappa_2, a, b, d)$  の8個であるから、8個の標定点について交会条件(23)をたて、それらを連立させて解けば数学的には相互標定要素を一義的に求めることができる。

#### b) 接続標定法による1対の二媒質写真の解析的相互標定

ここでは接続標定法に基づく1対の二媒質写真の相互標定法について述べるが、この方法についてもその詳細を参考文献8)に報告してあるので、(3) a) の場合と同様屈折面が平面の場合についてのみ簡単に説明する。

まず、モデル座標系を次のように選ぶ。すなわち、左写真の投影中心  $O_1$  を原点とし、 $Z$  軸は鉛直下方にとる。 $X$  軸については、左写真の投影中心  $O_1$  と右写真の投影中心に最初の近似値を与えたときの位置を含む鉛直面を考え、その鉛直面内で  $Z$  軸に直角に  $\overrightarrow{O_1 O_2}$  の方向にとる。 $Y$  軸は、 $X, Z$  軸に直交するように選ぶ(図-1

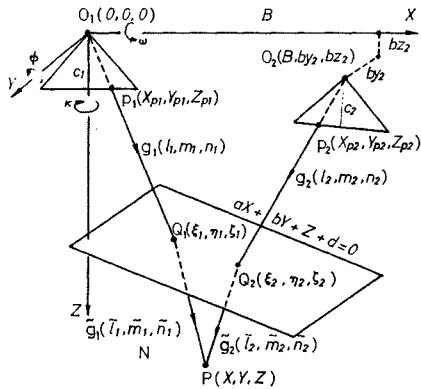


図-4 接続標定法による相互標定法

4 参照)。

この座標系において屈折面の方程式は,

$$Ax + bY + Z + d = 0$$

で表わされるから、この場合の相互標定要素は  $(\varphi_2, \omega_2, \kappa_2, by_2, bz_2, a, b, d)$  の 8 個である。この 8 個の相互標定要素を決定するに必要な水中の屈折光線  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$  (図-4 参照) の交会条件は (3) a) の場合と全く同様にして次のように誘導できる。

まず、左右の写真像  $P_1, P_2$  のモデル座標系 ( $X, Y, Z$ ) における空間位置は、

左写真像 :

$$\begin{pmatrix} X_{p1} \\ Y_{p1} \\ Z_{p1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \dots \quad (24)$$

右写真像 :

$$\begin{pmatrix} X_{p2} \\ Y_{p2} \\ Z_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_2 & -\sin \omega_2 \\ 0 & \sin \omega_2 & \cos \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} by_2 \\ bz_2 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \quad (25)$$

として求められる。以後については、(2) a) の場合と全く同じ手法で左右両方の光線についての計算を行えば、この場合も対応する 2 本の屈折光線  $\tilde{g}_1(\tilde{l}_1, \tilde{m}_1, \tilde{n}_1)$  と  $\tilde{g}_2(\tilde{l}_2, \tilde{m}_2, \tilde{n}_2)$  は次の形で与えられる。

$$\tilde{g}_1 : \frac{X - \xi_1}{\tilde{l}_1} = \frac{Y - \eta_1}{\tilde{m}_1} = \frac{Z - \zeta_1}{\tilde{n}_1} \dots \quad (26)$$

$$\tilde{g}_2 : \frac{X - \xi_2}{\tilde{l}_2} = \frac{Y - \eta_2}{\tilde{m}_2} = \frac{Z - \zeta_2}{\tilde{n}_2} \dots \quad (27)$$

これら対応する 2 本の屈折光線  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$  の交会条件は、

$$|S| = \begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_2 & \tilde{l}_1 & \tilde{l}_2 \\ \eta_1 - \eta_2 & \tilde{m}_1 & \tilde{m}_2 \\ \zeta_1 - \zeta_2 & \tilde{n}_1 & \tilde{n}_2 \end{vmatrix} = 0 \dots \quad (28)$$

である。この場合相互標定要素は  $(\varphi_2, \omega_2, \kappa_2, by_2, bz_2, a, b, d)$  の 8 個であるから、8 個の標定点について交会

条件 (28) をたて、これらを連立させて解けば数学的には相互標定要素が一義的に決定できる。

## c) 交会条件 (23) および (28) の一次化

交会条件 (23)、および (28) は非線形であるので、まずこれらを一次化し、それら一次化されたものを誤差方程式と考えて、8 個以上の標定点について誤差方程式をたて、最小 2 乗法を使って相互標定要素を計算する。このためには、相互標定要素  $(\varphi_1, \kappa_1, \varphi_2, \omega_2, \kappa_2, a, b, d)$  または  $(\varphi_2, \omega_2, \kappa_2, by_2, bz_2, a, b, d)$  を近似値と微少補正量に分解する。すなわち、

$$\varphi_1 = \varphi_{20} + \Delta \varphi_1, \quad \kappa_1 = \kappa_{20} + \Delta \kappa_1, \quad \varphi_2 = \varphi_{20} + \Delta \varphi_2,$$

$$\omega_2 = \omega_{20} + \Delta \omega_2, \quad \kappa_2 = \kappa_{20} + \Delta \kappa_2, \quad a = a_0 + \Delta a,$$

$$b = b_0 + \Delta b, \quad d = d_0 + \Delta d$$

または、

$$\varphi_2 = \varphi_{20} + \Delta \varphi_2, \quad \omega_2 = \omega_{20} + \Delta \omega_2, \quad \kappa_2 = \kappa_{20} + \Delta \kappa_2,$$

$$by_2 = by_{20} + \Delta by_2, \quad bz_2 = bz_{20} + \Delta bz_2, \quad a = a_0 + \Delta a,$$

$$b = b_0 + \Delta b, \quad d = d_0 + \Delta d$$

とおいて、交会条件 (23) または (28) をこれらの微少補正量についてテイラー展開すると、

$$|S|_0 + \left( \frac{\partial |S|}{\partial \varphi_1} \right)_0 \Delta \varphi_1 + \left( \frac{\partial |S|}{\partial \kappa_1} \right)_0 \Delta \kappa_1 + \left( \frac{\partial |S|}{\partial \varphi_2} \right)_0 \Delta \varphi_2 + \left( \frac{\partial |S|}{\partial \omega_2} \right)_0 \Delta \omega_2 + \left( \frac{\partial |S|}{\partial \kappa_2} \right)_0 \Delta \kappa_2 + \left( \frac{\partial |S|}{\partial a} \right)_0 \Delta a + \left( \frac{\partial |S|}{\partial b} \right)_0 \Delta b + \left( \frac{\partial |S|}{\partial d} \right)_0 \Delta d = 0 \dots \quad (23)'$$

または、

$$|S|_0 + \left( \frac{\partial |S|}{\partial \varphi_2} \right)_0 \Delta \varphi_2 + \left( \frac{\partial |S|}{\partial \omega_2} \right)_0 \Delta \omega_2 + \left( \frac{\partial |S|}{\partial \kappa_2} \right)_0 \Delta \kappa_2 + \left( \frac{\partial |S|}{\partial by_2} \right)_0 \Delta by_2 + \left( \frac{\partial |S|}{\partial bz_2} \right)_0 \Delta bz_2 + \left( \frac{\partial |S|}{\partial a} \right)_0 \Delta a + \left( \frac{\partial |S|}{\partial b} \right)_0 \Delta b + \left( \frac{\partial |S|}{\partial d} \right)_0 \Delta d = 0 \dots \quad (28)'$$

となる。ただし、 $|S|_0$  は交会条件の近似値を表わす。

ここで、交会条件 (23) および (28) を、

$$|S| = \begin{vmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & I \end{vmatrix} = 0$$

のような一般的な形で考え、相互標定要素を  $\alpha_i$  で代表させるものとすると、交会条件の近似値  $|S|_0$  は、

$$|S|_0 = \begin{vmatrix} A_0 & D_0 & G_0 \\ B_0 & E_0 & H_0 \\ C_0 & F_0 & I_0 \end{vmatrix}$$

となり、未知数の係数は、

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial A}{\partial \alpha_i} \right)_0 D_0 &= \left( \frac{\partial A}{\partial \alpha_i} \right)_0 D_0 G_0 \\ \left( \frac{\partial B}{\partial \alpha_i} \right)_0 E_0 &= \left( \frac{\partial B}{\partial \alpha_i} \right)_0 E_0 H_0 \\ \left( \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} \right)_0 F_0 &= \left( \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} \right)_0 F_0 I_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial D}{\partial \alpha_i} \right)_0 G_0 &= \left( \frac{\partial D}{\partial \alpha_i} \right)_0 A_0 G_0 \\ \left( \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} \right)_0 H_0 &= \left( \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} \right)_0 B_0 H_0 \\ \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \right)_0 I_0 &= \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \right)_0 C_0 I_0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} A_0 D_0 \left( \frac{\partial G}{\partial \alpha_i} \right)_0 \\ + B_0 E_0 \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} \right)_0 \\ C_0 F_0 \left( \frac{\partial I}{\partial \alpha_i} \right)_0 \end{vmatrix}$$

で表わされる。未知数の係数内に含まれる行列式  $|S|$  の各要素の偏微分を求めるためには、合成関数の微分法の手法を用いると割合簡単に計算が行える。

式 (23)' または式 (28)' を観測方程式とし、8 個以上の標定点について誤差方程式をたて、それらから正規方程式をつくって解けば未知数の微少補正量が得られる。標定要素の近似値の精度がよくない場合は繰返し計算が必要である。

#### d) モデル座標の計算および対地標定

モデル座標の計算および対地標定は通常と全く同じ方法により行われるのでその説明はここでは省略する。

#### (4) 単写真の標定理論と実体写真の標定理論を併用した場合の1対の二媒質写真の標定問題

いま、(2)の場合と全く同様に二媒質写真の標定が地上座標系 ( $X, Y, Z$ ) を用いて行われるものとし、屈折面は未知平面である仮定する。この場合二媒質写真の標定要素は左側写真についてカメラの外部標定要素 ( $\varphi_1, \omega_1, \kappa_1, X_{01}, Y_{01}, Z_{01}$ ) および屈折面の方程式の係数  $a, b, d$  の9個であり、右側写真についても同様にカメラの外部標定要素 ( $\varphi_2, \omega_2, \kappa_2, X_{02}, Y_{02}, Z_{02}$ ) および屈折面を規定する要素  $a, b, d$  の9個である。したがって、1対の二媒質写真では、 $a, b, d$  が左右の写真について共通であることを考慮して、標定要素の数が15個となる。単写真の標定理論に基づくこれら標定要素の求め方については(2)で説明したとおりである。

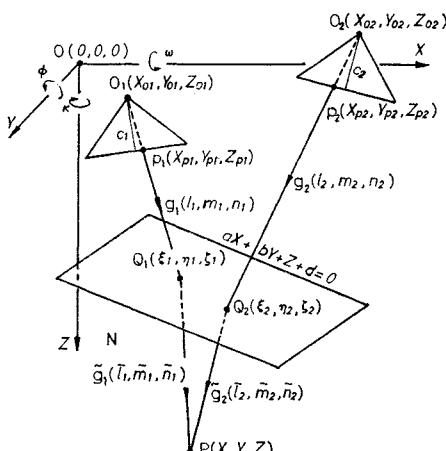


図-5 単写真の標定理論と実体写真の標定理論を併用した場合の1対の二媒質写真の標定法

さて、上の単写真の標定理論に基づく二媒質写真の標定問題に、対応する2本の屈折光線  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$  が交会しなければならないという付加条件を導入して考えてみよう。(3)では屈折光線  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$  を交会させてモデルを作るのに必要な標定要素の数は8個であったが、その場合は標定要素が適当に選んだモデル座標系において求められた。しかるに、図-5に示されたような場合は標定要素が地上座標系 ( $X, Y, Z$ ) において求められるから、対応する2本の屈折光線  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$  の交会条件に含まれる標定要素の数は8個ではなくなる。それでは上で定義した1対の二媒質写真の15個の標定要素のうちどの要素が対応する2本の屈折光線の交会条件中に含まれるかを検討してみよう。

まず、(3)で説明したように対応する2本の屈折光線の交会条件は、

$$|S| = \begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_2 & \tilde{l}_1 & \tilde{l}_2 \\ \eta_1 - \eta_2 & \tilde{m}_1 & \tilde{m}_2 \\ \zeta_1 - \zeta_2 & \tilde{n}_1 & \tilde{n}_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (29)$$

で表わされる。この交会条件の中で屈折光線  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$  の方向余弦  $(\tilde{l}_1, \tilde{m}_1, \tilde{n}_1), (\tilde{l}_2, \tilde{m}_2, \tilde{n}_2)$  中に含まれる標定要素は式(2), (2)', (3), (7), (8)をみればわかるように、カメラの回転要素と屈折面を規定する要素  $a, b$  のみであるから8個である。次に、 $\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2, \zeta_1 - \zeta_2$ について検討してみると、

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 &= X_{01} - X_{02} + k_1 l_1 - k_2 l_2 \\ &= X_{01} - X_{02} - \frac{(aX_{01} + bY_{01} + Z_{01} + d)l_1}{al_1 + bm_1 + n_1} \\ &\quad + \frac{(aX_{02} + bY_{02} + Z_{02} + d)l_2}{al_2 + bm_2 + n_2} \\ \eta_1 - \eta_2 &= Y_{01} - Y_{02} - \frac{(aX_{01} + bY_{01} + Z_{01} + d)m_1}{al_1 + bm_1 + n_1} \\ &\quad + \frac{(aX_{02} + bY_{02} + Z_{02} + d)m_2}{al_2 + bm_2 + n_2} \\ \zeta_1 - \zeta_2 &= Z_{01} - Z_{02} - \frac{(aX_{01} + bY_{01} + Z_{01} + d)n_1}{al_1 + bm_1 + n_1} \\ &\quad + \frac{(aX_{02} + bY_{02} + Z_{02} + d)n_2}{al_2 + bm_2 + n_2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (30)$$

となり、これらの中にはすべての標定要素が含まれていることがわかる。以上のことから、単写真の標定理論に基づいて1対の二媒質写真の外部標定要素と屈折面を規定する要素を求める場合、これに対応する2本の屈折光線の交会条件を併用して使用すれば、交会条件中の未知数の数は15個であることがわかる。これらの未知数は左右写真それぞれについての単写真の標定理論に基づく条件式、および対応する左右2本の屈折光線の交会条件を同時に解いて求められる。

以上のように屈折光線  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$  の交会条件中に含ま

れる要素を定義すると、単写真の標定理論に基づいて 1 対の二媒質写真的外部標定要素と屈折面を規定する要素を求める場合、対応する 2 本の屈折光線の交会条件を付加条件として使用することができる。この場合たとえば、屈折光線を利用する方法 ((2) a)) に  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$  の交会条件を付加して考えると、基準点において個々の屈折光線の X, Y 方向のずれ (単写真的標定理論) と左右の対応する 2 本の屈折光線のずれ (交会条件) に同時に着目していくことになる。このようにして観測方程式の数を増加させることにより、最小 2 乗法を適用して 1 対の二媒質写真的外部標定要素と屈折面を規定する要素を計算する場合、未知数の精度の向上が期待できる。また対応する 2 本の屈折光線の交会条件に関しては基準点以外の点も使用できるので、基準点数が十分でなかったり、また基準点の配置が適当でなかったりした場合などには、この方法が有効であろう。ただし、この方法では対応する 2 本の屈折光線の交会条件が付加的に増加しているだけであるから、数学的に必要な基準点の数は単写真的標定理論の場合と同様である。

### (5) Triplets Method を使った二媒質写真の解析的標定問題

いま、屈折面は平面であると仮定して、3枚の二媒質写真に対して Triplets Method<sup>10), 11)</sup> を適用してみよう(図-6, 7 参照)。この場合モデル座標系( $X, Y, Z$ )は独立モデル法による1対の二媒質写真の相互標定((3) a))の場合と全く同様にして、第1写真的投影中心  $O_1$  を原点とし、この第1写真的投影中心  $O_1$  と第2写真的投影中心  $O_2$  を通る直線を  $X$  軸とし、 $Z$  軸はこの  $X$  軸と直交するように下方に、また  $Y$  軸は  $X, Z$  両軸と直交するように選ぶ(図-7 参照)。屈折面はこのモデル座標系( $X, Y, Z$ )において、

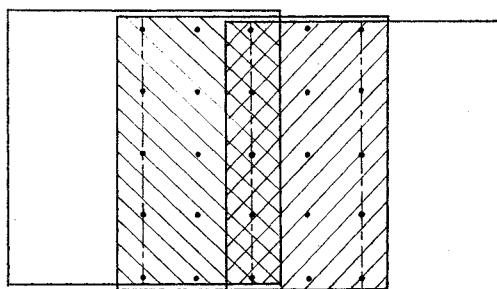


図-6 連続する3枚の写真的重複部分

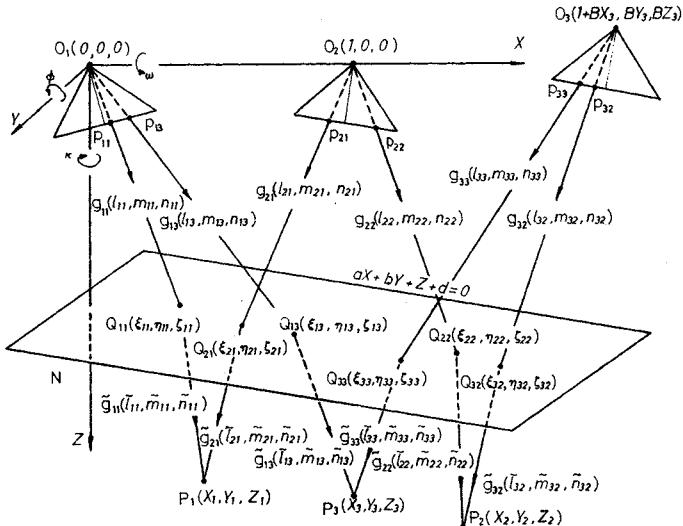


図-7 Triplets Method による標定法

$$aX+bY+Z+d=0$$

で表わされるものとする。

第1写真、第2写真的作る第1モデルについて考えると、対応する2本の屈折光線  $\tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{21}$  の交会条件は、

であり、モデルを作るのに必要な要素は独立モデル法による1対の二媒質写真の相互標定の場合と同様に ( $\varphi_1$ ,  $\kappa_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\omega_2$ ,  $\kappa_2$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ) の8個が考えられる。

次に、第2写真、第3写真のつくる第2モデルについて考えると、この場合は対応する2本の屈折光線 $\bar{g}_{22}$ 、 $\bar{g}_{33}$ の交差条件は、

$$|S_2| = \begin{vmatrix} \xi_{32} - \xi_{22} & \tilde{l}_{22} & \tilde{l}_{32} \\ \eta_{32} - \eta_{22} & \tilde{m}_{22} & \tilde{m}_{32} \\ \zeta_{32} - \zeta_{22} & \tilde{n}_{22} & \tilde{n}_{32} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (32)$$

であり、標定要素としては、接続標定法による 1 対の二媒質写真的相互標定の場合と同様にして、 $(\varphi_3, \omega_3, \kappa_3, B_{Y3}, B_{Z3}, a, b, d)$  の 8 個が考えられる。ただし、この場合屈折面の決定要素  $a, b, d$  が第 1 モデルと共通であること、また第 1 モデルのモデル座標系が第 2 モデルのモデル座標系と同一であること等から、交会条件式(31)、(32)を同時に解く場合は交会条件式(32)中の未知数は $(\varphi_2, \omega_2, \kappa_2, \varphi_3, \omega_3, \kappa_3, B_{X3}, B_{Y3}, B_{Z3}, a, b, d)$ の 12 個となる。

また、第1写真と第3写真については図-6の2重斜線部分が共通しているから、これを第3モデルとし、この部分について対応する2本の屈折光線 $\tilde{g}_{13}$ ,  $\tilde{g}_{33}$ の交会条件をたてれば、

$$|S_3| = \begin{vmatrix} \xi_{33} - \xi_{13} & \bar{l}_{13} & \bar{l}_{33} \\ \eta_{33} - \eta_{13} & \bar{m}_{13} & \bar{m}_{33} \\ \zeta_{33} - \zeta_{13} & \bar{n}_{13} & \bar{n}_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(33)$$

が成立し、この場合の未知数は  $(\varphi_1, \kappa_1, \varphi_3, \omega_3, \kappa_3, 1 + B_{X3}, B_{Y3}, B_{Z3}, a, b, d)$  の 11 個となる。

最後に、Triplets Method の場合 図-6 の 2 重斜線部分において、第 1, 第 2 および第 3 モデルの観測点  $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ,  $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$  および  $P_3(X_3, Y_3, Z_3)$  が一致しなければならないという条件が考えられる。この条件は次のようにして導かれる。

まず第 1 モデルにおける対応する 2 本の屈折光線  $\tilde{g}_{11}$ ,  $\tilde{g}_{21}$  の方程式を、

$$\tilde{g}_{11} : \frac{X - \xi_{11}}{\bar{l}_{11}} = \frac{Y - \eta_{11}}{\bar{m}_{11}} = \frac{Z - \zeta_{11}}{\bar{n}_{11}} = \tilde{k}_1 \dots\dots\dots(34)$$

$$\tilde{g}_{21} : \frac{X - \xi_{21}}{\bar{l}_{21}} = \frac{Y - \eta_{21}}{\bar{m}_{21}} = \frac{Z - \zeta_{21}}{\bar{n}_{21}} \dots\dots\dots(35)$$

とし、これらより補助数  $\tilde{k}_1$  を計算すれば、

$$\tilde{k}_1 = \frac{\bar{l}_{21}(\eta_{11} - \eta_{21}) - \bar{m}_{21}(\xi_{11} - \xi_{21})}{\bar{l}_{11}\bar{m}_{21} - \bar{l}_{21}\bar{m}_{11}} \dots\dots\dots(36)$$

が得られる。この  $\tilde{k}_1$  を使えば第 1 モデルの観測点座標は簡単に計算でき、

$$P_1(X_1, Y_1, Z_1) = (\tilde{k}_1 \bar{l}_{11} + \xi_{11}, \tilde{k}_1 \bar{m}_{11} + \eta_{11}, \tilde{k}_1 \bar{n}_{11} + \zeta_{11}) \dots\dots\dots(37)$$

となる。第 2 モデルについては全く同様にして、

$$\tilde{g}_{22} : \frac{X - \xi_{22}}{\bar{l}_{22}} = \frac{Y - \eta_{22}}{\bar{m}_{22}} = \frac{Z - \zeta_{22}}{\bar{n}_{22}} = \tilde{k}_2 \dots\dots\dots(38)$$

$$\tilde{g}_{32} : \frac{X - \xi_{32}}{\bar{l}_{32}} = \frac{Y - \eta_{32}}{\bar{m}_{32}} = \frac{Z - \zeta_{32}}{\bar{n}_{32}} \dots\dots\dots(39)$$

$$\tilde{k}_2 = \frac{\bar{l}_{32}(\eta_{22} - \eta_{32}) - \bar{m}_{32}(\xi_{22} - \xi_{32})}{\bar{l}_{22}\bar{m}_{32} - \bar{l}_{32}\bar{m}_{22}} \dots\dots\dots(40)$$

より、第 2 モデルの観測点座標として

$$P_2(X_2, Y_2, Z_2) = (\tilde{k}_2 \bar{l}_{22} + \xi_{22}, \tilde{k}_2 \bar{m}_{22} + \eta_{22}, \tilde{k}_2 \bar{n}_{22} + \zeta_{22}) \dots\dots\dots(41)$$

を得る。

また、第 3 モデルについて水中の屈折光線  $\tilde{g}_{13}$ ,  $\tilde{g}_{33}$  の方程式は、

$$\tilde{g}_{13} : \frac{X - \xi_{13}}{\bar{l}_{13}} = \frac{Y - \eta_{13}}{\bar{m}_{13}} = \frac{Z - \zeta_{13}}{\bar{n}_{13}} = \tilde{k}_3 \dots\dots\dots(42)$$

$$\tilde{g}_{33} : \frac{X - \xi_{33}}{\bar{l}_{33}} = \frac{Y - \eta_{33}}{\bar{m}_{33}} = \frac{Z - \zeta_{33}}{\bar{n}_{33}} \dots\dots\dots(43)$$

となり、 $\tilde{k}_3$  および第 3 モデルの水中の観測点  $P_3(X_3, Y_3, Z_3)$  は、

$$\tilde{k}_3 = \frac{\bar{l}_{33}(\eta_{13} - \eta_{33}) - \bar{m}_{33}(\xi_{13} - \xi_{33})}{\bar{l}_{13}\bar{m}_{33} - \bar{l}_{33}\bar{m}_{13}} \dots\dots\dots(44)$$

$$P_3(X_3, Y_3, Z_3) = (\tilde{k}_3 \bar{l}_{13} + \xi_{13}, \tilde{k}_3 \bar{m}_{13} + \eta_{13}, \tilde{k}_3 \bar{n}_{13} + \zeta_{13}) \dots\dots\dots(45)$$

で与えられる。したがって、図-6 の 2 重斜線部分にお

いて、第 1 モデルの観測点  $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ , 第 2 モデルの観測点  $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$  および第 3 モデルの観測点  $P_3(X_3, Y_3, Z_3)$  が一致しなければならないという条件は、

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_2 = X_3 \rightarrow \tilde{k}_1 \bar{l}_{11} + \xi_{11} = \tilde{k}_2 \bar{l}_{22} + \xi_{22} = \tilde{k}_3 \bar{l}_{33} + \xi_{33} \\ Y_1 &= Y_2 = Y_3 \rightarrow \tilde{k}_1 \bar{m}_{11} + \eta_{11} = \tilde{k}_2 \bar{m}_{22} + \eta_{22} = \tilde{k}_3 \bar{m}_{33} + \eta_{33} \\ Z_1 &= Z_2 = Z_3 \rightarrow \tilde{k}_1 \bar{n}_{11} + \zeta_{11} = \tilde{k}_2 \bar{n}_{22} + \zeta_{22} = \tilde{k}_3 \bar{n}_{33} + \zeta_{33} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)$$

となる。ここで、 $\xi, \eta, \zeta, l, m, n \rightarrow \alpha$  とし、 $a_{ij}$  の添文字  $i, j$  について説明すると、 $i$  は写真番号であり、 $j$  はモデル番号である。

条件式 (31), (32), (33), (46) を観測方程式とし、これらを誤差方程式の形にする。それから多数の標定点について誤差方程式を立て最小 2 乗法を適用して 14 個の未知数  $(\varphi_1, \kappa_1, \varphi_2, \omega_2, \kappa_2, \varphi_3, \omega_3, \kappa_3, B_{X3}, B_{Y3}, B_{Z3}, a, b, d)$  を計算すれば、第 1, 第 2, 第 3 写真的モデル座標系における接続が可能となる。つづいて第 2, 第 3, 第 4 写真的 3 枚を独立なモデル座標系において同様な方法で接続する。このようにしてでき上った個々の 3 枚の写真的組を空間のヘルマート変換を使って一つの統一モデル座標系（通常第 1 番目のモデル座標系）でつなぎ接続していく、最後にふたたび空間のヘルマート変換により対地標定を行えば一連の二媒質写真的 Triplets Method による空中三角測量が実施できる。

### 3. 結 言

この論文では二媒質写真的解析的標定問題について種々の理論的方法を提案してきたが、全体としての特長は、標定要素として屈折面を規定する要素を使用する考え方を導入し、また光の屈折問題を方向余弦を使って取扱う方法を取り入れたので、二媒質写真的標定問題の一一般的な解法が非常に容易に見出せるようになったこと、および座標系を空中写真的標定の場合と全く同じように選ぶことができるるので、空中写真的場合の空中三角測量の理論がそのまま二媒質写真にも適用できることである。また、ここで提案された方法を使用すれば、標定点、基準点が空中と水中に混在する場合でも容易に標定要素の計算が行えることも大きな特長である。

各解析方法の特性はその実証的研究の成果を待たなければ明らかにならないが、単写真的標定理論に基づく方法、実体写真的標定理論を使用する方法等では、未知数間の相関関係が各方法の精度に及ぼす影響が非常に大きいと思われる。

単写真的標定理論と実体写真的標定理論を併用して二媒質写真的標定を行う方法、および Triplets Method を使用して 3 枚の二媒質写真を接続する方法は、二媒質

写真を使用して空中三角測量を行い、水中の基準点座標を決定するのに役立つと思われるが、これらの方法を実際に使用する場合には、これらの方法では性質の異なる観測方程式を併用して使用することになるので、誤差論的な見地から各観測方程式の性質をよく把握して使用することが重要であろう。

#### 参考文献

- 1) 森 忠次・岡本 厚：二層媒質中の写真測量における逐次近似標定，写真測量，Vol. 9, No. 1, pp. 1~11, 1970.
- 2) 森 忠次・岡本 厚：二層媒質写真測量の実験的検討，土木学会論文報告集，No. 189, pp. 89~98, 1971.
- 3) Rinner, K. : Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Sonderheft 5, 1948.
- 4) Schmutter, B. and L. Bonfiglioli: Orientation problem in twomedium photogrammetry, Photogrammetric Engineering, Vol. 33, pp. 1421~1428, 1967.
- 5) Höhle, J. : Zur Theorie und Praxis der Unterwasser-Photogrammetrie, Deutsche Geodätische Komission, Reihe C, Heft Nr. 163, München, 1971.
- 6) Okamoto, A. und J. Höhle : Allgemeines analytisches Orientierungsverfahren in der Zwei- und Mehrmedien Photogrammetrie und seine Erprobung, Bildmessung und Luftbildwesen, 40 Jg., S. 103~106/112~120, 1972.
- 7) 岡本 厚・森 忠次：単写真の標定法に基づく二層写真の解析的標定法およびその実験的検討，写真測量，Vol. 12, No. 1, pp. 1~10, 1973.
- 8) 岡本 厚・桑波田信一：接続標定法に基づく1対の2層写真の解析的標定法およびその実験的検討，写真測量，Vol. 12, No. 2, pp. 17~25, 1973.
- 9) 久保田 広：光学，pp. 2~3, 岩波書店
- 10) 中村英夫・村井俊治：解析写真測量における Multiplets Method について，生産研究，20巻，4号，pp. 177~184, 1968.
- 11) Mikhail, E.M. : Use of triplets for analytical aero-triangulation, Photogrammetric Engineering, Vol. 28, pp. 625~632, 1962.

(1974. 6. 5・受付)