

吊橋補剛トラスの断面変形を考慮したねじり解析

TORSIONAL ANALYSIS OF SUSPENSION BRIDGES CONSIDERING
CROSS-SECTIONAL DEFORMATION OF STIFFENING TRUSS

岡村 隆夫*・片岡 敬**
By Takao Okamura and Takashi Kataoka

1. まえがき

吊橋に偏心荷重が作用する場合のねじり解析は、横断面形状が保持されているという前提のもとに、偏心荷重を鉛直荷重成分とねじり荷重成分にわけ、それぞれ別々に計算して合計する方法が一般に用いられている。しかし、この方法は、

(1) 偏心載荷による吊橋の鉛直およびねじり荷重による挙動は本来相互に関連し合って非線形であるので、これを別々に解いて合計する線形化が成立つかどうか。

(2) 横断面形状が保持されている前提が成立つための対傾構の必要せん断剛性はどの程度か。

という疑問が生じる。

断面変形のない吊橋の3次元解析としては島田の研究¹⁾がある。しかし、数値計算は行われていない。また、断面変形を考慮してはりを取扱った研究としては、ダイヤフラムの位置で不静定力を導入して弾性方程式を解くF. Resingerの方法²⁾およびV.Z. Vlasovの一般座標法による折板理論³⁾を用いて解板を行っている奥村・坂井の方法⁴⁾等がある。

補剛トラスを有する吊橋のねじり解析を行う場合、V.Z. Vlasovの理論を用いたトラス橋のねじり解析を基本として導いた基礎微分方程式をガラーキン法を用いて解析する小松・西村の方法⁵⁾があるが、ここでは微分方程

式を解析的に厳密に解くラプラス変換法を用いた。

数値計算モデルは本州四国連絡橋公団で計画中の3径間連続吊橋を対象として行い、従来の鉛直荷重成分とねじり荷重成分を別々に求めて合計する非連成法による解析結果との比較を行った。また、断面形状変形の影響を数値的に検討した。

2. 基礎方程式

吊橋のねじり解析の基礎方程式はウラソフの理論を用いた2軸対称断面を有するトラス橋のねじり解析を基本として導かれたものである(付録A参照)。図-1に一

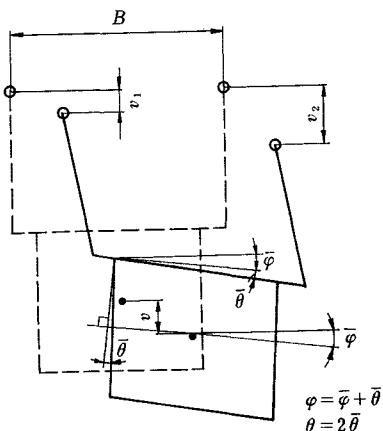


図-2 変形図

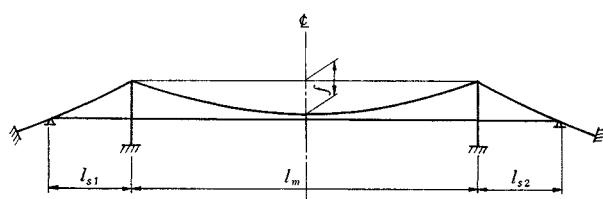


図-1 一般寸法図

* 正会員 新日本技研(株)

** 正会員 新日本技研(株)

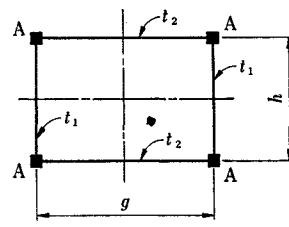


図-3 補剛トラス横断図

般寸法図、図-2 に変形図、図-3 に補剛トラス断面図を示す。

$$\begin{aligned} EIv'''' - (2H_d + H_{p1} + H_{p2})v'' \\ + (H_{p1} - H_{p2})B\varphi''/2 \\ = P_v + (H_{p1} + H_{p2})y'' \quad \dots\dots\dots(1) \\ aw'' - b_1w - b_2\varphi' - (b_1 - b_2)\theta'/2 = 0 \quad \dots\dots\dots(2) \\ - \{b_1 + B^2H_d/2 + B^2(H_{p1} + H_{p2})/4\}\varphi'' \\ - b_2w' + (b_1 - b_2)\theta''/2 + (H_{p1} - H_{p2})Bv''/2 \\ = m_t - (H_{p1} - H_{p2})B\cdot y''/2 \quad \dots\dots\dots(3) \\ - \{b_2 + B^2H_d/2 + B^2(H_{p1} + H_{p2})/4\}\varphi'' - b_1w' \\ - (b_1 - b_2)\theta''/2 + (H_{p1} - H_{p2})Bv''/2 + r\theta/2 \\ = m_g - (H_{p1} - H_{p2})By''/2 \quad \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

以上の4式は各径間ごとに成立する。一方、ケーブル張力を求める式は3径間の場合次のようになる。

$$H_{p1} = -(E_C A_C / L_E) \times \sum y'' \int_0^l (v - B \cdot \varphi/2) dx \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$H_{p2} = -(E_C A_C / L_E) \times \sum y'' \int_0^l (v + B \cdot \varphi/2) dx \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで \sum は各径間についての和を意味する。

また、式中の記号は次のとおりである。

$$a = EA g^2 h^2 / 4 \quad [\text{t} \cdot \text{m}^4]$$

$$b_1 = G(t_1 g + t_2 h) \cdot g \cdot h / 2 \quad [\text{t} \cdot \text{m}^2]$$

$$b_2 = G(t_1 g - t_2 h) \cdot g \cdot h / 2 \quad [\text{t} \cdot \text{m}^2]$$

$$r : \text{格間で平均化した対傾構のせん断剛性} \quad [\text{t}]$$

$$t_1 : \text{補剛トラス腹材の換算板厚} \quad [\text{m}]$$

$$t_2 : \text{補剛トラス横構の換算板厚} \quad [\text{m}]$$

$$A_C : \text{ケーブルの断面積} \quad [\text{m}^2]$$

$$E_C : \text{ケーブルの弾性係数} \quad [\text{t}/\text{m}^2]$$

$$L_E : \text{ケーブルの長さ} \quad [\text{m}]$$

$$EI : \text{補剛トラスの曲げ剛性} (= E \cdot A \cdot h^3) \quad [\text{t} \cdot \text{m}^2]$$

$$v : \text{せん断中心の鉛直たわみ} \quad [\text{m}]$$

$$w : \text{そり} \quad [1/\text{m}]$$

$$\varphi : \text{ねじり角}$$

$$\theta : \text{ずれ角}$$

$$H_d : \text{死荷重によるケーブル張力} \quad [\text{t}/\text{m}]$$

$$H_{p1}, H_{p2} : \text{活荷重による左右ケーブルの張力} \quad [\text{t}/\text{m}]$$

$$x, y : \text{橋軸方向, 鉛直方向の距離} \quad [\text{m}]$$

$$P_v : \text{分布活荷重 (鉛直方向)} \quad [\text{t}/\text{m}]$$

$$m_t : \text{分布ねじりモーメント荷重} \quad [\text{t} \cdot \text{m}/\text{m}]$$

$$m_g : \text{分布ずれモーメント荷重} \quad [\text{t} \cdot \text{m}/\text{m}]$$

式(1)～(6)に用いている変位のうち、 φ と θ は図-2 に示すように橋面傾斜角（ウラソフの理論でいうねじり角とずれ角の和）を直接求めるため変数変換を行った。

3. ラプラス変換を用いた基礎方程式の解法

式(1)～(6)は非線形連立微分方程式であるので解析的に解を求ることは困難である。そこで、図-4 のフローチャートに示すような反復法によって解を求める。

(1) v, w, φ, θ の計算

H_{p1}, H_{p2} を仮定し、また右辺は既知の関数であるから、式(1)～(4)は4元連立の定係数線形微分方程式となる。式の冗長化をさけるため、次のような記号を用いて、式(1)～(4)を書きかえる。

$$\left. \begin{array}{l} c_1 v'''' + c_2 v'' + c_3 \varphi'' = z_1 \\ a w'' - b_1 w - b_2 \varphi' + c_4 \theta' = 0 \\ c_5 \varphi'' - b_2 w' - c_4 \theta'' + c_3 v'' = z_2 \\ c_6 \varphi'' - b_1 w' + c_4 \theta'' + c_5 v'' + c_7 \theta = z_3 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

式中 $c_1 = EI$

$$c_2 = -(2H_d + H_{p1} + H_{p2})$$

$$c_3 = B \cdot (H_{p1} - H_{p2})/2$$

$$c_4 = -(b_1 - b_2)/2$$

$$c_5 = -\{b_1 + B^2H_d/2 + B^2(H_{p1} + H_{p2})/4\} \\ = -b_1 + B^2c_2/4$$

$$c_6 = -\{b_2 + B^2H_d/2 + B^2(H_{p1} + H_{p2})/4\} \\ = -b_2 + B^2c_2/4$$

$$c_7 = r/2$$

$$z_1(x) = P_v(x) + (H_{p1} + H_{p2})y''(x)$$

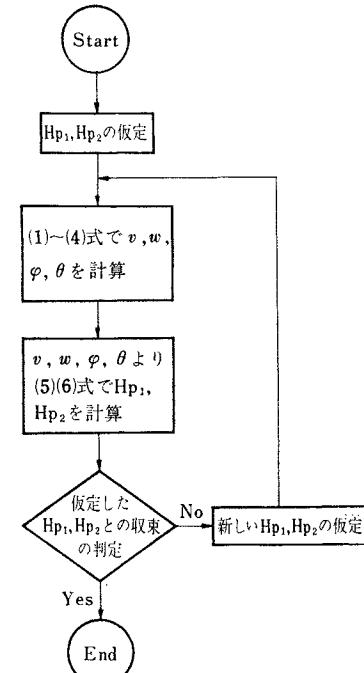


図-4 計算手順

ここで、

$$\begin{aligned}
u_1 &= 2c_1\nu_6s^2 + 2c_1\nu_4 \\
u_2 &= u_1 s \\
u_3 &= u_4 = 0 \\
u_5 &= a\nu_{15}s^3 + a\nu_{16}s \\
u_6 &= (a\nu_{15} - b_2\nu_{24} - b_1\nu_{31})s^4 \\
&\quad + (a\nu_{16} - b_2\nu_{25} - b_1\nu_{32})s^2 - b_2\nu_{26} - b_1\nu_{33} \\
u_7 &= (c_5\nu_{24} + c_6\nu_{31})s^4 + (2c_3\nu_6 + c_5\nu_{25} + c_6\nu_{32})s^2 \\
&\quad + 2c_3\nu_4 + c_5\nu_{26} + c_6\nu_{33} \\
u_8 &= (c_5\nu_{24} + c_6\nu_{31})s^5 \\
&\quad + (2c_3\nu_6 - b_2\nu_{15} + c_5\nu_{25} + c_6\nu_{32})s^3 \\
&\quad + (2c_3\nu_4 - b_2\nu_{16} + c_5\nu_{26} + c_6\nu_{33})s \\
u_9 &= (-c_4\nu_{24} + c_4\nu_{31})s^4 + (-c_4\nu_{25} + c_4\nu_{32})s^2 \\
&\quad - c_4\nu_{26} + c_4\nu_{33} \\
u_{10} &= (-c_4\nu_{24} + c_4\nu_{31})s^5 + (c_4\nu_{15} - c_4\nu_{25} + c_4\nu_{32})s^3 \\
&\quad + (c_4\nu_{16} - c_4\nu_{26} + c_4\nu_{33})s \\
u_{11} &= 2\nu_6s^2 + 2\nu_4 \\
u_{12} &= \nu_{24}s^4 + \nu_{25}s^2 + \nu_{26} \\
u_{13} &= \nu_{31}s^4 + \nu_{32}s^2 + \nu_{33}
\end{aligned}$$

b) ラプラス逆変換

求める変数は式(9)～(12)をラプラス逆変換することによって得られる。これらの式はいずれも次のような形をしている。

$$Y = \sum_i \frac{u_i(s)}{g_i(s)G(s)} a_i + \sum_j \frac{u_j(s)}{g_j(s)G(s)} Z_j(s)$$

ただし、ここに $g_i(s) = 1, s, s^2, a_i$ は $v_0''', v_0'' \dots$ 等の初期値で定数である。

ラプラス変換の線形性から上式の逆変換は次のようになる。

$$y = L^{-1}(Y) = \sum_i a_i L^{-1} \left\{ \frac{u_i(s)}{g_i(s)G(s)} \right\} + \sum_j L^{-1} \left\{ \frac{u_j(s)}{g_j(s)G(s)} \right\} * L^{-1}\{Z_j(s)\}$$

ここに、*は convolution を表わす。

$Z_j(s) = L\{z_j(x)\}$ だから $L^{-1}\{Z_j(s)\} = z_j(x)$, よって $\frac{u(s)}{g(s)G(s)}$ の形の関数の逆変換を求めれば, v, w, φ, θ は初期値および荷重項の関数として完全に定まる。式 (9)～(12) から $u_j(s)$ および $g_j(s) \cdot G(s)$ はともに s の実係数の多項式でしかも分母の次数が分子より高い。したがって、その逆変換は閉路積分に変換でき、留数の和として求めることができる。

ここで、 $G(s)=0$ は重根を持たない。そして分子と分母は共通な根を持たないとすると、逆変換は分母=0 の代数方程式を解くことによって求められる。 $g(s)=0$ の根は自明だから、 $G(s)=0$ を解くことを考える。 $G(s)=0$ は 6 次式であるが奇数次の項がないので、 $\bar{s}=s^2$ とおきかえれば $\mu_1\bar{s}^3 + \mu_2\bar{s}^2 + \mu_3\bar{s} + \mu_4 = \bar{G}(\bar{s})$ となり、これは 3 次式であるので簡単に根を求めることができる。 $\bar{G}(\bar{s})=0$ の根が求まれば $G(s)=0$ の根は次のようになる。

$\bar{G}(\bar{s})=0$ が 3 実根を持つ場合

$\bar{s} = \bar{s}_1 > 0$ の時 $s = \pm s_1 = \pm \sqrt{\bar{s}_1}$ の 2 根

$\bar{s} = \bar{s}_1 < 0$ の時 $s = \pm s_1 = \pm \sqrt{\bar{s}_1} i$ の 2 根

$\bar{G}(\bar{s})=0$ が 1 実根と 2 虚根を持つ場合

実根については3実根の場合と同じである。

虚根 $\bar{s} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2 i$ に対応する s は次のようになる。

$$s = \pm \frac{\bar{s}_2}{2\alpha} \pm \alpha i \text{ の } 4 \text{ 根}$$

$$\text{ただし } \alpha = \sqrt{\frac{-\bar{s}_1 + \sqrt{\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2^2}}{2}}$$

以上のようにして、 $G(s)=0$ の根 s_1, s_2, \dots, s_6 はすべて求まる。したがって、逆変換は各根に対する留数の和になるから、

$$L^{-1}\left\{\frac{u(s)}{g(s)G(s)}\right\} = \sum_{n=1}^6 R(s_n) + \bar{R}$$

ここに, $R(s_n)$ は $G(s)=0$ の根 s_n , \bar{R} は $g(s)=0$ の根に対する留数である。

[付録C]に示すような方法により、ラプラス逆変換を用いて、式(9)～(12)は次のようになる。

$$v = v_1(x)v_0''' + v_2(x)v_0'' + v_3(x)v_0' + v_4(x)v_0 \\ + v_5(x)w_0' + v_6(x)w_0 + v_7(x)\varphi_0' + v_8(x)\varphi_0 \\ + v_9(x)\theta_0' + v_{10}(x)\theta_0 + v_{11}(x) \dots \dots \dots \quad (13)$$

ただし、 $v_1(x) \sim v_{10}(x)$ は $u_1 V(s)/s^2 G(s) \sim u_{10} V(s)/s G(s)$ のラプラス逆変換である。これらの具体的な形は $G(s)=0$ の根が求まれば確定するもので、 x の 1 次式、 \sin, \cos, \sinh, \cosh 等の組み合わせで表わされることはこれまでに示したとおりである。 $v_{11}(x)$ は最後の 3

項をまとめたもので荷重項に関する convolution の形であり、等分布荷重などの場合、その載荷範囲が決まればユニットステップ関数を用いて求めることができる。また、 $v_0'''', v_0'' \dots \theta_0$ 等は考えている径間の左端 ($x=0$) における各変数およびその導関数の値（初期値）である。以下同様にして、

$$\begin{aligned} w &= w_1(x)v_0''' + w_2(x)v_0'' + w_3(x)v_0' \\ &\quad + w_4(x)v_0 + w_5(x)w_0' + w_6(x)w_0 \\ &\quad + w_7(x)\varphi_0' + w_8(x)\varphi_0 + w_9(x)\theta_0' \\ &\quad + w_{10}(x)\theta_0 + w_{11}(x) \end{aligned} \quad \dots \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1(x)v_0''' + \varphi_2(x)v_0'' + \varphi_3(x)v_0' + \varphi_4(x)v_0 \\ &\quad + \varphi_5(x)w_0' + \varphi_6(x)w_0 + \varphi_7(x)\varphi_0' + \varphi_8(x)\varphi_0 \\ &\quad + \varphi_9(x)\theta_0' + \varphi_{10}(x)\theta_0 + \varphi_{11}(x) \end{aligned} \quad \dots \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1(x)v_0''' + \theta_2(x)v_0'' + \theta_3(x)v_0' + \theta_4(x)v_0 \\ &\quad + \theta_5(x)w_0' + \theta_6(x)w_0 + \theta_7(x)\varphi_0' + \theta_8(x)\varphi_0 \\ &\quad + \theta_9(x)\theta_0' + \theta_{10}(x)\theta_0 + \theta_{11}(x) \end{aligned} \quad \dots \quad (16)$$

c) 境界条件

式 (13)～(16) は各径間ごとになりたち、これらの変数および初期値は各径間ごとに異なるので、左側径間、中央径間、右側径間に對して、それぞれ l, m, r の添字をつける。次に各径間の境界条件から初期値を求める。境界条件は次のとおりである。

- i) 各支点でたわみが 0、タワー上（中間支点）でたわみ角および曲げモーメントが連続、両端支点で曲げ

$$\begin{aligned} v_1^I(l_{s1})v_0^{I(3)} + v_3^I(l_{s1})v_0^{I(1)} + v_5^I(l_{s1})w_0^I + v_7^I(l_{s1})\varphi_0^{I(1)} + v_9^I(l_{s1})\theta_0^{I(1)} + v_{11}^I(l_{s1}) &= 0 \quad [v^I(l_{s1}) = 0] \\ v_1^m(l_m)v_0^{m(3)} + v_2^m(l_m)v_0^{m(2)} + v_3^m(l_m)v_0^{m(1)} + v_5^m(l_m)w_0^m + v_7^m(l_m)\varphi_0^m &= 0 \quad [v^m(l_m) = 0] \\ + v_9^m(l_m)\theta_0^m + v_{11}^m(l_m) &= 0 \\ v_1^r(l_{s2})v_0^{r(3)} + v_2^r(l_{s2})v_0^{r(2)} + v_3^r(l_{s2})v_0^{r(1)} + v_5^r(l_{s2})w_0^r + v_6^r(l_{s2})w_0^r + v_7^r(l_{s2})\varphi_0^r &= 0 \quad [v^r(l_{s2}) = 0] \\ + v_9^r(l_{s2})\theta_0^r + v_{11}^r(l_{s2}) &= 0 \\ v_1^{r(2)}(l_{s2})v_0^{r(3)} + v_2^{r(2)}(l_{s2})v_0^{r(2)} + v_3^{r(2)}(l_{s2})v_0^{r(1)} + v_5^{r(2)}(l_{s2})w_0^r + v_6^{r(2)}(l_{s2})w_0^r &= 0 \quad [v^{r(2)}(l_{s2}) = 0] \\ + v_7^{r(2)}(l_{s2})\varphi_0^{r(1)} + v_9^{r(2)}(l_{s2})\theta_0^{r(1)} + v_{11}^{r(2)}(l_{s2}) &= 0 \\ v_1^{I(1)}(l_{s1})v_0^{I(3)} + v_3^{I(1)}(l_{s1})v_0^{I(1)} + v_5^{I(1)}(l_{s1})w_0^I + v_7^{I(1)}(l_{s1})\varphi_0^{I(1)} + v_9^{I(1)}(l_{s1})\theta_0^{I(1)} + v_{11}^{I(1)}(l_{s1}) &= v_0^{m(1)} \quad [v^I(l_{s1}) = v^m(l_{s1}) = 0] \\ v_1^{m(1)}(l_m)v_0^{m(3)} + v_2^{m(1)}(l_m)v_0^{m(2)} + v_3^{m(1)}(l_m)v_0^{m(1)} + v_5^{m(1)}(l_m)w_0^m + v_6^{m(1)}(l_m)\varphi_0^m &= v_0^{r(1)} \quad [v^m(l_m) = v^r(l_m) = 0] \\ + v_7^{m(1)}(l_m)\theta_0^m + v_9^{m(1)}(l_m) &= v_0^{r(1)} \\ v_1^{I(2)}(l_{s1})v_0^{I(3)} + v_3^{I(2)}(l_{s2})v_0^{I(1)} + v_5^{I(2)}(l_{s1})w_0^I + v_7^{I(2)}(l_{s1})\varphi_0^{I(1)} + v_9^{I(2)}(l_{s1})\theta_0^{I(1)} + v_{11}^{I(2)}(l_{s1}) &= v_0^{m(2)} \quad [v^I(l_{s1}) = v^m(l_{s1}) = 0] \\ v_1^{m(2)}(l_m)v_0^{m(3)} + v_2^{m(2)}(l_m)v_0^{m(2)} + v_3^{m(2)}(l_m)v_0^{m(1)} + v_5^{m(2)}(l_m)w_0^m + v_6^{m(2)}(l_m)\varphi_0^m &= v_0^{r(2)} \quad [v^m(l_m) = v^r(l_m) = 0] \\ + v_7^{m(2)}(l_m)\theta_0^m + v_9^{m(2)}(l_m) &= v_0^{r(2)} \\ w_1^{r(1)}(l_{s2})v_0^{r(3)} + w_2^{r(1)}(l_{s2})v_0^{r(2)} + w_3^{r(1)}(l_{s2})v_0^{r(1)} + w_5^{r(1)}(l_{s2})w_0^r + w_6^{r(1)}(l_{s2})\varphi_0^r &= 0 \quad [w^{r(1)}(l_{s2}) = 0] \\ + w_7^{r(1)}(l_{s2})\theta_0^r + w_9^{r(1)}(l_{s2}) &= 0 \\ w_1^I(l_{s1})v_0^{I(3)} + w_3^I(l_{s1})v_0^{I(1)} + w_5^I(l_{s1})w_0^I + w_7^I(l_{s1})\varphi_0^I + w_9^I(l_{s1})\theta_0^I + w_{11}^I(l_{s1}) &= w_0^m \quad [w^I(l_{s1}) = w^m(l_{s1}) = 0] \\ w_1^m(l_m)v_0^{m(3)} + w_2^m(l_m)v_0^{m(2)} + w_3^m(l_m)v_0^{m(1)} + w_5^m(l_m)w_0^m + w_6^m(l_m)\varphi_0^m &= w_0^r \quad [w^m(l_m) = w^r(l_m) = 0] \\ + w_7^m(l_m)\theta_0^m + w_9^m(l_m) &= w_0^r \\ w_1^{I(1)}(l_{s1})v_0^{I(3)} + w_3^{I(1)}(l_{s1})v_0^{I(1)} + w_5^{I(1)}(l_{s1})w_0^I + w_7^{I(1)}(l_{s1})\varphi_0^{I(1)} + w_9^{I(1)}(l_{s1})\theta_0^{I(1)} &= w_0^{m(1)} \quad [w^I(l_{s1}) = w^{m(1)}(l_{s1}) = 0] \\ + w_{11}^{I(1)}(l_{s1}) &= w_0^{m(1)} \end{aligned}$$

モーメントが 0 である。

$$\begin{aligned} v^I(0) &= v^I(l_{s1}) = v^m(0) = v^r(l_m) = v^r(0) \\ &= v^r(l_{s2}) = 0 \\ v^{I(1)}(l_{s1}) &= v^{m(1)}(0), v^{m(1)}(l_m) = v^{r(1)}(0) \\ v^{I(2)}(l_{s1}) &= v^{m(2)}(0), v^{m(2)}(l_m) = v^{r(2)}(0) \\ v^{I(2)}(0) &= v^{r(2)}(l_{s2}) = 0 \end{aligned}$$

ii) そりは両端支点で自由、タワー上で連続である。

$$\begin{aligned} w^I(0) &= w^r(l_{s2}) = 0 \\ w^I(l_{s1}) &= w^m(0), w^m(l_m) = w^r(0) \\ w^{I(1)}(l_{s1}) &= w^{m(1)}(0), w^{m(1)}(l_m) = w^{r(1)}(0) \\ \text{iii) } \quad \text{ずれおよびねじれは各支点で } 0 \text{ である。} \\ \varphi^I(0) &= \varphi^I(l_{s1}) = \varphi^m(0) = \varphi^m(l_m) = \varphi^r(0) \\ &= \varphi^r(l_{s2}) = 0 \\ \theta^I(0) &= \theta^I(l_{s1}) = \theta^m(0) = \theta^m(l_m) = \theta^r(0) \\ &= \theta^r(l_{s2}) = 0 \end{aligned}$$

d) 各初期値の決定

上述の境界条件を満足するような各初期値を決定して、式 (15)～(18) に代入すれば求める解 v, w, φ, θ が得られる。初期値は全部で 30 個あるが境界条件から $v_0^I, v^I(l_{s1}), w_0^I, \theta_0^I, v_0^m, \varphi_0^m, \theta_0^m, v_0^r, \varphi_0^r, \theta_0^r$ の 11 個は 0 となる。残りの 19 個の初期値は境界条件から次のような連立方程式を解くことによって求められる。

$$\begin{aligned}
& w_1^m(l_m) v_0^m(l_m) + w_2^m(l_m) v_0^m(l_m) + w_3^m(l_m) v_0^m(l_m) + w_5^m(l_m) w_0^m(l_m) + w_6^m(l_m) w_0^m \\
& \quad + w_7^m(l_m) \varphi_0^m(l_m) + w_9^m(l_m) \theta_0^m(l_m) + w_{11}^m(l_m) = w_0^{r(1)} \dots \dots \dots [w^m(l_m) = w^{r(1)}(0)] \\
& \varphi_1^I(l_{s1}) v_0^{I(3)} + \varphi_3^I(l_{s1}) v_0^{I(1)} + \varphi_6^I(l_{s1}) w_0^I + \varphi_7^I(l_{s1}) \varphi_0^{I(1)} + \varphi_9^I(l_{s1}) \theta_0^{I(1)} + \varphi_{11}^I(l_{s1}) = 0 \dots \dots \dots [\varphi^I(l_{s1}) = 0] \\
& \varphi_1^m(l_m) v_0^m(l_m) + \varphi_2^m(l_m) v_0^m(l_m) + \varphi_3^m(l_m) v_0^m(l_m) + \varphi_5^m(l_m) w_0^m(l_m) + \varphi_6^m(l_m) w_0^m(l_m) + \varphi_7^m(l_m) \varphi_0^m(l_m) \\
& \quad + \varphi_9^m(l_m) \theta_0^m(l_m) + \varphi_{11}^m(l_m) = 0 \dots \dots \dots [\varphi^m(l_m) = 0] \\
& \varphi_1^r(l_{s2}) v_0^{r(3)} + \varphi_2^r(l_{s2}) v_0^{r(2)} + \varphi_3^r(l_{s2}) v_0^{r(1)} + \varphi_5^r(l_{s2}) w_0^r + \varphi_6^r(l_{s2}) w_0^r + \varphi_7^r(l_{s2}) \varphi_0^r \\
& \quad + \varphi_9^r(l_{s2}) \theta_0^r + \varphi_{11}^r(l_{s2}) = 0 \dots \dots \dots [\varphi^r(l_{s2}) = 0] \\
& \theta_1^I(l_{s1}) v_0^{I(3)} + \theta_3^I(l_{s1}) v_0^{I(1)} + \theta_6^I(l_{s1}) w_0^I + \theta_7^I(l_{s1}) \varphi_0^{I(1)} + \theta_9^I(l_{s1}) \theta_0^{I(1)} + \theta_{11}^I(l_{s1}) = 0 \dots \dots \dots [\theta^I(l_{s1}) = 0] \\
& \theta_1^m(l_m) v_0^m(l_m) + \theta_2^m(l_m) v_0^m(l_m) + \theta_3^m(l_m) v_0^m(l_m) + \theta_5^m(l_m) w_0^m(l_m) + \theta_6^m(l_m) w_0^m(l_m) + \theta_7^m(l_m) \varphi_0^m(l_m) \\
& \quad + \theta_9^m(l_m) \theta_0^m(l_m) + \theta_{11}^m(l_m) = 0 \dots \dots \dots [\theta^m(l_m) = 0] \\
& \theta_1^r(l_{s2}) v_0^{r(3)} + \theta_2^r(l_{s2}) v_0^{r(2)} + \theta_3^r(l_{s2}) v_0^{r(1)} + \theta_5^r(l_{s2}) w_0^r + \theta_6^r(l_{s2}) w_0^r + \theta_7^r(l_{s2}) \varphi_0^r \\
& \quad + \theta_9^r(l_{s2}) \theta_0^r + \theta_{11}^r(l_{s2}) = 0 \dots \dots \dots [\theta^r(l_{s2}) = 0]
\end{aligned}$$

以上の 19 元連立方程式を解くことにより、残りの 19 個の初期値 $v_0^{I(3)}$, $v_0^{I(1)}$, w_0^I , φ_0^I , θ_0^I , $v_0^{m(3)}$, $v_0^{m(2)}$, $v_0^{m(1)}$, w_0^m , φ_0^m , θ_0^m , $v_0^{r(3)}$, $v_0^{r(2)}$, $v_0^{r(1)}$, w_0^r , φ_0^r , θ_0^r が求まる。したがって、各径間の v , w , φ , θ が求められる。

(2) 活荷重によるケーブル張力 H_{p1} , H_{p2} の計算

求まった v , w , φ , θ を式 (5), (6) に代入して、 H_{p1} , H_{p2} を計算する。それと仮定した値とを比較して、十分満足されるものであればよいが、まだ差があれば次に示すような Lagrange の補間公式によって、新しく H_{p1} , H_{p2} を仮定し、もとの計算からやり直せばよい。

Lagrange の補間公式

$$H = (X_2^2 - X_1 X_3) / (2X_2 - X_1 - X_3)$$

ここに、 X_1 ：仮定したケーブル張力

X_2 : X_1 によって求めたケーブル張力

X_3 : X_2 によって求めたケーブル張力

4. 断面力および部材力の計算

断面力および部材力は上記の方法によって求めた v , w , φ , θ を用いて、図-5 に示す骨組寸法をもつ補剛トラスに関して次のように計算できる。

曲げモーメント

$$M = -EIv''$$

そりによる軸力

$$F = \frac{a}{g \cdot h} w'$$

ねじりモーメント

$$\begin{aligned}
T &= b_2 w + b_1 \left(\varphi' - \frac{\theta'}{2} \right) + b_2 \frac{\theta'}{2} \\
&= b_2 w + b_1 \varphi' + (b_2 - b_1) \frac{\theta'}{2}
\end{aligned}$$

ずれモーメント

$$S = b_1 w + b_2 \left(\varphi' - \frac{\theta'}{2} \right) + b_1 \frac{\theta'}{2}$$

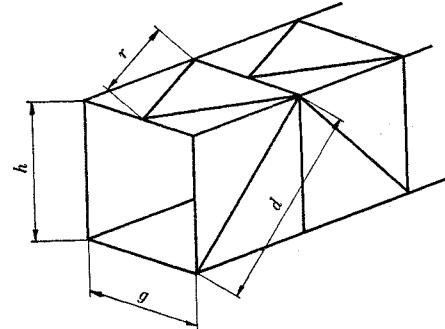


図-5 補剛トラス骨組図

$$= b_1 w + b_2 \varphi' + (b_1 - b_2) \frac{\theta'}{2}$$

せん断力

$$Q = -EIv'''$$

弦材に働く軸力

$$N_c = M/2h \pm F$$

斜材に働く軸力

$$N_d = \left(\frac{Q}{2} \pm \frac{T+S}{2g} \right) \times d/h$$

横構に働く軸力

$$N_r = \pm \left(\frac{T-S}{2h} \right) \times r/g$$

5. 数値計算

数値計算の対象として選んだ吊橋は本州四国連絡橋公団で計画されている 3 径間連続吊橋である。計算は電子計算機 CDC 6600 によって行った。

(1) 吊橋の諸元

吊橋の諸元は表-1 および図-6 に示す。

(2) 活荷重の載荷状態

図-7 に示すように 4 ケースについて計算した。ま

た、各荷重の偏心距離および強度は表-2に示す。

(3) 対傾構のせん断剛性 γ

対傾構のせん断剛性 γ は非常に小さい場合として 10^2

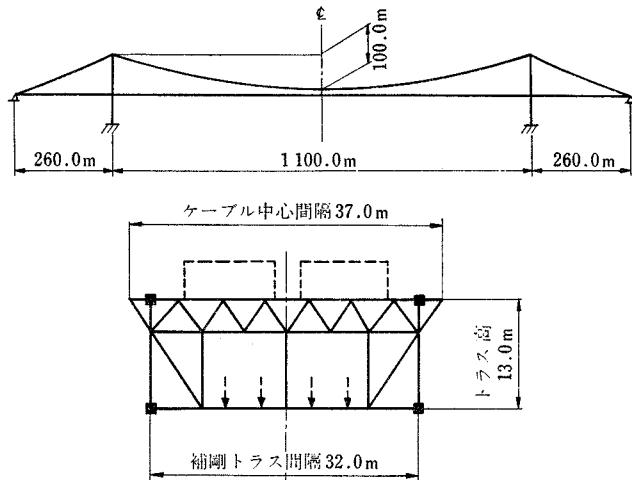
表-1 吊橋の諸元

主 径 間 支 間	1 000m	ケーブル 重 量	6.62 t/m
側 径 間 支 間	260m	吊 橋 造 重 量	14.35 t/m
ケーブルサグ(主径間)	100m	主 構 弦 材 断 面 積	1 220 cm ²
ケーブル 間 隔	37m	主 構 斜 材 断 面 積	668 cm ²
補 剛 ロ ー ラ ス 幅	32m	横 構 斜 材 断 面 積	373 cm ²
補 剌 ロ ー ラ ス 高	13m	ケーブル 剛 性	1.541×10^7 t
格 間 長	13.1m	対 傾 構 の せん 断 刚 性	1.5×10^5 t

表-2 活 荷 重

活荷重種別	載荷長	満載量	偏載量	偏心距離
道路部活荷重	任 意	4.32 t/m	2.16 t/m	7.0m
鉄道部在来線	370m	8.06 "	4.03 "	3.1 "
鉄道部新幹線	370m	8.06 "	4.03 "	7.5 "

注：鉄道部の載荷は複線までとする。



上路：道路 6 車線 下路：鉄道複々線

図-6 概略一般図

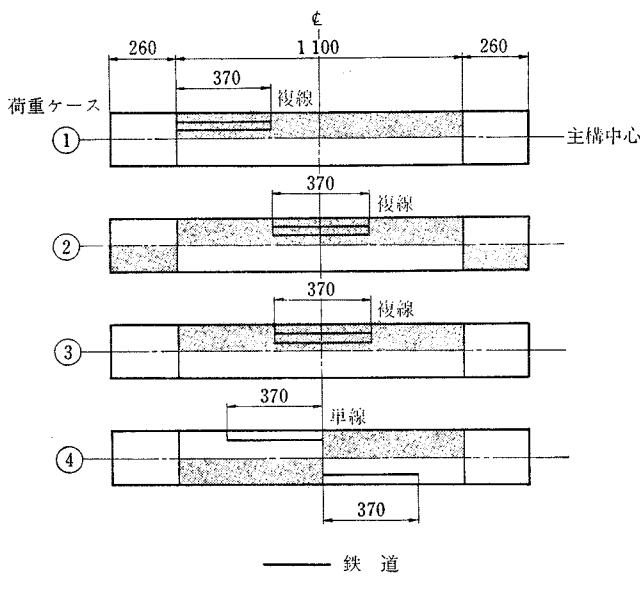


図-7 活荷重の載荷状態

実橋相当の 1.5×10^5 、非常に大きい場合として 10^{10} の 3通りについて考えた。 γ のちがいによる影響を調べるために荷重ケース 1についてのみ 3種類の γ について計算したが、その他の荷重ケースについては実橋相当の $\gamma=1.5 \times 10^5$ の場合についてのみ計算した。

表-2 活荷重

(4) 計算結果および従来の非連成法との比較

図-8 に補剛トラスのたわみおよび橋面傾角の計算結果を示す。図-9、10 に補剛トラスの曲げモーメントの計算結果を示す。図-11 にねじりモーメントの計算結果を示す。

表-3、4 はたわみの比較表であり、表-5～8 は補剛トラスの軸力の比較表である。表-9 はケーブル張力の比較表である。 γ 値の影響を表-10 に示す。

(5) 考 察

従来の鉛直荷重成分とねじり荷重成分によるものを別々に計算して合計する非連成法と本解法のように連成を考慮した解法を比較して次のことがいえる。しかし対傾構のせん断剛性 γ は実橋相当の 1.5×10^5 以上であれば、横断形状が保持されていることを確認したので、本解法について $\gamma=1.5 \times 10^5$ の値を用いて比較した。

(i) たわみは中央径間で 2～4% 非連成法のほうが大きいが、側径間ではほとんど差がない。

(ii) 弦材軸力はよくあっていて、最大誤差で 3 % である。

(iii) 斜材軸力は特に中間支点付近で本解法の値が非連成法の値より、一般に大きく、最大で 26% 増となっている。

(iv) 横構軸力は両者の間にかなりの差があるが、一般的な傾向は見出せない。

(v) 活荷重によるケーブル張力は最大 3% の差があった。

また、対傾構のせん断剛性 γ が吊橋性状に与える影響については次のようなことがわかった。

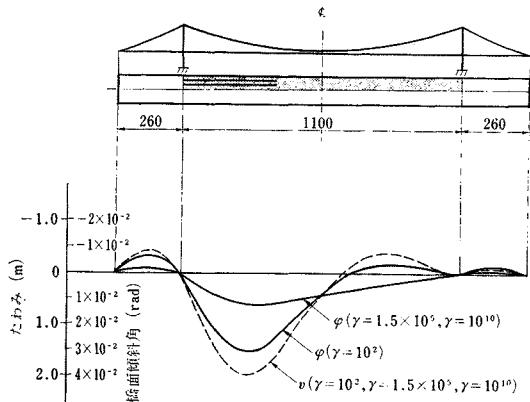


図-8 補剛トラスのたわみおよび橋面傾斜角

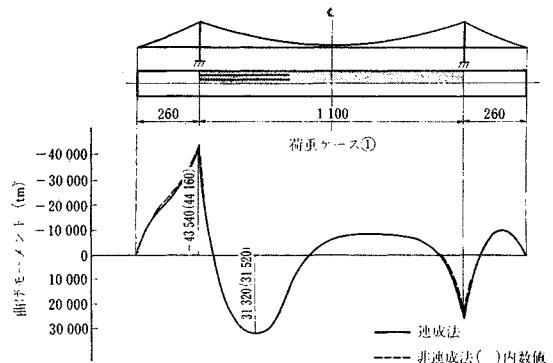


図-9 補剛トラスの曲げモーメント

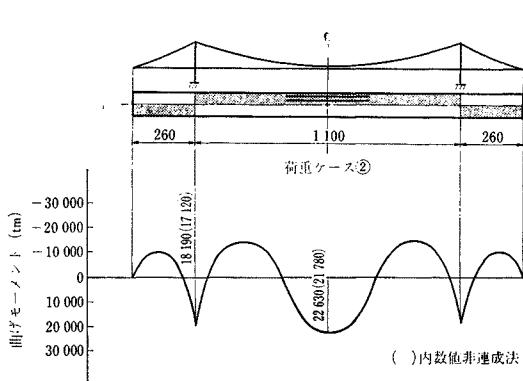


図-10 補剛トラスの曲げモーメント

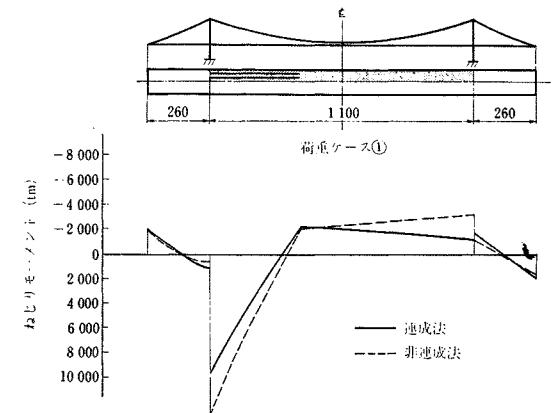


図-11 補剛トラスのねじりモーメント

表-3 たわみ比較表

荷重ケース①

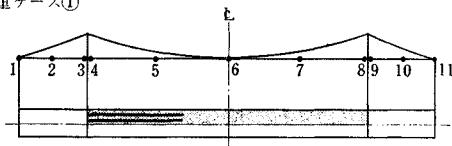
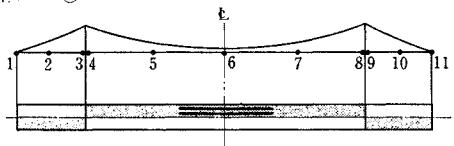


表-4 たわみ比較表

荷重ケース②



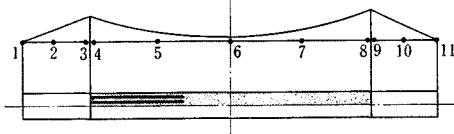
単位:m

	主構のせん断中心のたわみ		橋面傾斜を考えたときの ν_{max}		橋面傾斜を考えたときの ν_{min}	
	非連成法	連成法	非連成法	連成法	非連成法	連成法
1	0	0	0	0	0	0
2	-0.4458	-0.4443	-0.4608	-0.4644	-0.4308	-0.4242
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	2.0180	1.9826	2.2002	2.1788	1.8358	1.7864
6	0.4716	0.4239	0.6194	0.5548	0.3238	0.2930
7	0.3853	-0.4169	-0.4653	-0.4758	-0.3058	-0.3580
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0.1350	-0.1336	-0.1450	-0.1501	-0.1250	-0.1171
11	0	0	0	0	0	0

	主構のせん断中心のたわみ		橋面傾斜を考えたときの ν_{max}		橋面傾斜を考えたときの ν_{min}	
	非連成法	連成法	非連成法	連成法	非連成法	連成法
1	0	0	0	0	0	0
2	-0.1487	-0.1463	-0.1726	-0.1835	-0.1248	-0.1091
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0.5670	0.5180	0.7249	0.6615	0.4091	0.3745
6	2.0066	1.9342	2.2780	2.2041	1.7352	1.6643
7	0.5670	0.5180	0.7249	0.6615	0.4091	0.3745
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	-0.1487	-0.1463	-0.1726	-0.1835	-0.1248	-0.1091
11	0	0	0	0	0	0

表-5 軸力比較表

荷重ケース①

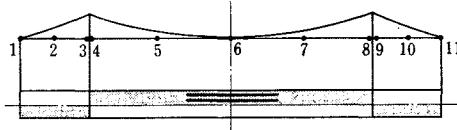


単位: t

	弦材 軸力		斜材 軸力		横構 軸力	
	非連成法	連成法	非連成法	連成法	非連成法	連成法
1	0	0	-246.7	-279.7	-43.1	-38.0
2	-897.2	-907.2	-90.3	-83.7	-12.0	-4.4
3	-1960.5	-1897.6	-328.7	-212.8	159.3	64.7
4	-1960.5	-1897.6	836.1	1050.8	159.4	179.7
5	1210.5	1218.4	-87.8	62.4	47.9	19.5
6	-288.1	-293.9	-73.4	-66.9	-57.2	-50.2
7	-342.1	-346.8	72.3	46.7	-71.2	-42.1
8	985.9	969.1	332.3	338.7	-56.0	-34.7
9	985.9	969.1	-429.5	-473.2	-55.9	-33.0
10	-406.1	-416.7	-45.9	-45.1	2.4	0
11	0	0	191.8	229.8	33.0	33.5

表-6 軸力比較表

荷重ケース②



単位: t

	弦材 軸力		斜材 軸力		横構 軸力	
	非連成法	連成法	非連成法	連成法	非連成法	連成法
1	0	0	-226.2	-282.7	-81.3	-75.6
2	-433.0	-455.4	33.2	32.4	-3.0	0.2
3	726.0	717.5	407.7	468.6	110.2	73.9
4	726.0	717.5	-416.4	-410.0	110.3	78.1
5	-484.3	-500.4	202.3	157.5	160.4	111.2
6	921.5	919.7	0	0	0	0
7	-484.3	-500.4	-202.3	-157.5	-160.4	-111.2
8	726.0	717.5	416.4	410.0	-110.3	-78.1
9	726.0	717.5	-407.7	-468.6	-110.2	-73.9
10	-433.0	-455.4	-33.2	-32.4	3.0	0.2
11	0	0	226.2	-282.7	81.3	75.6

(i) せん断中心のたわみは r 値が変わってもほとんど変化しない。

(ii) 橋面傾斜角 φ は $r=10^2$ と $r=1.5 \times 10^5$ の間ではかなり変化する。

(iii) 弦材軸力は $r=1.5 \times 10^5$ の場合は $r=10^2$ の場合の約 90% である。実橋相当の r 値の場合の左右弦材の応力比は荷重ケース①の中間支点上で 0.62 : 0.38 であった。

(iv) 斜材軸力は $r=10^2$ と $r=1.5 \times 10^5$ の間では少し変化するが、同じ傾向は示さない。

(v) 横構軸力は $r=10^2$ と 1.5×10^5 の間では大きく変化する。 $r=10^2$ ではほとんど横構に軸力を生じ

ない。

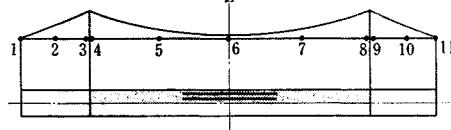
(vi) 活荷重による左右ケーブル張力の分担率は $r=10^2$ では 0.66 : 0.34, $r=1.5 \times 10^5$ では 0.62 : 0.38 となる。

6. 結び

本報文は補剛トラスを有する連続吊橋の断面変形挙動を含む基礎方程式をラプラス変換法を用いて解く方法について述べ、さらに数値計算を行った結果から従来の非連成法との比較および対傾構換算せん断剛性 r 値の影響について若干の考察を行った。

表-7 軸力比較表

荷重ケース③

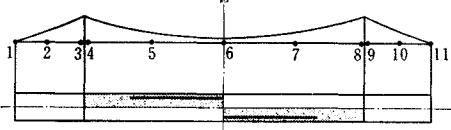


単位: t

	弦材 軸力		斜材 軸力		横構 軸力	
	非連成法	連成法	非連成法	連成法	非連成法	連成法
1	0	0	-294.1	-346.2	-47.2	-46.4
2	-697.8	-710.3	45.8	44.6	-4.5	-0.7
3	1003.7	969.2	546.6	584.0	91.1	41.1
4	1003.7	969.2	-454.0	-479.2	91.2	69.8
5	-483.7	-500.5	200.1	155.2	159.2	110.7
6	914.8	912.1	0	0	0	0
7	-483.7	-500.5	-200.1	-155.2	-159.2	-110.7
8	1003.7	969.2	454.0	479.2	-91.1	-69.8
9	1003.7	969.2	-546.6	-584.0	-91.2	-41.1
10	-697.8	-710.3	-45.8	-44.6	4.5	0.7
11	0	0	294.1	346.2	47.2	45.4

表-8 軸力比較表

荷重ケース④



単位: t

	弦材 軸力		斜材 軸力		横構 軸力	
	非連成法	連成法	非連成法	連成法	非連成法	連成法
1	0	0	-243.1	-270.3	-8.0	-4.7
2	-688.3	-704.6	27.9	28.9	-7.7	-3.9
3	621.6	695.6	416.1	446.0	82.5	27.4
4	621.6	695.6	-303.4	-473.4	82.5	123.9
5	176.1	192.2	46.5	88.6	23.6	20.5
6	232.3	226.4	-206.7	-239.1	-231.6	-207.4
7	176.1	226.4	-46.5	88.6	23.6	20.5
8	621.6	695.6	304.4	473.4	82.5	123.9
9	621.6	625.6	-416.1	-446.0	82.5	27.4
10	-688.3	-704.6	-27.9	-28.9	-7.7	-3.9
11	0	0	243.1	270.3	-8.0	-4.7

表-9 ケーブル張力比較表

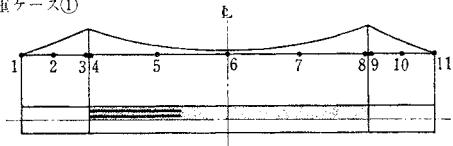
H_{p2} : 荷重偏載側のケーブル張力 (t)
 H_{p1} : 荷重偏載反対のケーブル張力 (t)

単位: t

荷重ケース		非連成法	連成法
①	H_{p1}	2 229	2 158
	H_{p2}	3 445	3 555
②	H_{p1}	3 452	3 371
	H_{p2}	5 134	5 273
③	H_{p1}	3 470	3 391
	H_{p2}	5 160	5 302
④	H_{p1}	3 917	3 961
	H_{p2}	3 917	3 961

表-10 r 値に対する比較表

荷重ケース①



	たわみ (m)		弦材軸力 (t)		斜材軸力 (t)	
	$r=10^2$	$r=1.5 \times 10^3$	$r=10^2$	$r=1.5 \times 10^3$	$r=10^2$	$r=1.5 \times 10^3$
1	0	0	0	0	-286.9	-279.7
2	-0.4423	-0.4443	-1 097.2	-907.2	-91.7	-83.7
3	0	0	-2 081.9	-1 897.6	-243.7	-212.8
4	0	0	-2 981.9	-1 897.6	968.9	1 050.8
5	1.9768	1.9826	1 421.1	1 218.4	-51.4	-62.4
6	0.4256	0.4239	-357.8	-293.9	-31.9	-66.9
7	-0.4127	-0.4169	-407.8	346.8	14.4	46.7
8	0	0	1 193.5	969.1	392.8	338.7
9	0	0	1 193.5	969.1	-542.9	473.2
10	-0.1333	-0.1336	-518.6	-416.7	-52.5	-45.1
11	0	0	0	238.7	229.8	

対傾構の換算せん断剛性は本計算例の吊橋では $r = 1.5 \times 10^3$ 以上あれば横断面形状は保持されていると考えてよい。また、この r 値は通常の床組として設計した対傾構に相当するものである。 r 値が小さくなるとねじり変形のほかに、ずり変形が生じるので、橋面傾斜角は当然大きくなる。しかし、その限界量については今後の研究課題となろう。

偏心荷重を鉛直成分とねじり成分にわけて計算し、それぞれ合計して求める非連成法と比較して、横断面形状が保持されている場合には、たわみおよび弦材応力に関して本解法による連成法とほぼ一致することがわかった。

斜材応力、横構応力は合わないが、これは非連成法の場合、プライヒの理論⁶⁾によっているため2次のせん断力の影響が無視されているためと考えられる〔付録D参照〕。今後の設計においては、連成法による解析を行うことが望ましい。

なお、本研究は本州四国連絡橋公団の業務の一環として行ったものであり、ここに発表を許された公団の田島

部長および関係各位のご厚意、ご指導に対して感謝の意を表します。また、この解析は当時東京大学大学院博士課程在学中の藤沢伸光博士のご協力を得て完成されたものであることを付記して深謝します。

参考文献

- Shimada, S.: Programming for Digital Computation of Suspension Bridges under Vertical, Horizontal and Torsional Loadings, 土木学会論文集, 第 81 号, 1961.
- Resinger, F.: Der dünnwandige Kastenträger, Forschungshefte aus den Gebiete des Stahlbau Heft 13, 1959.
- Vlasov, V.Z. 著 (奥村敏恵、外訳): 薄肉弾性梁の理論, 技報堂, 1967.
- 奥村敏恵・坂井藤一: 箱型ばかりの断面変形と中間ダイヤフラムの影響, 土木学会論文報告集, 第 190 号, 1971.
- 小松定夫・西村宣男・平山健一: 補剛トラスの対傾構変形を考慮した吊橋の3次元解析, 土木学会関西支部年次講演会, 1972.
- Bleich, F., C.B. McCullough, R. Rosecrans and G.S. Vincent: The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges.

【付録 A】基礎方程式(1)~(6)の誘導

本文 図-3 に示す補剛トラスの変形としてのそり ψ , ねじり角 φ , ずれ角 θ に関する基礎方程式はウラソーフによると式となる。

$$\left. \begin{array}{l} aw'' - b_1 w - b_2 \bar{\varphi}' - b_1 \bar{\theta}' + p_w = 0 \\ b_1 \bar{\varphi}'' + b_2 w' + b_2 \bar{\theta}'' + p_t = 0 \\ b_2 \bar{\varphi}'' + b_1 \bar{\theta}'' + b_1 w' - r \bar{\theta} + p_\theta = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (A1)$$

上式を吊橋補剛トラスに適用する。

ケーブル形状は2次放物線とすると,

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \quad \dots \dots \dots \quad (A2)$$

活荷重載荷時のケーブルの形状は補剛桁のねじり角 φ , ずれ角 θ による影響を考慮して,

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = v - \frac{B}{2} (\bar{\theta} + \bar{\varphi}) \\ v_2 = v + \frac{B}{2} (\bar{\theta} + \bar{\varphi}) \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (A3)$$

一方、ケーブル張力は死荷重状態から $(H_d + H_{p1})$ および $(H_d + H_{p2})$ に変化する。吊材が十分密にあると考えて、ケーブルに等分布に作用する荷重を p_1 , p_2 とすると,

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = (H_d + H_{p1}) \frac{d^2}{dx^2} (y + v_1) \\ p_2 = (H_d + H_{p2}) \frac{d^2}{dx^2} (y + v_2) \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (A4)$$

死荷重強度を p_d , 活荷重強度を p_v とし、ねじりモーメントを m_t , ずれモーメントを m_θ とすると、補剛桁に作用する力は,

$$\left. \begin{array}{l} \text{鉛 直 方 向 } p_v + p_d + p_1 + p_2 \\ \text{ねじりモーメント } m_t + \frac{B}{2}(p_2 - p_1) \\ \text{ずれモーメント } m_\theta + \frac{B}{2}(p_2 - p_1) \end{array} \right\} \dots (A5)$$

吊橋補剛トラスの曲げモーメントはその曲げ剛性を EI とすると、

$$\begin{aligned} M &= -EI \frac{d^2v}{dx^2} \\ \frac{d}{dx^2} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) &= -\frac{d^2M}{dx^2} = p_v + p_d + p_1 + p_2 \end{aligned} \dots (A6)$$

式 (A3), (A4) より

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= 2H_d v'' + 2H_d y'' + (H_{p1} + H_{p2}) y'' \\ &\quad + (H_{p1} + H_{p2}) v'' \\ &\quad + (H_{p2} - H_{p1}) \frac{B}{2} (\bar{\theta}'' + \bar{\varphi}'') \end{aligned}$$

$$p_d = -2H_d y''$$

上式を式 (A6) に代入してまとめると、

$$\begin{aligned} EI v'''' &- (2H_d + H_{p1} + H_{p2}) v'' \\ &- (H_{p2} - H_{p1}) \frac{B}{2} \bar{\varphi}'' - (H_{p2} - H_{p1}) \frac{B}{2} \bar{\theta}'' \\ &= p_v + (H_{p1} + H_{p2}) y'' \end{aligned} \dots (A7)$$

分布ずれモーメント p_θ , 分布ねじりモーメント p_t は、

$$p_t = m_t + \frac{B}{2}(p_2 - p_1)$$

$$p_\theta = m_\theta + \frac{B}{2}(p_2 - p_1)$$

ここに m_t, m_θ は外力による分布ねじりモーメントおよび分布ずれモーメントである。

$p_w = 0$ とし、 p_t, p_θ を式 (A1) に代入すると

$$\begin{aligned} aw'' - b_1 w - b_2 \bar{\varphi}' - b_1 \bar{\theta}' &= 0' \dots (A8) \\ - \left\{ b_1 + \frac{B^2}{2} H_d + \frac{B^2}{4} (H_{p2} + H_{p1}) \right\} \bar{\varphi}'' \\ - b_2 w - \left\{ b_2 + \frac{B^2}{2} H_d + \frac{B^2}{4} (H_{p2} + H_{p1}) \right\} \bar{\theta}'' \\ + \frac{B}{2} (H_{p2} - H_{p1}) v'' &= m_t + \frac{B}{2} (H_{p2} - H_{p1}) y' \end{aligned} \dots (A9)$$

$$\begin{aligned} - \left\{ b_2 + \frac{B^2}{2} H_d + \frac{B^2}{4} (H_{p2} + H_{p1}) \right\} \bar{\varphi}'' - b_1 w' \\ - \left\{ b_1 + \frac{B^2}{2} H_d + \frac{B^2}{4} (H_{p2} - H_{p1}) \right\} \bar{\theta}'' + r\bar{\theta} \\ = m_\theta + \frac{B}{2} (H_{p2} - H_{p1}) y' \end{aligned} \dots (A10)$$

式 (A7)～(A10)において、 $\varphi = \bar{\varphi} + \bar{\theta}$, $\theta = 2\bar{\theta}$ として、変数変換すると本文式 (1)～(4) が求められる。

一方、本文式 (5), (6) は吊橋のケーブル方程式より、

$$\begin{aligned} H_p \frac{L_E}{ECA_C} + \frac{d^2y}{dx^2} \int_L dx &= 0 \text{ であるから} \\ H_{p1} &= -\frac{ECA_C}{L_E} y'' \int_L \left\{ v - \frac{B}{2}(\bar{\theta} + \bar{\varphi}) \right\} dx \\ H_{p2} &= -\frac{ECA_C}{L_E} y'' \int_L \left\{ v + \frac{B}{2}(\bar{\theta} + \bar{\varphi}) \right\} dx \end{aligned}$$

上式を前述の変数変換すれば本文式 (5), (6) となる。

【付録 B】 ラプラス変換式 (9)～(12) の誘導

式 (8) を解析的に解くため、計算の便宜上、次式を満足する変数 $V_1, V_2, \dots, \Theta_3, \Theta_4$ を導入する。

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \times \begin{bmatrix} V_1/4 \\ W_1/4 \\ \Phi_1/4 \\ \Theta_1/4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{H} \times \begin{bmatrix} V_2/4 \\ W_2/4 \\ \Phi_2/4 \\ \Theta_2/4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} \times \begin{bmatrix} V_3/4 \\ W_3/4 \\ \Phi_3/4 \\ \Theta_3/4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{H} \times \begin{bmatrix} V_4/4 \\ W_4/4 \\ \Phi_4/4 \\ \Theta_4/4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここに、 A は行列 \mathbf{H} の determinant で s の 10 次式となる。 $V_1, V_2, \dots, \Theta_3, \Theta_4$ は s の実係数の多項式でありこれらの値が求まれば V, W, Φ, Θ は次式で求められる。

$$\begin{aligned} V &= (V_1 F_1 + V_2 F_2 + V_3 F_3 + V_4 F_4)/4 \\ W &= (W_1 F_1 + W_2 F_2 + W_3 F_3 + W_4 F_4)/4 \\ \Phi &= (\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \Phi_3 F_3 + \Phi_4 F_4)/4 \\ \Theta &= (\Theta_1 F_1 + \Theta_2 F_2 + \Theta_3 F_3 + \Theta_4 F_4)/4 \end{aligned} \dots (B1)$$

まず、 \mathbf{H} の determinant A を求める。

$$A = s^4(\mu_1 s^6 + \mu_2 s^4 + \mu_3 s^2 + \mu_4)$$

ここに、 $\mu_1 = ac_1 c_4 c_9$

$$\mu_2 = ac_1 c_5 c_7 - c_1 c_4 c_8 c_{10} + ac_2 c_4 c_9 - 2ac_3^2 c_4$$

$$\mu_3 = c_3^2 c_4 c_8 - c_2 c_4 c_8 c_{10} - b_1 c_1 c_6 c_7 - b_2^2 c_1 c_7$$

$$+ ac_2 c_5 c_7 - ac_3^2 c_7$$

$$\mu_4 = -b_1 c_2 c_5 c_7 - b_2^2 c_2 c_7 + b_1 c_3^2 c_7$$

ただし、 $c_8 = b_1 + b_2$, $c_9 = c_5 + c_6$, $c_{10} = b_2 + b_6$

次に、 $V_1, V_2, \dots, \Theta_3, \Theta_4$ は次のようになる。

$$V_1 = s^2(\nu_1 s^4 + \nu_2 s^2 + \nu_3)$$

$$W_1 = s^3(-\nu_4 s^2 + \nu_5)$$

$$\Phi_1 = s^2(2\nu_6 s^2 + \nu_7 s^2 + \nu_8)$$

$$\Theta_1 = s^4(2\nu_9 s^2 + 2\nu_4)$$

$$V_2 = s^3(-\nu_4 s^2 + \nu_5)$$

$$W_2 = s^4(\nu_9 s^4 + \nu_{10} s^2 + \nu_{11})$$

$$\Phi_2 = s^3(\nu_{12} s^4 + \nu_{13} s^2 + \nu_{14})$$

$$\Theta_2 = s^5(\nu_{15} s^2 + \nu_{16})$$

$$V_3 = s^2(\nu_6 s^4 + \nu_{17} s^2 + \nu_8)$$

$$W_3 = s^3(\nu_{18} s^4 + \nu_{19} s^2 + \nu_{14})$$

$$\vartheta_3 = s^2(\nu_{20}s^6 + \nu_{21}s^4 + \nu_{22}s^2 + \nu_{23})$$

$$\vartheta_3 = s^4(\nu_{24}s^2 + \nu_{25}s^2 + \nu_{26})$$

$$V_4 = s^4(\nu_6s^2 + \nu_4)$$

$$W_4 = s^5(\nu_{27}s^2 + \nu_{28})$$

$$\vartheta_4 = s^4(\nu_{20}s^4 + \nu_{29}s^2 + \nu_{30})$$

$$\vartheta_4 = s^4(\nu_{31}s^4 + \nu_{32}s^2 + \nu_{33})$$

ここで、

$$\nu_1 = ac_4c_9$$

$$\nu_2 = ac_5c_7 - c_4c_7$$

$$\nu_3 = -b_1c_5c_7 - b_2^2c_7$$

$$\nu_4 = c_3c_4c_8$$

$$\nu_5 = -b_2c_3c_7$$

$$\nu_6 = -ac_3c_4$$

$$\nu_7 = -ac_3c_7 + c_3c_4c_8$$

$$\nu_8 = b_1c_3c_7$$

$$\nu_9 = c_1c_4c_9$$

$$\nu_{10} = c_2c_4c_9 + c_1c_5c_7 - 2c_3^2c_4$$

$$\nu_{11} = c_2c_5c_7 - c_3^2c_7$$

$$\nu_{12} = c_1c_4c_8$$

$$\nu_{13} = c_2c_4c_8 + b_2c_1c_7$$

$$\nu_{14} = b_2c_2c_7$$

$$\nu_{15} = b_1c_1c_5 - b_2c_1c_6$$

$$\nu_{16} = b_1c_2c_5 - b_2c_2c_6 + 2c_3^2c_4$$

$$\nu_{17} = -ac_3c_7$$

$$\nu_{18} = c_1c_4c_{10}$$

$$\nu_{19} = c_2c_4c_{10} + b_2c_1c_7 - c_3^2c_4$$

$$\nu_{20} = ac_1c_4$$

$$\nu_{21} = ac_1c_7 + ac_2c_4$$

$$\nu_{22} = ac_2c_7 - b_1c_1c_7$$

$$\nu_{23} = -b_1c_2c_7$$

$$\nu_{24} = -ac_1c_6$$

$$\nu_{25} = b_1c_1c_{10} + ac_3^2 - ac_2c_8$$

$$\nu_{26} = b_1c_2c_{10} - b_1c_3^2$$

$$\nu_{27} = b_2c_1c_4 - c_1c_4c_5$$

$$\nu_{28} = b_2c_2c_4 - c_2c_4c_5 + c_3^2c_4$$

$$\nu_{29} = ac_2c_4 - c_1c_4c_8$$

$$\nu_{30} = -c_2c_4c_8$$

$$\nu_{31} = ac_1c_5$$

$$\nu_{32} = ac_2c_5 - b_1c_1c_5 - b_2^2c_1 - ac_3^2$$

$$\nu_{33} = -b_1c_2c_5 - b_2^2c_2 + b_1c_3^2$$

また、 $\mu_5s^6 + \mu_2s^4 + \mu_3s^2 + \mu_4 = G(s)$ とおけば $A = s^4G(s)$

となり、以上の結果を式 (B1) に代入し、初期値に関する項と外力に関する項に分けて整理すると式 (9) ~ (12) が得られる。

【付録 C】 ラプラス逆変換における留数の求め方

留数は次のようにして求められる。

(1) $g(s)=1$ の場合

$$G_1(s) = \frac{d}{ds} \{g(s) \cdot G(s)\} = 6\mu_1s^5 + 4\mu_2s^3 + 2\mu_3s$$

とおく

○ $g(s)=0$ に対する留数 $\bar{R}=0$

○ 実根 $s=s_1$ および $-s_1$ に対する留数

$$R(s_1) + R(-s_1) = \frac{2u(s_1)}{G_1(s_1)} \sinh s_1x$$

..... $u(s)$ が偶関数のとき

$$= \frac{2u(s_1)}{G_1(s_1)} \cosh s_1x$$

..... $u(s)$ が奇関数のとき

○ 純虚数の根 $s=s_1i$ および $-s_1i$ に対する留数

$$R(s_1i) + R(-s_1i)$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{u(s_1i)}{G_1(s_1i)} \right\} \cos s_1x - 2 \operatorname{Im} \left\{ \frac{u(s_1i)}{G_1(s_1i)} \right\} \sin s_1x$$

○ 4 つの虚根 $s=\pm s_1 \pm s_2i$ に対する留数

$$R(s_1+s_2i) + R(s_1-s_2i) + R(-s_1+s_2i) + R(-s_1-s_2i)$$

$$= 4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{u(s_1+s_2i)}{G_1(s_1+s_2i)} \right\} \sinh s_1x \cos s_2x$$

$$- 4 \operatorname{Im} \left\{ \frac{u(s_1+s_2i)}{G_1(s_1+s_2i)} \right\} \cosh s_1x \sin s_2x$$

..... $u(s)$ が偶関数

$$= 4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{u(s_1+s_2i)}{G_1(s_1+s_2i)} \right\} \cosh s_1x \cos s_2x$$

$$- 4 \operatorname{Im} \left\{ \frac{u(s_1+s_2i)}{G_1(s_1+s_2i)} \right\} \sinh s_1x \sin s_2x$$

..... $u(s)$ が奇関数

(2) $g(s)=s$ の場合

$$G_2(s) = \frac{d}{ds} \{g(s) \cdot G(s)\} = 7\mu_1s^6 + 5\mu_2s^4 + 3\mu_3s^2 + \mu_4$$

とおく

○ $g(s)=0$ の根に対する留数 $\bar{R}=u(0)/\mu_4$

○ 実根 $s=s_1$ および $-s_1$ に対する留数

$$R(s_1) + R(-s_1) = \frac{2u(s_1)}{G_2(s_1)} \cosh s_1x$$

..... $u(s)$ が偶関数

$$= \frac{2u(s_1)}{G_2(s_1)} \sinh s_1x$$

..... $u(s)$ が奇関数

○ 純虚数の根 $s=s_1i$ および $-s_1i$ に対する留数

$$R(s_1i) + R(-s_1i)$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{u(s_1i)}{G_2(s_1i)} \right\} \cos s_1x - 2 \operatorname{Im} \left\{ \frac{u(s_1i)}{G_2(s_1i)} \right\} \sin s_1x$$

○ 4 つの虚根 $s=\pm s_1 \pm s_2i$ に対する留数

$$R(s_1+s_2i) + R(s_1-s_2i) + R(-s_1+s_2i)$$

$$+ R(-s_1-s_2i)$$

$$= 4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{u(s_1+s_2i)}{G_2(s_1+s_2i)} \right\} \cosh s_1x \cos s_2x$$

$$- 4 \operatorname{Im} \left\{ \frac{u(s_1+s_2i)}{G_2(s_1+s_2i)} \right\} \sinh s_1x \sin s_2x$$

..... $u(s)$ が偶関数

$$= 4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{u(s_1+s_2i)}{G_2(s_1+s_2i)} \right\} \sinh s_1x \cos s_2x$$

$$- 4 \operatorname{Im} \left\{ \frac{u(s_1+s_2i)}{G_2(s_1+s_2i)} \right\} \cosh s_1x \sin s_2x$$

..... $u(s)$ が奇関数

(3) $g(s)=s^2$ の場合

$$G_3(s) = \frac{d}{ds} \{g(s) \cdot G(s)\}$$

$$= 8\mu_1s^7 + 6\mu_2s^5 + 4\mu_3s^3 + 2\mu_4s$$

とおく

○ $g(s)=0$ の根に対する留数

$$\bar{R} = u'(0)/\mu_4 + u(0) \cdot x/\mu_4$$

○実根 $s=s_1$ および $-s_1$ に対する留数

$$R(s_1) + R(-s_1) = \frac{2u(s_1)}{G_3(s_1)} \sinh s_1 x$$

…………… $u(s)$ が偶関数

$$= \frac{2u(s_1)}{G_3(s_1)} \cosh s_1 x$$

…………… $u(s)$ が奇関数

○純虚数の根 $s=s_1i$ および $-s_1i$ に対する留数

$$R(s_1i) + R(-s_1i)$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{u(s_1i)}{G_3(s_1i)} \right\} \cos s_1 x - 2 \operatorname{Im} \left\{ \frac{u(s_1i)}{G_3(s_1i)} \right\} \sin s_1 x$$

○4つの虚根 $s=\pm s_1 \pm s_2 i$ に対する留数

$$R(s_1+s_2i) + R(s_1-s_2i) + R(-s_1+s_2i)$$

$$+ R(-s_1-s_2i)$$

$$= 4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{u(s_1+s_2i)}{G_3(s_1+s_2i)} \right\} \sinh s_1 x \cos s_2 x$$

$$- 4 \operatorname{Im} \left\{ \frac{u(s_1+s_2i)}{G_3(s_1+s_2i)} \right\} \cosh s_1 x \sin s_2 x$$

…………… $u(s)$ が偶関数

$$= 4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{u(s_1+s_2i)}{G_3(s_1+s_2i)} \right\} \cosh s_1 x \cos s_2 x$$

$$- 4 \operatorname{Im} \left\{ \frac{u(s_1+s_2i)}{G_3(s_1+s_2i)} \right\} \sinh s_1 x \sin s_2 x$$

…………… $u(s)$ が奇関数

ここに $\operatorname{Re}\{\}$, $\operatorname{Im}\{\}$ はおのおの $\{\}$ 内の実部, 虚部を表す。これらの結果からラプラス逆変換を求めることができる。

【付録 D】 本解法とブライヒ理論との比較

ブライヒ理論では主構斜材と横構せん断力のつり合い式を次のように考えている。 $s_d/h = s_r/g$

つまり $s_d = h \times T/2 gh$, $s_r = g \times T/2 gh$ である。

しかし、本解法では、

$$Sd = h \times \frac{T+S}{2gh} \quad s_r = g \times \frac{T-s}{2gh}$$

である。

すなわち、 s （ずれモーメント）を無視すると両者は一致する。ブライヒは s を無視したのであって、つまり 2 次せん断の影響を無視している。また、ねじり剛性は両者一致するが曲げねじり剛性は一致しない。

(1974.4.17・受付)