

# 純曲げを受ける薄肉 I 断面曲がり桁の局部座屈と連成座屈

## ELASTIC LOCAL AND COUPLED BUCKLING OF VERTICALLY CURVED I-GIRDERS UNDER PURE BENDING

三上市 蔵\*・赤松 洋一\*\*・武田 八郎\*\*\*  
By Ichizou Mikami, Yoichi Akamatsu and Hachiro Takeda

### 1. ま え が き

プレート・ガーダーや I 形あるいは箱形断面ばりの長方形腹板の曲げ弾性座屈に関しては、非常に広範囲の研究<sup>3),6)</sup>がなされてきた。充腹アーチや鋼ラーメン隅角部に見られるような薄肉 I 断面曲がりばりの腹板は扇形板ないしは近似的に扇形板とみなせるが、その座屈に関しては長方形板に対する研究成果が主として利用されているようである。

扇形板の座屈に関する研究は最近若干なされるようになった。K.Y. Chu<sup>7)</sup>は曲げ、せん断および軸力を受ける I 形断面曲がりばりの扇形腹板の弾性局部座屈をエネルギー法によって近似的に解析している。C.G. Culver<sup>14),15)</sup>は I 断面曲線桁の圧縮フランジの局部座屈を明らかにするため、曲げと圧縮を受ける扇形板の弾性および非弾性座屈を差分法によって解析している。これらの研究はいずれも断面を構成する板要素の局部座屈を扱っており、腹板とフランジとが連成して座屈するような場合については研究されていないようである。

この論文では薄肉 I 断面曲がり桁が曲げを受ける場合について、腹板の局部座屈および腹板とフランジとの連成座屈を理論的に解析する。まず、解法としてべき級数法を用い、厳密解を導く。

次に扇形腹板の局部座屈を対象にして、曲げモーメントの方向、曲率、腹板の縦横比、腹板の円弧辺の支持条件、応力分布などの座屈荷重に対する影響を検討し、曲率を有する場合の特徴を調べる。

最後に腹板とフランジの連成座屈を解析し、腹板の局部座屈との関係を検討する。微分方程式の解は半径方向あるいは円周方向補剛材のある場合にも利用できるよう

に極異方性扇形腹板に対して求めておく。そして半径方向補剛材を有する場合に対する数値計算を若干行う。

### 2. 応力分布

図一に示すように 2 軸対称の薄肉 I 断面曲がりばりが純曲げを受ける場合の腹板の局部座屈およびフランジと腹板との連成座屈を取り扱う。断面に作用する曲げモーメントは図一に示すように内側円弧辺で引張応力が生ずるような方向のものを基準にとり、これを正の曲げモーメントとし、 $\bar{M}_+$  で表わす。また、逆の方向の曲げモーメントを負の曲げモーメントとし、 $\bar{M}_-$  で表わす。

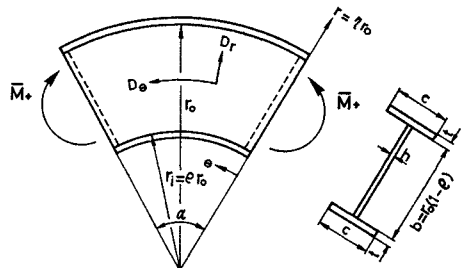
解析に入るまえに、応力分布を与える公式を整理しておく。ただし、解析にあたってはフランジ断面には腹板の縁応力と等しい応力が一様に分布すると仮定するので、ここでは腹板部のみの応力分布について述べる。また、腹板の内・外円弧辺の曲率半径、腹板厚、フランジの幅と厚さなどは図一に示す記号を用いて表わす。

曲率の影響を無視すると腹板部の応力は直線分布となり、次のように表わせる。

$$\sigma_\theta = \frac{\bar{M}}{r_0^2 h} \frac{6(1+\rho-2\eta)}{\Psi(1-\rho)^3}, \quad \sigma_r = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $\sigma_\theta, \sigma_r$  はそれぞれ円周方向および半径方向の引張応力で、

$$\Psi = 1 + 6(ct/bh)[1 + 2(t/b) + (4/3)(t/b)^2] \dots\dots (2)$$



図一 薄肉 I 断面曲がり桁と曲げモーメント

\* 正会員 工博 関西大学助教授 工学部土木工学科  
\*\* 正会員 (株)片山鉄工所橋梁部(元関西大学助手)  
\*\*\* 正会員 工修 舞鶴工業高等専門学校助教授 土木工学科(元関西大学助手)

である。はりに作用する曲げモーメント  $\bar{M}$  のうち腹板部が分担する曲げモーメントを  $M$  とすると次の関係が成り立つ。

$$M = \bar{M} / \psi \dots\dots\dots (3)$$

曲率半径比  $\rho = r_i / r_o$  がおよそ 0.7 以上の場合には式 (1) が近似的に適用できる<sup>5), 13)</sup>。

曲率の影響を考慮した場合の応力分布は曲がりばり理論によって近似的に決定するか、または弾性理論によって平面応力問題として決定するか、いずれかの方法が取られる。曲がりばり理論による近似応力分布は Résal など多くの研究者によって古くから研究<sup>5), 12)</sup>され、公式も種々の表現のものがある。これらに関しては大野<sup>1)</sup>が詳細に検討している。中立軸を基準にとった大野の式<sup>2), 4)</sup>によると次のようになる。

$$\sigma_\theta = \frac{\bar{M}}{r_o^2 h} \frac{1}{B_2} \left( \frac{B_1}{\eta} - 1 \right)$$

$$\sigma_r = \frac{\bar{M}}{r_o^2 h} \frac{1}{B_2} \left( \frac{B_1 \log \eta}{\eta} - \frac{B_3}{\eta} - 1 \right) \dots\dots\dots (4)$$

ただし、

$$B_1 = (1 - \rho) \left( 1 + 2 \frac{t}{b} \frac{c}{h} \right) \left[ -\log \rho - \frac{c}{h} \log \left\{ 1 - \frac{1 - \rho}{\rho} \frac{t}{b} \right\} + \frac{c}{h} \log \left\{ 1 + (1 - \rho) \frac{t}{b} \right\} \right]$$

$$B_2 = (1 - \rho) \left[ \frac{1 + \rho}{2} + \frac{t}{b} \frac{c}{h} (1 + \rho) - B_1 \left( 1 + 2 \frac{t}{b} \frac{c}{h} \right) \right]$$

$$B_3 = -\rho + (1 - \rho) \frac{t}{b} \frac{c}{h} + B_1 \left[ \log \rho + \frac{c}{h} \log \left( 1 - \frac{1 - \rho}{\rho} \frac{t}{b} \right) \right]$$

式 (4) はフランジを考慮しない場合にも適用できる。

一方、弾性理論による応力分布は、フランジを考慮しない場合には長方形断面曲がりばりに対する解<sup>12)</sup>が利用できる。フランジを考慮する場合には 2 軸対称の I 形断面曲がりばりに対して、Chu<sup>7)</sup> がフランジを円筒シェルとみなして平面応力問題としての解を得ている。いずれの場合についても近似式 (4) による解とそれらの弾性理論による解とは実用上十分に一致している<sup>7), 12), 13)</sup>。

また極異方性の場合については、W. Buchmann<sup>11)</sup>が長方形断面曲がりばりを平面応力問題として解き、円周方向および半径方向の曲げ剛さ  $D_\theta, D_r$  の比が  $0 < D_\theta / D_r < 4$  であれば応力分布は等方性の場合とあまり変わらないことを示している。

これらの点を考慮して、以下では式 (1) および (4) で定まる線形あるいは非線形応力分布を用いることにする。参考までにこれらの応力分布の計算例を図-2, 3 に示す。図-2 は曲率半径比  $\rho$  の値を種々変えて式 (4) から計算した I 形断面曲がりばりの非線形応力分布を示

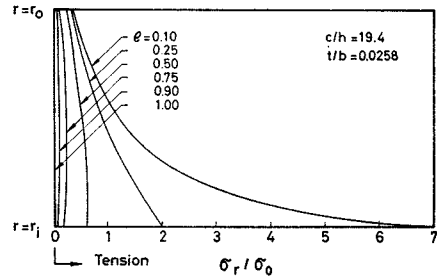
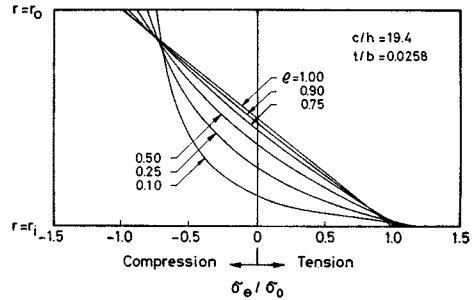


図-2 曲率による応力分布の変化

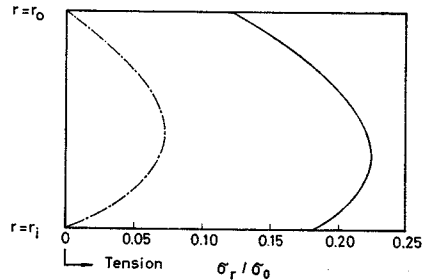
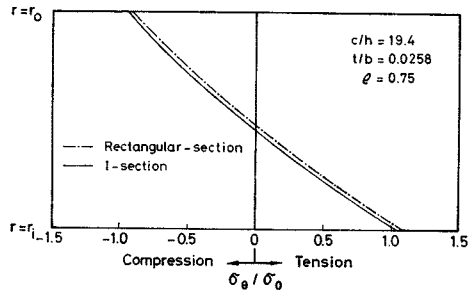


図-3 フランジによる応力の変化

す。  $\rho = 1$  の場合は直線ばりになるので、この場合の分布は式 (1) による線形応力分布と一致している。図-2 から曲率が大になると中立軸が曲率中心の方へ移動し、円周方向応力  $\sigma_\theta$  については外側の縁圧縮応力が減少し、内側の縁引張応力が増大することがわかる。半径方向応力  $\sigma_r$  は引張応力で、曲率の増加とともに大きくなる。

図-3 はフランジを有する場合 (I 形断面) とフランジを有しない場合 (長方形断面) の非線形応力分布を比較したものである。フランジがない場合に比べ、フランジがつくと特に半径方向の引張応力が増大する。すなわ

ち応力分布を決定する際にはフランジを考慮する必要が  
あることになる。

図-2.3 は  $\bar{M}_+$  に対する計算例であるが、 $\bar{M}_-$  に対  
する応力分布は形状は同一で、圧縮領域と引張領域とが  
逆になる。したがって、半径方向応力  $\sigma_r$  は  $\bar{M}_+$  の場  
合引張応力で、 $\bar{M}_-$  の場合には圧縮応力となる。曲率の  
影響は  $\sigma_\theta$  の分布にも現われているが  $\sigma_r$  が生じる点に  
著しい。直線部材に比べて曲がり部材では、この  $\sigma_r$  が  
腹板部の座屈に顕著な影響を及ぼすことが予想される。

### 3. 微分方程式の厳密解

純曲げを受ける 2 軸対称薄肉 I 断面曲がり桁の腹板と  
フランジとの連成座屈を解析する。K.Y. Chu<sup>7)</sup> が腹板  
の局部座屈を解析しているが、腹板が両円弧辺で単純支  
持されている場合についてエネルギー法による近似解を  
得ているだけである。そこで腹板の局部座屈の厳密解を  
他の支持条件の場合も含めて求めることも研究対象に含  
める。

腹板が半径および円周方向補剛材で補剛されている場  
合も補剛された腹板を極異方性扇形板とみなして取り扱  
えるように、極異方性扇形板の微分方程式を解くことに  
する。すなわち、一般に半径方向応力  $\sigma_r$  および円周方  
向応力  $\sigma_\theta$  を受ける極異方性扇形板が座屈したときのた  
わみ曲面の微分方程式は次のようになる。

$$D_r \left( \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right) + (4 D_{r\theta} + 2 D_1) \cdot \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + D_\theta \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) = \sigma_r h \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma_\theta h \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \dots (5)$$

ただし  $D_r$ ,  $D_\theta$  はそれぞれ半径および円周方向の曲げ剛  
さ、 $2 D_{r\theta}$  はねじり剛さ、 $D_1$  は横収縮に関する剛さで  
ある。

腹板は両直線辺 ( $\theta=0, \alpha$ ) で単純支持されており、両  
円弧辺でフランジによって弾性拘束支持されているもの  
とする。フランジはその両端で単純支持され、その断面  
には腹板の円弧辺における円周方向応力と同じ大きさの  
円周方向応力が一様に作用すると考える。図-4 に示す  
ように腹板の円弧辺における半径方向応力  $\sigma_r$  がフラン  
ジの腹板との接合線に沿って作用するものとし、曲線ば  
りの微分方程式<sup>13)</sup>をもとに内・外フランジが座屈したと  
きの微分方程式を導くと次のようになる。

$$B_b \left( \frac{1}{r^4} \frac{d^4 w_b}{d\theta^4} - \frac{1}{r^3} \frac{d^2 \varphi_b}{d\theta^2} \right) - C_b \left( \frac{1}{r^3} \frac{d^2 \varphi_b}{d\theta^2} \right)$$

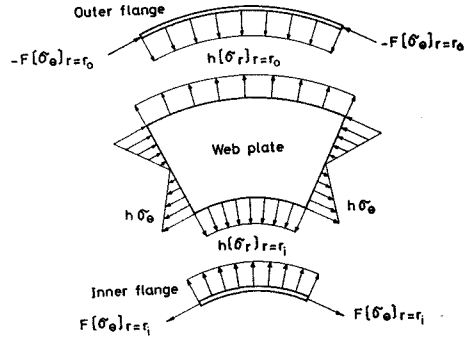


図-4 腹板およびフランジの応力

$$+ \frac{1}{r^4} \frac{d^2 w_b}{d\theta^2} - \sigma_\theta F \frac{d^2 w_b}{r^2 d\theta^2} = \pm \left[ \sigma_r h \varphi_b + D_r \left( \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) - D_\theta \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + (4 D_{r\theta} + D_1) \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \dots (6)$$

および

$$B_b \left( \frac{1}{r^3} \frac{d^2 w_b}{d\theta^2} - \frac{\varphi_b}{r^2} \right) + C_b \left( \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi_b}{d\theta^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d^2 w_b}{d\theta^2} \right) + \sigma_\theta I_0 \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi_b}{d\theta^2} = \mp \left[ D_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + D_1 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \dots (7)$$

ただし  $B_b$ ,  $C_b$ ,  $F$ ,  $I_0$  はフランジの水平曲げ剛さ、ねじ  
り剛さ、断面積およびフランジ自身の重心に関する極 2  
次モーメントで、フランジのそり剛さは無視してある。  
 $w_b$ ,  $\varphi_b$  はフランジの水平たわみおよびねじり角である。  
また両式において複号は外側フランジに対しては上側  
の、内側フランジに対しては下側の符号をとるものとす  
る。

式 (5), (6), (7) の解を

$$w = r_0 \sum_{m=1}^{\infty} R(\eta) \sin(m\pi\theta/\alpha) \dots (8)$$

$$w_b = r_0 \sum_{m=1}^{\infty} A_1 \sin(m\pi\theta/\alpha) \dots (9)$$

$$\varphi_b = \sum_{m=1}^{\infty} A_2 \sin(m\pi\theta/\alpha) \dots (10)$$

とおき、式 (8) を式 (5) に代入すると次のようになる。

$$Q_1[R] - \mu_0 Q_2[R] = 0 \dots (11)$$

ただし、

$$Q_1[R] = \eta^4 \frac{d^4 R}{d\eta^4} + 2\eta^3 \frac{d^3 R}{d\eta^3} - r\eta^2 \frac{d^2 R}{d\eta^2} + r\eta \frac{dR}{d\eta} - \delta R \dots (12)$$

$$Q_2[R] = \bar{\sigma}_r \eta^4 \frac{d^2 R}{d\eta^2} + \bar{\sigma}_\theta \eta^3 \frac{dR}{d\eta} - \bar{\sigma}_\theta \phi_m \eta^2 R \dots (13)$$

であり、 $\phi_m = (m\pi/\alpha)^2$ ,  $r = K + 2M_1\phi_m + M_p$ ,  $\delta = r - (1 - \phi_m)^2 K$ ,  $K = D_0/D_r$ ,  $M_1 = D_1/D_r$ ,  $M_p = 4\phi_m D_{re}/D_r$ ,  $\mu_0 = \sigma_0 h r_0^2 / D_r$ ,  $\bar{\sigma}_r = \sigma_r / \sigma_0$ ,  $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / \sigma_0$  で、 $\sigma_0$  は座屈応力である。

式(1)で表わされる線形応力分布の場合は  $\sigma_0 = 12\bar{M} / hr_0^2 \Psi(1-\rho)^3$  とおくと式(13)は

$$Q_2[R] = (\rho_m \eta^3 - \eta^4) \frac{dR}{d\eta} - \phi_m (\rho_m \eta^2 - \eta^3) R \dots\dots\dots(14a)$$

となる。ただし  $\rho_m = (1+\rho)/2$  である。また、式(4)で表わされる非線形応力分布の場合は  $\sigma_0 = \bar{M} / hr_0^2 B_2$  とおくと

$$Q_2[R] = [(B_1 \log \eta - B_2) \eta^3 - \eta^4] \frac{d^2 R}{d\eta^2} + (B_1 \eta^2 - \eta^3) \frac{dR}{d\eta} - \phi_m (B_1 \eta - \eta^2) R \dots\dots\dots(14b)$$

となる。

$r = r_i$  および  $r_0$  における連続条件  $w_b = w$ ,  $\varphi_b = -\partial w / \partial r$  に式(8)~(10)を代入すると  $\eta = 1$  および  $\rho$  において  $A_1 = R$ ,  $A_2 = -dR/d\eta$  となるから、式(8),(9),(10)を式(6),(7)に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \pm \eta^4 \frac{d^3 R}{d\eta^3} \pm \eta^3 \frac{d^2 R}{d\eta^2} + [(M_b + N_b) \eta \mp (K + M_1 \phi_m + M_p) \eta^2] \frac{dR}{d\eta} \\ & - [M_b \phi_m + N_b \mp (K \phi_m + M_1 \phi_m + M_p) \eta] R \\ & = \mu_0 \left[ \pm \bar{\sigma}_r \eta^4 \frac{dR}{d\eta} + \bar{\sigma}_\theta M_F \eta^2 R \right] \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & \pm \eta^3 \frac{d^2 R}{d\eta^2} + [(M_b / \phi_m + N_b) \eta \pm M_1 \eta^2] \frac{dR}{d\eta} \\ & - (M_b + N_b \pm M_1 \phi_m \eta) R = -\mu_0 \bar{\sigma}_\theta N_I \eta \frac{dR}{d\eta} \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

ただし、 $M_b = \phi_m(1-\rho)B_b/bD_r$ ,  $N_b = \phi_m(1-\rho)C_b/bD_r$ ,  $M_F = \phi_m(1-\rho)F/bh$ ,  $N_I = (1-\rho)^3 \phi_m I_0 / b^3 h$  である。

式(11)を境界条件式(15),(16)のもとで解けば連成座屈荷重  $\mu_0$  が求まる。また、腹板の局部座屈を解析する場合で、腹板の両円弧辺が単純支持(SS)あるいは固定(FX)の場合は式(15),(16)の代わりに次の境界条件式を用いればよい。

$$\begin{aligned} \text{SS} : R=0, \eta d^2 R / d\eta^2 + M_1 dR / d\eta = 0 \dots\dots(17) \\ \text{FX} : R=0, dR / d\eta = 0 \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

式(11)の厳密解は Frobenius 法を用いて求めることができるが、かなり複雑になる。そこで特異点  $\eta = 0$  を避けて自変数の変換  $\eta = \xi + \rho_m$  を施し、べき級数法による厳密解を求める。すなわち、解として腹板の中央線  $\eta = \rho_m$  のまわりに Taylor 展開したべき級数

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \xi^i \dots\dots\dots(19)$$

をとる。式(12),(14)の  $Q_1, Q_2$  に自変数の変換を施したのち、式(19)を代入して、 $\xi$  の各べき項の係数をそれぞれ0とおくと、積分定数  $g_0, g_1, g_2, g_3$  を除くすべての定数  $g_i$  は  $g_0 \sim g_3$  で表わされ、結局解は式(20)のようになる。ただし、非線形応力分布の場合、式(14b)に含まれる  $\log(\xi + \rho_m)$  を  $\xi$  のべき級数に展開すると次のようになる。

$$\log(\xi + \rho_m) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \xi^i$$

ただし、 $C_0 = \log \rho_m$  で、 $i \geq 1$  に対しては  $C_i = (-1)^{i-1} / i \rho_m^i$  である。

$$R = \sum_{n=0}^3 [g_n \sum_{i=0}^{\infty} A_{n,i} \xi^i] \dots\dots\dots(20)$$

ここに係数  $A_{n,i}$  ( $n=0, 1, 2, 3$ ) は  $i \leq 3$  に対しては  $i=n : A_{n,i}=1, i \neq n : A_{n,i}=0$

で、 $i < 0$  に対して  $A_{n,i} = C_i = 0$  とみなせば  $i \geq 4$  に対する係数  $A_{n,i}$  は次の漸化式を用いて計算できる。

$$\begin{aligned} A_{n,i} = & -[2(i-1)(i-2)(i-3)(2i-7)\rho_m^3 A_{n,i-1} \\ & + (i-2)(i-3)\{6(i-4)^2 - r\}\rho_m^2 A_{n,i-2} \\ & + (i-3)(2i-9)\{2(i-4)(i-5) - r\}\rho_m A_{n,i-3} \\ & + (i-4)(i-6)\{(i-5)^2 - r\}A_{n,i-4} - \delta A_{n,i-5} \\ & + \mu_0 H_{n,i}] / i(i-1)(i-2)(i-3)\rho_m^4 \dots\dots(21) \end{aligned}$$

また上式中の  $H_{n,i}$  は線形応力分布の場合

$$\begin{aligned} H_{n,i} = & (i-4)\rho_m^2 A_{n,i-4} + \{3(i-5) \\ & - \phi_m\}\rho_m^2 A_{n,i-5} + \{3(i-6) \\ & - 2\phi_m\}\rho_m A_{n,i-6} + \{(i-7) - \phi_m\}A_{n,i-7} \\ & \dots\dots\dots(22a) \end{aligned}$$

で、非線形応力分布の場合

$$\begin{aligned} H_{n,i} = & (i-2)(i-3)(B_3 + \rho_m)\rho_m^3 A_{n,i-2} \\ & + (i-3)\{(i-4)(3B_3 + 4\rho_m) \\ & - B_1 + \rho_m\}\rho_m^2 A_{n,i-3} + \{3(i-4)(i-5) \\ & \cdot (B_3 + 2\rho_m) - (i-4)(2B_1 - 3\rho_m) \\ & + (B_1 - \rho_m)\phi_m\}\rho_m A_{n,i-4} + \{(i-5)(i-6) \\ & \cdot (B_3 + 4\rho_m) - (i-5)(B_1 - 3\rho_m) \\ & + (B_1 - 2\rho_m)\phi_m\}A_{n,i-5} + \{(i-6)^2 \\ & - \phi_m\}A_{n,i-6} - B_1 \sum_{j=0}^{i-4} (i-j-2)(i-j-3) \\ & \cdot (\rho_m^3 C_j + 3\rho_m^2 C_{j-1} + 3\rho_m C_{j-2} \\ & + C_{j-3})A_{n,i-j-2} \dots\dots\dots(22b) \end{aligned}$$

である。

腹板とフランジの連成座屈を取り扱う場合には、境界条件式(15),(16)に、腹板の局部座屈を取り扱う場合には式(17)あるいは式(18)にそれぞれ自変数の変換を施したのち、式(20)を代入し、 $g_0 \sim g_3$  の係数行列式を0とおけば次の座屈荷重方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} \sum F(d)A_{0,i} & \sum F(d)A_{1,i} & \sum F(d)A_{2,i} & \sum F(d)A_{3,i} \\ \sum F(-d)A_{0,i} & \sum F(-d)A_{1,i} & \sum F(-d)A_{2,i} & \sum F(-d)A_{3,i} \\ \sum G(d)A_{0,i} & \sum G(d)A_{1,i} & \sum G(d)A_{2,i} & \sum G(d)A_{3,i} \\ \sum G(-d)A_{0,i} & \sum G(-d)A_{1,i} & \sum G(-d)A_{2,i} & \sum G(-d)A_{3,i} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(23)$$

ただし、 $d=1-\rho_m$  で、 $\sum$  は  $\sum_{i=0}^{\infty}$  の意味である。また  $F(\pm d)$ 、 $G(\pm d)$  はそれぞれ次の式から計算できる。

(1) 連成座屈

$$\begin{aligned} F(\pm d) = & \pm i(i-1)(i-2)(\pm d + \rho_m)^4 (\pm d)^{i-3} \\ & \pm i(i-1)(\pm d + \rho_m)^3 (\pm d)^{i-2} + i[(M_b + N_b) \\ & \cdot (\pm d + \rho_m) \mp (K + M_1\phi_m + M_p)(\pm d + \rho_m)^2] \\ & \cdot (\pm d)^{i-1} - [M_b\phi_m + N_b \mp (K\phi_m + M_1\phi_m \\ & + M_p)(\pm d + \rho_m)] (\pm d)^i - \mu_0 F_\mu(\pm d) \end{aligned} \dots\dots\dots(24)$$

$$\begin{aligned} G(\pm d) = & \pm i(i-1)(\pm d + \rho_m)^3 (\pm d)^{i-2} \\ & + i[(M_b/\phi_m + N_b)(\pm d + \rho_m) \\ & \pm M_1(\pm d + \rho_m)^2] (\pm d)^{i-1} - [M_b + N_b \\ & \pm M_1\phi_m(\pm d + \rho_m)] (\pm d)^i - \mu_0 G_\mu(\pm d) \end{aligned} \dots\dots\dots(25)$$

ここに、 $F_\mu$ 、 $G_\mu$  は応力分布によって異なり、線形分布の場合は

$$F_\mu(\pm d) = -M_F(\pm d + \rho_m)^2 (\pm d)^{i+1} \dots\dots(26)$$

$$G_\mu(\pm d) = iN_I(\pm d + \rho_m)(\pm d)^i \dots\dots\dots(27)$$

であり、非線形分布の場合は次のようになる。

$$\begin{aligned} F_\mu(\pm d) = & i[1 + \{B_s - B_l \log(\pm d + \rho_m)\} / \\ & \cdot (\pm d + \rho_m)] (\pm d + \rho_m)^4 (\pm d)^{i-1} \\ & - M_F \{1 - B_l / (\pm d + \rho_m)\} \\ & \cdot (\pm d + \rho_m)^2 (\pm d)^i \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_\mu(\pm d) = & iN_I \{1 - B_l / (\pm d + \rho_m)\} (\pm d + \rho_m) \\ & \cdot (\pm d)^{i-1} - M_1\phi_m(\pm d + \rho_m)(\pm d)^i \end{aligned} \dots\dots\dots(29)$$

(2) 局部座屈

$$F(\pm d) = (\pm d)^i \dots\dots\dots(30)$$

$$\begin{aligned} \text{SS} : G(\pm d) = & i(i-1)(\rho_m \pm d)(\pm d)^{i-2} \\ & + iM_1(\pm d)^{i-1} \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

$$\text{FX} : G(\pm d) = i(\pm d)^{i-1} \dots\dots\dots(32)$$

いうまでもなく式 (23) の各項は座屈荷重  $\mu_0$  の無限べき級数である。式 (23) を満足する固有値  $\mu_0$  のうち正の最小値が図-1 に示す正の曲げモーメント  $\bar{M}_+$  に対する座屈荷重を与え、負の絶対値最小のものが逆方向の負の曲げモーメント  $\bar{M}_-$  に対する座屈荷重を与える。

4. 座屈荷重の数値計算結果および考察

純曲げを受ける薄肉 I 断面曲がり桁の腹板の局部座屈および腹板とフランジの連成座屈に対する曲率 ( $\rho = r_i/r_o$ )、腹板中央の長さ  $a$  と幅  $b$  との比 (縦横比  $a/b$ )、曲げモーメントの正負などの影響を知るため数値計算を行った。使用した電子計算機は FACOM 230-25 (関西大学) および FACOM 230-60 (京都大学大型計算機センター) である。計算結果はすべて次の座屈係数を用いて整理した。

$$k = \bar{M} / \Psi \pi^2 D_\theta = M / \pi^2 D_\theta \dots\dots\dots(33)$$

考察は次に示すように6段階にわけて行う。腹板の局部座屈に関しては K.Y. Chu<sup>7)</sup> が円弧辺単純支持の場合についてエネルギー法による解を用いて検討しているが、十分とはいえないので円弧辺固定の場合も含めて検討を加えることにする。すなわち、(1)~(3) において腹板の局部座屈を扱い、腹板とフランジの連成座屈を(4)、(5)で取り上げる。以上の(1)~(5)では補剛材を考慮せず、腹板を等方性とする。最後に(6)において直線桁と

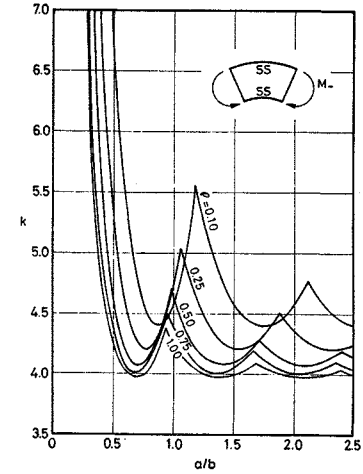
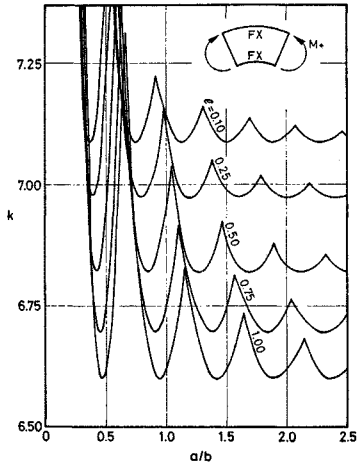
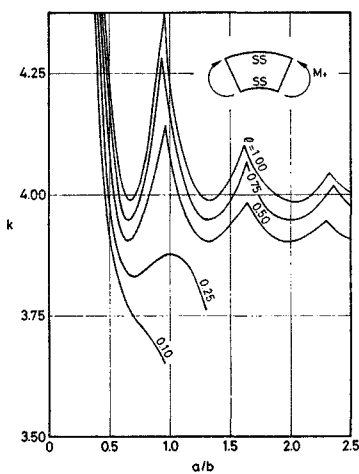


図-5 局部座屈荷重曲線 (線形応力分布) 図-6 局部座屈荷重曲線 (線形応力分布) 図-7 局部座屈荷重曲線 (線形応力分布)

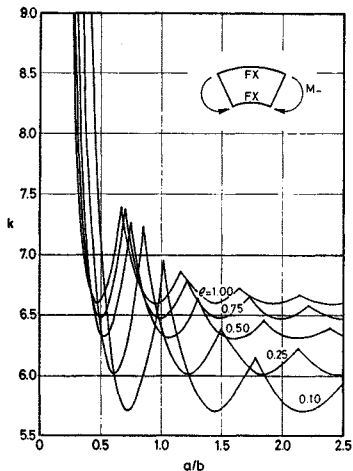


図-8 局部座屈荷重曲線 (線形応力分布)

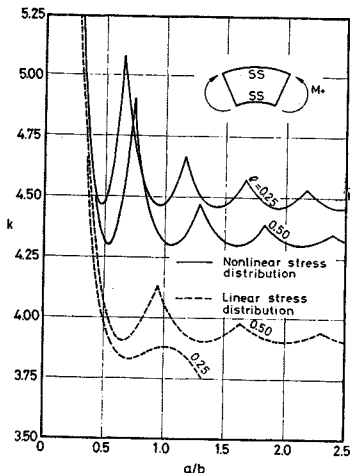


図-9 局部座屈荷重曲線 (非線形応力分布)

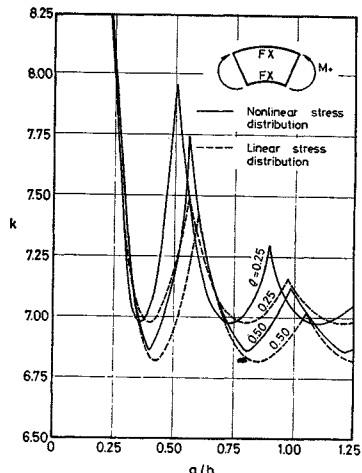


図-10 局部座屈荷重曲線 (非線形応力分布)

の比較に重点を置いて補剛材の影響を検討する。

(1) 線形応力分布を仮定した場合の腹板の局部座屈を考える。円弧辺の支持条件として単純支持と固定を考え、正および負の曲げモーメント ( $M_+$  および  $M_-$ ) に対する解をそれぞれ求めた。4通りの  $\rho$  の値について  $a/b$  と座屈係数  $k$  との関係を図-5~8に示す。これらの図には比較のため長方形腹板 ( $\rho=1$ ) の局部座屈荷重を併記してある。 $M_+$  の場合、図-5, 6からわかるように、フランジによる拘束が小で円弧辺の支持条件が単純支持とみなせるようなときは曲率が増す ( $\rho$  の値が減少する) ほど座屈荷重が低下する。フランジによる拘束が大で円弧辺が固定されているとみなせる場合には逆に曲率が増すと座屈荷重は上昇する。したがって、フランジにある程度以上のねじり剛さがあれば曲率の影響は考慮しなくてもよいと思われる。 $M_-$  の場合(図-7, 8)に

は  $M_+$  の場合と逆の傾向にあり、フランジによる拘束を無視して円弧辺が単純支持されているとみなすと曲率の増加とともに座屈荷重が上昇することになる。また円弧辺が固定されているとみなせるような場合には曲率の増加とともに座屈荷重は減少する(図-8)から、ねじり剛さの大なフランジをもつ部材で、ラーメン隅角部のように負の曲げモーメントを受ける場合には、曲率の影響を無視すると座屈荷重を高目に評価することになる。

(2) 曲率が増すと応力分布に主として次の2つの変化が生ずる。第1は円周方向応力  $\sigma_\theta$  の分布が線形分布からずれ、中立軸が曲率中心のほうに移動するとともに内側円弧辺における  $\sigma_\theta$  が増大すること。第2は半径応力  $\sigma_r$  が増大することである。この  $\sigma_r$  は  $M_+$  の場合引張応力で、 $M_-$  の場合は圧縮応力であり、特に座屈に著しい影響を与えることが予想される。この点を調べるた

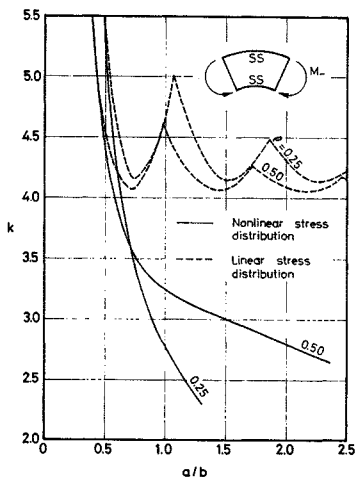


図-11 局部座屈荷重曲線 (非線形応力分布)

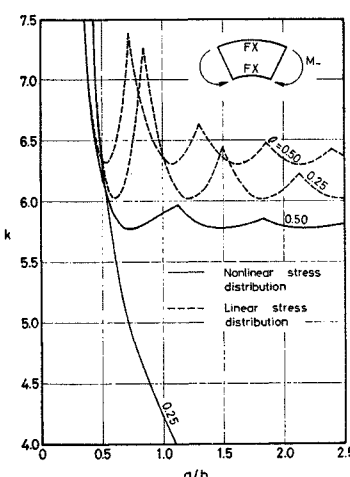


図-12 局部座屈荷重曲線 (非線形応力分布)

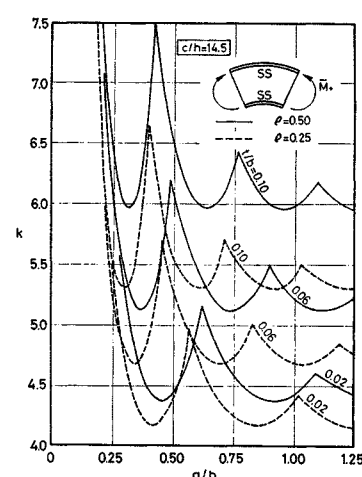


図-13 局部座屈荷重曲線 (非線形応力分布・フランジ考慮)

めに非線形応力分布の場合に対する座屈荷重を計算した。その結果を図-9~12に示す。ただし、応力分布の計算にあたっては簡単のためフランジを無視した。またこれらの図には線形応力分布に対する計算結果を比較のため記入しておいた。

まず  $M_x$  が作用する場合で (図-9,10), 円弧辺の支持条件を単純支持とみなせるような場合には  $\sigma_r$  を考慮すると座屈荷重はかなり上昇し, 曲率が大きなるほど増加の割合が大となる。すなわち, この場合  $\sigma_r$  は引張応力であるが, この半径方向引張応力の存在によって座屈荷重が著しく上昇することがわかる。しかし, フランジによる拘束が大となると  $\sigma_r$  の効果はほとんどなくなる (図-10)。

次に  $M_z$  に対しては図-11, 12 からわかるように, 線形応力分布を仮定した場合に比べて座屈荷重は著しく低下する。これは半径方向応力が圧縮であるためと考えられる。しかし, 低下の割合はフランジによる拘束が大になり固定状態に近くなるほど小さい。また, この場合には特に腹板の縦横比  $a/b$  が大になるほど座屈荷重が低下する傾向がある。

したがって, 簡単のために線形応力分布に対する結果を利用する場合には, 正の曲げモーメントが作用するならば安全側の評価をしていることになるが, 負の曲げモーメントが作用するときは  $a/b \leq 0.6$  になるように半径方向補剛材を設ける必要がある。

(3) 前項ではフランジを無視して応力分布を決定したが, そうすることによってパラメーターを減少させることができ, 考察も簡単になった。しかし, 2. に述べたように応力分布の決定の際にフランジを考慮すると, 無視した場合に比べて中立軸は曲率中心のほうに移動し,  $\sigma_r$  が増大する。したがって, 座屈荷重がフランジ

を無視して決定した応力分布に対する場合と異なる可能性がある。そこでフランジ幅  $c$  および厚さ  $t$  を種々変化させて, フランジを考慮に入れた応力分布を用いて座屈荷重を計算した。フランジ幅を一定にしてフランジ厚を変えた場合の結果を図-13~16に示す (逆にフランジ厚を一定にしてフランジ幅を変えた場合の結果は図-13~16と同様な傾向を示したのでここでは省略した)。

正の曲げモーメントが作用する場合には圧縮領域は広がるが, 引張応力  $\sigma_r$  が増すので座屈荷重が増大するものと考えられる。図-13, 14の結果もその点を裏付けている。フランジ厚  $t$  または幅  $c$  が 0 の場合 (フランジを無視して応力分布を決定した場合に該当する) に比べて,  $t$  または  $c$  が増すほど, 応力分布は腹板の局部座屈に有利な分布になり, 座屈荷重が増大する。

負の曲げモーメントが作用する場合には, フランジを考慮して応力分布を定めると, フランジを無視して定められた分布に比べて圧縮領域は狭くなるが, 圧縮応力  $\sigma_r$  が増すので座屈荷重は低下する (図-15, 16)。しかし (2) に述べたように  $a/b \leq 0.6$  の範囲では応力分布の相違を考慮する必要はない。

(4) 次に腹板とフランジの連成座屈について検討する。腹板の幅厚比  $b/h=50, 150$ , フランジの幅厚比  $ct/t=10, 15$ , フランジと腹板の断面積比  $F/bh=0.5, 1.0$  のそれぞれの組合せについて,  $a/b$  と  $k$  の関係を図-17~20に示す。ただしアーチ・リブの I 断面部材を念頭におき, 正の曲げモーメントを受ける場合について, 線形応力分布を仮定して数値計算したものである。図中,  $\rho=1$  は直線部材に相当する。

著者らは先に直線プレート・ガーダーの曲げ連成座屈<sup>8), 9), 10)</sup>を解析し, 座屈性状を明らかにしたが, 図-17~20の曲率を有する場合の座屈荷重曲線にもほぼ同様

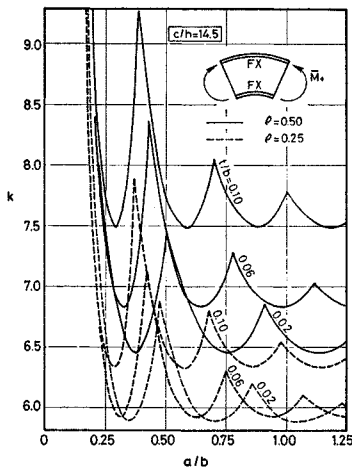


図-14 局部座屈荷重曲線 (非線形応力分布・フランジ考慮)

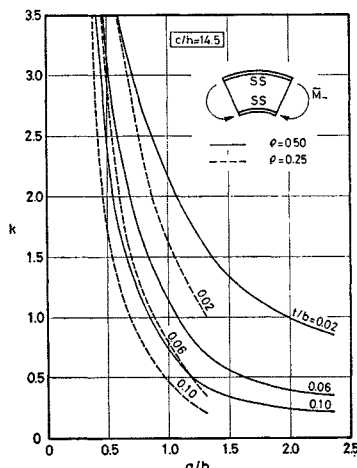


図-15 局部座屈荷重曲線 (非線形応力分布・フランジ考慮)

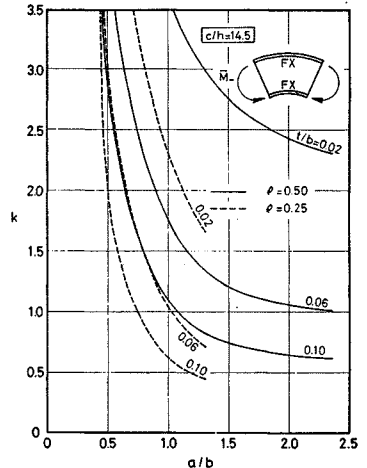
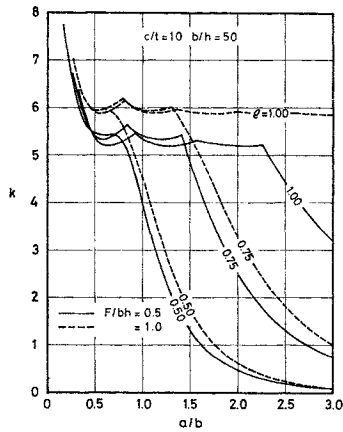
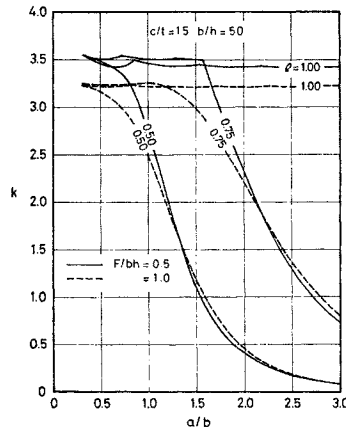


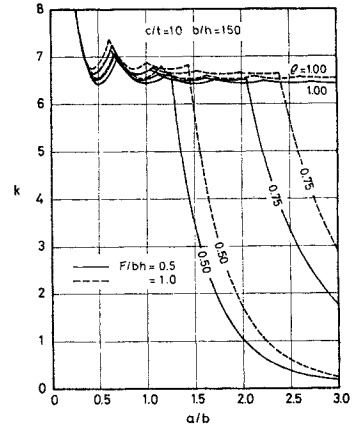
図-16 局部座屈荷重曲線 (非線形応力分布・フランジ考慮)



図一七 連成座屈荷重曲線



図一八 連成座屈荷重曲線



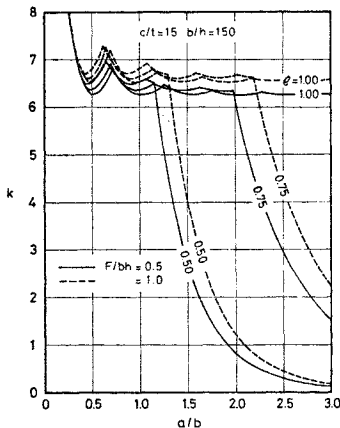
図一九 連成座屈荷重曲線

の性質が見られる。すなわち、 $a/b$  が小さい範囲ではフランジが水平にほとんどたわまず、フランジのねじれ座屈と腹板の座屈が連成して生ずる。このような場合に対してはフランジのみのねじれ座屈が先行しない限り、(1)~(3) に述べてきた腹板の局部座屈に関する検討結果が適用できる。 $a/b$  が大きい範囲では圧縮フランジの水平座屈と腹板の座屈が連成して生ずるが、この範囲では曲率の影響が顕著に現われている。すなわち、曲率が増すとより小さい  $a/b$  の値で圧縮フランジの水平座屈と腹板の座屈が連成して生じる。したがって、一定の  $a/b$  に対しては曲率が増すと座屈荷重が急激に低下することになる。このような傾向はフランジの幅厚比  $c/t$ 、腹板の幅厚比  $b/h$  およびフランジと腹板の断面積比  $F/bh$  の値に関係なくみられる。

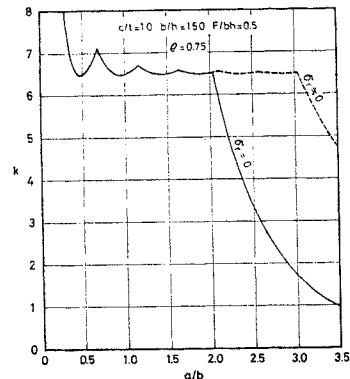
(5) 前項では線形応力分布を仮定し、フランジおよび腹板の半径方向応力  $\sigma_r$  を無視したが、フランジは力のつりあいが保たれていない(図-4) ことになる。そこでフランジに作用する円周方向力  $F\sigma_\theta$  につらうだ

けの半径方向応力  $\sigma_r$  がフランジの長さ方向に一樣にフランジと腹板の接合面に作用するとして、この  $\sigma_r$  が座屈荷重に及ぼす影響を  $\bar{M}_+$  の場合について調べた結果が図-21 である。 $a/b$  が小さくてフランジのねじれ座屈と腹板の座屈とが連成して生ずるような場合には、この応力はほとんど座屈荷重に影響を与えない。しかし、 $a/b$  が大きくてフランジの水平曲げ座屈と腹板の座屈が連成して生ずるような場合には、 $\sigma_r$  を考慮する(図中の破線)と座屈荷重が上昇する。これは  $\bar{M}_+$  の場合この  $\sigma_r$  がフランジを腹板側に引張り、座屈に対して拘束を与えていることによる。

(6) 以上は補剛材がない場合を対象としているが、ここで半径方向補剛材 ( $D_r$ ) を有する場合について若干の計算を行った。正の曲げモーメントを受ける場合の計算例を図-22 に示す。 $D_r/D_\theta=1$  に対する曲線(破線)が無補剛の場合の座屈荷重を与えるが、この曲線と補剛材を有する場合 ( $D_r/D_\theta=10$ ) の曲線はほぼ同様な傾向を示している。すなわち、直線部材 ( $\rho=1$ ) に比べて曲率の影響が現われるのは  $a/b$  の値が大きい範囲すなわち圧縮フランジの水平曲げ座屈と腹板の座屈が連成し

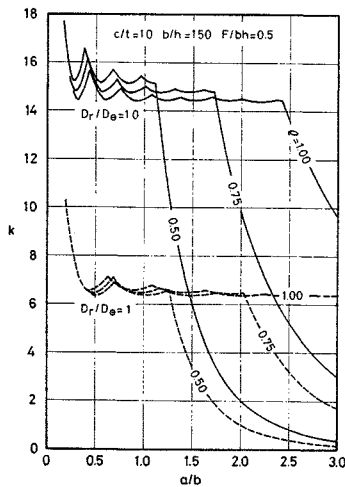


図一二十 連成座屈荷重曲線



図一二十一 フランジに作用する半径方向応力の影響





図—22 半径方向補剛材の影響

て生ずる範囲で、この範囲では一定の  $a/b$  に対して曲率が増すと座屈荷重は急激に減少する。しかし、 $a/b$  が小さくて圧縮フランジのねじれ座屈と腹板の座屈が連成して生ずるような場合には曲率の影響はそれほど顕著でなく、無補剛の場合に対する (1)~(5) の結果と直線部材に対する結果<sup>8)</sup> とを併用すれば座屈荷重を推定することができる。

## 5. む す び

薄肉I断面の曲がり桁が純曲げを受ける場合について、腹板の弾性局部座屈および腹板とフランジの弾性連成座屈を理論的に解析し、べき級数法による厳密解を求めた。

まず、線形応力分布を仮定して腹板の局部座屈荷重を求め、腹板の縦横比  $a/b$ 、円弧辺の支持条件、内側と外側の曲率半径比、曲げモーメントの方向などが座屈荷重に与える影響を検討した。次に曲率が増すと半径方向応力が無視できなくなるが、その応力が座屈荷重に及ぼす影響を検討した。また、応力分布を決定するにあたってフランジを考慮するか否かで分布に差異が生ずるが、この分布の差異と座屈荷重との関係を考察した。主な結論として、内側辺に引張り応力が生ずるような曲げ(正方向)が作用する場合には、曲率を有する場合の特徴である半径方向応力を無視して線形応力分布を仮定しても、あるいはまったく曲率の影響を無視して長方形腹板とみなす近似的な取扱いを行ってもすべて低目の座屈荷重を見積ることになる。しかし、逆方向(負方向)の曲げが作用する場合で  $a/b \geq 0.6$  の範囲では曲率または  $a/b$  の増加とともに座屈荷重が急激に低下する。すなわち、アーチ部材のように一般に正方向の曲げが作用する場合には

近似的に直線部材とみなしても差し支えないが、ラーメン隅角部で負方向の曲げが作用する場合にはなるだけ厳密な応力分布を用いる必要がある。

腹板とフランジの連成座屈に関しては比較的腹板の薄い断面で、アーチ部材のように正方向の曲げが作用する場合を検討したが、直線プレート・ガーダーの場合とよく似た座屈性状を示す。大きな相違点は  $a/b$  の大きい範囲で、圧縮フランジの水平曲げ座屈と腹板の座屈が連成して生ずるような場合には、曲率が大きくなるほど座屈荷重が低下する点である。

以上、アーチ部材やラーメン部材の隅角部のような鉛直に曲がったプレート・ガーダーあるいはI断面桁の曲げ座屈を研究したが、アーチ部材では純曲げが作用する場合は普通の荷重状態では考えにくく、またラーメン部材を含めて曲げのほかにせん断および軸力が作用する場合を研究する必要がある。しかしながら、曲げ座屈は一つの基本的な座屈形態であり、直線部材との相違点を明らかにするという観点からこの研究が役立つものと考えられる。

なお、この論文は、昭和44年~46年の土木学会学術講演会(全国大会および関西支部)で発表した内容を中心にまとめたもので、解法としてはべき級数解法のみを示した。この間に行った Frobenius 法、差分法、Galerkin 法、有限要素法など解法の比較については別の機会に報告したい。

この研究を行うにあたって関西大学教授 米沢博博士から終始ご懇切なご指導を賜わり、名古屋大学教授 成岡昌夫博士からご鞭撻を賜わった。ここに記して深謝の意を表する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) 大野 諫：ラーメン隅部の応力度の研究，特に図解法に就て(曲梁の応力度の研究)，土木学会誌，Vol. 29, No. 4, pp. 287-332, 1943-4.
- 2) 大野 諫：曲梁に於ける垂直応力度並に断面常数に就て，土木学会誌，Vol. 29, No. 10, pp. 731-743, 1943-10.
- 3) Bleich, F.: Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.
- 4) 大野 諫：曲梁の剪断応力度及び半径方向の垂直応力度に対する新公式，土木学会誌，Vol. 37, No. 7, pp. 300-305, 1952-7.
- 5) Bleich, F.: 鉄骨構造，下巻，池部宗薫他訳，コロナ社，1953.
- 6) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, 1961.
- 7) Chu, K.Y.: Beuluntersuchung von ebenen Stegblechen kreisförmig gekrümmter Träger mit I-Querschnitt, Stahlbau, 35 Jg., H. 5, S. 129-142, Mai, 1966.
- 8) 小西一郎・米沢 博・三上市蔵：プレート・ガーダーの曲げ弾性座屈，土木学会論文集，No. 143, pp. 1-8, 1967-7.
- 9) Yonezawa, H. and Mikami, I.: Elastic buckling of plate girders under pure bending (on the primary

- and local buckling of stiffened plates), Proc. of 17th Japan National Cong. for Appl. Mech., 1967, pp. 166-169, Mar., 1973.
- 10) Yonezawa, H. and Mikami, I. : Elastic buckling of plate girders from pure bending, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. EM 1, pp. 211-224, Feb., 1968.
  - 11) Buchmann, W. : Berechnung polarorthotroper Kreisbogenscheiben konstanter Dicke unter reiner Biegebeanspruchung, Bautechnik, 38 Jg., H. 1, S. 27-32, Jan., 1969.
  - 12) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. : Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill, 1970.
  - 13) 倉西正嗣 : 弾性学, 文献社, 1970
  - 14) Culver, C.G. and Framton, R.E. : Local instability of horizontally curved members, Proc. of ASCE, Vol. 96, No. ST 2, pp. 245-265, Feb., 1970.
  - 15) Culver, C.G. and Nasir, G. : Inelastic flange buckling of curved plate girders, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. ST 4, pp. 1239-1256, Apr., 1971.

(1974.4.11・受付)

---