

# 初期曲率, ねじれ率を有する薄肉 断面曲線はりの基礎方程式

## FUNDAMENTAL EQUATIONS OF CURVED AND TWISTED BEAMS

築 地 恒 夫\*

By Tsuneo Tsuji

### 1. ま え が き

一定曲率半径を有し一平面内に曲った薄肉断面はりに関する研究は, 従来数多く行われ, 数値解析結果も発表されている<sup>1)~3)</sup>。

一方, タービン翼・コンプレッサー翼などは, 薄肉断面を有する初期ねじれのある直線はりに理想化され, 曲げ振動解析が行われている<sup>4)</sup>。

より一般的な曲線はりとして, 初期曲率および初期ねじれ率を有する立体曲線はりがある。

Love<sup>5)</sup>ははりの中心線に沿って移動する流動座標を用い, 中実断面の立体的な曲線はりに関する基礎方程式を導いている。Holmes<sup>6)</sup>はらせんはりの軸対称荷重によるはり内に生ずる断面力の解析を, Abdul-Baki ら<sup>7)</sup>は連続らせんはりの解析を行っている。両論文とも中実断面のらせんはりを対象にしている。

断面のそり変形を考慮した, より一般的な立体曲線はり理論として鷺津の研究<sup>8)</sup>があり, せん断変形の影響も考慮されている。しかし, 基礎方程式誘導の基本となっている変位式を, 単純に直線はりの場合と同形に仮定しているため, 曲線はりのそり関数として直線はりのそり関数がそのまま使用され, そり関数に初期曲率の影響が考慮されていない欠点がある。また, 鷺津の理論で, Bernoulli-Euler の仮定が成り立つ場合には, 曲げに対する変位式は従来用いられている変位式と一致するが, ねじれ変形の変数は一致しない。このため, 初期曲率・初期ねじれ率がともに0となる直線はりの変形に関する微分方程式が, 従来一般に使用されている方程式と一致しない。

そこで本報告では, 直線はりおよび平面曲線はりに適用されていると同程度のはり理論の範囲内で(すなわち, 断面不変, せん断変形は St. Venant のせん断変

形のみを考慮する), できるだけ厳密な, しかも実際解析に使用できる形で基礎方程式を導くことを目的とした。

まず, 立体曲線はりの変位式を理論的に導き, 立体曲線はりのそり関数は, はりの長さ方向変位式を誘導する過程で, 式中のねじれ率にかかる係数であり, しかも直線はりのそり関数と同様, 断面内の座標のみの関数であることを示す。

次に, 求められた変位式を用い, 立体曲線はりの変形に関する平衡方程式・境界条件を, 仮想仕事の原理より変分原理に従って誘導する。

既存の平面円弧はりおよび初期ねじれを有する直線はりに対する基礎方程式は, ここで導かれた一般式の特別な場合として誘導されることを示す。

最後に, 本報告で求められた基礎方程式の妥当性を検証するために, 垂直集中荷重が作用する両端固定のらせんはりに対して, 変位およびひずみ解析を行い, 実験結果と比較検討する。

薄肉断面のはりに対しては, 一般に断面のせん断中心の変位が解析に用いられているが, 本報告では次に述べる理由で, 変位はすべて断面図心の三方向変位および図心軸まわりの断面回転角を用いることにする。またそり関数も図心に関するものである。

薄肉断面直線はりでは, 断面のせん断中心に関する変位を用いることにより, 曲げ変形を表わす平衡方程式と, ねじれ変形を示す方程式が完全に分離する。このことは, せん断中心を通り断面に平行な外力によっては, はりは曲げ変形のみを生じ, ねじれ変形を起こすことがない<sup>9)</sup>。これに対して, 立体曲線はりではいかなる点に荷重が作用しても, 曲げおよびねじれ変形が連成し, 物理的な意味でのせん断中心は存在しない。ただ, そり関数と断面内座標のそれぞれの積が作る断面定数が0となる条件より, 数学的なせん断中心を決定することができるが<sup>9)</sup>, 物理的なせん断中心ではない。さらに, 実際問

\* 正会員 長崎大学助教授 工学部構造工学科

題の解析にあたって、数学的に定義されたせん断中心に関する変位を用いるよりも、多少関係式が複雑にはなるが、幾何学的に理解しやすい断面図心に関する変位を用いるほうが、不必要な混乱を避けるうえからも有効でないかと思われる。

2. 仮定と定義

曲線はりの基礎方程式は、次の仮定のもとで導かれていく。

- (a) 変形は微小であり、せん断変形は St. Venant のせん断変形のみを考慮する。
- (b) 変形によって断面形状は変化しない。
- (c) 変形前にはりが有する曲率、ねじれ率ははりの長さ方向に一定である。
- (d) 断面の肉厚は断面の最大寸法に比較して十分薄い。
- (e) 断面形状ははりの長さ方向に一定である。

本報告に使用する座標系は次の2種類である。その一つは、図-1 に示すように、断面の図心を連ねた図心軸に沿って  $\zeta$  軸、 $\zeta$  軸に垂直な断面内に、 $\zeta$  軸と右手系をなすよう  $\xi, \eta$  軸を定めた ( $\xi, \eta, \zeta$ ) 座標系である。他は断面肉厚の中央面に沿って  $s$  軸、 $s$  軸に垂直に  $n$  軸を  $\zeta$  軸と右手系を構成するように設けた ( $s, n, \zeta$ ) 座標系である。

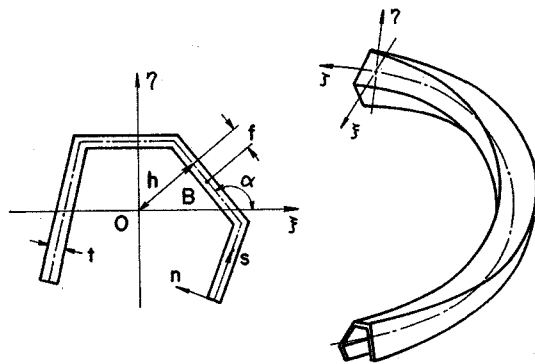


図-1 立体曲線はりの座標軸

3. 変位関数、およびひずみ成分

断面不変の仮定より、断面内任意点の  $\xi, \eta, \zeta$  方向変位  $U(\xi, \eta, \zeta), V(\xi, \eta, \zeta), W(\xi, \eta, \zeta)$  は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} U &= u(\zeta) - \eta\theta(\zeta) \\ V &= v(\zeta) + \xi\theta(\zeta) \\ W &= w(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $u, v$  は断面図心の  $\xi, \eta$  方向変位、 $\theta$  は  $\zeta$  軸

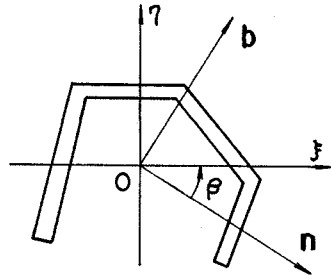


図-2 主法線と座標軸  
( $n$ : 主法線,  $b$ : 従法線)

まわりの断面の回転角である。また  $W$  は一般に  $\xi, \eta, \zeta$  の関数で、決定さるべきものである。

式(1)の変位によるひずみ成分は、文献 8) に従って次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\xi &= \epsilon_\eta = \epsilon_{\zeta\eta} = 0 \\ \epsilon_\zeta &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ K_\zeta \left( \eta \frac{\partial W}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial W}{\partial \zeta} - K_\eta (u - \eta\theta) + K_\xi (v + \xi\theta) \right] \\ \epsilon_{\zeta\xi} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ g \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{W}{\sqrt{g}} \right) + \frac{du}{d\zeta} - \eta \frac{d\theta}{d\zeta} - K_\zeta v \right] \\ \epsilon_{\zeta\eta} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ g \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{W}{\sqrt{g}} \right) + \frac{dv}{d\zeta} + \xi \frac{d\theta}{d\zeta} + K_\zeta u \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$\sqrt{g} = 1 - \xi K_\eta + \eta K_\xi \dots\dots\dots (3)$$

であり、 $K_\xi, K_\eta$  は  $\zeta$  軸の主法線が  $\xi$  軸となす角を  $\beta$ 、 $\zeta$  軸の曲率半径を  $R$  とすると (図-2 参照)、

$$\left. \begin{aligned} K_\xi &= \frac{1}{R} \sin \beta \\ K_\eta &= \frac{1}{R} \cos \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

である。また  $K_\zeta$  ははりの初期ねじれ率である。

次に、( $s, n, \zeta$ ) 座標系でのせん断ひずみ成分は、中央面上の任意点  $B(\xi_0, \eta_0)$  での  $s$  軸の接線と  $\xi$  軸のなす角を  $\alpha$  とすると (図-1 参照)、式(2)より

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{s\zeta} &= \epsilon_{\xi\zeta} \cos \alpha + \epsilon_{\eta\zeta} \sin \alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ g \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{W}{\sqrt{g}} \right) + \left( \frac{du}{d\zeta} - K_\zeta v \right) g \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\xi}{\sqrt{g}} \right) + \left( \frac{dv}{d\zeta} + K_\zeta u \right) g \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\eta}{\sqrt{g}} \right) + (h-n)\Gamma_\theta \right] \\ \epsilon_{n\zeta} &= -\epsilon_{\xi\zeta} \sin \alpha + \epsilon_{\eta\zeta} \cos \alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ g \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{W}{\sqrt{g}} \right) + \left( \frac{du}{d\zeta} - K_\zeta v \right) g \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\xi}{\sqrt{g}} \right) + \left( \frac{dv}{d\zeta} + K_\zeta u \right) g \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\eta}{\sqrt{g}} \right) + f\Gamma_\theta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、

$$\Gamma_\theta = \frac{d\theta}{d\zeta} + K_\xi \Gamma_u + K_\eta \Gamma_v \left. \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_u &= \frac{du}{d\zeta} - K_\zeta v + K_\eta w \\ \Gamma_v &= \frac{dv}{d\zeta} + K_\zeta u - K_\eta w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

である。

また,  $h, f$  は断面中央面上の任意点 B における  $s$  軸の接線に図心より下した垂線の長さ, および B 点と垂線間の距離を示し, 次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} h-n &= \xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha \\ f &= \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

薄肉断面を対象にしているから,  $n$  軸方向のせん断ひずみは小さく無視することができる。すなわち,

$$\epsilon_{n\zeta} \approx 0 \dots\dots\dots (8)$$

上式に式 (5) を代入し, 積分を行うと, 薄肉断面のため曲率の肉厚方向変化は無視できるから,

$$\begin{aligned} \frac{W}{\sqrt{g}} &= - \left( \frac{du}{d\zeta} - K_\zeta v \right) \frac{\xi}{\sqrt{g}} - \left( \frac{dv}{d\zeta} + K_\zeta u \right) \frac{\eta}{\sqrt{g}} \\ &\quad - \frac{f}{g_0} n \Gamma_\theta + C_1(\zeta) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

と,  $\zeta$  軸方向変位関数  $W$  が求まる。ここで,  $g_0$  は B 点の  $g$  の値を示し,

$$g_0 = (1 - \xi_0 K_\eta + \eta_0 K_\zeta)^2 \dots\dots\dots (10)$$

である。積分定数  $C_1$  は断面形状によって, それぞれ次のように求まる。

a) 開き断面の場合

断面の肉厚が薄いため, St. Venant のせん断応力は肉厚の中央面上で 0 と仮定できる。すなわち,  $n=0$  で,  $G\epsilon_{s\zeta}=0$  である。

式 (5) を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{W}{\sqrt{g_0}} \right) &= - \left( \frac{du}{d\zeta} - K_\zeta v \right) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{g_0}} \right) \\ &\quad - \left( \frac{dv}{d\zeta} + K_\zeta u \right) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\eta_0}{\sqrt{g_0}} \right) - \frac{h}{g_0} \Gamma_\theta \end{aligned}$$

となり, この式に式 (9) を代入すると,  $C_1$  の決定式が求まる。

$$\frac{\partial C_1}{\partial s} = - \frac{h}{g_0} \Gamma_\theta \dots\dots\dots (11)$$

式 (11) を積分して,

$$C_1 = - \int_0^s \frac{h}{g_0} ds \cdot \Gamma_\theta + C_2(\zeta) \dots\dots\dots (12)$$

ここで,  $C_2(\zeta)$  は積分定数である。

式 (12) を式 (9) に代入すると,  $W$  は

$$\begin{aligned} \frac{W}{\sqrt{g}} &= C_2(\zeta) - \left( \frac{du}{d\zeta} - K_\zeta v \right) \frac{\xi}{\sqrt{g}} \\ &\quad - \left( \frac{dv}{d\zeta} + K_\zeta u \right) \frac{\eta}{\sqrt{g}} - \left( \int_0^s \frac{h}{g_0} ds + \frac{f}{g_0} n \right) \Gamma_\theta \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

と表わされる。

積分定数  $C_2$  は,  $W/\sqrt{g}$  の断面全体にわたった平均値が, 断面中立点の  $\zeta$  方向変位  $(W/\sqrt{g})_n$  に等しい

条件より決定される。ここで中立点とは単純曲げによって断面内に垂直応力を生じない点をいう。

すなわち,

$$\begin{aligned} \left( \frac{W}{\sqrt{g}} \right)_n &= \frac{1}{A} \int_A \frac{W}{\sqrt{g}} dA \\ &= C_2 - \left( \frac{du}{d\zeta} - K_\zeta v \right) \frac{1}{A} \int_A \frac{\xi}{\sqrt{g}} dA \\ &\quad - \left( \frac{dv}{d\zeta} + K_\zeta u \right) \frac{1}{A} \int_A \frac{\eta}{\sqrt{g}} dA \\ &\quad - \frac{1}{A} \int_A \left( \int_0^s \frac{h}{g_0} ds \right) dA \cdot \Gamma_\theta \end{aligned}$$

より,

$$C_2 = w + \frac{1}{A} \int_A \left( \int_0^s \frac{h}{g_0} ds \right) dA \cdot \Gamma_\theta \dots\dots\dots (14)$$

ここで,  $w$  は図心の  $\zeta$  軸方向変位であり,

$$\begin{aligned} w &= \left( \frac{W}{\sqrt{g}} \right)_n + \left( \frac{du}{d\zeta} - K_\zeta v \right) \frac{1}{A} \int_A \frac{\xi}{\sqrt{g}} dA \\ &\quad + \left( \frac{dv}{d\zeta} + K_\zeta u \right) \frac{1}{A} \int_A \frac{\eta}{\sqrt{g}} dA \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

の関係がある。

いま新しい関数  $\omega$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{g} \left[ \frac{1}{A} \int_A \left( \int_0^s \frac{h}{g_0} ds \right) dA \right. \\ &\quad \left. - \int_0^s \frac{h}{g_0} ds - \frac{f}{g_0} n \right] \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$\omega$  は初期曲率, ねじれ率を持つ薄肉断面材のそり関数で, 円弧はりの場合と全く同形である<sup>3)</sup>。

式 (14), (16) を式 (13) に代入すると,  $\zeta$  軸方向変位関数  $W$  が次のように求まる。

$$W = w - \xi \Gamma_u - \eta \Gamma_v + \omega \Gamma_\theta \dots\dots\dots (17)$$

この式で  $\Gamma_u, \Gamma_v, \Gamma_\theta$  は式 (6) で与えられている。

b) 閉じた断面 (一室閉じ断面)

断面肉厚方向には変化していない未知せん断流  $q$  が存在すると仮定すると,  $q$  は次のように表わされる<sup>3)</sup>。

$$\begin{aligned} q &= \int_{-t/2}^{t/2} G g_0 \epsilon_{s\zeta} dn = G g_0 \sqrt{g_0} t \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{W}{g_0} \right) \right. \\ &\quad + \left( \frac{du}{d\zeta} - K_\zeta v \right) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{g_0}} \right) \\ &\quad \left. + \left( \frac{dv}{d\zeta} + K_\zeta u \right) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\eta_0}{\sqrt{g_0}} \right) + \frac{h}{g_0} \Gamma_\theta \right] \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$q/g_0 \sqrt{g_0} t$  を  $s$  軸に沿って断面一周積分すると, 変位の連続性より,

$$\begin{aligned} q \oint \frac{1}{g_0 \sqrt{g_0} t} ds &= \oint \frac{h}{g_0} ds \cdot \Gamma_\theta \\ \text{となり, これより未知せん断流が求まる。} \\ q &= G \frac{\oint \frac{h}{g_0} ds}{\oint \frac{1}{g_0 \sqrt{g_0} t} ds} \cdot \Gamma_\theta = G q' \Gamma_\theta \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

閉じ断面の場合, 積分定数  $C_1$  は, 式 (18) に式 (9) を代入することにより求まる。

$$C_1 = q' \int_0^s \frac{1}{g_0 \sqrt{g_0 t}} ds \Gamma_\theta - \int_0^s \frac{h}{g_0} ds \cdot \Gamma_\theta + C_2(\zeta) \dots\dots\dots (20)$$

積分定数  $C_2$  は、開き断面の場合と同様、 $W/\sqrt{g}$  の断面全体にわたる平均値が中立点の  $\zeta$  軸方向変位 ( $W/\sqrt{g}$ ) $_n$  に等しい条件より求まる。すなわち、

$$C_2 = w + \frac{1}{A} \int_A \left\{ \int_0^s \frac{h}{g_0} ds - q' \int_0^s \frac{1}{g_0 \sqrt{g_0 t}} ds \right\} dA \cdot \Gamma_\theta \dots\dots\dots (21)$$

そり関数  $\omega$  を、この場合次のように定義する。

$$\omega = \sqrt{g} \left[ \frac{1}{A} \int_A \left\{ \int_0^s \frac{h}{g_0} ds - q' \int_0^s \frac{1}{g_0 \sqrt{g_0 t}} ds \right\} dA - \int_0^s \frac{h}{g_0} ds + q' \int_0^s \frac{1}{g_0 \sqrt{g_0 t}} ds - \frac{f}{g_0} n \right] \dots\dots\dots (22)$$

新しく定義されたそり関数  $\omega$  を用いると、閉じた断面に対しても式 (17) が  $\zeta$  軸方向変位を表わす式となる。結局断面のいかんにかかわらず、式 (17) が薄肉断面立体曲線はりに対する  $\zeta$  軸方向変位式である。

式 (17) を式 (2) に代入すると、ひずみ成分が図心の変位  $u, v, w$  および  $\zeta$  軸まわりの断面回転角  $\theta$  により、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\xi &= \epsilon_\eta = \epsilon_{\xi\eta} = 0 \\ \epsilon_\zeta &= \frac{1}{\sqrt{g}} [\Gamma_w - \xi \varrho_u - \eta \varrho_v + \omega \varrho_\theta + HK_\zeta \Gamma_\theta] \\ \epsilon_{\xi\zeta} &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \eta - g \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\omega}{\sqrt{g}} \right) \right] \Gamma_\theta \\ \epsilon_{\eta\zeta} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \xi + g \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\omega}{\sqrt{g}} \right) \right] \Gamma_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_w &= \frac{dw}{d\zeta} - K_\eta u + K_\xi v \\ \varrho_u &= \frac{d\Gamma_u}{d\zeta} - K_\zeta \Gamma_v - K_\xi \theta \\ \varrho_v &= \frac{d\Gamma_v}{d\zeta} + K_\zeta \Gamma_u - K_\eta \theta \\ \varrho_\theta &= \frac{d\Gamma_\theta}{d\zeta} \\ H &= -\xi \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

である。

また、式 (17) を式 (5) に代入すると、( $s, n, \zeta$ ) 座標系でのせん断ひずみが次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{s\zeta} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ h - n + g \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\omega}{\sqrt{g}} \right) \right] \Gamma_\theta \\ \epsilon_{n\zeta} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ f + g \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\omega}{\sqrt{g}} \right) \right] \Gamma_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

式 (25) に開き断面、閉じ断面それぞれのそり関数を代入すると、最終的に各断面に対する St. Venant のせん断ひずみが次のように求まる。

まず、開き断面に対しては、式 (25) の第 1 式に式

(16) を代入して、

$$\begin{aligned} \epsilon_{s\zeta} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ h - n - \frac{g}{g_0} h - g \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{f}{g_0} \right) n \right] \Gamma_\theta \\ &\doteq -\frac{2n}{\sqrt{g_0}} \left( 1 - \frac{f}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} \right) \Gamma_\theta \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

である。

閉じた断面に対しては、式 (22) を代入して

$$\epsilon_{s\zeta} \doteq -\frac{2n}{\sqrt{g_0}} \left( 1 - \frac{f}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} \right) \Gamma_\theta + \frac{q'}{t} \Gamma_\theta \dots\dots\dots (27)$$

である。

さらに、そり関数  $\omega$  を式 (25) の第 2 式に代入すると、断面形状に関係なく、

$$\epsilon_{n\zeta} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

である。

### 4. 基礎方程式

立体曲線はりの静荷重による変形に関する基礎方程式を、仮想仕事の原理より変分原理に従って誘導する。

#### (1) 荷重条件

はりには次に示す荷重が作用するものとする。

(a) はりの各断面の点 ( $\xi_1, \eta_1$ ) を連ねた曲線上に、分布荷重  $p_\xi^*(\zeta), p_\eta^*(\zeta), p_\zeta^*(\zeta)$  がそれぞれ  $\xi, \eta, \zeta$  軸方向に作用する。

(b)  $\xi, \eta, \zeta$  軸まわりに分布モーメント  $m_\xi^*(\zeta), m_\eta^*(\zeta), m_\zeta^*(\zeta)$  が作用する。

(c)  $\zeta=l$  断面内の点 ( $\xi_2, \eta_2$ ) に  $\xi, \eta, \zeta$  軸方向に集中荷重  $P_\xi^*, P_\eta^*, P_\zeta^*$  が作用する。

(d)  $\zeta=l$  断面で  $\xi, \eta, \zeta$  軸まわりに集中モーメント  $M_\xi^*, M_\eta^*, M_\zeta^*$  が作用する。

(e)  $\zeta=0$  断面ではりは固定されているものとする。したがって、幾何学的境界条件が次のように与えられている。

$$\begin{aligned} u &= v = w = \theta = 0 \\ \Gamma_u &= \Gamma_v = \Gamma_\theta = 0 \end{aligned}$$

#### (2) 仮想仕事の原理

(1) に示した荷重が作用している曲線はりに対する仮想仕事の原理は、次のように書ける<sup>9)</sup>。

$$\begin{aligned} & \iiint_V [\sigma_\zeta \delta \epsilon_\zeta + \tau_{\xi\zeta} \delta \epsilon_{\xi\zeta} + \tau_{\eta\zeta} \delta \epsilon_{\eta\zeta}] \sqrt{g} d\xi d\eta d\zeta \\ & - \int_0^l [(p_\xi^* \delta U + p_\eta^* \delta V + p_\zeta^* \delta W) \sqrt{g}]_{\xi=\xi_1, \eta=\eta_1}^{\xi=\xi_2, \eta=\eta_2} d\zeta \\ & - \int_0^l [-m_\xi^* \delta \Gamma_v + m_\eta^* \delta \Gamma_u + m_\zeta^* \delta \theta] d\zeta \\ & - [P_\xi^* \delta U + P_\eta^* \delta V + P_\zeta^* \delta W]_{\xi=\xi_2, \eta=\eta_2}^{\xi=\xi_1, \eta=\eta_1} \\ & - [-M_\xi^* \delta \Gamma_v + M_\eta^* \delta \Gamma_u + M_\zeta^* \delta \theta]_{\zeta=l} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (29)$$

ここで,  $\sigma_\zeta$  は  $\zeta$  軸方向垂直応力,  $\tau_{\xi\zeta}, \tau_{\eta\zeta}$  はせん断応力である。

式 (29) にフックの法則を適用し, 応力をひずみで表わし, ひずみ成分式 (23), 変位式 (1) および式 (17) を代入すると, 仮想仕事の原理 (29) は,

$$\delta\Pi=0 \dots\dots\dots (30)$$

と書ける。ただし, 荷重は変形によって大きさ, 方向とも変らない保存系であるとする。また,  $\pi$  は全ポテンシャルエネルギーであり, 次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{E}{2} \int_0^l [C\Gamma_w^2 + C_{\xi\xi}\varrho_u^2 + C_{\eta\eta}\varrho_v^2 + C_{\omega\omega}\varrho_\theta^2 \\ & - 2C_\xi\Gamma_w\varrho_u - 2C_\eta\Gamma_w\varrho_v + 2C_{\xi\eta}\varrho_u\varrho_v \\ & - 2C_{\xi\omega}\varrho_u\varrho_\theta - 2C_{\eta\omega}\varrho_v\varrho_\theta + K_\zeta^2 C_{HH}\Gamma_\theta^2 \\ & - 2K_\zeta C_H\Gamma_w\Gamma_\theta - 2K_\zeta C_{\xi H}\varrho_u\Gamma_\theta \\ & - 2K_\zeta C_{\eta H}\varrho_v\Gamma_\theta + 2K_\zeta C_{\omega H}\varrho_\theta\Gamma_\theta] d\zeta \\ & + \frac{G}{2} \int_0^l C_J\Gamma_\theta^2 d\zeta - \int_0^l [p_\xi^*(u-\eta_1\theta) + p_\eta^*(v+\xi_1\theta) \\ & + p_\zeta^*(w-\xi_1\Gamma_w - \eta_1\Gamma_v + \omega_1\Gamma_\theta)] \sqrt{g} d\zeta \\ & - \int_0^l [-m_\xi^*\Gamma_v + m_\eta^*\Gamma_u + m_\zeta^*\theta] d\zeta \\ & - [P_\xi^*(u-\eta_2\theta) + P_\eta^*(v+\xi_2\theta) \\ & + P_\zeta^*(w-\xi_2\Gamma_w - \eta_2\Gamma_v + \omega_2\Gamma_\theta)]_{\zeta=l} \\ & - [-M_\xi^*\Gamma_v + M_\eta^*\Gamma_u + M_\zeta^*\theta]_{\zeta=l} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

ここで,  $E, G$  は材料の縦弾性係数, 横弾性係数である。また,  $\sqrt{g}=1-\xi_1K_\eta+\eta_1K_\xi$ ,  $\omega_1, \omega_2$  は点  $(\xi_1, \eta_1)$ ,  $(\xi_2, \eta_2)$  での  $\omega$  の値を示す。式中の断面定数は次の定義に従うものとする。

$$\begin{aligned} C &= \int_A \frac{1}{\sqrt{g}} dA, & C_\xi &= \int_A \frac{\xi}{\sqrt{g}} dA \\ C_\eta &= \int_A \frac{\eta}{\sqrt{g}} dA, & C_H &= \int_A \frac{H}{\sqrt{g}} dA \\ C_{\xi\xi} &= \int_A \frac{\xi^2}{\sqrt{g}} dA, & C_{\eta\eta} &= \int_A \frac{\eta^2}{\sqrt{g}} dA \\ C_{\xi\eta} &= \int_A \frac{\xi\eta}{\sqrt{g}} dA, & C_{\xi\omega} &= \int_A \frac{\xi\omega}{\sqrt{g}} dA \\ C_{\eta\omega} &= \int_A \frac{\eta\omega}{\sqrt{g}} dA, & C_{\omega\omega} &= \int_A \frac{\omega^2}{\sqrt{g}} dA \\ C_{\xi H} &= \int_A \frac{\xi H}{\sqrt{g}} dA, & C_{\eta H} &= \int_A \frac{\eta H}{\sqrt{g}} dA \\ C_{\omega H} &= \int_A \frac{\omega H}{\sqrt{g}} dA, & C_{HH} &= \int_A \frac{H^2}{\sqrt{g}} dA \end{aligned} \dots\dots (32)$$

$$\begin{aligned} M_\xi &= EC_\eta\Gamma_w - EC_{\xi\eta}\varrho_u - EC_{\eta\eta}\varrho_v + EC_{\eta\omega}\varrho_\theta + EC_{\eta H}K_\zeta\Gamma_\theta \\ M_\eta &= -EC_\xi\Gamma_w + EC_{\xi\xi}\varrho_u + EC_{\xi\eta}\varrho_v - EC_{\xi\omega}\varrho_\theta - EC_{\xi H}K_\zeta\Gamma_\theta \\ M_\omega &= -EC_{\xi\omega}\varrho_u - EC_{\eta\omega}\varrho_v + EC_{\omega\omega}\varrho_\theta + EC_{\omega H}K_\zeta\Gamma_\theta \\ M_S &= GC_J\Gamma_\theta \\ M_\zeta &= EC_{\xi\omega} \frac{d\varrho_u}{d\zeta} + EC_{\eta\omega} \frac{d\varrho_v}{d\zeta} - EC_{\omega\omega} \frac{d\varrho_\theta}{d\zeta} + EC_H K_\zeta \Gamma_w - EC_{\xi H} K_\zeta \varrho_u - EC_{\eta H} K_\zeta \varrho_v \\ & \quad + (EC_{HH} K_\zeta^2 + GC_J) \Gamma_\theta \\ P_\xi &= EC_\xi \frac{d\Gamma_w}{d\zeta} - (EC_{\xi\xi} - EC_{\xi\omega} K_\zeta) \frac{d\varrho_u}{d\zeta} - (EC_{\xi\eta} - EC_{\eta\omega} K_\zeta) \frac{d\varrho_v}{d\zeta} + (EC_{\xi\omega} - EC_{\omega\omega} K_\zeta) \frac{d\varrho_\theta}{d\zeta} \\ & \quad - (EC_\eta - EC_H K_\zeta) K_\zeta \Gamma_w + (EC_{\xi\eta} - EC_{\xi H} K_\zeta) K_\zeta \varrho_u + (EC_{\eta\eta} - EC_{\eta H} K_\zeta) K_\zeta \varrho_v \end{aligned} \dots\dots\dots (34)$$

$$C_J = \int_A \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \left\{ \eta - g \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\omega}{\sqrt{g}} \right) \right\}^2 + \left\{ \xi + g \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\omega}{\sqrt{g}} \right) \right\}^2 \right] dA$$

(3) 断面力

はり各断面に働いている応力の合力として, 次に示す断面力を定義する<sup>9)</sup>。

$$\begin{aligned} M_\xi &= \int_A \sigma_\zeta \eta dA, & M_\eta &= - \int_A \sigma_\zeta \xi dA, \\ M_\omega &= \int_A \sigma_\zeta \omega dA, & Z &= \int_A \sigma_\zeta H dA, \\ M_S &= \int_A (\tau_{\eta\zeta} \xi - \tau_{\xi\zeta} \eta) dA, \\ M_\zeta &= M_S - \frac{dM_\omega}{d\zeta} + K_\zeta Z \\ P_\xi &= - \frac{dM_\eta}{d\zeta} - K_\zeta M_\xi + K_\xi M_\zeta \\ P_\eta &= \frac{dM_\xi}{d\zeta} - K_\zeta M_\eta + K_\eta M_\zeta \\ P_\zeta &= \int_A \sigma_\zeta dA \end{aligned} \dots\dots (33)$$

ここで,  $M_\xi, M_\eta$  は  $\xi, \eta$  軸まわりの曲げモーメント,  $M_\omega$  はそりモーメント,  $M_S$  は St. Venant のねじりモーメント,  $M_\zeta$  は合ねじりモーメントである。また,  $P_\xi, P_\eta, P_\zeta$  は  $\xi, \eta, \zeta$  軸方向の力である (図-3 参照)。

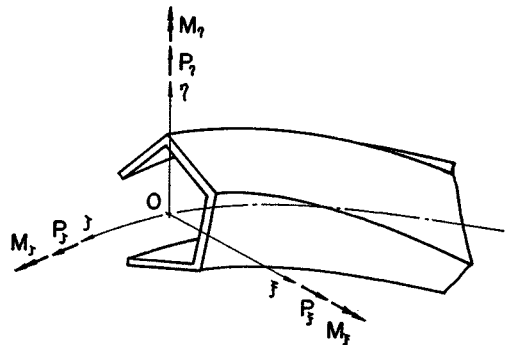


図-3 断面力

式 (33) にフックの法則を適用し, 式 (23) を代入すると合力が変位で表わされる。

$$\begin{aligned}
& + (EC_{\xi H} - EC_{\eta\omega})K_{\zeta}\varrho_{\theta} - [(EC_{\eta H} - EC_{HH}K_{\xi})K_{\zeta}^2 - GC_JK_{\xi}] \Gamma_{\theta} \\
P_{\eta} = & EC_{\eta} \frac{d\Gamma_w}{d\zeta} - (EC_{\xi\eta} - EC_{\xi\omega}K_{\eta}) \frac{d\varrho_u}{d\zeta} - (EC_{\eta\eta} - EC_{\eta\omega}K_{\eta}) \frac{d\varrho_v}{d\zeta} + (EC_{\eta\omega} - EC_{\omega\omega}K_{\eta}) \frac{d\varrho_{\theta}}{d\zeta} \\
& + (EC_{\xi} + EC_{HH}K_{\eta})K_{\zeta}\Gamma_w - (EC_{\xi\xi} + EC_{\xi H}K_{\eta})K_{\zeta}\varrho_u - (EC_{\xi\eta} + EC_{\eta H}K_{\eta})K_{\zeta}\varrho_v \\
& + (EC_{\eta H} + EC_{\xi\omega})K_{\zeta}\varrho_{\theta} + [(EC_{\xi H} + EC_{HH}K_{\xi})K_{\zeta}^2 + GC_JK_{\eta}] \Gamma_{\theta} \\
P_{\zeta} = & EC\Gamma_w - EC_{\xi}\varrho_u - EC_{\eta}\varrho_v + EC_HK_{\zeta}\Gamma_{\theta}
\end{aligned}$$

## (4) 平衡方程式・力学的境界条件

仮想仕事の原理式 (29) のひずみを変位で表わし、部分積分を行い、断面力 (式 (33)) を用いると、立体曲線はりの変形に関する微分方程式、および力学的境界条件がそれぞれ次のように求まる。

平衡方程式：

$$\left. \begin{aligned}
& -\frac{dP_{\xi}^*}{d\zeta} + K_{\zeta}P_{\eta} - K_{\eta}P_{\zeta} = \sqrt{g_1}p_{\xi}^* + \sqrt{g_1}(\xi_1 - \omega_1 K_{\xi}) \frac{dp_{\zeta}^*}{d\zeta} - \sqrt{g_1}(\eta_1 - \omega_1 K_{\eta}) K_{\zeta}p_{\zeta}^* - \frac{dm_{\zeta}^*}{d\zeta} - K_{\zeta}m_{\xi}^* \\
& -\frac{dP_{\eta}^*}{d\zeta} - K_{\zeta}P_{\xi} + K_{\xi}P_{\zeta} = \sqrt{g_1}p_{\eta}^* + \sqrt{g_1}(\eta_1 - \omega_1 K_{\eta}) \frac{dp_{\zeta}^*}{d\zeta} + \sqrt{g_1}(\xi_1 - \omega_1 K_{\xi}) K_{\zeta}p_{\zeta}^* + \frac{dm_{\zeta}^*}{d\zeta} - K_{\zeta}m_{\eta}^* \\
& -\frac{dP_{\zeta}^*}{d\zeta} + K_{\eta}P_{\xi} - K_{\xi}P_{\eta} = \sqrt{g_1}p_{\zeta}^* + K_{\xi}m_{\xi}^* + K_{\eta}m_{\eta}^* \\
& -\frac{dM_{\zeta}^*}{d\zeta} - K_{\xi}M_{\eta} + K_{\eta}M_{\xi} = m_{\zeta}^* + \sqrt{g_1}\xi_1 p_{\eta}^* - \sqrt{g_1}\eta_1 p_{\xi}^* - \sqrt{g_1}\omega_1 \frac{dp_{\zeta}^*}{d\zeta}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

実際問題の解析にあたっては、平衡方程式が変位で表わされているほうが便利な場合が多い。式 (34) を上式に代入すると、平衡方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
& -EC_{\xi} \frac{d^2\Gamma_w}{d\zeta^2} + (EC_{\xi\xi} - EC_{\xi\omega}K) \frac{d^2\varrho_u}{d\zeta^2} + (EC_{\xi\eta} - EC_{\eta\omega}K_{\xi}) \frac{d^2\varrho_v}{d\zeta^2} - (EC_{\xi\omega} - EC_{\omega\omega}K_{\xi}) \frac{d^2\varrho_{\theta}}{d\zeta^2} \\
& + (2EC_{\eta} - EC_{HH}K_{\xi})K_{\zeta} \frac{d\Gamma_w}{d\zeta} - (2EC_{\xi\eta} - EC_{\xi\omega}K_{\eta} - EC_{\xi H}K_{\xi})K_{\zeta} \frac{d\varrho_u}{d\zeta} \\
& - (2EC_{\eta\eta} - EC_{\eta\omega}K_{\eta} - EC_{\eta H}K_{\xi})K_{\zeta} \frac{d\varrho_v}{d\zeta} + (2EC_{\eta\omega} - EC_{\omega\omega}K_{\eta} - EC_{\xi H})K_{\zeta} \frac{d\varrho_{\theta}}{d\zeta} \\
& + [(EC_{\xi} + EC_{HH}K_{\eta})K_{\zeta}^2 - ECK_{\eta}] \Gamma_w - [(EC_{\xi\xi} + EC_{\xi H}K_{\eta})K_{\zeta}^2 - EC_{\xi}K_{\eta}] \varrho_u \\
& - [(EC_{\xi\eta} + EC_{\eta H}K_{\eta})K_{\zeta}^2 - EC_{\eta}K_{\xi}] \varrho_v + [(EC_{\xi\omega} + 2EC_{\eta H} - EC_{HH}K_{\xi})K_{\zeta}^2 - GC_JK_{\xi}] \varrho_{\theta} \\
& - [EC_HK_{\eta} - (EC_{\xi H} + EC_{HH}K_{\eta})K_{\zeta}^2 - GC_JK_{\eta}] K_{\zeta}\Gamma_{\theta} \\
= & \sqrt{g_1}p_{\xi}^* + \sqrt{g_1}(\xi_1 - \omega_1 K_{\xi}) \frac{dp_{\zeta}^*}{d\zeta} - \sqrt{g_1}(\eta_1 - \omega_1 K_{\eta}) K_{\zeta}p_{\zeta}^* - \frac{dm_{\zeta}^*}{d\zeta} - K_{\zeta}m_{\xi}^* \\
& - EC_{\eta} \frac{d^2\Gamma_w}{d\zeta^2} + (EC_{\xi\eta} - EC_{\xi\omega}K_{\eta}) \frac{d^2\varrho_u}{d\zeta^2} + (EC_{\eta\eta} - EC_{\eta\omega}K_{\eta}) \frac{d^2\varrho_v}{d\zeta^2} - (EC_{\eta\omega} - EC_{\omega\omega}K_{\eta}) \frac{d^2\varrho_{\theta}}{d\zeta^2} \\
& - (2EC_{\xi} + EC_{HH}K_{\eta})K_{\zeta} \frac{d\Gamma_w}{d\zeta} + (2EC_{\xi\xi} - EC_{\xi\omega}K_{\xi} + EC_{\xi H}K_{\eta})K_{\zeta} \frac{d\varrho_u}{d\zeta} \\
& + (2EC_{\xi\eta} - EC_{\eta\omega}K_{\xi} + EC_{\eta H}K_{\eta})K_{\zeta} \frac{d\varrho_v}{d\zeta} - (2EC_{\xi\omega} - EC_{\omega\omega}K_{\xi} + EC_{\eta H})K_{\zeta} \frac{d\varrho_{\theta}}{d\zeta} \\
& + [(EC_{\eta} - EC_{HH}K_{\xi})K_{\zeta}^2 + ECK_{\xi}] \Gamma_w - [(EC_{\xi\eta} - EC_{\xi H}K_{\xi})K_{\zeta}^2 + EC_{\xi}K_{\xi}] \varrho_u \\
& - [(EC_{\eta\eta} - EC_{\eta H}K_{\xi})K_{\zeta}^2 + EC_{\eta}K_{\xi}] \varrho_v - [(2EC_{\xi H} - EC_{\eta\omega} + EC_{HH}K_{\eta})K_{\zeta}^2 + GC_JK_{\eta}] \varrho_{\theta} \\
& + [EC_HK_{\xi} + (EC_{\eta H} - EC_{HH}K_{\xi})K_{\zeta}^2 - GC_JK_{\xi}] K_{\zeta}\Gamma_{\theta} \\
= & \sqrt{g_1}p_{\eta}^* + \sqrt{g_1}(\eta_1 - \omega_1 K_{\eta}) \frac{dp_{\zeta}^*}{d\zeta} + \sqrt{g_1}(\xi_1 - \omega_1 K_{\xi}) K_{\zeta}p_{\zeta}^* + \frac{dm_{\zeta}^*}{d\zeta} - K_{\zeta}m_{\eta}^* \\
& - (EC - EC_{\xi}K_{\eta} + EC_{\eta}K_{\xi}) \frac{d\Gamma_w}{d\zeta} + (EC_{\xi} - EC_{\xi\xi}K_{\eta} + EC_{\xi\eta}K_{\xi}) \frac{d\varrho_u}{d\zeta} \\
& + (EC_{\eta} + EC_{\eta\eta}K_{\xi} - EC_{\xi\eta}K_{\eta}) \frac{d\varrho_v}{d\zeta} + (EC_{\xi\omega}K_{\eta} - EC_{\eta\omega}K_{\xi}) \frac{d\varrho_{\theta}}{d\zeta} \\
& - (EC_{\xi}K_{\xi} + EC_{\eta}K_{\eta})K_{\zeta}\Gamma_w + (EC_{\xi\xi}K_{\xi} + EC_{\xi\eta}K_{\eta})K_{\zeta}\varrho_u + (EC_{\eta\eta}K_{\eta} + EC_{\xi\eta}K_{\xi})K_{\zeta}\varrho_v \\
& - (EC_H + EC_{\xi\omega}K_{\xi} + EC_{\eta\omega}K_{\eta} - EC_{\xi H}K_{\eta} + EC_{\eta H}K_{\xi})K_{\zeta}\varrho_{\theta} - (EC_{\xi H}K_{\xi} + EC_{\eta H}K_{\eta})K_{\zeta}^2\Gamma_{\theta} \\
= & \sqrt{g_1}p_{\zeta}^* + K_{\xi}m_{\xi}^* + K_{\eta}m_{\eta}^*
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

$$\begin{aligned}
 & -EC_{\xi\omega} \frac{d^2\Omega_u}{d\zeta^2} - EC_{\gamma\omega} \frac{d^2\Omega_v}{d\zeta^2} + EC_{\omega\omega} \frac{d^2\Omega_\theta}{d\zeta^2} - EC_H K_\zeta \frac{d\Gamma_w}{d\zeta} + EC_{\xi H} K_\zeta \frac{d\Omega_u}{d\zeta} + EC_{\gamma H} K_\zeta \frac{d\Omega_v}{d\zeta} \\
 & + (EC_{\xi} K_\xi + EC_{\gamma} K_\gamma) \Gamma_w - (EC_{\xi\xi} K_\xi + EC_{\xi\gamma} K_\gamma) \Omega_u - (EC_{\xi\gamma} K_\xi + EC_{\gamma\gamma} K_\gamma) \Omega_v \\
 & + (EC_{\xi\omega} K_\xi + EC_{\gamma\omega} K_\gamma - EC_{HH} K_\zeta^2 - GC_J) \Omega_\theta + (EC_{\xi H} K_\xi + EC_{\gamma H} K_\gamma) K_\zeta \Gamma_\theta \\
 & = m_\zeta^* + \sqrt{g_1} \xi_1 \dot{p}_\gamma^* - \sqrt{g_1} \eta_1 \dot{p}_\xi^* - \sqrt{g_1} \omega_1 \frac{d\dot{p}_\zeta^*}{d\zeta}
 \end{aligned}$$

$\zeta=l$  断面の力学的境界条件:

$$\left. \begin{aligned}
 M_\gamma &= M_\gamma^* - (\xi_2 - \omega_2 K_\xi) P_\zeta^* \\
 P_\xi &= P_\xi^* + m_\gamma^* - \sqrt{g_1} (\xi_1 - \omega_1 K_\xi) \dot{p}_\zeta^* \\
 -M_\xi &= -M_\xi^* - (\eta_2 - \omega_2 K_\gamma) P_\zeta^* \\
 P_\gamma &= P_\gamma^* - m_\xi^* - \sqrt{g_1} (\eta_1 - \omega_1 K_\gamma) \dot{p}_\zeta^* \\
 P_\zeta &= P_\zeta^* \\
 M_\omega &= \omega_2 P_\zeta^* \\
 M_\zeta &= M_\zeta^* + \xi_2 P_\gamma^* - \eta_2 P_\xi^* + \sqrt{g_1} \omega_1 \dot{p}_\zeta^*
 \end{aligned} \right\} \dots (37)$$

式 (37) に式 (34) を代入すると,  $\zeta=l$  断面の力学的境界条件が変位によって表わされる。

### 5. 応 力

曲線はり内の応力は, 微分方程式 (36) を与えられた荷重条件, および境界条件のもとで解いて変位が求まれば, 次式により計算される。

(a) 垂直応力:  $\sigma_\zeta$

垂直ひずみ  $\varepsilon_\zeta$  が式 (23) で与えられているので, 垂直応力は

$$\sigma_\zeta = \frac{E}{\sqrt{g}} (\Gamma_w - \xi \Omega_u - \eta \Omega_v + \omega \Omega_\theta + HK_\zeta \Gamma_\theta) \dots (38)$$

である。

(b) St. Venant のせん断応力:  $s^r s_\zeta, s^r n_\zeta$

( $s, n, \zeta$ ) 座標系による St. Venant のせん断応力は, 式 (26), (27), (28) から容易に求まる。

$$\left. \begin{aligned}
 s^r s_\zeta &= -\frac{2n}{\sqrt{g_0}} G \left( 1 - \frac{f}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} \right) \Gamma_\theta \text{ (開き断面)} \\
 s^r s_\zeta &= G \left[ -\frac{2n}{\sqrt{g_0}} \left( 1 - \frac{f}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\oint \frac{h}{g_0} ds}{\oint \frac{ds}{g_0 \sqrt{g_0} t}} \right] \Gamma_\theta \text{ (一室閉じ断面)} \\
 s^r n_\zeta &= 0 \text{ (両断面)}
 \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

St. Venant のねじり剛性係数  $C_J$  は, 式 (32) の最後の式より開き断面, 閉じ断面それぞれに対して, 次のように別々に求まる。

開き断面:

$$\begin{aligned}
 C_J &= \int_A \frac{1}{\sqrt{g_0}} \left[ 4n^2 \left( 1 - \frac{f}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} \right)^2 \cos^2 \alpha \right. \\
 & \quad \left. + 4n^2 \left( 1 - \frac{f}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} \right)^2 \sin^2 \alpha \right] dA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_A \frac{4n^2}{\sqrt{g_0}} \left( 1 - \frac{f}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} \right)^2 dA \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{s_b} \frac{t^3}{\sqrt{g_0}} \left( 1 - \frac{f}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} \right)^2 ds \dots (40)
 \end{aligned}$$

ここで,  $s_b$  は断面の  $s$  軸に沿って測った断面輪郭の全長である。文献 2) では式 (40) の第 1 項のみが用いられている。

閉じた断面:

開き断面と同様にして,

$$\begin{aligned}
 C_J &= \frac{1}{3} \oint \frac{t^3}{\sqrt{g_0}} \left( 1 - \frac{f}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} \right)^2 ds \\
 & \quad + \int_A g_0 \sqrt{g_0} q^{t^2} \left[ \left( \frac{1}{g_0 \sqrt{g_0} t} \right)^2 \cos^2 \alpha \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{1}{g_0 \sqrt{g_0} t} \right)^2 \sin^2 \alpha \right] dA \\
 &= \frac{1}{3} \oint \frac{t^3}{\sqrt{g_0}} \left( 1 - \frac{f}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} \right)^2 ds + \frac{\left( \oint \frac{h}{g_0} ds \right)^2}{\oint \frac{ds}{g_0 \sqrt{g_0} t}} \dots (41)
 \end{aligned}$$

ここで線積分は  $s$  に沿って断面を一周する積分である。また, 式 (41) の第 1 項は第 2 項に比較して小さいので, 一般には無視されている。

(c) せん断変形, 断面のそり変形に伴うせん断応力:  $\zeta \tau_{s\zeta}$

断面不変の仮定のもとで導かれたせん断ひずみは, St. Venant のねじりによるせん断変形によるひずみのみを表わしている。したがって, せん断力によるせん断応力, そり変形に伴うせん断応力は別途計算する必要がある。はり理論では, これらせん断応力の計算に St. Venant の semi-inverse method<sup>10)</sup> が用いられている。

はりより切り出した微小要素に働く力の軸方向つり合いは,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\bar{\sigma}_\zeta t) + \frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial}{\partial s} (g_0 \zeta \tau_{s\zeta} t) - K_\zeta \frac{\partial}{\partial s} (\bar{\sigma}_\zeta t h) = 0 \dots (42)$$

と表わされる。

ここで,  $\bar{\sigma}_\zeta$  ははりに作用する横荷重による曲げ変形, 断面のそり変形に伴って生じた垂直応力で,

$$\bar{\sigma}_\zeta = \frac{E}{\sqrt{g}} (-\xi \Omega_u - \eta \Omega_v + \omega \Omega_\theta) \dots (43)$$

である。

式 (42) を  $s$  に関して積分すると,

$$\begin{aligned}
 & \zeta \tau_{s\zeta} t g_0 - \bar{\sigma}_\zeta t K_\zeta \sqrt{g_0} h \\
 &= - \int_0^s \frac{\partial}{\partial \zeta} (\bar{\sigma}_\zeta t \sqrt{g_0}) ds - K_\zeta \int_0^s \bar{\sigma}_\zeta t h \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} ds \\
 & \quad + C(\zeta) \dots (44)
 \end{aligned}$$

となり、 $C$ は積分定数で断面形状により、それぞれ次のように決まる。

開き断面：

$s$ の原点として外力の作用していない点を選ぶと、 $s=0$ で、

$$\zeta\tau_{s\zeta}tg_0 - \bar{\sigma}_{\zeta t}K_{\zeta}\sqrt{g_0}h = 0 \dots\dots\dots(45)$$

であるから、 $C=0$ となり、せん断応力は

$$\zeta\tau_{s\zeta} = \frac{1}{g_0t} \left[ -\int_0^s \frac{\partial}{\partial \zeta} (\bar{\sigma}_{\zeta t}\sqrt{g_0}) ds - K_{\zeta} \int_0^s \bar{\sigma}_{\zeta t}h \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} ds \right] + \frac{K_{\zeta}}{\sqrt{g_0}} \bar{\sigma}_{\zeta t}h \dots(46)$$

となる。

一室閉じ断面：

せん断応力  $\zeta\tau_{s\zeta}$  に対応するせん断ひずみを、 $s$ 軸に沿って一周積分すると、変位の連続性より、

$$\oint \frac{\zeta\tau_{s\zeta}}{G\sqrt{g_0}} ds = 0 \dots\dots\dots(47)$$

でなければならない<sup>3)</sup>。

この式に式(44)を代入すると、閉じ断面に対する  $C$ が次のように決まる。

$$C = \frac{1}{\oint g_0 \sqrt{g_0} t} \left[ \oint \frac{1}{g_0 \sqrt{g_0} t} \left\{ \int_0^s \frac{\partial}{\partial \zeta} (\bar{\sigma}_{\zeta t}\sqrt{g_0}) ds \right\} ds + K_{\zeta} \oint \frac{1}{g_0 \sqrt{g_0} t} \left( \int_0^s \bar{\sigma}_{\zeta t}h \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} ds \right) ds - K_{\zeta} \oint \frac{h}{g_0} \bar{\sigma}_{\zeta t} ds \right] \dots\dots\dots(48)$$

したがって、一室閉じ断面のせん断応力は、

$$\zeta\tau_{s\zeta} = -\frac{1}{g_0t} \int_0^s \frac{\partial}{\partial \zeta} (\bar{\sigma}_{\zeta t}\sqrt{g_0}) ds - \frac{K_{\zeta}}{g_0t} \int_0^s \bar{\sigma}_{\zeta t}h \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial s} ds + \frac{K_{\zeta}}{\sqrt{g_0}} \bar{\sigma}_{\zeta t}h + \frac{C}{g_0t} \dots\dots\dots(49)$$

である。

6. 特定な曲線はりに関する方程式

4.で初期曲率・初期ねじれ率を有する立体曲線はりの

$$\left. \begin{aligned} M_{\xi} &= -\left( EC_{\xi\eta} + EC_{\eta\omega} \frac{1}{R} \right) \frac{d^2u}{d\zeta^2} - 2EC_{\eta\tau} \tau \frac{du}{d\zeta} + EC_{\xi\eta} \tau^2 u - EC_{\eta\eta} \frac{d^2v}{d\zeta^2} + \left( 2EC_{\xi\eta} + EC_{\eta\omega} \frac{1}{R} \right) \tau \frac{dv}{d\zeta} \\ &\quad - \left( EC_{\eta} \frac{1}{R} - EC_{\eta\tau} \tau^2 \right) v + \left( EC_{\eta} - EC_{\eta\tau} \frac{1}{R} \right) \frac{dw}{d\zeta} + EC_{\xi\eta} \frac{\tau}{R} w + EC_{\eta\omega} \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} - EC_{\xi\eta} \frac{\theta}{R} \\ M_{\eta} &= \left( EC_{\xi\xi} + EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} \right) \frac{d^2u}{d\zeta^2} + 2EC_{\xi\eta} \tau \frac{du}{d\zeta} - EC_{\xi\xi} \tau^2 u + EC_{\xi\eta} \frac{d^2v}{d\zeta^2} - \left( 2EC_{\xi\xi} + EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} \right) \tau \frac{dv}{d\zeta} \\ &\quad + \left( EC_{\xi} \frac{1}{R} - EC_{\xi\tau} \tau^2 \right) v - \left( EC_{\xi} - EC_{\xi\tau} \frac{1}{R} \right) \frac{dw}{d\zeta} - EC_{\xi\xi} \frac{\tau}{R} w - EC_{\xi\omega} \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + EC_{\xi\xi} \frac{\theta}{R} \\ M_{\omega} &= -\left( EC_{\xi\omega} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R} \right) \frac{d^2u}{d\zeta^2} - 2EC_{\eta\omega} \tau \frac{du}{d\zeta} + EC_{\xi\omega} \tau^2 u - EC_{\eta\omega} \frac{d^2v}{d\zeta^2} + \left( 2EC_{\xi\omega} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R} \right) \tau \frac{dv}{d\zeta} \\ &\quad + EC_{\eta\omega} \tau^2 v - EC_{\eta\omega} \frac{1}{R} \frac{dw}{d\zeta} + EC_{\xi\omega} \frac{\tau}{R} w + EC_{\omega\omega} \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} - EC_{\xi\omega} \frac{\theta}{R} \\ M_S &= -GC_J \frac{1}{R} \frac{du}{d\zeta} + GC_J \frac{\tau}{R} v + GC_J \frac{d\theta}{d\zeta} \\ M_{\zeta} &= \left( EC_{\xi\omega} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R} \right) \frac{d^3u}{d\zeta^3} + 2EC_{\eta\omega} \tau \frac{d^2u}{d\zeta^2} - \left( EC_{\xi\omega} \tau^2 + GC_J \frac{1}{R} \right) \frac{du}{d\zeta} + EC_{\eta\omega} \frac{d^3v}{d\zeta^3} \end{aligned} \right\}$$

静変形に関する一般的な方程式を導いたが、本節ではある特定な曲線はりに対する基礎方程式を示して、既存の諸式と比較する。

(1) らせんはり

図心軸 ( $\zeta$  軸) の初期曲率、初期ねじれ率がらせんのピッチ角に依存した立体曲線はりである。

構造物に使用されるらせんはりは、一般にピッチ角が小さく、したがって初期ねじれ率が小さい場合が多い。初期ねじれ率が小さいと、式(23)の垂直ひずみの構成成分である  $HK_{\zeta} \Gamma_{\theta}$  項は他の項と比較すると小さくなり、無視できる。すなわち、基礎方程式で  $H$  に関係した断面定数を含む項はすべて無視できる。

いま、 $\zeta$  軸の曲率半径を  $R$ 、初期ねじれ率を  $\tau$ 、 $\eta$  軸を  $\zeta$  軸の主法線方向と一致するよう座標軸を定める。すなわち、

$$\beta = \frac{3}{2}\pi, K_{\xi} = -\frac{1}{R}, K_{\eta} = 0, K_{\zeta} = \tau$$

である。

らせんはりの変形に関する幾何学的諸量は、次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_u &= \frac{du}{d\zeta} - \tau v, \Gamma_v = \frac{dv}{d\zeta} + \tau u + \frac{w}{R} \\ \Gamma_{\theta} &= \frac{d\theta}{d\zeta} - \frac{1}{R} \frac{du}{d\zeta} + \frac{\tau}{R} v, \Gamma_w = \frac{dw}{d\zeta} - \frac{v}{R} \\ \Omega_u &= \frac{d^2u}{d\zeta^2} - 2\tau \frac{dv}{d\zeta} - \tau^2 u - \frac{\tau}{R} w + \frac{\theta}{R} \\ \Omega_v &= \frac{d^2v}{d\zeta^2} + 2\tau \frac{du}{d\zeta} + \frac{1}{R} \frac{dw}{d\zeta} - \tau^2 v \\ \Omega_{\theta} &= \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2u}{d\zeta^2} + \frac{\tau}{R} \frac{dv}{d\zeta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50)$$

式(50)を用いると、合応力はそれぞれ次のとおり表わされる。



$$\begin{aligned}
& -\left(2 EC_{\xi\omega} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R}\right) \tau \frac{d^2 v}{d\zeta^2} - EC_{\eta\omega} \tau^2 \frac{dv}{d\zeta} + GC_J \frac{\tau}{R} v + EC_{\eta\omega} \frac{1}{R} \frac{d^2 w}{d\zeta^2} \\
& - EC_{\xi\omega} \frac{\tau}{R} \frac{dw}{d\zeta} - EC_{\omega\omega} \frac{d^3 \theta}{d\zeta^3} + \left( EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} + GC_J \right) \frac{d\theta}{d\zeta} \\
P_{\xi} = & -\left( EC_{\xi\xi} + 2 EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R^2} \right) \frac{d^3 u}{d\zeta^3} - \left( EC_{\xi\eta} + EC_{\eta\omega} \frac{1}{R} \right) \tau \frac{d^2 u}{d\zeta^2} \\
& + \left[ \left( EC_{\xi\xi} + 2 EC_{\eta\eta} + EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} \right) \tau^2 + GC_J \frac{1}{R^2} \right] \frac{du}{d\zeta} - EC_{\xi\eta} \tau^3 u - \left( EC_{\xi\eta} + EC_{\eta\omega} \frac{1}{R} \right) \frac{d^3 v}{d\zeta^3} \\
& + \left( 2 EC_{\xi\xi} + EC_{\eta\eta} + 3 EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R^2} \right) \tau \frac{d^2 v}{d\zeta^2} - \left( EC_{\xi} \frac{1}{R} + EC_{\xi\eta} \tau^2 \right) \frac{dv}{d\zeta} \\
& + \left( EC_{\eta} \frac{1}{R} - EC_{\eta\eta} \tau^2 - GC_J \frac{1}{R^2} \right) \tau v + \left( EC_{\xi} - EC_{\xi\eta} \frac{1}{R} - EC_{\eta\omega} \frac{1}{R^2} \right) \frac{d^2 w}{d\zeta^2} \\
& - \left( EC_{\eta} - EC_{\xi} \frac{1}{R} - EC_{\eta\eta} \frac{1}{R} - EC_{\xi\omega} \frac{1}{R^2} \right) \tau \frac{dw}{d\zeta} - EC_{\xi\eta} \frac{\tau^2}{R} w + \left( EC_{\xi\omega} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R} \right) \frac{d^3 \theta}{d\zeta^3} \\
& - EC_{\eta\omega} \tau \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} - \left( EC_{\xi\xi} + EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} + GC_J \right) \frac{1}{R} \frac{d\theta}{d\zeta} + EC_{\xi\eta} \frac{\tau}{R} \theta \\
P_{\eta} = & -\left( EC_{\xi\eta} + EC_{\eta\omega} \frac{1}{R} \right) \frac{d^3 u}{d\zeta^3} - \left( EC_{\xi\xi} + 2 EC_{\eta\eta} + EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} \right) \tau \frac{d^2 u}{d\zeta^2} - EC_{\xi\eta} \tau^2 \frac{du}{d\zeta} + EC_{\xi\xi} \tau^3 u \\
& - EC_{\eta\eta} \frac{d^3 v}{d\zeta^3} + \left( EC_{\xi\eta} + EC_{\eta\omega} \frac{1}{R} \right) \tau \frac{d^2 v}{d\zeta^2} - \left( EC_{\eta} \frac{1}{R} - 2 EC_{\xi\xi} \tau^2 - EC_{\eta\eta} \tau^2 - EC_{\xi\omega} \frac{\tau^2}{R} \right) \frac{dv}{d\zeta} \\
& - \left( EC_{\xi} \frac{1}{R} - EC_{\xi\eta} \tau^2 \right) \tau v + \left( EC_{\eta} - EC_{\eta\eta} \frac{1}{R} \right) \frac{d^2 w}{d\zeta^2} + EC_{\xi} \tau \frac{dw}{d\zeta} + EC_{\xi\xi} \frac{\tau^2}{R} w \\
& + EC_{\eta\omega} \frac{d^3 \theta}{d\zeta^3} + EC_{\xi\omega} \tau \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} - EC_{\xi\eta} \frac{1}{R} \frac{d\theta}{d\zeta} - EC_{\xi\xi} \frac{\tau}{R} \theta \\
P_{\zeta} = & -EC_{\xi} \frac{d^3 u}{d\zeta^3} - 2 EC_{\eta} \tau \frac{du}{d\zeta} + EC_{\xi} \tau^2 u - EC_{\eta} \frac{d^3 v}{d\zeta^3} + 2 EC_{\xi} \tau \frac{dv}{d\zeta} - \left( EC \frac{1}{R} - EC_{\eta} \tau^2 \right) v \\
& + \left( EC - EC_{\eta} \frac{1}{R} \right) \frac{dw}{d\zeta} + EC_{\xi} \frac{\tau}{R} w - EC_{\xi} \frac{\theta}{R}
\end{aligned} \tag{51}$$

らせんはりに対する平衡方程式は, 一般式 (36) に式 (50) を代入することにより次のように求まる。

$$\begin{aligned}
& \left( EC_{\xi\xi} + 2 EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R^2} \right) \frac{d^4 u}{d\zeta^4} - \left[ \left( 2 EC_{\xi\xi} + 4 EC_{\eta\eta} + 2 EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} \right) \tau^2 + GC_J \frac{1}{R^2} \right] \frac{d^2 u}{d\zeta^2} \\
& + EC_{\xi\xi} \tau^4 u + \left( EC_{\xi\eta} + EC_{\eta\omega} \frac{1}{R} \right) \frac{d^4 v}{d\zeta^4} - \left( 2 EC_{\xi\xi} + 2 EC_{\eta\eta} + 3 EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R^2} \right) \tau \frac{d^3 v}{d\zeta^3} \\
& + \left( EC_{\xi} \frac{1}{R} + 2 EC_{\xi\eta} \tau^2 + EC_{\eta\omega} \frac{\tau^2}{R} \right) \frac{d^2 v}{d\zeta^2} \\
& - \left( 2 EC_{\eta} \frac{1}{R} - 2 EC_{\xi\xi} \tau^2 - 2 EC_{\eta\eta} \tau^2 - EC_{\xi\omega} \frac{\tau^2}{R} - GC_J \frac{1}{R^2} \right) \tau \frac{dv}{d\zeta} - \left( EC_{\xi} \frac{1}{R} - EC_{\xi\eta} \tau^2 \right) \tau^2 v \\
& - \left( EC_{\xi} - EC_{\xi\eta} \frac{1}{R} - EC_{\eta\omega} \frac{1}{R^2} \right) \frac{d^3 w}{d\zeta^3} + \left( 2 EC_{\eta} - EC_{\xi\xi} \frac{1}{R} - 2 EC_{\eta\eta} \frac{1}{R} - EC_{\xi\omega} \frac{1}{R^2} \right) \tau \frac{d^2 w}{d\zeta^2} \\
& + \left( EC_{\xi} + EC_{\xi\eta} \frac{1}{R} \right) \tau^2 \frac{dw}{d\zeta} + EC_{\xi\xi} \frac{\tau^3}{R} w - \left( EC_{\xi\omega} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R} \right) \frac{d^4 \theta}{d\zeta^4} + 2 EC_{\eta\omega} \tau \frac{d^3 \theta}{d\zeta^3} \\
& + \left( EC_{\xi\xi} \frac{1}{R} + EC_{\xi\omega} \frac{1}{R^2} + EC_{\xi\omega} \tau^2 + GC_J \frac{1}{R} \right) \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} - 2 EC_{\xi\eta} \frac{\tau}{R} \frac{d\theta}{d\zeta} - EC_{\xi\xi} \frac{\tau^2}{R} \theta \\
& = \sqrt{g_1} p_{\xi}^* + \sqrt{g_1} \left( \xi_1 + \frac{\omega_1}{R} \right) \frac{d p_{\zeta}^*}{d\zeta} - \sqrt{g_1} \eta_1 \tau p_{\zeta}^* - \frac{d m_{\eta}^*}{d\zeta} - \tau m_{\xi}^* \\
& \left( EC_{\xi\eta} + EC_{\eta\omega} \frac{1}{R} \right) \frac{d^4 u}{d\zeta^4} + \left( 2 EC_{\xi\xi} + 2 EC_{\eta\eta} + 3 EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R^2} \right) \tau \frac{d^3 u}{d\zeta^3} \\
& + \left( EC_{\xi} \frac{1}{R} + 2 EC_{\xi\eta} \tau^2 + EC_{\eta\omega} \frac{\tau^2}{R} \right) \frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \left( 2 EC_{\eta} \frac{1}{R} - 2 EC_{\eta\eta} \tau^2 - 2 EC_{\xi\xi} \tau^2 - EC_{\xi\omega} \frac{\tau^2}{R} \right. \\
& \left. - GC_J \frac{1}{R^2} \right) \tau \frac{du}{d\zeta} - \left( EC_{\xi} \frac{1}{R} - EC_{\xi\eta} \tau^2 \right) \tau^2 u + EC_{\eta\eta} \frac{d^4 v}{d\zeta^4} \\
& + \left( 2 EC_{\eta} \frac{1}{R} - 4 EC_{\xi\xi} \tau^2 - 2 EC_{\eta\eta} \tau^2 - 4 EC_{\xi\omega} \frac{\tau^2}{R} - EC_{\omega\omega} \frac{\tau^2}{R^2} \right) \frac{d^2 v}{d\zeta^2} \\
& + \left( EC \frac{1}{R^2} - 2 EC_{\eta} \frac{\tau^2}{R} + EC_{\eta\eta} \tau^4 + GC_J \frac{\tau^2}{R^2} \right) v - \left( EC_{\eta} - EC_{\eta\eta} \frac{1}{R} \right) \frac{d^3 w}{d\zeta^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(2 EC_{\xi} - EC_{\xi\eta} \frac{1}{R} - EC_{\eta\omega} \frac{1}{R^2}\right) \tau \frac{d^2 w}{d\zeta^2} \\
 & - \left[ EC \frac{1}{R} - EC_{\eta} \left( \frac{1}{R^2} + \tau^2 \right) + 2 EC_{\xi\xi} \frac{\tau^2}{R} + EC_{\eta\eta} \frac{\tau^2}{R} + EC_{\xi\omega} \frac{\tau^2}{R^2} \right] \frac{dw}{d\zeta} \\
 & - \left( EC_{\xi} \frac{1}{R} - EC_{\xi\eta} \tau^2 \right) \frac{\tau}{R} w - EC_{\eta\omega} \frac{d^4 \theta}{d\zeta^4} - \left( 2 EC_{\xi\omega} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R} \right) \tau \frac{d^3 \theta}{d\zeta^3} \\
 & + \left( EC_{\xi\eta} \frac{1}{R} + EC_{\eta\omega} \tau^2 \right) \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} + \left( 2 EC_{\xi\xi} + EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} + GC_J \right) \frac{\tau}{R} \frac{d\theta}{d\zeta} + \left( EC_{\xi} \frac{1}{R} - EC_{\xi\eta} \tau^2 \right) \frac{\theta}{R} \\
 & = \sqrt{g_1} p_{\eta}^* + \sqrt{g_1} \eta_1 \frac{d p_{\xi}^*}{d\zeta} + \sqrt{g_1} \left( \xi_1 + \frac{\omega_1}{R} \right) \tau p_{\xi}^* + \frac{d m_{\xi}^*}{d\zeta} - \tau m_{\eta}^* \\
 & \left( EC_{\xi} - EC_{\xi\eta} \frac{1}{R} - EC_{\eta\omega} \frac{1}{R^2} \right) \frac{d^3 u}{d\zeta^3} + \left( 2 EC_{\eta} - EC_{\xi\xi} \frac{1}{R} - 2 EC_{\eta\eta} \frac{1}{R} - EC_{\xi\omega} \frac{1}{R^2} \right) \tau \frac{d^2 u}{d\zeta^2} \\
 & - \left( EC_{\xi} + EC_{\xi\eta} \frac{1}{R} \right) \tau^2 \frac{du}{d\zeta} + EC_{\xi\xi} \frac{\tau^3}{R} u + \left( EC_{\eta} - EC_{\eta\eta} \frac{1}{R} \right) \frac{d^3 v}{d\zeta^3} \\
 & - \left( 2 EC_{\xi} - EC_{\xi\eta} \frac{1}{R} - EC_{\eta\omega} \frac{1}{R^2} \right) \tau \frac{d^2 v}{d\zeta^2} \\
 & + \left[ EC \frac{1}{R} - EC_{\eta} \left( \frac{1}{R^2} + \tau^2 \right) + 2 EC_{\xi\xi} \frac{\tau^2}{R} + EC_{\eta\eta} \frac{\tau^2}{R} + EC_{\xi\omega} \frac{\tau^2}{R^2} \right] \frac{dv}{d\zeta} \\
 & - \left( EC_{\xi} \frac{1}{R} - EC_{\xi\eta} \tau^2 \right) \frac{\tau}{R} v - \left( EC - 2 EC_{\eta} \frac{1}{R} + EC_{\eta\eta} \frac{1}{R^2} \right) \frac{d^2 w}{d\zeta^2} + EC_{\xi\xi} \frac{\tau^2}{R^2} w \\
 & + EC_{\eta\omega} \frac{1}{R} \frac{d^3 \theta}{d\zeta^3} + EC_{\xi\omega} \frac{\tau}{R} \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} + \left( EC_{\xi} - EC_{\xi\eta} \frac{1}{R} \right) \frac{1}{R} \frac{d\theta}{d\zeta} - EC_{\xi\xi} \frac{\tau}{R^2} \theta \\
 & = \sqrt{g_1} p_{\xi}^* - \frac{m_{\xi}^*}{R} \\
 & - \left( EC_{\xi\omega} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R} \right) \frac{d^4 u}{d\zeta^4} - 2 EC_{\eta\omega} \tau \frac{d^3 u}{d\zeta^3} + \left[ EC_{\xi\xi} \frac{1}{R} + EC_{\xi\omega} \left( \frac{1}{R^2} + \tau^2 \right) + GC_J \frac{1}{R} \right] \frac{d^2 u}{d\zeta^2} \\
 & + 2 EC_{\xi\eta} \frac{\tau}{R} \frac{du}{d\zeta} - EC_{\xi\xi} \frac{\tau^2}{R} u - EC_{\eta\omega} \frac{d^4 v}{d\zeta^4} + \left( 2 EC_{\xi\omega} + EC_{\omega\omega} \frac{1}{R} \right) \tau \frac{d^3 v}{d\zeta^3} \\
 & + \left( EC_{\xi\eta} \frac{1}{R} + EC_{\eta\omega} \tau^2 \right) \frac{d^2 v}{d\zeta^2} - \left( 2 EC_{\xi\xi} + EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} + GC_J \right) \frac{\tau}{R} \frac{dv}{d\zeta} \\
 & + \left( EC_{\xi} \frac{1}{R} - EC_{\xi\eta} \tau^2 \right) \frac{1}{R} v - EC_{\eta\omega} \frac{1}{R} \frac{d^3 w}{d\zeta^3} + EC_{\xi\omega} \frac{\tau}{R} \frac{d^2 w}{d\zeta^2} - \left( EC_{\xi} - EC_{\xi\eta} \frac{1}{R} \right) \frac{1}{R} \frac{dw}{d\zeta} \\
 & - EC_{\xi\xi} \frac{\tau}{R^2} w + EC_{\omega\omega} \frac{d^4 \theta}{d\zeta^4} - \left( 2 EC_{\xi\omega} \frac{1}{R} + GC_J \right) \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} + EC_{\xi\xi} \frac{\theta}{R^2} \\
 & = m_{\xi}^* + \sqrt{g_1} \xi_1 p_{\eta}^* - \sqrt{g_1} \eta_1 p_{\xi}^* - \sqrt{g_1} \omega_1 \frac{d p_{\xi}^*}{d\zeta}
 \end{aligned} \tag{52}$$

また、 $\zeta=l$  断面での力学的境界条件は、式 (37) に式 (51) を代入することによって得られる。

らせんはりに対する平衡方程式 (52) で、ピッチ角を 0 とすると、曲率  $1/R$  を有する平面円弧はりに関する微分方程式となり、文献 3) で誘導されている方程式と一致する。

また、式 (52) で曲率を 0 とすると、初期ねじれを有する直線はりに対する平衡方程式が得られる。このようなはりの静変形に関する方程式について発表された文献は見当たらないが、断面が薄肉長方形の場合に限って、自由曲げ振動の方程式が導かれている<sup>9)</sup>。薄肉長方形断面の場合には断面のそりは無視でき、したがって、式 (52) の  $\omega$  に関係した断面定数はすべて 0 となり、その結果得られた平衡方程式は、慣性項と荷重項との相違はあるが、文献 4) で導かれている方程式と同形となる。

(2)  $a/R \ll 1, aK_{\zeta} \ll 1$  の場合 ( $a$  は断面最大寸法)

たとえば、曲線格子桁橋における主桁に対しては上記仮定が十分適用できるものと考えられる。上記仮定のもとでは、

$$\sqrt{g} \approx 1, HK_{\zeta} \approx 0 \tag{53}$$

と近似できるために、1.3, 1.4 項で導かれた諸式が簡単になり、数値解析が容易になる。

まず、そり関数は、

$$\left. \begin{aligned}
 \omega &= \frac{1}{A} \int_A \left( \int_0^s hds \right) dA - \int_0^s hds - fn \\
 & \hspace{15em} \text{(開き断面)} \\
 \omega &= \frac{1}{A} \int_A \left( \int_0^s hds - q' \int_0^s \frac{1}{t} ds \right) dA \\
 & \quad - \int_0^s hds + q' \int_0^s \frac{1}{t} ds - fn
 \end{aligned} \right\} \tag{54}$$

$$q' = \frac{\oint h ds}{\oint ds/t} \quad (\text{一室閉じ断面})$$

と簡化される。これは薄肉断面直線はりのそり関数と同形である。

( $\xi, \eta, \zeta$ ) 座標系に関するひずみ成分は,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \varepsilon_\eta = \varepsilon_\zeta = 0 \\ \varepsilon_\zeta &= \Gamma_w - \xi \Omega_u - \eta \Omega_v + \omega \Omega_\theta \\ \varepsilon_{\xi\zeta} &= -\left(\eta - \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right) \Gamma_\theta \\ \varepsilon_{\eta\zeta} &= \left(\xi + \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right) \Gamma_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

となり, また ( $s, n, \zeta$ ) 座標系でのせん断ひずみは, 式 (26), (27) より

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{s\zeta} &= -2n\Gamma_\theta && (\text{開き断面}) \\ \varepsilon_{s\zeta} &= \left(-2n + \frac{q'}{t}\right) \Gamma_\theta && (\text{一室閉じ断面}) \end{aligned} \right\} \dots (56)$$

である。

さらに断面定数は,

$$C_\xi = C_\eta = C_{\xi H} = C_{\eta H} = C_{\omega H} = C_H = C_{HH} = 0$$

であり, その他の断面定数は, 直線はりの場合と同じ定義となる。

結局以上のような仮定のもとでは, 曲線はりの図心と断面の中立点が一致しているという仮定のもとで展開した理論と同一の結果が得られる。

### 7. 数値解析・実験結果

導かれた方程式の妥当性を検証する目的で, 図-4 に示すようなH形断面を有する両端固定・一スパンらせんはりに, 垂直集中荷重が作用した場合の, 変位および垂直ひずみの解析を行い, 実験結果と比較した。解析には伝達マトリックス法を用いた。また実験は, 数値解析を行ったらせんはりと同寸法の模型をアクリル樹脂板の接着構造で作製し, 垂直集中荷重のたわみをダイヤルゲージ

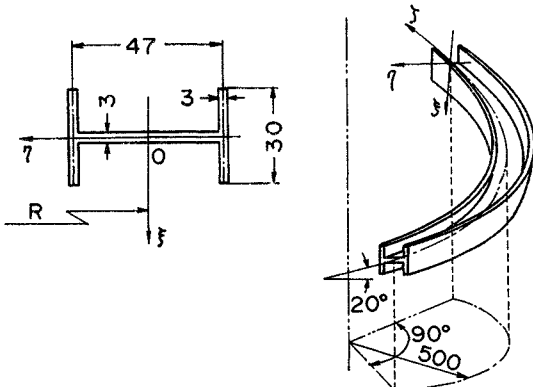


図-4 H型断面らせんはり

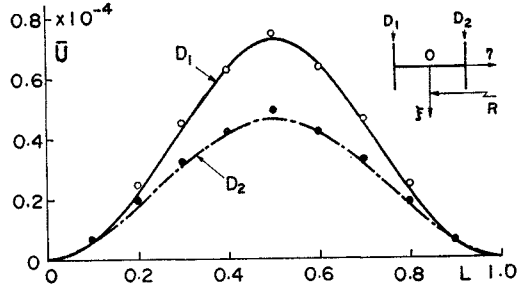


図-5 内・外フランジのたわみ

で, また垂直ひずみをプラスチック用ひずみゲージを用いて測定した。

垂直荷重がスパン中間点断面の図心に作用した場合の, 内外フランジでの $\xi$ 軸方向変位を図示したのが, 図-5 である。縦軸は $\xi$ 軸方向変位  $u$  を断面フランジ間寸法  $a$  で無次元化した量  $\bar{U} = u/a$  を, 横軸ははり全長  $l$  と1として示した無次元化はり長さ  $L = \zeta/l$  を表わす。垂直荷重は,  $Pl^3/EC_{\eta\eta}a = 1$  ( $P$  は垂直荷重) で表わされる無次元単位荷重である。図中実線は外フランジ, 破線は内フランジでのたわみの理論値を示し,  $\circ$ ,  $\bullet$ 印はそれぞれのフランジでの無次元化された実験値を示す。たわみは  $L=0.5$  点を中心に左右対称になることが理論解よりわかるが, 実験結果もほぼ同様な傾向を示し, 理論値と良く一致している。垂直荷重によってはりは曲げ変形ばかりでなく, ねじれ変形も生じ, その結果外フランジでのたわみが内フランジのたわみより大きくなっている。

図-6 は同じ垂直荷重によるフランジ先端の垂直ひずみの理論値と実験値を比較したものである。 $\circ$ 印が実験値で, 外フランジ先端のひずみである。らせんのピッチ角 ( $20^\circ$ ) のため, 垂直荷重ははりの $\xi$ 軸方向荷重  $P \cos 20^\circ$ ,  $\zeta$  軸方向荷重  $-P \sin 20^\circ$  に分解され, それらが同時にらせんはりに作用することになる。このため垂直ひずみはたわみと異なり, 図-6 に示すように,  $L=0.5$  の点に関して左右対称にはならない。実験結果もよくこの傾向を示している。垂直ひずみも理論値と実験値はほ

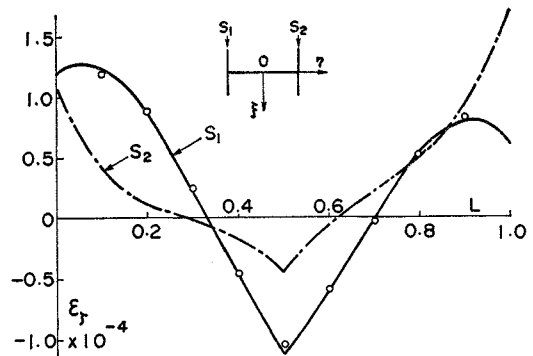


図-6 内・外フランジ先端のひずみ

ば一致している。なお、実験は気温  $13^{\circ}\sim 14^{\circ}\text{C}$  で行い、同温度での材料の縦弾性係数は  $340\text{ kg/mm}^2$  であった。また、ポアソン比は  $0.35$  を用いた。

## 8. む す び

初期曲率・初期ねじれ率を有する薄肉断面立体曲線はりの静荷重による変形に関する理論的な考察を行った。

まず、曲線はり内任意点のはり長さ方向変位式を求め、任意点の変位が断面図心の変位および図心軸まわりの断面回転角の4変数で表わされることを示した。また、変位式誘導の過程で、ねじれ率にかかる係数が断面のそり関数となり、しかも断面内座標 ( $\xi, \eta$  または  $s, n$ ) のみの関数であることを示した。

薄肉断面を有する立体曲線はりの静変形に関する微分方程式・力学的境界条件を、仮想仕事の原理より導いた。

平面円弧はりおよび初期ねじれのある直線はりに対する既存の方程式は、本報告で導かれた一般式の特別な場合として導かれることを示した。

最後に、実験結果と解析結果の比較を行い、本報告で誘導された基本式の妥当性を確かめた。

なお、数値解析法および実験の詳細については、別に

報告する予定である。

おわりに、ご指導いただいた東京大学の川井忠彦教授に深く感謝いたします。

## 参 考 文 献

- 1) 小西一郎・小松定夫：薄肉曲線桁の基礎理論，土木学会論文集，第 87 号，pp. 35~46, 昭和 37.
- 2) 倉西 茂：一般薄肉断面の曲りばりの解析，土木学会論文集，第 108 号，pp. 7~12, 昭和 39.
- 3) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論，土木学会論文集，第 110 号，pp. 30~51, 昭和 39.
- 4) DiPrima, R.C. and G.H. Handelman: Vibrations of Twisted Beams, *Quart. Appl. Math.*, 12, No. 3, pp. 241~259, 1954.
- 5) Love, A.E.H.: *A Treatise of the Mathematical Theory of Elasticity*, University Press, 1927.
- 6) Homes, A.M.C.: Analysis of Helical Beams under Symmetrical Loading, *Proc. of ASCE*, ST 6, paper 1437, 1957.
- 7) Abdul-Baki A. and A. Shukair: Continuous Helicoidal Girders, *Proc. of ASCE*, ST 10, paper 10108, 1973.
- 8) Washizu, K.: Some Considerations on a Naturally Curved and Twisted Slender Beam, *Jour. of Math. and Phys.*, Vol. 43, No.2, pp. 111~116, 1964.
- 9) 小松定夫：薄肉構造物の理論と計算 I，山海堂，昭和 44.
- 10) Sokolnikoff, I.S.: *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., 1956.

(1973.12.24・受付)