

移動床河川の彎曲部における二次流と 動的横断平衡河床について

ON SECONDARY FLOW AND DYNAMIC EQUILIBRIUM OF TRANSVERSE
BED PROFILE IN ALLUVIAL CURVED OPEN CHANNEL

池 田 駿 介*
By Syunsuke Ikeda

1. 序 論

自然の河川では平面形状が直線的となることはほとんどなく、程度の多少はあるにせよ曲がりくねった蛇行形状を示す。このような河川彎曲部における流れ、あるいは河床形状がどのような特性を示すかということは取水設備、水制等の河川構造物の設置、掃流砂量、あるいは最大洗掘深とも関係する舟運といったような実際的な諸問題と相まって、河川水理学上の重要な課題の一つである。

このような実際的な要請から 19 世紀から 20 世紀初頭にかけては主に野外観測に基づいて河床形状に関する研究が行われ、Fargue (1908), Ripley (1928) らはかれらの観測をまとめ経験式を提案している。

最近になって、ようやくこれらの現象について力学的な観点から考察が加えられるようになってきた。

須賀 (1965, 1966, 1969) は主流の速度分布を指数型で表現し、相当粗度を流砂量関数で表わし、さらに限界掃流力関数を定義することによって河床上のすべての点で限界掃流力になっている静的平衡河床を求めた。また、河床におけるせん断力の分布を仮定し、流砂量公式を導入することによって動的平衡河床を求め、実験との比較を行った。彼の理論は河床のせん断力が彎曲部では横断方向に均一でなく外岸側で増大することから流砂量の不均一が生じ、そのために直線部と比べて外岸側が掘れ、内岸側で堆積が生ずるものとしている。また、彼は斜面上の掃流砂に働く力のつり合いを考慮することによって静的および動的平衡河床を理論的に求めたが、その際に半径方向の河床せん断力 τ_r (二次流と密接に関連する) を決定するのに用いられている比例係数 m と水理量の関係が明白でなく、今後の課題であることが述べられている。

Yen, C.L. (1970) は動的平衡河床形を表わす式として、

$$\frac{\partial \eta}{\partial s} = -K \frac{\bar{U}_{r \max}}{\sqrt{\frac{g d}{\rho_s - 1}}}$$

を得た。ここに η は平均河床高からのずれ、 $\bar{U}_{r \max}$ は R 地点における二次流の最大値、 K は未知量を含む比例定数である。彼の理論では二次流と河床形状の関係が得られたが、上式では ρ_s/ρ が大きくなるほど、すなわち粒子の比重が大きいくほど、横断方向の河床勾配は大きくなることになり、実際の物理現象と矛盾する。しかし、彼は $\bar{U}_{r \max}$ を測定し、上式によって河床形状を求め、それが測定された河床形状とよく一致することを示した。

一方、非定常問題については村本ら (1968) によって研究が行われ、流砂の連続式、流砂量式、河床高と流れを関係づける式を連立させ、らせん流による流線のねじれを考慮して方程式を数値的に解き、初期の河床変動の機構を取扱っている。

これらの実際的な要請、あるいは研究の現況に鑑みて、本稿では実際的に最も重要である動的平衡横断河床、最大洗掘深についてその力学的機構を明らかにし、定量的な把握を行うことを目的とした。これらの目的を達するために 2. 章では彎曲部の河床にある砂粒子に働く力を考えることによって平衡河床形状を表わす式が導かれ、それが河床における二次流の速度成分と密接な関係にあることが示される。3. 章においては任意の横断面形を持つ彎曲開水路における二次流の速度分布を表わす式が導かれ、このようにして求められた二次流を表わす式と 2. 章で得られた河床形状を表わす式を連立させて解くことによって 4. 章では平衡河床形を解析的に求める。

ここでは流れおよび河床の形状が流れ方向に変化しなくなった場合について取扱っているが、固定床の長方形

* 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

断面を持つ弯曲部流れでは流入部から 130 度～150 度流下しないとこのような完全発達域に達しないのに比べて、移動床の場合には流れと河床の相互依存によって固定床の場合よりも早く完全発達域に達する。たとえば、図-9, 11 では流入部から約 30 度程度でこの領域に達していることがわかるが、一般には河川の曲率半径と幅の比、弯曲角等の関数であることが経験的に知られている。

2. 砂粒子に働く力の評価、および平衡河床形を表現する方程式の誘導

理論の展開を行う前に、弯曲部の流れにおける底の砂粒子の運動に若干の物理的考察を加えることにする。図-11 に示される Desna 川の例のように実際の弯曲河川では外岸側で深掘れが生じ、内岸側で浅くなる現象が見られる。これは単に河床のせん断力の分布のみでは説明しえない。なぜなら、流入部付近の断面 I においては流心が内岸側に存在し、せん断力が増大するにもかかわらず内岸側ではほとんど掘れないで、横断面の形状はほぼ長方形であるのに対して、下流の断面 II では流心が外岸側に移りそこでは深く掘れているからである。断面 I 付近では河道がほとんど直線的であり、しかも河向の変換点であることから二次流はほとんど存在しないこと、また、弯曲部の河床付近では二次流の流向が内岸向きに偏倚し砂粒子が内岸側へ運ばれるであろうことを考えるとこのような現象は二次流と密接な関連があることが推察される。

ここでは弯曲水路を定常運動しながら移動している 1 個の砂粒子に注目して考察をすすめる。

砂粒子に働く力は回転による Magnus 効果, Coriolis 力を無視すると抗力, 揚力, 重力, 底による摩擦力, および遠心力の五つである。乱れは流れ方向の砂粒子の平均的な移動速度に影響を与えないことが明らかになっているのでここでは無視する¹¹⁾。これらの力のつり合いをそれぞれ R 方向, θ 方向について考えると、

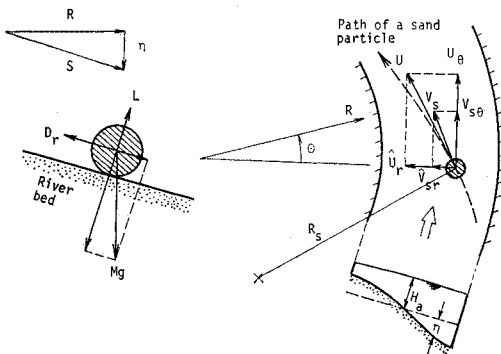


図-1 砂粒子に働く力の模式図

$$\theta : D_\theta + (M-m)g i_\theta - \mu \left\{ (M-m)g \frac{dR}{dS} - L \right\} \cdot \frac{V_{s\theta}}{V_s} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$R : D_r - (M-m)g \frac{d\eta}{dS} - \mu \left\{ (M-m)g \frac{dR}{dS} - L \right\} \cdot \frac{\hat{V}_{sr}}{V_s} - M \frac{V_s^2}{R_s} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

となる。ここに、

θ, R : 円筒座標系における接線および半径方向を示す (図-1)

η : 河床の平均水深 H_a からの掘れ ($H = H_a + \eta$)

D_θ, D_r : 砂粒子に対して θ, R 方向に働いている抗力

L : 砂粒子に働く揚力

M : 砂粒子の質量 ($=\pi/6 \cdot \rho_s d^3$)

m : 砂粒子と同体積の水の質量 ($=\pi/6 \cdot \rho d^3$)

g : 重力の加速度

i_θ : θ 方向への河床勾配

V_s : 砂粒子の移動速度

$V_{s\theta}, \hat{V}_{sr}$: V_s の θ 方向, R 方向の成分

R_s : 砂粒子の軌道の曲率半径

μ : 動摩擦係数

である。次にこれらの力の評価を行う。砂粒子の形状を球とすれば、

(1) 抗力

$$D = \frac{\rho}{2} C_D \frac{\pi}{4} d^2 (U - V_s)^2 \dots\dots\dots(3)$$

ここに、

C_D : 抗力係数

U : 砂粒子の中心高さにおける流れの平均速度

d : 砂粒子の直径

ところで、流れの方向と砂粒子の移動方向が一致しない場合に式 (3) で抗力 D を表現しうるかという疑問が生ずる。河床の横断形状が安定勾配に達し、砂粒子が河岸と同心円状の軌跡を描いて動いているときに U の方向と V_s の方向が最も異なるが、このような場合でも式 (3) のように表現することによって生ずる誤差は $(U_r/U_\theta)^2$ の order であり、一般に U_r は U_θ に比べて十分小さいのでこのような表現によっても抗力 D を十分精度よく表現しうるものと考えられる。よって D_θ, D_r は

$$D_\theta = D \cdot \frac{U_\theta - V_{s\theta}}{U - V_s} \dots\dots\dots(4a)$$

$$D_r = D \cdot \frac{\hat{U}_r - \hat{V}_{sr}}{U - V_s} \dots\dots\dots(4b)$$

となる。ただし、 \hat{U}_r, \hat{V}_{sr} はそれぞれ砂粒子の軌道が内向きであるので、内岸向きを正としてある。

(2) 揚 力

$$L = \frac{\rho}{2} C_L \frac{\pi}{4} d^2 (U - V_s)^2 \dots\dots\dots (5)$$

ここに、

C_L : 揚力係数

である。

ここで河床が内岸側で高くなり、底層付近の流れが砂粒子に及ぼす内向きの力と外岸側へ働く力の成分が等しくなり、力学的なつり合いの状態に達し、砂粒子が河岸と同心円状の軌道を動くようになると砂粒子の R 方向への速度成分 \hat{V}_{sr} および D_r はそれぞれ

$$\begin{aligned} \hat{V}_{sr} &= 0 \\ D_r &= D \cdot \frac{\hat{U}_r - \hat{V}_{sr}}{U - V_s} \\ &= D \cdot \frac{\hat{U}_r}{U - V_s} \end{aligned}$$

となる。 $\hat{V}_{sr} = 0$ であるので

$$\begin{aligned} \frac{V_{s\theta}}{V_s} &= 1 \\ D_\theta &= D \cdot \frac{U_\theta - V_{s\theta}}{U - V_s} = D \end{aligned}$$

と表わすことができる。これらの表現を式 (1), (2) に代入する。式 (1) からは次の関係を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{8} \pi d^2 (C_D + \mu C_L) (U - V_s)^2 \\ = \left(\mu \frac{dR}{dS} - i_\theta \right) \frac{\pi}{6} d^3 (\rho_s - \rho) g \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

同様に式 (2) からは、

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dS} &= \frac{3}{4} \frac{C_D}{gd \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)} (U - V_s) \cdot \hat{U}_r \\ &\quad - \frac{V_s^2}{gR_s} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_s} \right)} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

を得る。式 (6), (7) の両式から $U - V_s$ を消去するために式 (6) から $U - V_s$ を求める。このとき常に $U - V_s \geq 0$ であることを考えて、

$$U - V_s = \left\{ \frac{4}{3} \frac{gd \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)}{C_D + \mu C_L} \left(\mu \frac{dR}{dS} - i_\theta \right) \right\}^{1/2}$$

を得る。この式を式 (7) に代入すると未知の量である $U - V_s$ を消去することができ、横断方向の動的な平衡河床勾配を表わす式、

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dS} &= \left\{ \frac{3}{4} \frac{C_D}{1 + \mu \frac{C_L}{C_D}} \left(\mu \frac{dR}{dS} - i_\theta \right) \right\}^{1/2} \\ &\quad \cdot \frac{\hat{U}_r}{\left\{ \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) gd \right\}^{1/2}} - \frac{V_s^2}{gR_s \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s} \right)} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

を得ることができる。ここで式 (8) を簡単にするため

に各項の order の見積りを行ってみる。 R 方向への河床勾配は、一般には 1/10 程度であるから、

$$dS = dR \left\{ 1 + \left(\frac{d\eta}{dR} \right)^2 \right\}^{1/2} \approx dR (1 + 0.005)$$

となり十分な精度で、

$$\frac{dR}{dS} \approx 1, \quad \frac{d\eta}{dS} \approx \frac{d\eta}{dR}$$

とおくことができる。次に $\mu \cdot dR/dS \approx \mu$ と i_θ の order の比較を行ってみると、後に示すように実験によれば μ は 0.3~0.5 程度であり、一般に流れ方向の河床勾配が 1/500 を超えることはまずないことを考えると、

$$\mu \frac{dR}{dS} \gg i_\theta$$

である。また、式 (8) の右辺の二項の order を実験室の程度で見積ってみると、通常の状態では砂粒子自身の運動による遠心力を表わす右辺第二項は、右辺第一項の高々 1% 程度であり、一般の河川では曲率半径 R_s が非常に大きく遠心力の及ぼす影響はますます小さくなることを考えると右辺第二項は十分精度よく無視することができる。これらの考察によって結局河川弯曲部における動的な安定横断河床形状を表わす式 (8) は次のように簡略化することができる。

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dR} &= \left(\frac{3}{4} \mu \frac{C_D}{1 + \mu \frac{C_L}{C_D}} \right)^{1/2} \frac{\hat{U}_r}{\left\{ \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) gd \right\}^{1/2}} \\ &\dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

上式によって河床形状が決定されるが、横断方向の勾配に二次流の成分 \hat{U}_r が直接的に影響を及ぼし、 \hat{U}_r が大きいほど勾配が大きくなる。すなわち、外岸側で掘れ、内岸側で堆積が顕著になることがわかる。また、河床材料の比重が大きいほど勾配は小さく、粒子の径 d が小さいほど勾配が大きくなることもわかる。

式 (9) 中の各係数、

$$\mu, C_D, \frac{C_L}{C_D}$$

の値を知る必要があるが、それらについては、筆者¹¹⁾は μ を測定し、さらに河床砂の場合の C_L, C_D に関する Chepil の実験¹⁰⁾の整理を行っており、その結果を用いることができる。図-2 に μ の測定結果、図-3 に C_L/C_D の値を示しておいた。 C_L/C_D に関しては R_{e*} の広い範囲にわたって一定であることがわかる。これから河床上を動く砂粒子に対しては、

$$\mu = 0.43, \quad \frac{C_L}{C_D} \approx 0.85 \dots\dots\dots (10)$$

を用いることができる。一方、 C_D については乱流の場合の球の抵抗係数、

$$C_D \approx 0.4 \dots\dots\dots (11)$$

を用いることにする。

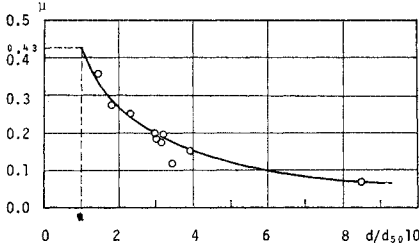


図-2 動摩擦係数 μ の測定値

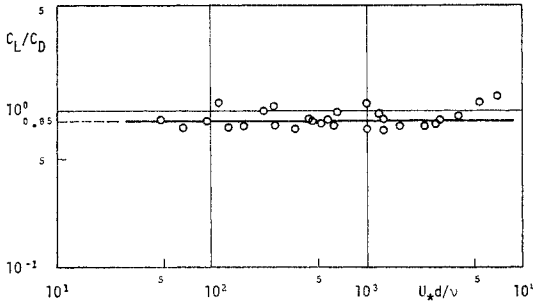


図-3 C_L/C_D と U_*d/ν の関係

これらから河床の横断形状は二次流の大きさ \hat{U}_r 、砂粒子と水の密度の比 ρ_s/ρ (一般には 2.65 程度である)、河床を構成する砂粒子の平均粒径 d が与えられれば式 (9) によって理論的に求めることが可能である。

\hat{U}_r については筆者ら¹²⁾によって得られた乱流の場合の理論は長方形断面の場合であるので、任意の断面形について二次流の成分 \hat{U}_r を理論的に求める必要がある。したがって、その理論式が求まると式 (9) と連立させることによって、流量等の水理量、川幅、曲率半径等の幾何学形状、および粒径等の河床構成材料に関する情報が与えられると安定な横断河床形状をあらかじめ予測することができる可能性がある。このような理由によって、次章では任意の断面形における二次流の速度分布について考察をすすめることとする。

3. 横断方向に水深が変化する場合の二次流の速度分布

長方形断面の場合には非線型項は側壁近傍以外ではほとんど無視でき、しかも側壁の影響は側壁近傍に限られていることが、理論的にも実験的にも確かめられているが¹²⁾、任意の断面形についてこのような結論が得られるかどうかは断言できない。けれども断面形が長方形から極端に異なる場合にはこのような仮定を用いても差しつかえないであろうと思われる。また、水深に比べて水路幅が十分に大きい場合について考えると側壁の影響はほとんど皆無である。したがって横断方向に水深が変

化する場合には運動方程式中の非線型項、および側壁の影響を無視して考察をすすめることにする。このような場合には二次流の速度分布は、側壁を考慮した場合の式¹²⁾,

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial R^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial R^2 \partial Z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} = -\frac{2}{\epsilon} U_\theta \frac{\partial U_\theta}{\partial Z}$$

の中で R によって偏微分された項を除いた式、

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} = -\frac{2}{\epsilon} U_\theta \frac{\partial U_\theta}{\partial Z} \dots\dots\dots (12)$$

によって決定される。ここに ψ は二次流に関する流関数である。

U_θ の分布として粗滑両面に対して用いることができるように速度欠損則、

$$\frac{U_{max} - U_\theta}{U_*} = -\frac{1}{\kappa} \log \frac{Z}{H}$$

を用いることにする。上式を平均流速 U_a で表わしておくと、

$$\frac{U_\theta}{U_*} = f \left(\frac{R}{R_0} \right) \left\{ \frac{U_a}{U_*} + \frac{1}{\kappa} \left(\log \frac{Z}{H} + 1 \right) \right\} \dots (13)$$

である。ここに $f=R$ 方向への U_θ の分布形であって、全断面で平均すれば 1 である。一般には f は強制渦型であるが、側壁近傍では減少する。移動床の弯曲水路において断面形が長方形でない場合にも主流の R 方向の速度分布が強制渦型となることは、須賀⁹⁾によって確かめられておりここでもその分布形を用いることにする。ここで後の計算の簡略化のために変数変換、 $\xi=Z/H$ を行う。また、弯曲水路における渦動粘性係数については、渦動粘性係数として Rozovskii⁸⁾ のように $\epsilon = \kappa U_* Z \cdot (1-Z/H)$ を用いると、底部で二次流の速度が無限大となり、また、変化率 $\partial U_r / \partial z$ が大きくなり、底部付近で正確にその大きさが決まらない。これを防ぐには境界層の概念を導入するか、あるいは Lane-Kalinske が浮遊砂の濃度分布を求めるに際して底で濃度が無限大となるのを防ぐために採用したように渦動粘性係数として深さ方向の平均値 $U_* H / 15$ を用いるかが考えられる。河床面が半径方向に水平でない場合には境界層の厚さを見積ることが困難であることと、境界層を導入すると計算が非常に複雑となることから、ここでは深さ方向に平均した値、

$$\epsilon = \frac{U_* H}{15} \dots\dots\dots (14)$$

を用いる。そうすると式 (12)、(13) はそれぞれ

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} = -\frac{30 H^2}{U_*} U_\theta \frac{\partial U_\theta}{\partial \xi} \dots\dots\dots (12')$$

$$\frac{U_\theta}{U_*} = f \left(\frac{R}{R_0} \right) \left\{ \frac{U_a}{U_*} + \frac{1}{\kappa} (\log \xi + 1) \right\} \dots (13')$$

となる。式 (13') を式 (12') に代入して ξ に関して積分を行い、その際に境界条件

$$\left. \begin{aligned} Z=0 \text{ (底)} : \psi=0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0 \\ Z=H \text{ (水面)} : \psi=0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

に注意すれば、二次流の流関数 ψ を求めることができ、これから

$$U_r = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z}$$

によって横断方向の二次流の速度分布を求めることができる。そうすると U_r は次式によって与えられる。

$$\frac{U_r}{U_a} = f^2 \cdot \frac{H}{R} \frac{1}{\kappa} \left\{ F_A(\xi) - \frac{1}{\kappa} \frac{U_*}{U_a} F_B(\xi) \right\} \dots\dots\dots(16)$$

ここに、

$$F_A(\xi) = -15 \left(\xi^2 \log \xi - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{15}{54} \right) \dots\dots\dots(17)$$

$$F_B(\xi) = \frac{15}{2} \left(\xi^2 \log^2 \xi - \xi^2 \log \xi + \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{19}{54} \right) \dots\dots\dots(18)$$

である。 $F_A(\xi)$ 、 $F_B(\xi)$ については、図-4 にその関数形が与えられている。

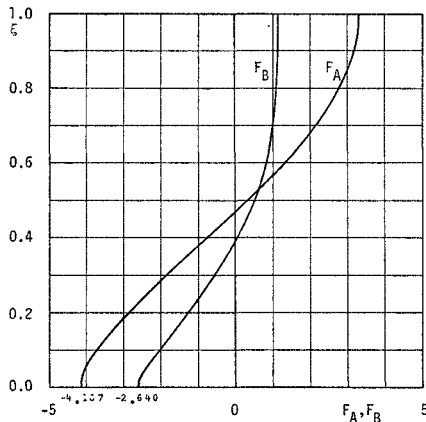


図-4 F_A 、 F_B の関数形

一般の河川では $\kappa=0.4$ であるので

$$F_A(\xi) - \frac{1}{\kappa} \frac{U_*}{U_a} F_B(\xi)$$

の値は結局 U_*/U_a によって決まることになる。したがって、

$$\frac{U_r}{U_a} = f^2 \frac{H}{R} \frac{1}{\kappa} F(\xi) \dots\dots\dots(19)$$

$$F(\xi) = F_A(\xi) - \frac{1}{\kappa} \frac{U_*}{U_a} F_B(\xi)$$

とおき、 U_*/U_a の各値について計算された $F(\xi)$ の分布形を図-5 に示してある。 U_*/U_a は一般に 1/6~1/20 の間に存在するのでその範囲で計算されている。

ここで注意すべきは二次流の成分

$$U_r = f^2 Q \cdot \frac{1}{R} \frac{1}{\kappa} \left\{ F_A(\xi) - \frac{1}{\kappa} \frac{U_*}{U_a} F_B(\xi) \right\}$$

$$Q = U_a H$$

が U_a/U_* の関数になっていることである。主流の対数分布則を水深方向に積分して求めた式、

$$\frac{U_a}{U_*} = 6.0 + 5.75 \log_{10} \frac{H}{k_s}$$

から U_a/U_* は相当粗度 k_s の関数であることがわかるが、両式を結びつけると流量 Q が同一である場合には粗面になるほど二次流の大きさは減少することがわかる。けれども、図-5 に示されているようにその差異はあまり大きくなく、一般の河川の流れでは $U_*/U_a=1/10 \sim 1/20$ 程度であるので、ほとんど変わらないと考えてよいであろう。

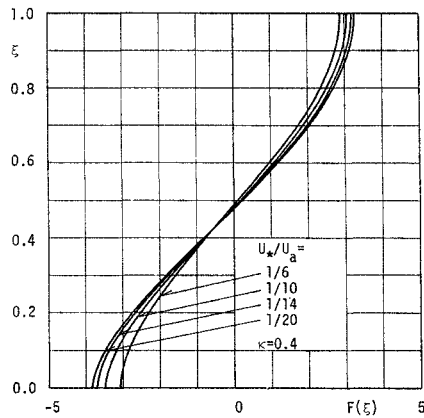


図-5 F の関数形 (パラメーター U_*/U_a)

これから二次流の R 方向の成分 U_r をきわめて容易に求めることができる。 f については主流の横断方向の分布形によって決まり、

$$\text{強制渦型} \quad : f = \frac{R}{R_0} \dots\dots\dots(20 a)$$

$$\text{横断方向に一定} : f = 1 \dots\dots\dots(20 b)$$

$$\text{自由渦型} \quad : f = \frac{R_0}{R} \dots\dots\dots(20 c)$$

である。ここに R_0 は平均流速 U_a が生ずる地点の曲率半径である。

Rozovskii によって得られた粗面の場合の式⁹⁾、

$$U_r = U_a \frac{1}{\kappa^2} \frac{H}{R} \left\{ F_1 \left(\frac{Z}{H} \right) - \frac{\sqrt{g}}{\kappa c} F_4 \left(\frac{Z}{H} \right) \right\}$$

は F_4 の性質上 $Z=0$ 近傍で $F_4 \rightarrow -\infty$ に漸近し正確にその値が定まらないの比べて、ここで求められた式 (19) は底部付近で安定しており、底部付近の二次流の速度が重要となる砂粒子の移動の問題を取扱う場合にはきわめて便利であるといえる。

4. 横断方向の平衡河床形状について

河床形状を決定する方程式 (9) と二次流を決定する方程式 (19) から安定な横断河床形状を求めることがで

きる。計算の都合上式 (9) 中の \hat{U}_r は内岸向きを正、式 (19) 中の U_r は外向き正としてあったので、

$$\hat{U}_r = -U_r$$

である。砂の移動を決定するのは底面における流れであるので、底面における二次流の大きさを $U_r = U_r(0)$ とすると方程式 (9), (19) はそれぞれ、

$$\frac{d\eta}{dR} = - \left(\frac{3}{4} \frac{\mu C_D}{1 + \mu \frac{C_L}{C_D}} \right)^{1/2} \frac{U_r(0)}{\left\{ \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) g d \right\}^{1/2}} \dots\dots\dots (9')$$

$$U_r(0) = U_a f^2 \frac{H}{R} \cdot \frac{1}{\kappa} F(0) \dots\dots\dots (19')$$

となる。ここで $H = H_a + \eta$ であることを考え、式 (19') を式 (9') に代入すると、河床形状を決定する方程式、

$$\frac{dH}{dR} = - \left(\frac{3}{4} \frac{\mu C_D}{1 + \mu \frac{C_L}{C_D}} \right)^{1/2} \frac{U_a}{\left\{ \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) g d \right\}^{1/2}} \cdot \frac{1}{\kappa} F(0) f^2 \frac{H}{R} \dots\dots\dots (21)$$

を得る。

式 (21) を積分し、その際に積分定数を $R = R_a$ で平均水深 H_a が生ずるという条件、

$$R = R_a : H = H_a$$

によって定めると解は f の分布形 (20 a, b, c) に応じて決定することができ、横断河床形状は次のように定められる。

$$f = \frac{R}{R_0} \text{ (強制渦型) :}$$

$$\frac{H}{H_a} = \exp \left\{ \frac{1}{2} A \cdot \frac{R_a^2}{R_0^2} \left(\frac{R^2}{R_a^2} - 1 \right) \right\} \dots\dots (22 a)$$

$$f = 1 \text{ (横断方向に一定) :}$$

$$\frac{H}{H_a} = \left(\frac{R}{R_a} \right)^A \dots\dots\dots (22 b)$$

$$f = \frac{R_0}{R} \text{ (自由渦型) :}$$

$$\frac{H}{H_a} = \exp \left\{ \frac{1}{2} A \cdot \frac{R_0^2}{R_a^2} \left(1 - \frac{R_a^2}{R^2} \right) \right\} \dots\dots (22 c)$$

ここに、

$$A = - \left(\frac{3}{4} \frac{\mu C_D}{1 + \mu \frac{C_L}{C_D}} \right)^{1/2} \frac{\lambda U_a}{\left\{ \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) g d \right\}^{1/2}} \cdot \frac{1}{\kappa} F(0)$$

である。

A については変形でき、

$$A = - \left(\frac{3}{4} \frac{\mu C_D}{1 + \mu \frac{C_L}{C_D}} \right)^{1/2} \frac{\lambda U_*}{\left\{ \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) g d \right\}^{1/2}} \cdot \frac{1}{\kappa} \frac{U_a}{U_*} \left\{ F_A(0) - \frac{1}{\kappa} \frac{U_*}{U_a} F_B(0) \right\}$$

となる。これから A は、 $U_* / \{(\rho_s/\rho - 1)gd\}^{1/2}$

と U_* / U_a をパラメーターとして変化することがわかる。ここに導入された λ は一つの砂粒子が存在すると考えた場合に比べて、同じく表面に露出している他の粒子によって遮蔽される効果の度合いであって一般に遮蔽係数とよばれる。岩垣⁹⁾によれば遮蔽効果はここで考えているように砂粒子が全面的に動いているときには掃流力 $U_*^2 / \{(\rho_s/\rho - 1)gd\}$ を 0.35 倍にする働きがあるとしている。したがって、ここでは λ は $U_* / \{(\rho_s/\rho - 1)gd\}^{1/2}$ に対して定義されているので、

$$\lambda = \sqrt{0.35} = 0.592$$

とする。その他の値は先に考察したように決められる。すなわち、

$$\mu = 0.43$$

$$C_D = 0.4$$

$$\frac{C_L}{C_D} = 0.85$$

$$\kappa = 0.4$$

$$F_A(0) = -4.167$$

$$F_B(0) = -2.640$$

である。これから A の値は、 $U_* / \{(\rho_s/\rho - 1)gd\}^{1/2}$ と U_* / U_a によって決定することができる。図-6 に A とそれらのパラメーターの間の関係が図示されている。乱流域においては限界掃流力は $U_*^2 / \{(\rho_s/\rho - 1)gd\} \approx 0.05$ であり、ここでは動的安定河床勾配を取扱っているので砂粒子が動く領域、 $U_* / \{(\rho_s/\rho - 1)gd\}^{1/2} > 0.22$ について計算を行ってある。ここで注意すべきは $F_0(0) < 0$ であるので A の値は常に正となり、 f の分布形に関係なく外岸側で深掘れが発生することである。けれども実際には完全発達域で f が自由渦型になることはありえず、自由渦型については理論的な意味しか持っていない。 A の値は U_* / U_a と $U_* / \{(\rho_s/\rho - 1)gd\}^{1/2}$ によって決定されるので両者と A の関係を図-6 に示しておいた。

一般の弯曲部流れでは $f = R/R_0$ の強制渦型であるので、その場合について A の値の変化に伴う河床形状の相違を式 (22 a) によって計算し、図-7 に図示しておいた。ただし、この場合水路幅が決定していないので R_a/R_0 の値を定めることができず、近似的に $R_a/R_0 = 1$ として計算を行ってある。けれども一般には R_a と R_0 の値はほとんど違わず常に 1 とおいてよい。以上の計算の結果によって平均流速 U_a 、摩擦速度 U_* (または平均水深 H_a と水路勾配 i_0) および河床の砂粒子の粒径 d が与えられれば図-6, 7 を利用することによって安定な河床形状をきわめて簡単に求めることができる。

f すなわち主流の横断方向の分布が河床形状に及ぼす影響を調べるために強制渦型、一定、自由渦型の 3 つの場合に対して $A = 5$ として計算を行い、比較を行った。

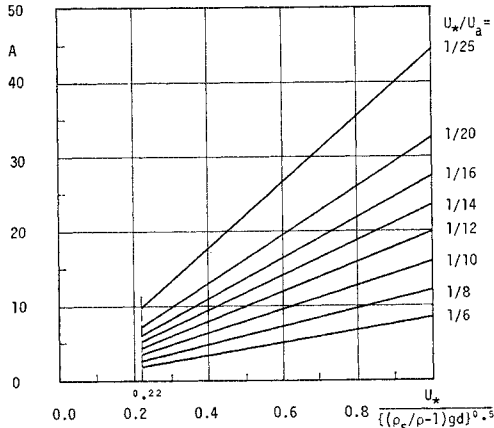


図-6 A と $U_* / \left\{ \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) g d \right\}^{1/2}$ の関係
(パラメーター U_*/U_a)

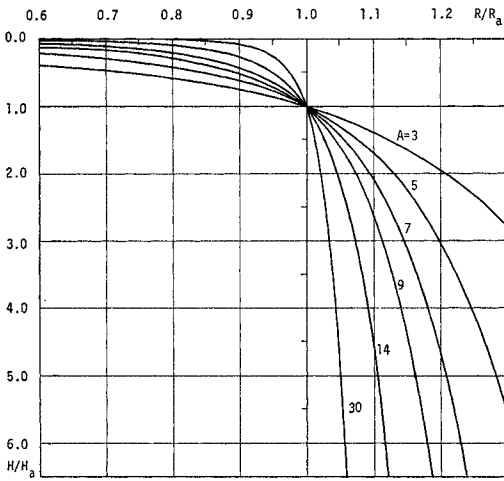


図-7 H/H_a と R/R_a の関係 (パラメーター A)

これから当然予想されることであるが実際の流れで見られる強制渦型の場合が最も掘れることがわかる。

5. 理論値と実験値, 野外測定値の比較, 検討

理論の検証を行うために実験値および野外測定値との比較を行った。

実験値は, Yen (1970) によって得られたものを用いた。Yen は 90° の弯曲部を持つ実験水路において河床

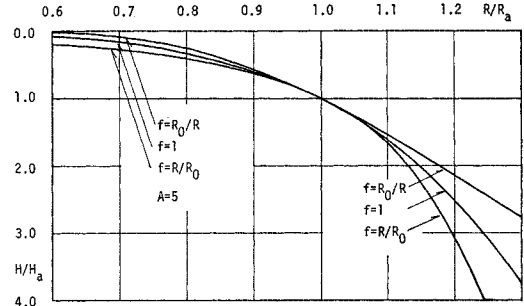


図-8 分布形 f による河床形状の変化

形状の測定を行い, 詳細な河床等高線図を得ている。彼の実験によれば弯曲部に流入して約 $\pi/6$ (30°) 程度で河床形状は流れ方向に変化しなくなり, この結果は Rozovskii⁹⁾ によって得られた Desna 川の野外測定値 (図-11) とほとんど一致する。ここで得られた理論結果と Yen の実験値を比較するに当たっては弯曲部の流入部から $3/8\pi$ 下流における値を用いた。この地点では流れおよび河床は完全に流れ方向に変化しなくなり, しかも下流側の影響を受けないからである。実験の主な諸元は cm/sec 単位に換算されて表-1 に示されている。

式 (22 a) から計算される安定河床形状と Yen によって得られた形状の比較が 図-10 に示されている。Yen のデータにおいては水面勾配が明らかでないの

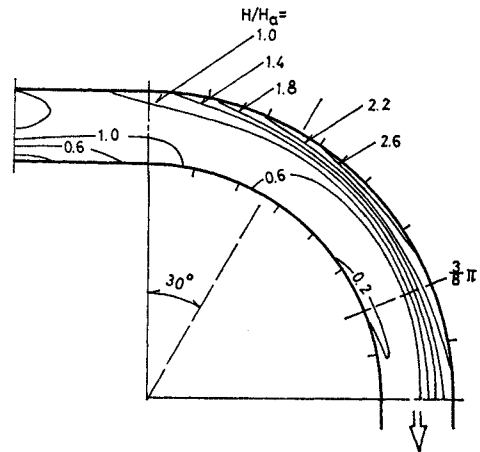


図-9 実験水路における河床等高線 (Yen による)

表-1 Yen の実験値

Yen, C.L. (1970) Run 5 $\frac{3}{8}\pi$ from the entrance

Width to depth ratio B/H_a	Depth of flow H_a (cm)	Central radius R_c (cm)	Velocity of flow U_a (cm/s)	Mean diameter of particle d (mm)	Froude number F_r	Reynolds number Re ($\times 10^4$)
30	7.78 (0.255 f)	853 (28 f)	61.2 (2.009 f/s)	0.3	0.7	1.600

計算に当っては U_*/U_a の値は 1/10 とした。けれども A は、

$$A = - \left(\frac{3}{4} \frac{\mu C_D}{1 + \mu \frac{C_L}{C_D}} \right)^{1/2} \frac{\lambda U_a}{\left\{ \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) g d \right\}^{1/2}} \cdot \frac{1}{\kappa} F(0)$$

$$F(0) = F_A(0) - \frac{1}{\kappa} \frac{U_*^*}{U_a} F_B(0)$$

であり、 $F(0)$ は前に述べたように U_*/U_a の値によってほとんど変化しないので、 A の値ひいては河床形状にはあまり影響を及ぼさないことがわかる。理論値と実験値は外岸側近傍を除いて非常によく一致している。側壁近傍では二次流の大きさはほとんど 0 となることからこのような形状になることが説明される。式 (22a) において分布形 f は側壁近傍では速度が減少するために強制渦型から離れてくるがこの変化を計算式中に導入す

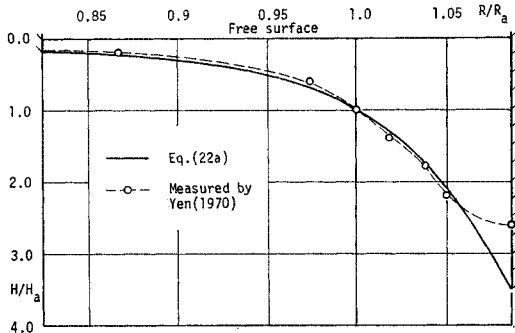


図-10 河床横断形状に関する理論値と実験値の比較

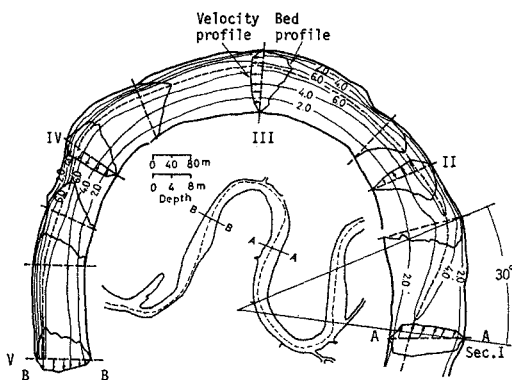
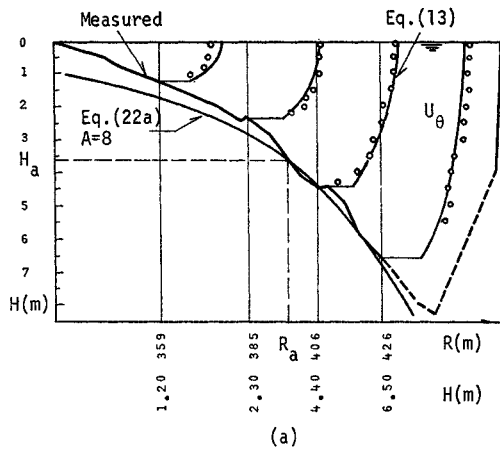


図-11 Desna 川における河床形状 (Rozovskii による)

れば側壁近傍においても実験値とよく一致するものと思われる。

次に野外測定値との比較を行う。測定値は Rozovskii によって Desna 川において得られたものを用いた。主な諸元は 表-2 に示されている。

Rozovskii は二次流の速度分布、河床形状についても測定を行っているので二次流については式 (19) によって得られる理論値との比較を 図-12 (b) に、河床形状については式 (22a) によって得られる値との比較を 図-12 (a) に示してある。図-12 (a) に示されているように実際の流れにおいても主流の横断方向の速度分布は強制渦型であるので計算においても $f=R/R_a$ とし



0 0.5 U_r, U_θ (m/s)

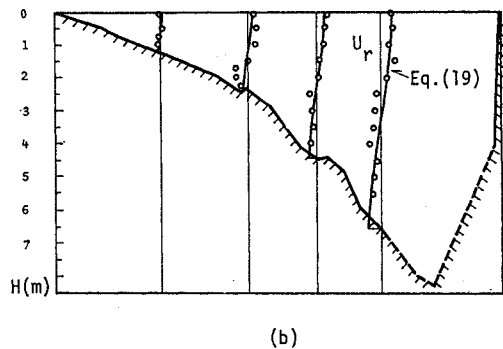


図-12 二次流と河床横断形状に関する理論値と野外測定値の比較

表-2 Rozovskii の野外測定値

Rozovskii, I.L. (1957) Desna river Sec. II						
Width to depth ratio B/H_a	Depth of flow H_a (m)	Central radius R_c (m)	Velocity of flow U_a (m/s)	Longitudinal slope of the water surface i_θ	U_a/U_*	Chezy coefficient
37.2	3.6	$R_c = \frac{394}{R_a} = 396$ m	0.4	0.0000274	12.8	42 to 45

である。二次流の速度分布については計算値と実測値はよく一致しているといえる。河床形状については Rozovskii のデータでは河床の砂粒子の粒度が明らかではないので A の値を明確に得ることができない。そこで河床形状に最もよく一致する A の値を求め、これから d を逆算することにした。 $A=8$ の場合が河床形状を最もよく表わし、このとき、 A を表現する式から $d=0.43$ mm を得ることができる。水面勾配 0.0000274 という緩勾配の河川の平均粒径としてはほぼ妥当な値であるといえるだろう。河床の形状は形態としては理論値と実測値はよく合致しているといえる。

6. 検 討

実際の計算に当たって注意を要する諸点を次に列記しておく。

最大洗掘深を求める場合には、次のような点に注意して計算を行えばよい。すなわち、 A の値がわかれば水路幅 B において洗掘される量と堆積する量が等しくなるように式 (22 a) によって R_a を決め、これから外岸側における水深を計算すればよい。 H/H_a の形状が指数型であるので一般に R_a は水路の中心における曲率半径 R_c よりも大きくなる。強制渦型の場合について具体的に計算を行ってみる。式 (22 a) で $R_a/R_c=1$ であるので、水深は

$$\frac{H}{H_a} = \exp\left\{\frac{1}{2} A \left(\frac{R^2}{R_a^2} - 1\right)\right\} \dots\dots\dots (23)$$

となる。 $H=H_a+\eta$ を代入すると上式は

$$\frac{\eta}{H_a} + 1 = \exp\left\{\frac{1}{2} A \left(\frac{R^2}{R_a^2} - 1\right)\right\}$$

となる。したがって、洗掘量 η は

$$\frac{\eta}{H_a} = \exp\left\{\frac{1}{2} A \left(\frac{R^2}{R_a^2} - 1\right)\right\} - 1 \dots\dots\dots (24)$$

である。この関数形は一般的に不定積分できないので、Simpson 公式を用いて R/R_a に対して数値積分を行う。そうすると 図-13 に示されているように斜線の部分の面積が相等しいような外岸側と内岸側の無次元曲率半径 $(R/R_a)_{outer}$, $(R/R_a)_{inner}$ をそれぞれ対応させて求めてゆくことができ、それとともに $(R/R_a)_{outer}$ の位置における無次元水深 H_{max}/H_a を式 (23) から計算できる。ここで川幅 B は

$$\frac{B}{R_a} = \left(\frac{R}{R_a}\right)_{outer} - \left(\frac{R}{R_a}\right)_{inner} \dots\dots\dots (25)$$

によって示される。ところで、ある移動床の弯曲水路が与えられても平均水深 H_a が生ずる位置 R_a がどこで発生するかということは明白でないので、これを弯曲水路の中心曲率半径 R_c について書き直しておく。図-13 から

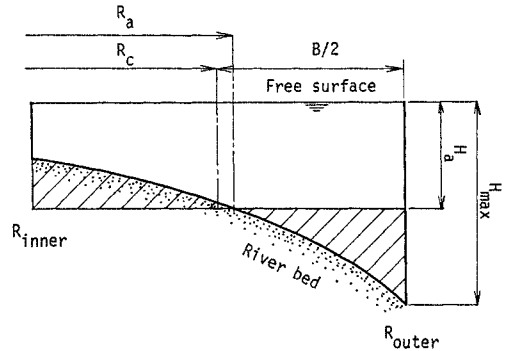


図-13 弯曲水路横断面の概念図

$\frac{R_c}{R_a} = \left(\frac{R}{R_a}\right)_{inner} + \left\{ \left(\frac{R}{R_a}\right)_{outer} - \left(\frac{R}{R_a}\right)_{inner} \right\} / 2.0$ であるので、式 (25) とともに、

$$\frac{B}{R_c} = \frac{\left(\frac{R}{R_a}\right)_{outer} - \left(\frac{R}{R_a}\right)_{inner}}{\left(\frac{R}{R_a}\right)_{inner} + \left\{ \left(\frac{R}{R_a}\right)_{outer} - \left(\frac{R}{R_a}\right)_{inner} \right\} / 2.0}$$

が求まる。よって最終的にある河川の幾何学形状 B/R_c と掃流力に関する関数 A の値がわかると、 $(R/R_a)_{outer}$ に対応する最大洗掘深と平均水深の比 H_{max}/H_a が求められることになる。図-14 にはこのようにして求められた B/R_c と A の値に対する H_{max}/H_a の計算値がプロットされている。この計算結果を検証するために Yen の実験結果⁹⁾との比較を行った。実験例が少なく、明白なことはわからないが、計算値のほうがやや大きな値を与えるようである。これは 図-10 において外岸側で実際の河床よりも深く掘れていることに対応しているが、岸近くでは二次流の深さ方向の成分が卓越するし、また主流の速度も減少して強制渦型の分布からはずれてくるので、その効果を取り入れないと最大洗掘深を精度よく見積ることは困難であると思われる。

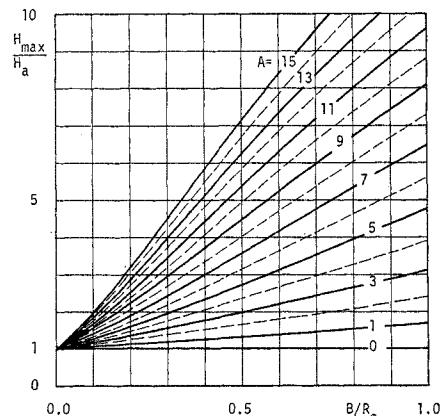


図-14 最大洗掘深と B/R_c の関係 (パラメーター A)

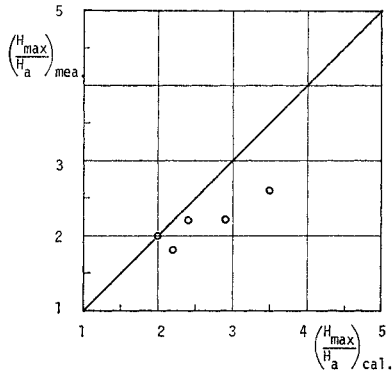


図-15 最大洗掘深の計算値と実験値 (Yen による) の比較

Yen の実験のように側壁が直立の固定壁になっている場合にはこれらの効果を取り入れればかなり精度よく最大洗掘深を計算することができるであろうが、図-12 (a) の Desna 川のように実際河川では側壁そのものが移動床となっているために計算された曲線が最後にどのように外岸にすりついて行くのかは明白ではない。なぜなら、外岸側の形状はここで論じられた力学的機構とはかなり異なった機構で決定されているであろうからである。ただ外岸側の勾配はかなり河床砂の水中安息角に近いであろうから、実用的には安息角によって決められる外岸の河床形と、ここで求められた大部分の領域において成り立つ河床形状を決める曲線との交点を求めると、それがほぼ最大洗掘深を与えるものと思われる。けれども、側壁近傍の河床形状を決定している力学的機構を正しく把握することは最大洗掘深を正しく見積ることとも結びついて、今後に残された課題であろう。

カルマンの定数については、ここでは、 $\kappa=0.4$ としているが、河川の流れに浮遊砂や Wash Load が含まれる場合にはカルマンの定数 κ の値は減少するので、そのような場合には志村または日野の式を用いて κ を求め式 (22a) によって河床形状を求めればよい。

本稿では式 (22a) による水深の見積りに際して遠心力による横断方向の水面変化を考慮していないが、それが無視できない場合には水路勾配を表わす近似式

$$i_r \approx \frac{U_a^2}{gR}$$

によって各地点における水面の上昇、下降を見積りそれを式 (22a) によって得られる水深に付け加えればよい。

著者ら¹²⁾は長方形断面では水路幅と水深の比 B/H_a が 10 以下となると側壁等の影響等によって、二次流を計算するに当たって主流の速度分布式として対数分布則を用いることができなくなることを指摘したが、この場合も同様であって二次流の速度分布を表わす式 (19) も B/H_a

が十分大きい場合に対して成立することに注意されたい。

7. 結 論

以上の考察によって次の諸点が明らかになった。

(1) 二次流の大きさは U_a/U_* の影響を受け、 U_a/U_* が小さいほどすなわち底面が粗になるほど小さくなる。けれどもその差異は小さく、図-5 に示されているように一般の河川で滑らかな場合 ($U_a/U_*=20$) でも最も粗な場合 ($U_a/U_*=6$) の約 1.25 倍になるにすぎない。

(2) 任意の断面における二次流の速度分布を表わす式 (19) は野外の測定値とよく一致する。

(3) 平衡河床形状を表わす式、

$$\frac{H}{H_a} = \exp \left\{ \frac{1}{2} A \frac{R_a^2}{R_0^2} \left(\frac{R^2}{R_a^2} - 1 \right) \right\}$$

を理論的に導き、それが横断方向のほぼ全域で実験値とよく一致することを示した。また、その形状は掃流力の目安である $U_* / \{(\rho_s/\rho - 1)gd\}^{1/2}$ と U_a/U_* の関数となることが明らかになった。

(4) 最大洗掘深は外岸において生じ、この式を用いるとその大きさを定量的に把握することができる。けれども、岸近傍では横断方向の二次流が側壁によって小さくなるために、洗掘深は上式で計算される値よりも若干緩和される。この点に関しては主流の横断方向の分布形 f が側壁近傍で強制渦から変化し、その値が 0 に近づくことを考慮すれば計算が可能である。

謝 辞：本研究は Ripley の野外測定値に関して吉川秀夫教授と議論を行ったのが発端であった。研究をすすめるに当たって終始熱心な指導、討議をいただいた同教授に深く謝意を表わします。

参 考 文 献

- 野満隆治 原著、瀬野錦蔵 補訂：新河川学，地人書館，1964。
- Chow, V.T. : Open-Channel Hydraulics, McGRAW-HILL, 1959.
- 須賀亮三：開水路湾曲部河床の安定形状，第 9 回水理講演会講演集，1965。
- 須賀亮三：開水路わん曲部河床の安定形状 (その 2)，第 10 回水理講演会講演集，1966。
- 須賀亮三・馬場洋二：わん曲部の河床変動について，第 23 回建設省技術研究会報告，建設省，1969。
- Yen, C.L. : Bed Topography Effect on Flow in a Meander, Proc. ASCE, Hy. Div., HY 1., Jan., 1970.
- 村本嘉雄・坂本忠彦・吉村知司：湾曲水路の河床変動に関する研究，京都大学防災研究所年報，11 B, 1968。
- Rozovskii, I.L. : Flow of Water in Bends of Open Channel, Academy Sciences of the USSR, 1957.
- 岩垣雄一：限界掃流力に関する基礎的研究，土木学会論文集 41 号，1956。

- 10) Chepil, W.S. : The Use of Evenly Spaced Hemispheres to Evaluate Aerodynamic Forces on a Soil Surface, Trans. A.G.U., Vol. 39, No. 3, June, 1958.
 - 11) Ikeda, S. : Some Studies on the Mechanics of Bed Load Transport, Proc. of JSCE, No. 185, Jan., 1971.
 - 12) Kikkawa, H., S. Ikeda, H. Ohkawa and Y. Kawamura : Secondary Flow in a Bend of Turbulent Stream., Proc. of JSCE, No. 219, Nov., 1973.
(1974. 8. 18・受付)
-