

大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす 波の非線型性の影響

NONLINEAR EFFECT OF WAVES ON WAVE PRESSURE AND WAVE FORCE ON A LARGE CYLINDRICAL PILE

山口 正隆*・土屋 義人**

By Masataka Yamaguchi and Yoshito Tsuchiya

1. 結 言

円柱に作用する波力は、円柱の径が波長に比べて小さい場合、通常円柱による波の変形を無視できるものとして、Morison 以来抗力と慣性力の線型和として表わされているが、円柱の径が波長に比較しうる大きさになると、この仮定が不適當になり、波力を計算する場合、円柱による波の変形の影響を無視できなくなる。この問題は、ポテンシャル流理論では円柱による波の回折問題として取り扱われ、Havelock¹⁾、MacCamy および Fuchs²⁾、田中³⁾、Reid, Laird⁴⁾、Bonnefille および Germain⁵⁾、さらに最近では永井ら⁶⁾、中村ら^{7),8)}および堀川ら⁹⁾により計算や実験が行われてきた。しかしながら、これらの研究はすべて微小振幅波理論である線型回折波理論に基づくものであるため、波の非線型性の影響が考慮されておらず、大口径円柱に作用する波力をより適確に評価するためには、この影響を検討する必要がある。

こうした波の非線型性を回折波理論に導入しようとする試みは最近 Chakrabarti¹⁰⁾によって行われている。彼は入射波を有限振幅波理論である Stokes 波の第 5 次近似解で表示し、それぞれの周波数成分に対して、線型回折波理論を適用して円柱壁での境界条件を満足する解を誘導した。しかし、この近似理論は水面における非線型境界条件である運動学および力学的条件を微小振幅波理論に相当する 1 次項以外は全く満足しておらず、理論の適合性についてはかなりの問題があるといわねばならない。

以上のように、大口径円柱に作用する波力に及ぼす波の非線型性の影響は現在のところほとんど未解明であると考えられる。そこで、本論文ではせつ動法によって非線型回折波理論の第 2 次近似解を求めて水位変動、波圧

および全波力に対する表示式を導き、波の非線型性の影響を理論的に考察するとともに、波圧および全波力の実験結果との比較から理論の妥当性を検討して、大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線型性の影響を究明することにする。

2. 非線型回折波理論

(1) 基礎方程式

いま、非粘性非回転の流体運動とし、図-1 のような極座標 (r, θ, z) を用い、次式による無次元量

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi} &= \frac{k^2 \phi}{\lambda \sqrt{kg}}, \quad \bar{r} = kr, \quad \bar{z} = kz, \quad \bar{\eta} = \frac{k\eta}{\lambda} \\ \bar{a} &= ka, \quad \bar{h} = kh, \quad \bar{t} = \sigma t, \quad \omega = \frac{\sigma}{\sqrt{kg}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

を定義すれば、一様水深における円柱周辺の波動運動を規定する基礎方程式および境界条件は次のように与えられる。ここに、 ϕ : 速度ポテンシャル、 $k=2\pi/L$: 波数、 L : 波長、 η : 静水面からの水位変動、 h : 水深、 $\sigma=2\pi/T$: 角周波数、 T : 周期、 a : 円柱の半径、 g : 重力の加速度、 λ : 微小なパラメーター、 z : 静水面より鉛直上方にとった座標および t : 時間である。

まず、基礎方程式である連続方程式は、

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \dots\dots(2)$$

となり、水底および円柱壁面における境界条件はそれぞれ次式で表わされる。

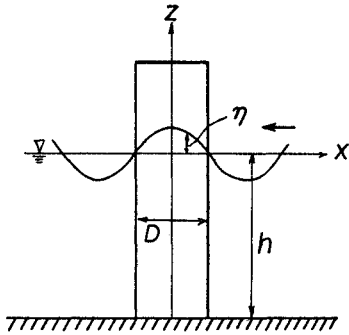
$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} = 0; \quad \bar{z} = -\bar{h} \dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} = 0; \quad \bar{r} = \bar{a} \dots\dots(4)$$

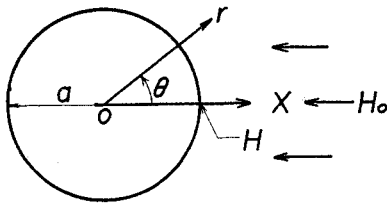
また、水面における運動学および力学的条件は、それぞれ次式となる。

* 正会員 工博 京都大学助教授 防災研究所

** 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所



(a)



(b)

図-1 座 標 系

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} - \omega \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} - \lambda \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{r}} - \frac{\lambda}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \theta} = 0; \bar{z} = \lambda \bar{\eta} \dots\dots\dots (5)$$

$$\omega \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}} + \bar{\eta} + \frac{\lambda}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} = 0; \bar{z} = \lambda \bar{\eta} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、力学的条件に含まれる Bernoulli の定数項は式 (6) の左辺第 1 項に含まれている。

さらに、解の性質として、 \bar{r} が無限大になるにつれて円柱による回折波が消滅することを示すいわゆる radiation condition が必要とされるが、円柱からの回折波を表わす無次元化された速度ポテンシャルを $\bar{\psi}$ とすれば、それは次式で与えられる。

$$\bar{\psi} = 0(\bar{r}^{-1/2}), \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{r}} + i\bar{\psi} = 0(\bar{r}^{-1/2}); \bar{r} \rightarrow \infty \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $0(r^i)$ は $r \rightarrow \infty$ のとき x/r^i が有界であるような量 x を表わし、 $0(r^i)$ は $r \rightarrow \infty$ のとき $x/r^i \rightarrow 0$ となるような量 x を表わすものとする。

さて、以上の基礎方程式の厳密解を得ることはきわめて困難であるが、微小なパラメーター λ が含まれているので、近似解を求めるためにせつ動法が適用できる。すなわち、 $\bar{\phi}$ 、 $\bar{\psi}$ 、 $\bar{\eta}$ および ω が λ のべきで次式のように展開できるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi} &= \bar{\phi}_0 + \lambda \bar{\phi}_1 + \dots \\ \bar{\psi} &= \bar{\psi}_0 + \lambda \bar{\psi}_1 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta} &= \bar{\eta}_0 + \lambda \bar{\eta}_1 + \dots \\ \omega &= \omega_0 + \lambda \omega_1 + \dots \end{aligned} \right\}$$

また、式 (8) の $\bar{z} = \lambda \bar{\eta}$ における $\bar{\phi}$ を $\bar{z} = 0$ のまわりに

$$\bar{\phi}(\bar{r}, \theta, \lambda \bar{\eta}, \bar{t}) = \bar{\phi}_0(\bar{r}, \theta, 0, \bar{t}) + \lambda \left\{ \bar{\eta}_0 \frac{\partial \bar{\phi}_0(\bar{r}, \theta, 0, \bar{t})}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi}_1(\bar{r}, \theta, 0, \bar{t}) \right\} + \dots\dots\dots (9)$$

で展開できるものとする。

次に、式 (8) および (9) を式 (1)~(7) に代入し、 λ のべきについて整理すると、第 1 次および第 2 次近似解を求めるための基礎方程式および境界条件はそれぞれ次式で表わされる。すなわち、 λ に独立な項に対して、

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}^2} = 0 \dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} = 0; \bar{z} = -\bar{h} \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}} = 0; \bar{r} = \bar{a} \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} - \omega_0 \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}} = 0; \bar{z} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\omega_0 \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}} + \bar{\eta}_0 = 0; \bar{z} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$\bar{\psi}_0 = 0(\bar{r}^{-1/2}), \quad \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{r}} + i\bar{\psi}_0 = 0(\bar{r}^{-1/2}); \bar{r} \rightarrow \infty \dots\dots\dots (15)$$

となり、また同様に λ の項として次の諸式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}^2} = 0 \dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}} = 0; \bar{z} = -\bar{h} \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{r}} = 0; \bar{r} = \bar{a} \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}} - \omega_0 \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{\eta}_0 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}^2} - \omega_1 \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \theta} = 0; \bar{z} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$\omega_0 \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{\eta}_1 + \omega_0 \bar{\eta}_0 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}^2} + \omega_1 \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} = 0; \bar{z} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

$$\bar{\psi}_1 = 0(\bar{r}^{-1/2}), \quad \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{r}} + i\bar{\psi}_1 = 0(\bar{r}^{-1/2}); \bar{r} \rightarrow \infty \dots\dots\dots (21)$$

さらに、式 (13) および (14) と式 (19) および (20) から、それぞれ $\bar{\eta}_0$ および $\bar{\eta}_1$ を消去すると次式になる。

$$\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} = 0; \bar{z} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \bar{t}^2} &= \omega_1 \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}} - \omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} \\ &- \bar{\eta}_0 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} \right) \\ &- \omega_0 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\}; \bar{z}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

(2) 第1次近似解

式(10)~(12)と式(15)および(22)を満足する第1次近似解は、すでに MacCamy および Fuchs によって求められており、 $\bar{\phi}_0, \bar{\eta}_0$ および ω_0 はそれぞれ次式で表わされる。

$$\bar{\phi}_0 = -\omega_0 \frac{\cosh(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh \bar{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n i^{n+1} \cdot \left\{ J_n(\bar{r}) - \frac{J_n'(\bar{a})}{H_n^{(2)'}(\bar{a})} H_n^{(2)}(\bar{r}) \right\} \cos n\theta e^{i\bar{t}} \dots\dots\dots (24)$$

$$\bar{\eta}_0 = - \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n i^n \left\{ J_n(\bar{r}) - \frac{J_n'(\bar{a})}{H_n^{(2)'}(\bar{a})} H_n^{(2)}(\bar{r}) \right\} \cos n\theta e^{i\bar{t}} \dots\dots\dots (25)$$

$$\omega_0^2 = \tanh \bar{h} \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 $i = \sqrt{-1}$, δ_n : Neumann 数 ($n=0$ なら $\delta_0 = 1$, $n \geq 1$ なら $\delta_n = 2$), J_n : 第1種 Bessel 関数, $H_n^{(2)}$: 第2種 Hankel 関数および ' : \bar{r} に関する微分を表わす。

式(24)および(25)の第1項は周知の微小振幅進行波の Bessel 関数表示であり、第2項は円柱からの回折波を示し、 $\bar{r} \rightarrow \infty$ につれて消滅する $\bar{\phi}_0$ に相当する項である。式(26)は通常の波の分散の関係と一致する。

また、微小なパラメーター λ は第1次近似解に対して H_0 を入射波高とすると、次式で表わされる。

$$\lambda = \frac{kH_0}{2} \dots\dots\dots (27)$$

さて、式(24)および(25)は複素表示であるが、第2次近似解を求める計算の都合上実数表示に変換すると、それぞれ次式になる。

$$\bar{\phi}_0 = -\omega_0 \frac{\cosh(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh \bar{h}} (L_1 \cos \bar{t} - M_1 \sin \bar{t}) \dots\dots\dots (28)$$

$$\bar{\eta}_0 = -L_1 \sin \bar{t} - M_1 \cos \bar{t} \dots\dots\dots (29)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}} - \omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} - \bar{\eta}_0 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} \right) - \omega_0 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} &= -2 \omega_1 L_1 \cos \bar{t} \\ + 2 \omega_1 M_1 \sin \bar{t} - \frac{\omega_0}{\sinh \bar{h} \cosh \bar{h}} \left[2 \cosh^2 \bar{h} M_{1r} L_{1r} + 2 \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)^2 \cosh^2 \bar{h} M_{1\theta} L_{1\theta} + (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) M_{1z} L_{1z} \right] \cos 2\bar{t} & \\ - \left\{ \cosh^2 \bar{h} (M_{1r}^2 - L_{1r}^2) + \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)^2 \cosh^2 \bar{h} (M_{1\theta}^2 - L_{1\theta}^2) + \frac{(2 \cosh^2 \bar{h} - 3)}{2} (M_{1z}^2 - L_{1z}^2) \right\} \sin 2\bar{t} & \left. \right\}; \bar{z}=0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{ Y_n'(\bar{a}) J_n(\bar{r}) - J_n'(\bar{a}) Y_n(\bar{r}) \} \\ \cos n\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta \\ M_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \{ Y_n'(\bar{a}) J_n(\bar{r}) - J_n'(\bar{a}) Y_n(\bar{r}) \} \\ \cos n\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\theta \\ a_{2m} &= \frac{(-1)^{m+2} \delta_{2m} J_{2m}'(\bar{a})}{J_{2m}^{1/2}(\bar{a}) + Y_{2m}^{1/2}(\bar{a})} \\ a_{2m+1} &= \frac{(-1)^{m+1} \delta_{2m+1} Y_{2m+1}'(\bar{a})}{J_{2m+1}^{1/2}(\bar{a}) + Y_{2m+1}^{1/2}(\bar{a})} \\ b_{2m} &= \frac{(-1)^{m+2} \delta_{2m} Y_{2m}'(\bar{a})}{J_{2m}^{1/2}(\bar{a}) + Y_{2m}^{1/2}(\bar{a})} \\ b_{2m+1} &= \frac{(-1)^{m+2} \delta_{2m+1} J_{2m+1}'(\bar{a})}{J_{2m+1}^{1/2}(\bar{a}) + Y_{2m+1}^{1/2}(\bar{a})} \\ m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

および Y_n : 第2種 Bessel 関数である。

さらに、無次元圧力 $\bar{p} = k p / \rho g$ を

$$\bar{p} = -\bar{z} + \lambda \bar{p}_0 + \lambda^2 \bar{p}_1 + \dots \dots \dots (31)$$

とすれば、第1次近似解に対しては、次式のようになる。

$$\bar{p}_0 = -\omega_0 \frac{\cosh(\bar{h} + \bar{z})}{\sinh \bar{h}} (L_1 \sin \bar{t} + M_1 \cos \bar{t}) \dots\dots\dots (32)$$

また、円柱壁面での水位変動および波圧は $\bar{r} = \bar{a}$ として、

$$Y_n'(\bar{a}) J_n(\bar{a}) - J_n'(\bar{a}) Y_n(\bar{a}) = \frac{2}{\pi \bar{a}} \dots\dots\dots (33)$$

の関係を用い、式(27)を考慮すれば、次のように表示される。

$$\frac{\eta}{H_0} = -\frac{1}{\pi k a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta \sin \sigma t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\theta \cos \sigma t \right) \dots\dots\dots (34)$$

$$\frac{p}{\rho g H_0} = -\frac{\cosh k(h+z)}{\pi k a \sinh k h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta \sin \sigma t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\theta \cos \sigma t \right) - \frac{z}{H_0} \dots\dots (35)$$

さらに、分散を表わす関係は次式になる。

$$\sigma^2 = g k \tanh k h \dots\dots\dots (36)$$

(3) 第2次近似解

まず、第1次近似解を用いて、式(23)の右辺を計算すれば、次式になる。

ここに,

$$\begin{aligned}
 L_{1,r} &= \frac{\partial L_1}{\partial \bar{r}}, \quad M_{1,r} = \frac{\partial M_1}{\partial \bar{r}}, \quad L_{1,\theta} = \frac{\partial L_1}{\partial \theta}, \quad M_{1,\theta} = \frac{\partial M_1}{\partial \theta} \\
 L_1^2 &= \frac{1}{2} \left(A_0^2 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} A_i A_j - A_{m/2}^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n A_{n+m} \right) \cos m\theta \\
 M_1^2 &= \frac{1}{2} \left(B_0^2 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} B_i B_j - B_{m/2}^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n B_{n+m} \right) \cos m\theta \\
 M_1 L_1 &= \frac{1}{2} \left(A_0 B_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n B_n \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} A_i B_j - A_{m/2} B_{m/2} + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n B_{n+m} + A_{n+m} B_n) \right\} \cos m\theta \\
 L_{1,\theta}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j A_i A_j + \frac{m^2}{4} A_{m/2}^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) A_n A_{n+m} \right\} \cos m\theta \\
 M_{1,\theta}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 B_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j B_i B_j + \frac{m^2}{4} B_{m/2}^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) B_n B_{n+m} \right\} \cos m\theta \\
 M_{1,\theta} L_{1,\theta} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n B_n + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j A_i B_j + \frac{m^2}{4} A_{m/2} B_{m/2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (A_n B_{n+m} \right. \\
 &\quad \left. + A_{n+m} B_n) \right\} \cos m\theta \\
 L_{1,r}^2 &= \frac{1}{2} \left(A_0 r^2 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} A_i r A_j r - A_{(m/2)r}^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n r A_{(n+m)r} \right) \cos m\theta \\
 M_{1,r}^2 &= \frac{1}{2} \left(B_0 r^2 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} B_i r B_j r - B_{(m/2)r}^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n r B_{(n+m)r} \right) \cos m\theta \\
 M_{1,r} L_{1,r} &= \frac{1}{2} \left(A_0 r B_0 r + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r B_n r \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} A_i r B_j r - A_{(m/2)r} B_{(m/2)r} + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r B_{(n+m)r} \right. \\
 &\quad \left. + A_{(n+m)r} B_n r) \right\} \cos m\theta
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

である。ただし、 $A_{m/2}$ および $B_{m/2}$ は m が偶数のときのみ存在するものとする。また、周期関数の各項を明確にするために、各周期関数に下線を引いている。

次に、境界条件、式 (37) を $\bar{r} \geq \bar{a}$ において満たす円柱関数を含む調和関数列を見出すことがきわめて困難であるので、式 (37) の右辺を $\bar{r} = \bar{a}$ のまわりで Taylor 級数展開した第 1 項すなわち $\bar{r} = \bar{a}$ でのみ式 (37) を満足する解を求めることにする。そのために、 $\bar{r} = \bar{a}$ とおけば、 $A_n = (2/\pi \bar{a}) a_n$ 、 $B_n = (2/\pi \bar{a}) b_n$ および $L_{1,r} = M_{1,r} = 0$ であり、また、第 2 次近似解では 2 倍周波数のみを考えるので、 $\omega_1 = 0$ となる。したがって、式 (37) は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \bar{z}^2} &= \frac{\omega_0}{\sinh \bar{h} \cosh \bar{h}} \left(\frac{2}{\pi \bar{a}} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j a_i b_j + \frac{m^2}{4} a_{m/2} b_{m/2} \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \right\} \cos m\theta \right] + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \left[a_0 b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} a_i b_j \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \right\} \cos m\theta \right] \right\} \cos 2\bar{t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (b_n^2 - a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j (b_i b_j - a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \right\} \cos m\theta \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \left[(b_0^2 - a_0^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} (b_i b_j - a_i a_j) + (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \right\} \cos m\theta \right] \right\} \sin 2\bar{t} \Bigg\}; \quad \bar{z} = 0, \quad \bar{r} = \bar{a}
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

一方、式 (16)~(18) と式 (21) を満足する $\bar{\phi}_1$ を $\bar{\phi}_0$ と同様に次式で仮定する。

$$\bar{\phi}_1 = -\omega_0 \cosh 2(\bar{h} + \bar{\varepsilon})(L_2 \cos 2\bar{i} + M_2 \sin 2\bar{i}) + \omega_0 f(\bar{i}) \dots\dots\dots (40)$$

ここに、 L_2 および M_2 は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \{Y_m'(2\bar{a})J_m(2\bar{r}) - J_m'(2\bar{a})Y_m(2\bar{r})\} \cos m\theta = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos m\theta \\ M_2 &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \{Y_m'(2\bar{a})J_m(2\bar{r}) - J_m'(2\bar{a})Y_m(2\bar{r})\} \cos m\theta = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} D_m \cos m\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

さて、式 (40) を式 (39) の左辺に代入し、

$$\frac{1}{2} \{Y_m'(2\bar{a})J_m(2\bar{a}) - J_m'(2\bar{a})Y_m(2\bar{a})\} = \frac{1}{\pi\bar{a}} \dots\dots\dots (42)$$

を考慮すれば、

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{\varepsilon}} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial \bar{i}^2} = \frac{4\omega_0^3 \sinh^2 \bar{h}}{\pi\bar{a}} \sum_{m=0}^{\infty} (c_m \cos 2\bar{i} + d_m \sin 2\bar{i}) \cos m\theta + \omega_0^3 \frac{d^2 f(\bar{i})}{d\bar{i}^2}; \bar{\varepsilon}=0, \bar{r}=\bar{a} \dots\dots\dots (43)$$

となる。したがって、式 (39) および (43) を等置すれば、 c_m, d_m および f は、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\pi\bar{a} \sinh^4 \bar{h}} \left\{ \frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \left(a_0 b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right) \right\} \\ c_m &= \frac{1}{\pi\bar{a} \sinh^4 \bar{h}} \left[\frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j a_i b_j + \frac{m^2}{4} a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} a_i b_j - a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \right\} \right] \\ d_0 &= \frac{1}{2\pi\bar{a} \sinh^4 \bar{h}} \left[\frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (b_n^2 - a_n^2) + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \left\{ (b_0^2 - a_0^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2) \right\} \right] \\ d_m &= \frac{1}{2\pi\bar{a} \sinh^4 \bar{h}} \left[\frac{\cosh^2 \bar{h}}{\bar{a}^2} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j (b_i b_j - a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (b_n b_{n+m} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_n a_{n+m}) \right\} + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 \bar{h} - 3) \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} (b_i b_j - a_i a_j) - (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

$$f = \alpha \bar{i} + \beta \dots\dots\dots (46)$$

ここに、 β は任意定数である。

次に、 $\bar{\eta}_1$ は式 (20) に $\bar{\phi}_0, \bar{\eta}_0$ および $\bar{\phi}_1$ を代入することにより次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= \left[2\omega_0^2 \cosh 2\bar{h} M_2 + \frac{\omega_0^2}{4} \left\{ \omega_0^{-4} (M_{1r}^2 - L_{1r}^2) + \omega_0^{-4} \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)^2 (M_{1\theta}^2 - L_{1\theta}^2) + 3(M_1^2 - L_1^2) \right\} \right] \cos 2\bar{i} \\ &\quad + \left[-2\omega_0^2 \cosh 2\bar{h} L_2 + \frac{\omega_0^2}{2} \left\{ \omega_0^{-4} M_{1r} L_{1r} + \omega_0^{-4} \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)^2 M_{1\theta} L_{1\theta} + 3ML \right\} \right] \sin 2\bar{i} + \frac{\omega_0^2}{4} \left\{ -\omega_0^{-4} (M_{1r}^2 \right. \\ &\quad \left. + L_{1r}^2) - \omega_0^{-4} \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)^2 (M_{1\theta}^2 + L_{1\theta}^2) + (M_1^2 + L_1^2) \right\} - \omega_0^2 \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

また、 \bar{p}_1 は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1 &= \left[2\omega_0^2 \cosh 2(\bar{h} + \bar{\varepsilon}) M_2 + \frac{\omega_0^2}{4} \left\{ \frac{\cosh^2(\bar{h} + \bar{\varepsilon})}{\sinh^2 \bar{h}} (M_{1r}^2 - L_{1r}^2) + \frac{\cosh^2(\bar{h} + \bar{\varepsilon})}{\sinh^2 \bar{h}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)^2 (M_{1\theta}^2 - L_{1\theta}^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sinh^2(\bar{h} + \bar{\varepsilon})}{\sinh^2 \bar{h}} (M_1^2 - L_1^2) \right\} \right] \cos 2\bar{i} + \left[-2\omega_0^2 \cosh 2(\bar{h} + \bar{\varepsilon}) L_2 + \frac{\omega_0^2}{2} \left\{ \frac{\cosh^2(\bar{h} + \bar{\varepsilon})}{\sinh^2 \bar{h}} M_{1r} L_{1r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\cosh^2(\bar{h} + \bar{\varepsilon})}{\sinh^2 \bar{h}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)^2 M_{1\theta} L_{1\theta} + \frac{\sinh^2(\bar{h} + \bar{\varepsilon})}{\sinh^2 \bar{h}} M_1 L_1 \right\} \right] \sin 2\bar{i} - \frac{\omega_0^2}{4} \left\{ \frac{\cosh^2(\bar{h} + \bar{\varepsilon})}{\sinh^2 \bar{h}} (M_{1r}^2 + L_{1r}^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cosh^2(\bar{h} + \bar{\varepsilon})}{\sinh^2 \bar{h}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)^2 (M_{1\theta}^2 + L_{1\theta}^2) + \frac{\sinh^2(\bar{h} + \bar{\varepsilon})}{\sinh^2 \bar{h}} (M_1^2 + L_1^2) \right\} - \omega_0^2 \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

以上のようにして、 $\bar{\phi}_1, \bar{\eta}_1$ および \bar{p}_1 が求められたが、これらの諸式において Bernoulli の定数項に相当する α が未決定であるので、 α を次のように決定する。式 (39) の右辺は、 $\bar{r} \geq \bar{a}$ で表示されるべきものであるが、 $\bar{r} = \bar{a}$ で与えられているので、もともと \bar{r} の関数であるものが \bar{a} の関数として表示されており、そのまま $\bar{r} \rightarrow \infty$ にした

場合には \bar{a} を含む項が残る。そこで、これらのうち、もともと \bar{a} のみの関数として表示される項と \bar{a} および \bar{a} の関数として表示される項を分離して $\bar{a} \rightarrow \infty$ とすれば、後者は円柱からの回折波であるので消滅し、結局、式 (39) の右辺は Stokes 波の第 2 次近似解に相当した進行波だけが残ることになる。したがって、 α としては Stokes 波の第 2 次近似解による次式を用いることができる。

$$\alpha = -\frac{1}{4 \sinh^2 kh} \dots\dots\dots (49)$$

また、 λ も Stokes 波の第 2 次近似解に相当して

$$\lambda = \frac{kH_0}{2} \dots\dots\dots (50)$$

になる。さらに分散を表わす関係式は第 1 次近似解である式 (36) と同一である。したがって、円柱壁における非線型回折波理論の第 2 次近似解は水位変動および波圧に対してそれぞれ次のように表わされる。

まず、水位変動は、

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{H_0} = & -\frac{1}{\pi ka} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\theta \sin \sigma t + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos m\theta \cos \sigma t \right) + \frac{1}{2} \frac{kh \tanh kh}{(h/H_0)} \left\{ \left\{ \frac{\cosh 2kh}{\pi ka} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \cos m\theta \right. \right. \\ & + \frac{1}{4(\pi ka)^2} \left(\frac{\cosh^2 kh}{(ka)^2 \sinh^2 kh} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (b_n^2 - a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} ij (b_i b_j - a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) \right. \right. \right. \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \left. \right\} \cos m\theta \left. \right\} + 3 \left[(b_0^2 - a_0^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} (b_i b_j \right. \right. \\ & - a_i a_j) - (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \left. \right\} \cos m\theta \left. \right] \left. \right\} \cos 2\sigma t + \left\{ -\frac{\cosh 2kh}{\pi ka} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \right. \\ & \cos m\theta + \frac{\cosh^2 kh}{2(ka)^2 \sinh^2 kh} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j a_i b_j + \frac{m^2}{4} a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (a_n b_{n+m} \right. \right. \\ & + a_{n+m} b_n) \left. \right\} \cos m\theta \left. \right] + \frac{3}{2} \left[a_0 b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} a_i b_j - a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \right\} \right. \\ & \left. \left. \cos m\theta \right] \right\} \sin 2\sigma t + \left\{ -\frac{1}{4(\pi ka)^2} \left(\frac{\cosh^2 kh}{(ka)^2 \sinh^2 kh} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (b_n^2 + a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} ij (b_i b_j + a_i a_j) \right. \right. \right. \right. \\ & + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 + a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (b_n b_{n+m} + a_n a_{n+m}) \left. \right\} \cos m\theta \left. \right] - \left[(b_0^2 + a_0^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^2 + a_n^2) \right. \\ & \left. \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} (b_i b_j + a_i a_j) - (b_{m/2}^2 + a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} + a_n a_{n+m}) \right\} \cos m\theta \right] \right\} + \frac{1}{8 \sinh^2 kh} \left. \right\} \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

で表わされ、また、波圧は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho g H_0} = & -\frac{\cosh k(h+z)}{\pi ka \cosh kh} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\theta \sin \sigma t + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos m\theta \cos \sigma t \right) + \frac{1}{2} \frac{kh \tanh kh}{(h/H_0)} \\ & \left\{ \left\{ \frac{\cosh 2k(h+z)}{\pi ka} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \cos m\theta + \frac{1}{4(\pi ka)^2 \sinh^2 kh} \left(\frac{\cosh^2 k(h+z)}{(ka)^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (b_n^2 - a_n^2) \right. \right. \right. \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} ij (b_i b_j - a_i a_j) + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (b_n b_{n+m} - a_n a_{n+m}) \left. \right\} \cos m\theta \right. \right. \\ & + \sinh^2 k(h+z) \left[(b_0^2 - a_0^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} (b_i b_j - a_i a_j) - (b_{m/2}^2 - a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \right. \right. \\ & \left. \left. (b_n b_{n+m} + a_n a_{n+m}) \right\} \cos m\theta \right] \left. \right\} \cos 2\sigma t + \left\{ -\frac{\cosh 2k(h+z)}{\pi ka} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta + \frac{1}{2(\pi ka)^2 \sinh^2 kh} \right. \\ & \left. \left(\frac{\cosh^2 k(h+z)}{(ka)^2} \left[- \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} i j a_i b_j + \frac{m^2}{4} a_{m/2} b_{m/2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (a_n b_{n+m} + a_{n+m} b_n) \right] \cos m\theta \right) \right\} \\ & \sin 2\sigma t + \left\{ -\frac{1}{4(\pi ka)^2 \sinh^2 kh} \left(\frac{\cosh^2 k(h+z)}{(ka)^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (b_n^2 + a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} ij (b_i b_j + a_i a_j) \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{m^2}{4} (b_{m/2}^2 + a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+m) (b_n b_{n+m} + a_n a_{n+m}) \right\} \cos m\theta \right] + \sinh^2 k(h+z) \left[(b_0^2 - a_0^2) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 + a_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=m \\ i, j \geq 0}} (b_i b_j + a_i a_j) - (b_{m/2}^2 + a_{m/2}^2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+m} + a_n a_{n+m}) \right\} \cos m\theta \Bigg] \\
 & + \frac{1}{8 \sinh^2 kh} \Bigg] - \frac{z}{H_0}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

式 (51) および (52) から明らかなように、水位変動および波圧は ka および kh ばかりでなく、 h/H_0 によっても変化することがわかる。また、非線型項を考慮した場合には、後述する数値計算結果からもわかるように、線型理論とは異なり、水位変動および波圧ともその時間波形が非対称になる。

3. 非線型回折波理論による波力算定式

ここでは、2. で求めた水位変動および波圧を表わす式を用いて大口径円柱に作用する全波力式を導き、数値計算を行って、全波力および質量係数に及ぼす波の非線型効果を検討する。

(1) 全波力式

円柱に作用する全波力 F は流体の粘性を無視すれば、一般に次式で与えられる。

$$F = \int_{-h}^{\eta} \int_0^{2\pi} p a \cos \theta d\theta dz \dots\dots\dots (53)$$

さて、回折波理論の第1次近似解による全波力は $\eta=0$ として式 (53) に式 (35) を代入し、三角関数の直交関係に注目して若干の計算を行えば、次式になる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{F}{\rho g H_0 D^2} &= -\frac{1}{4} \frac{\tanh kh}{(ka)^2} (a_1 \sin \sigma t + b_1 \cos \sigma t) = \frac{\tanh kh}{2(ka)^2 \sqrt{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)}} \cos(\sigma t - \xi) \\
 \xi &= \tan^{-1} \left\{ \frac{Y_1'(ka)}{J_1'(ka)} \right\}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

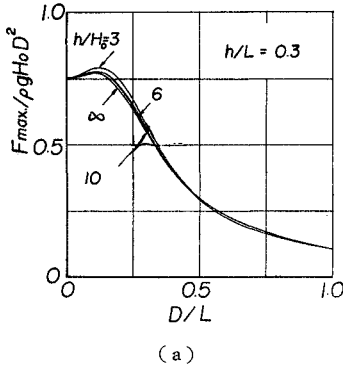
次に、回折波理論の第2次近似解による全波力式は式 (53) に式 (52) を代入し、式中の双曲線関数を $k\eta$ に関して展開して k^2 まで考慮すれば、次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{F}{\rho g H_0 D^2} &= -\frac{1}{4} \frac{\tanh kh}{(ka)^2} (a_1 \sin \sigma t + b_1 \cos \sigma t) + \frac{1}{32} \frac{kh}{\pi (ka)^2 (h/H_0)} \left\{ \left(2 \left\{ (b_0 b_1 - a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) \right\} \right. \right. \\
 & - \frac{4}{\sinh^2 kh} \left[\frac{\cosh^2 kh}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 kh - 3) \right. \\
 & \left. \left. \left\{ (b_0 b_1 - a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) \right\} \right] + \left[\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left(\frac{1}{ka} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left\{ (b_0 b_1 - a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} - a_n a_{n+1}) \right\} \right] \cos 2\sigma t + \left(2 \left\{ (a_0 b_1 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + a_1 b_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) \right\} - \frac{4}{\sinh^2 kh} \left[\frac{\cosh^2 kh}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} (2 \cosh^2 kh - 3) \left\{ (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) \right\} \right] + \left[\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left(\frac{1}{ka} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \right. \right. \\
 & \left. \left. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) + \left(1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left\{ (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n) \right\} \right] \right) \\
 & \left. \left. \sin 2\sigma t + \left(2 \left\{ (b_0 b_1 + a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} + a_n a_{n+1}) \right\} - \left[\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left(\frac{1}{ka} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. (b_n b_{n+1} + a_n a_{n+1}) + \left(1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left\{ (b_0 b_1 + a_0 a_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1} + a_n a_{n+1}) \right\} \right] \right) \right\} \right\} \\
 & \dots\dots\dots (55)
 \end{aligned} \right\}$$

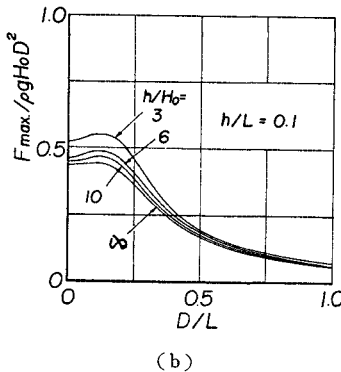
式 (55) の第1項はもちろん第1次近似解と一致する。第2項が波の非線型効果に対応するものである。特に第2項かっこ内第3項は時間に関係しない、いわゆる steady wave force を表わしており、前半分は水面の存在によって生じた波力であり、後半分は速度項から生じ

たものである。また、式 (55) から無次元全波力 $F/\rho g H_0 D^2$ は水位変動および波圧と同様に ka および kh ばかりでなく、波の非線型効果を表わす h/H_0 の関数となり、その時間波形も非対称になることがわかる。

図-2 は全波力に及ぼす波の非線型効果を検討するた



(a)



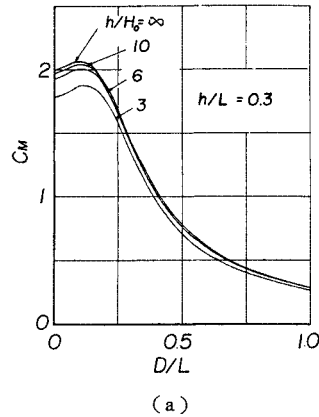
(b)

図-2 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ の D/L による変化

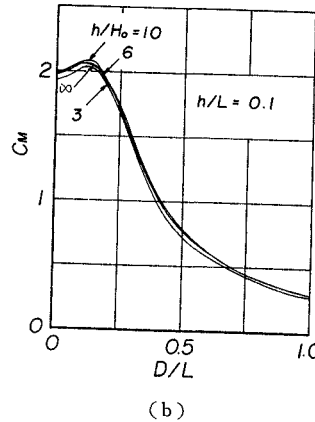
めに、非線型回折波理論の第2次近似解による無次元全波力の最大値 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ と D/L との関係をおよび h/H_0 をパラメータにして示したものであり、 $h/H_0 = \infty$ が第1次近似解に相当する。これらの図によれば、 $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ は D/L の増加とともに、いったん増加して極大値をとったのち、急激に減少することおよび波の非線型性が $F_{max}/\rho g H_0 D^2$ に及ぼす影響は h/L の値が大きい場合にはそれほど顕著でないが、 h/L の値の小さい場合にはかなり大きいことがわかる。したがって、浅海域における大口径円柱の波力の推定には、波の非線型性の影響を考慮する必要があるといわねばならない。

(2) 質量係数に関する考察

ここでは、非線型回折波理論の第2次近似解による全波力式を用いて円柱の質量係数を理論的に求め、質量係数に及ぼす波の特性や円柱径の影響、特に波の非線型効果を検討する。この場合、質量係数の算出方法には、基本的な問題も少なくないが、いま、Reid にならって抗力を無視した Morison らの微小振幅波に基づく波力算定式における慣性力の表示式と式 (54) を位相の相違を無視して等置すれば、線型回折波理論による円柱の質量係数は周知のように、



(a)



(b)

図-3 質量係数に及ぼす波の非線型効果 (1)

$$C_M = \frac{4}{\pi(ka)^2 \sqrt{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)}} \dots\dots\dots (56)$$

で与えられる。これは Reid¹¹⁾ の求めた結果であり、このような方法で決定された微小振幅波理論による円柱の質量係数は ka すなわち円柱径と波長との比 D/L のみに依存し、しかも位相によって変化しないことがわかる。

次に、波の非線型性を考慮した場合の円柱の質量係数の特性について考察する。Stokes 波の第2次近似解を用いれば、Morison の波力算定式中の慣性力 F_I は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{F_I}{\rho g H_0 D^2} = & -\frac{\pi}{8} C_M \tanh kh \left\{ \sin \alpha t \right. \\ & + \frac{1}{8} \frac{kh}{(h/H_0) \sinh^2 kh} (6 \cosh kh \\ & \left. + \sinh 2kh - 2kh) \sin 2\alpha t \right\} \\ & \dots\dots\dots (57) \end{aligned}$$

前述した Reid の方法と同様に、波の非線型性を考慮した場合も式 (55) および (57) が最大値をとるように位相を一致させれば、全波力の最大値の位相における質

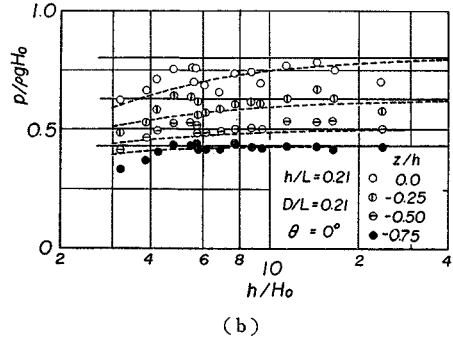
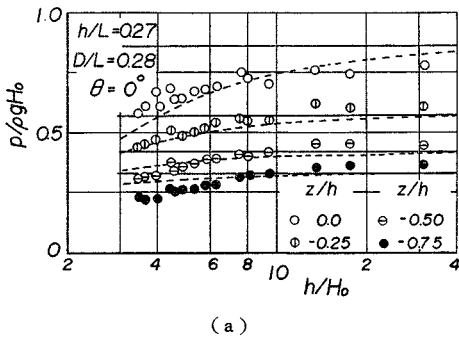


図-4 $p/\rho g H_0$ の h/H_0 による変化

量係数が求められる。この場合の質量係数は解析的に求められないが、式 (55) および (57) から明らかなように、 D/L のみでなく、 h/L および h/H_0 の関数となる。図-3 は全波力の最大値の位相における質量係数の D/L による変化を h/L および h/H_0 をパラメータにして示したものである。図から明らかなように質量係数は、一般に第1次近似解による結果より小さくなり、その傾向は h/H_0 の値が小さく、 h/L の値が大きいときほど著しい。これは波の非線型性を示す h/H_0 や h/L の式 (57) に及ぼす影響が式 (55) のそれに比べて大きいためである。

4. 円柱に作用する波圧の特性

(1) 実験装置および実験方法¹²⁾

実験は宇治川水理実験所にある長さ 20 m、幅 3 m、深さ 70 cm のプランジャー式造波機を備えた波圧実験用水槽を用いて行った。実験装置は造波機側の水槽端より 11.0 m の地点に波圧計ねじ込み用の孔のあいた円柱を取り付け、また円柱周辺の水槽側壁および水槽の他端には反射波を防ぐため消波装置を設置したものである。波圧は円柱に取り付けた数個の波圧計により、また入射波高は造波機より約 5.0 m の位置で電気抵抗線式波高計によって測定した。使用した円柱は直径 $D=40.6$ cm および 24.2 cm であり、実験に用いた波の特性は $T=0.8$ sec \sim 1.2 sec、 $h=40.0$ cm、 $H_0=0.8$ cm \sim 12.6 cm の範囲にある。なお、入射波高の測定位置が実験装置の制約上あまり造波機に近すぎ、円柱設置位置での入射波高と若干異なっていたので、あらかじめ求めておいた入射波高測定位置での波高と円柱設置位置での波高との関係から入射波高の補正を行った。

(2) 波圧に関する実験結果および考察

図-4 は $\theta=0^\circ$ に波の峯がきたときの $\theta=0^\circ$ での無

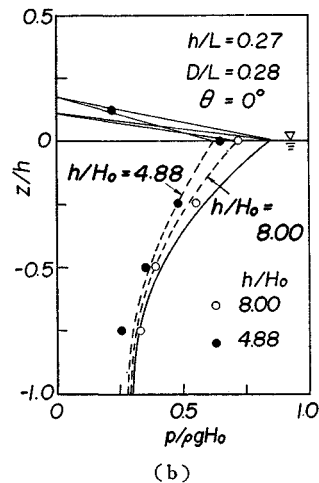
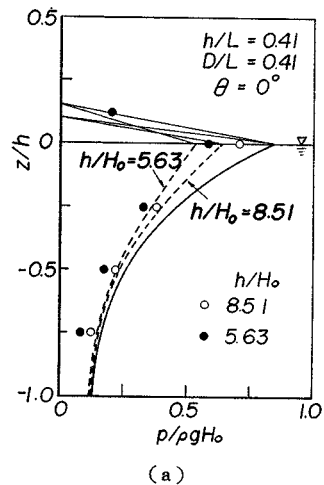


図-5 波圧の鉛直分布

次元波圧強度 $p/\rho g H_0$ の h/H_0 による変化を示したもので、図中の実線および点線はそれぞれ非線型回折波理論の第1次近似解および第2次近似解を表わす。これらの図をみると、 h/H_0 の値の大きいところでは実験結果はほぼ一定値をとり、第1次近似解と比較的よく対応しているが、 h/H_0 の値が小さくなるにつれて、 $p/\rho g H_0$

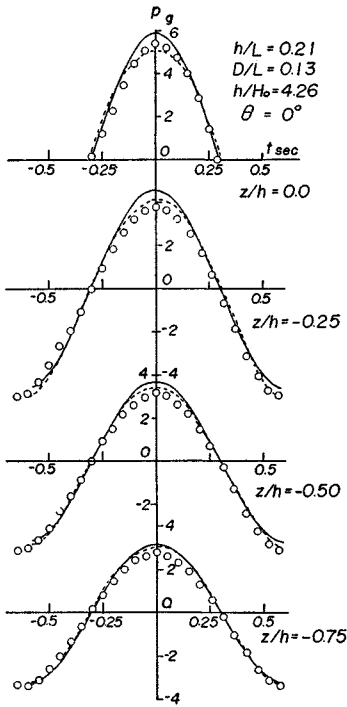


図-6 鉛直波圧分布の時間的变化

の値が減少し、その傾向は第1次近似解を離れて第2次近似解と一致するようになる。また、 $\theta=0^\circ$ での波の峯の位相における波圧の鉛直分布を示したものが図-5である。これらの図では、静水面上の波圧分布に対して水位変動の最大値と $z/h=0$ における $p/\rho g H_0$ との値を結ぶことによって得られる三角形の波圧分布が作用するものとして細い実線で示している。これらの図によれば、 $\theta=0^\circ$ での実験結果は第1次近似解による理論曲線より小さく、第2次近似解と比較的よく一致しているといえる。また、Lairdが著者らと同様の実験を行って、波圧の鉛直分布は双曲線関数表示によるものより水底に近づくにつれて急激に減少すると述べていることとは異なり、著者らの実験結果の鉛直分布形状は双曲線関数でよく表現されることがわかる。

図-6は $\theta=0^\circ$ での波圧の時間的变化の1例を示したものである。 $\theta=0^\circ$ では波圧波形の非対称性はほとんど現われないが、実験結果は最大値付近で第1次近似解より小さくなり、最小値付近では逆に大きくなって第2次近似解とよく一致している。

次に、円柱壁面に沿う波圧の水平分布について考察しよう。図-7は波圧の水平分布を示したものであり、このうち、(a)は $\theta=0^\circ$ の位置に波の峯がきたときの水平同時波圧 $p_c/\rho g H_0$ の θ による変化を示し、また(b)はそれぞれの θ の位置に波の峯がきたときの水平波圧 $p_{cp}/\rho g H_0$ の θ による変化を表わす。 θ が 90° より大

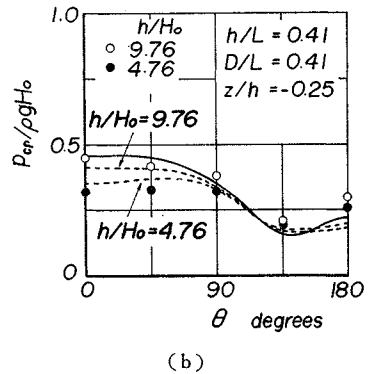
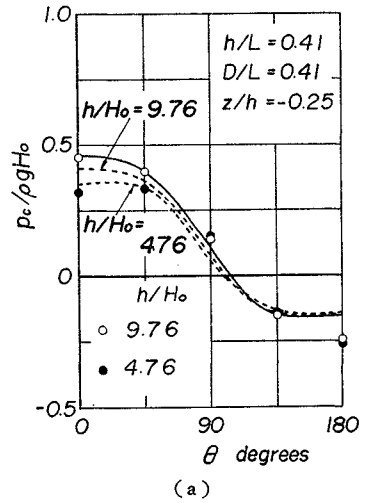


図-7 波圧の水平分布

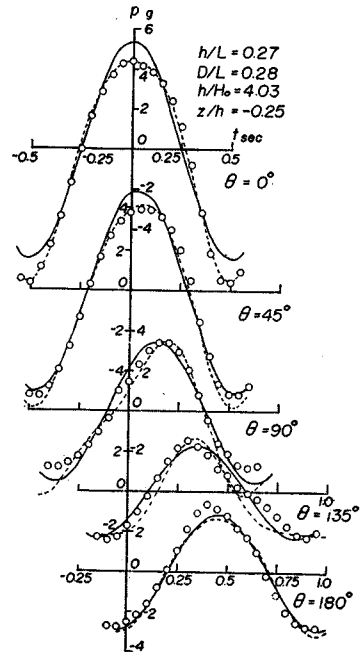


図-8 水平波圧分布の時間的变化

きい円柱後面では h/H_0 の影響が小さいので、いずれの理論解と一致するかは明確でないが、円柱前面付近では h/H_0 の値の増加とともに、 $p_{cl}/\rho g H_0$ および $p_{cp}/\rho g H_0$ の両方の実験結果とも第1次近似解より小さく、全体的には第2次近似解と比較的よく一致している。

図-8 は $\theta=0^\circ$ に波の峯がきたときの水平波圧分布の時間的変化を示したものであり、実験結果は波形の非対称性を含めて第2次近似解による理論曲線とよく一致している。特に、第2次近似解によれば、波圧波形の非対称性は $\theta=90^\circ$ 付近でもっとも著しく、 $\theta=90^\circ$ で波圧の最大値をとる位相が第1次近似解によるものよりずれることや、波圧波形の非対称性の程度が $\theta=90^\circ$ を中心として、円柱前面および後面に近づくにつれて小さくなることを定性的に説明することができる。ただし、この場合の h/H_0 の値がかなり小さいために、第2次近似解による $\theta=90^\circ$ および 135° での理論結果と実験結果の対応は若干悪い。

以上のように、大口径円柱に作用する波圧に及ぼす波の非線型効果はかなり大きく、 $\theta=0^\circ$ での波圧の最大値の実験結果は第1次近似解より小さい。また、非対称な波圧波形が出現するが、これらは波の非線型性を考慮した非線型回折波理論の第2次近似解によって比較的よく説明できる。したがって、大口径円柱に作用する波圧のより適確な推定には、本研究で述べたような非線型回折波理論を用いる必要がある。

5. 円柱に作用する全波力の特性

(1) 実験装置および実験方法

実験に用いた水槽は 4. で述べたものと同じであり、全波力の測定は直径 50 cm および 30 cm の円柱を、ストレーンゲージ各2枚を約 30 cm 離して接着し、両者のひずみの差を取りだすようにブリッジ回路を構成した波力測定装置に取り付けて行った。この場合、波力測定系の固有振動数は 5.0 cps であった。実験に用いた波の特性は $T=0.6 \text{ sec} \sim 1.2 \text{ sec}$ 、 $h=30.0 \text{ cm}$ および 40.0 cm、 $H_0=0.6 \text{ cm} \sim 14.6 \text{ cm}$ の範囲にある。したがって抗力係数を 1.0 とし、質量係数を式 (56) により与えられるものとして、微小振幅波理論に基づいて計算される抗力および慣性力の最大値を比較すれば、この場合の抗力は慣性力に比べて無視できることがわかる。なお、入射波高の補正は 4. で述べた方法により行った。

(2) 全波力に関する実験結果および考察

全波力の実験結果の解析にあたり、まず問題になるのは波力測定系の固有周期が入射波の周期に比べてそれほ

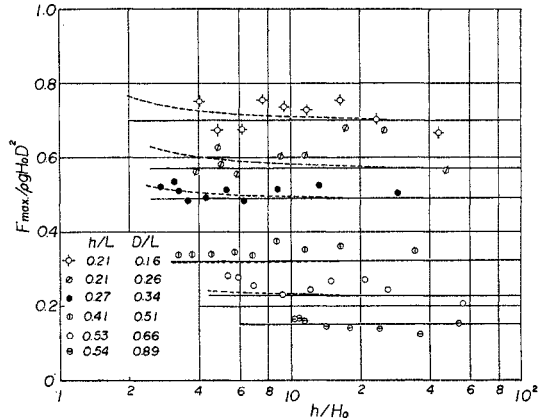


図-9 $F_{\max}/\rho g H_0 D^2$ の h/H_0 による変化

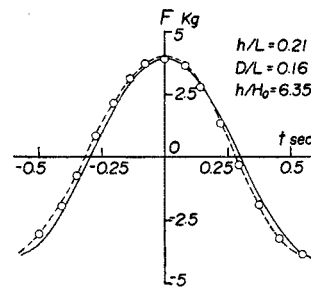


図-10 全波力の時間的変化

ど小さくないことである。そこで、ここでは静水中での自由振動の詳細な測定から得られた波力測定装置の固有振動数 5.0 cps および対数減衰率 0.016 を用いて 1 自由度の振動系として計算される変位から全波力を求め、静的に計算した全波力と比較した結果、その差は 3~12 %であった。したがって、解析の都合上以下では、波力測定装置の変位から静的な検定曲線を用いて求められる全波力の実験結果と前述した振動系の外力に対して回折波理論に基づく全波力式を適用して得られた変位から同様に計算される全波力の理論結果とを比較検討することにする。

図-9 は全波力に及ぼす波の非線型効果を検討するために、全波力の最大値 $F_{\max}/\rho g H_0 D^2$ の h/H_0 による変化を示したものであり、図中の実線および点線はそれぞれ非線型回折波理論の第1次近似解および第2次近似解を表わす。実験結果の D/L の範囲は $0.16 < D/L < 0.89$ で、かなり広範囲にわたっている。図によれば、ばらつきは大きいですが、いずれの実験結果も h/H_0 によってそれほど変化せず、理論結果の傾向とよく一致している。

次に、全波力の時間的変化の例を示したのが 図-10 である。第2次近似解によれば、全波力の時間波形が非対称になるが、図-10 の実験結果にはこうした傾向が

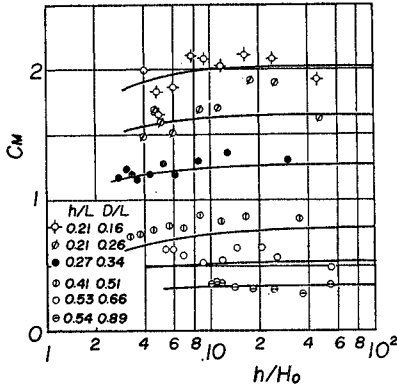


図-11 質量係数に及ぼす波の非線型効果 (2)

現われていることがわかる。

以上の考察より、全波力に及ぼす波の非線型効果は小さいという非線型回折波理論の第2次近似解による結果がある程度確かめられたといえよう。

(3) 質量係数に関する考察

図-11 は非線型回折波理論から求められた質量係数に対する理論結果の妥当性を検討するために、全波力の最大値に対する実験結果に Stokes 波の第2次近似解による慣性力の表示式、式(57)を適用して求めた C_M の h/H_0 による変化を示したものであり、図中の実線は非線型回折波理論および Stokes 波の第2次近似解より算出した質量係数の理論曲線を表す。この図より C_M の値が D/L の値の増加に伴って急激に減少するという線型回折波理論の妥当性のほか、波の非線型性を考慮した場合には、 C_M の値は同一の D/L および h/L の値に対して h/H_0 の値の減少とともに若干減少するという非線型回折波理論の適合性を確かめることができる。

6. 結 語

以上、本論文では、大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線型効果を解明するために、若干の理論的および実験的研究を実施して、次の結果を得た。

まず、2. ではポテンシャル流理論による非線型境界値問題の近似解をせつ動法を用いて求めた。すなわち、微小なパラメータ λ の自乗の項まで水面における境界条件を壁面で満足する非線型回折波理論の第2次近似解を導き、波圧および水位変動を表示する式を得た。そして、波圧および水位変動の時間波形は波の非線型性を考慮すると、非対称になることを理論的に示した。

ついで、3. では第2次近似解による波圧および水位変動を用いて、大口径円柱に作用する全波力式を誘導した。全波力の最大値を数値計算によって求め、全波力に

及ぼす波の非線型効果を検討した結果、比水深の小さい場合を除いて、全波力の最大値に及ぼす波の非線型効果は小さいことを明らかにした。また、第2次近似解による全波力の最大値から求めた質量係数は直径・波長比ばかりでなく、比水深および水深・波高比にも関係し、同一の直径・波長比に対して比水深の値が大きく水深・波高比の小さいほど、その値が小さくなることを示した。

4. では波圧に関する実験結果と理論曲線との比較から、円柱前面 ($\theta=0^\circ$) では波の非線型性の影響が強く現われて、波の峯の位相における波圧は水深・波高比の減少とともに減少し、その傾向は第2次近似解による理論曲線とよく一致することや波圧の鉛直および水平分布の実験結果と第2次近似解による理論結果との対応がよいことを見出した。また、波の非線型効果である波圧の時間波形の非対称性は円柱側面 ($\theta=90^\circ$) でもっとも顕著に現われ、円柱前面および後面に近づくにつれてその影響が小さくなり、この結果は第2次近似解によってよく説明されることを明らかにした。さらに、直径・波長比の広範囲な領域における全波力の実験結果の考察から、時間波形は非対称になるが、全波力の最大値に及ぼす波の非線型効果が小さいことおよび質量係数は水深・波高比の減少とともに減少するという非線型回折波理論による結果を確かめることができた。

要するに、波の非線型性の影響は波圧については比較的大きいが、波圧の円周および水深方向についての積分である全波力については、時間波形の非対称性を除いてあまり大きくないと結論される。なお、紙数の都合上理論および実験結果との比較を示した図の多くを省略したが、この点に関しては、別の機会に発表するつもりである。

最後に、本研究の一部は文部省科学研究費によるものであることを明記して謝意を表明するとともに、本論文の作成にご協力いただいた防災研究所芝野照夫助手に深く感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) Havelock, T.H.: The pressure of water waves upon a fixed obstacle, Proc. of Royal Soc., Vol. 175, pp. 409-421, 1940.
- 2) MacCamy, R.C. and R.A. Fuchs: Wave forces on piles; a diffraction theory, Tech. Memo., No. 69, BEB, pp. 1-17, 1954.
- 3) 田中 清: 円形島による波浪の回折, 第3回海岸工学講演会講演集, pp. 33~35, 1956.
- 4) Laird, A.D.K.: A model study of wave action on a cylindrical island, Trans. of AGU, Vol. 36, No. 2, pp. 270-285, 1955.
- 5) Bonnefille, R. and P. Germain: Wave action on isolated vertical cylinders of large dimensions, IAH R Congress, London, pp. 311-318, 1963.
- 6) 永井莊七郎・久保 直・時川和夫: 超大円柱に働く波の圧力, 第21回土木学会年次学術講演会講演概要集, II-71,

- 1966.
- 7) 中村 宏・阿部宣行：発電所冷却水取水塔の水理，第 19 回海岸工学講演会論文集，pp. 391-394, 1972.
 - 8) 中村 宏・阿部宣行：海中の近接した 2 個の冷却水取水塔に作用する波力，第 20 回海岸工学講演会論文集，pp. 31-35, 1973.
 - 9) 堀川清司・渡辺 晃・勝井秀博：円柱に作用する碎波力に関する研究，第 20 回海岸工学講演会論文集，pp. 37-42, 1973.
 - 10) Chakrabarti, S.K. : Nonlinear wave forces on vertical cylinder, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. HY 11, pp. 1895-1909, 1972.
 - 11) Reid, R.O. : Estimation of wave forces on a fixed vertical cylinder of large diameter, Department of Oceanography, Agricultural and Mechanical College of Texas, 1960 (unpublished).
 - 12) 土屋義人・山口正隆：大口徑柱体に作用する波力に関する研究 (1)一波圧分布と水位変動特性について一，京大防災研年報，第 14 号 B, pp. 373-390, 1971.
(1974.3.7・受付)
-