

砂の変形における状態関数

STATE FUNCTION OF SAND DEFORMATION

諸戸靖史*・河上房義**

By Nobuchika Moroto and Fusayoshi Kawakami

1. はじめに

土質力学において、土の変形性状を明確に把握し定式化していくためには、あくまでも粒状体自身の変形特性に着目した独自の近迫を行っていくことが必要である。

砂のような粒状体の変形を取扱う場合には、金属材料を取扱う場合と大きく事情が異なってくる。それは外力によってなされる仕事が経路に依存し状態量とはならないからである。しかし、実験事実を検討することにより

$$S_s^* = \int \frac{dW_s}{p'} \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 W_s は外力によってなされるせん断に関する塑性仕事、 p' は平均主応力。

の値は (p', r) によって定まることが示される。つまり、砂の状態の変化を表わすには、平均主応力 p' とせん断ひずみ r を採用するのが適当であり、ある状態から他の状態への変化は (p', r) 平面上の初めの状態を表わす点 (p', r) と終りの状態を表わす点 (p', r) とを結ぶ曲線に沿って生ずるといえる。このような曲線はいくつも作れるが、その一つ一つが状態変化を起こす応力経路を表わす。式 (1) が状態量であるということは、初めの状態点と終りの状態点とを結んだ曲線に沿った曲線積分の値が上に述べた曲線には依存せず初めと終りの状態のみの関数であるということであり、式 (1) が状態量であることを示すことができる。

このような状態量を見つけておくことは土質力学において非常に重要になってくる。本文では、

(1) まず、式 (1) で示される状態関数が存在することを予言的に述べる。

(2) 実験事実に基づいてその状態関数の存在を検証する。

(3) 状態関数 S_s^* が存在する条件を考える。

(4) 砂のせん断に関する降伏条件を定める。

(5) S_s^* を用いて最上の粒状体理論における現象論的な側面について若干の考察を行う。

なお、本文では主に三軸圧縮試験における結果について議論し、等方で圧縮された砂供試体が単調に増大するせん断を受ける場合を取扱うものである。

2. 予備的考察

砂のような粒状体に応力 $\sigma'(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$ を作用させ、その結果として生ずるひずみ $d\varepsilon(d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3)$ を測定したとする。このときに外から供試体になされる仕事の増分 dW は、応力とひずみの符号は圧縮を正として、

$$dW = \sigma' \cdot d\varepsilon = \sigma_1' d\varepsilon_1 + \sigma_2' d\varepsilon_2 + \sigma_3' d\varepsilon_3 \dots\dots(2)$$

と書ける。供試体に荷重をかけ、その荷重を取去ると、元にもどる変形とそのまま残留する変形が見られる。前者のひずみを $d\varepsilon^e$ 、後者を $d\varepsilon^p$ と表わすと、

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \dots\dots\dots(3)$$

したがって、

$$dW = dW^e + dW^p \dots\dots\dots(4)$$

$$dW^e = \sigma' \cdot d\varepsilon^e \dots\dots\dots(5)$$

$$dW^p = \sigma' \cdot d\varepsilon^p \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 dW^e は可逆的に供試体に貯えられるエネルギーの増分であり dW^p は塑性仕事増分である。簡単のために円筒形供試体を考えて、三軸圧縮 ($\sigma_2' = \sigma_3', d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3$) の場合、式 (2) は

$$dW = p' dv + \frac{2}{3} q dr \dots\dots\dots(7)$$

$$\text{ここに、 } p' = \frac{1}{3}(\sigma_1' + 2\sigma_3'), \quad q = \sigma_1' - \sigma_3'$$

$$dv = d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3, \quad dr = d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3$$

粒状体のせん断変形はせん断応力そのものよりも、応力比により第一義的に左右されるものであることはよく

* 学生会員 工修 東北大学工学部土木工学科博士課程在学中
** 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

知られている。そこで、

$$r = G^{-1}(\eta) \text{ または } \eta = G(r) \dots\dots\dots(8)$$

ここに、 $\eta = q/p'$, $r = \epsilon_1 - \epsilon_3$

と表わしてみる。体積変形には、等方圧による成分とダイレイタンシーによる成分が見られるから、ダイレイタンシーを r の関数として

$$v = C(p') + D(r) \dots\dots\dots(9)$$

ここに、 $v = \epsilon_1 + 2\epsilon_3$

と書いてみる。これらの変形性状の設定はもちろん厳密なものではないが、粒状体の変形の要点を把えたものである。密な粒状体においては式 (8), (9) の表示は粒状体の変形の良好な近似法則である。

式 (8), (9) を用いると

$$dW = p' \{ C'(p') dp' + D'(r) dr \} + \frac{2}{3} q dr \dots\dots\dots(10)$$

ここに、 $C'(p') = \frac{dC(p')}{dp'}$, $D'(r) = \frac{dD(r)}{dr}$

式 (10) を p' と r で表わすと

$$dW = p' C'(p') dp' + p' \left\{ D'(r) + \frac{2}{3} G(r) \right\} dr \dots\dots\dots(11)$$

式 (11) の右辺に対して

$$\frac{\partial}{\partial r} \{ p' C'(p') \} - \frac{\partial}{\partial p'} \left\{ p' \left(D'(r) + \frac{2}{3} G(r) \right) \right\} \neq 0 \dots\dots\dots(12)$$

となり、完全微分でないから、式 (11) の右辺の積分は経路に依存することがわかる。すなわち、粒状体において外力によってなされる仕事は状態量とはなっていない経路に依存するものなのである。

そこで、式 (11) で表わされる微分形式において、積分因数 $1/p'$ を見つけて作用させると、

$$\frac{dW}{p'} = C'(p') dp' + \left\{ D'(r) + \frac{2}{3} G(r) \right\} dr \dots\dots\dots(13)$$

となる。この dW/p' は完全微分形式である。ここで、

$$dS^* = \frac{dW}{p'} \dots\dots\dots(14)$$

とおく。上式を積分すると

$$S^* = \int \frac{dW}{p'} = \int dv + \frac{2}{3} \int \eta dr \dots\dots\dots(15)$$

いうまでもなく、式 (14) で定義された関数 $S(p', r)$ の値を種々の積分路について求めても、その値は積分路によらない。この式 (14) で定義される状態関数 S^* は砂のような粒状体の変形において重要な意味をもつ興味ある状態量であると予想される。

以上の結論は式 (8), (9) を正しいとしたときにでてくるものである。もちろん、一般の砂ではせん断時の挙動に応力比 η ばかりではなく平均主応力 p' も関与し

てくるから、上に求めた結果が正しいかどうか問題である。しかし、あとで述べるように実験事実に基づいて検討すると式 (14) で定義される状態量を考えてよいようである。このことは、また、せん断時における体積収縮量 $\int dv$ が大きいものほど一定せん断ひずみ r に対する $\int \eta dr$ の値が小さいという一般的傾向からも推測される。

3. 三軸試験結果による検討

本文では、最初等方で圧縮され、次に単調に増大するせん断力を受ける砂供試体の変形を取扱っている。等方圧縮段階の変形量まで含めて式 (15) の積分を考える場合を

$$S^*_{cs} = \int \frac{dW}{p'} = v_0 + \int dv + \frac{2}{3} \int \eta dr \dots\dots\dots(16)$$

v_0 : 等方圧縮時の体積ひずみ

v : せん断中の体積ひずみでダイレイタンシー成分 v_d と等方圧力による成分 v_e との和とする。また、せん断だけに着目して式 (15) の積分を考える場合を

$$S^*_s = \int \frac{dW_s}{p'} = \int dv_d + \frac{2}{3} \int \eta dr \dots\dots\dots(17)$$

dW_s : せん断力によってなされる仕事の増分

v_d : ダイレイタンシーによる体積ひずみ

とする。竜岡¹⁰⁾の試験結果を用いて式 (16) と式 (17) で示される関数を検討する。彼は密な砂およびゆるい砂について一連の三軸試験を行った。その試験は、まず、等方で所定の圧力まで圧縮した後、側圧一定、軸圧一定、平均主応力一定などの条件の下でせん断するものであった。彼はそれらの試験データを整理し、それぞれの場合につき $v-q/p'$ 関係および $r-q/p'$ 関係を求め示している。それらのグラフを用いて次の \bar{S}^* の値を求めよう。

$$\bar{S}^* = \int dv + \frac{2}{3} \int \eta dr \dots\dots\dots(18)$$

式 (18) の右辺第一項は $v-q/p'$ 曲線から求まる。右辺第二項は $r-q/p'$ 曲線上の $q/p' = 0$ から第一項の v の値を求めたのと同じ q/p' の値までの曲線と座標軸 r との間の面積を算定することにより求まる。それらの両者から \bar{S}^*-r の関係が書ける。平均主応力一定試験では $\bar{S}^* = S^*_s$ である。もとの関係、すなわち $r-q/p'$ 曲線および $v-q/p'$ 曲線、そのものでみると砂の変形法則は必ずしもまとまった形で把握され易いとはいえない。しかし、上述のような方法で \bar{S}^*-r の関係を求めてみると、図一~6 で明らかなように、 \bar{S}^*-r 関係は各応力経路ごとにほぼ一つの直線に集まってくるのがわかる。このことは面白いことである。 \bar{S}^* の値に等方圧縮時の体積

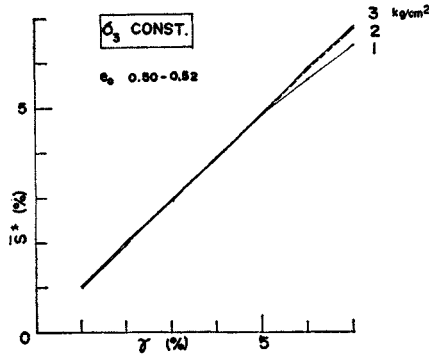


図-1 σ_3 一定試験における $\bar{S}^*-\gamma$ 関係 (相模川砂), 三軸圧縮試験

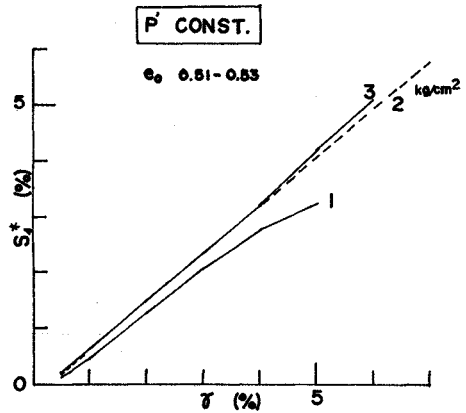


図-5 p' 一定試験における $\bar{S}_s^*-\gamma$ 関係 (相模川砂), 三軸圧縮試験

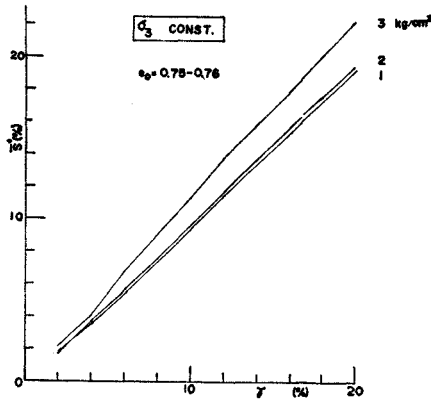


図-2 σ_3 一定試験における $\bar{S}^*-\gamma$ 関係 (相模川砂), 三軸圧縮試験

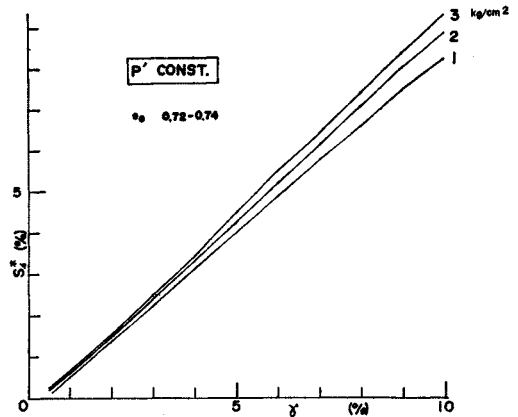


図-6 p' 一定試験における $\bar{S}_s^*-\gamma$ 関係 (相模川砂), 三軸圧縮試験

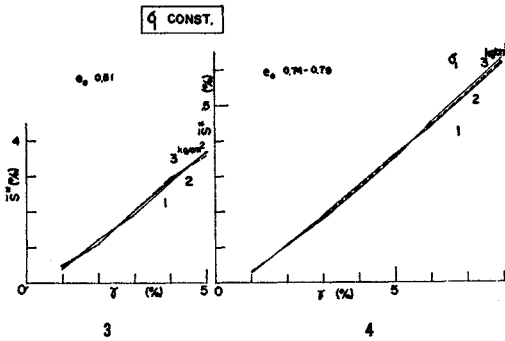


図-3 σ_1 一定試験における $\bar{S}^*-\gamma$ 関係 (相模川砂), 三軸圧縮試験

図-4 σ_1 一定試験における $\bar{S}^*-\gamma$ 関係 (相模川砂), 三軸圧縮試験

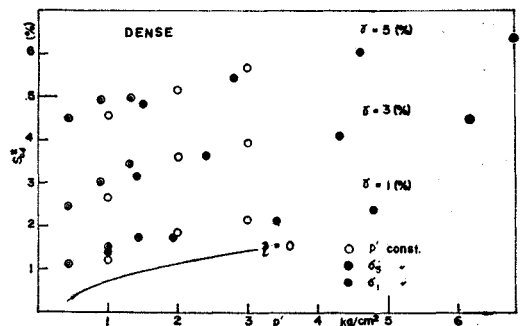


図-7 γ 一定に対する \bar{S}_{cs}^* の値 (相模川砂), 三軸圧縮試験

ひずみ v_0 を加えると、式 (16) の S_{cs}^* が求まる。そこで、図-7, 8 に r に対して S_{cs}^*-p' 関係を書いてみる。各 r に対する S_{cs}^* の点群は等方圧縮線にほとんど平行な曲線群を形成していることがわかる。等方圧縮の段階を含みあるせん断経路に沿って変形が行われるとき、砂が密なときおよびゆるいときの両方とも S_{cs}^* は

初めと終りの状態 (p', r) がきまれば定まることが示されたことになる。つまり、式 (16) の S_{cs}^* は (p', r) によって定まる状態量であることがわかる。しかし、このとき同じ (p', r) に対する S_{cs}^* の値は砂の粗密によって明らかに異なるから、次にせん断だけに着目して定められている式 (17) の関数 S_s^* を調べてみる。

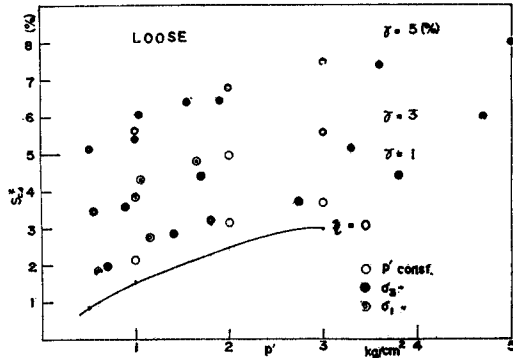


図-8 γ 一定に対する S_{cs}^* の値 (相模川砂, 三軸圧縮試験)

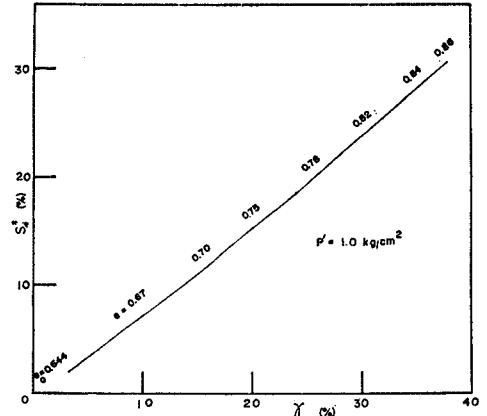


図-11 p' 一定試験における $S_s^*-\gamma$ 関係 (豊浦砂, 三軸圧縮試験)

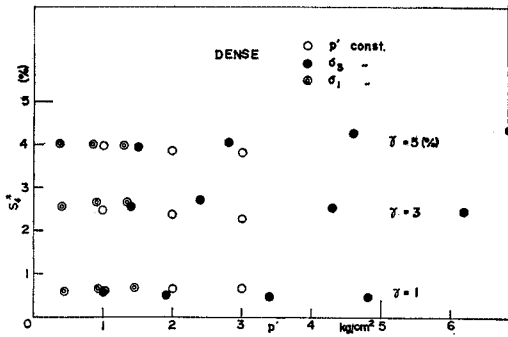


図-9 γ 一定に対する S_s^* の値 (相模川砂, 三軸圧縮試験)

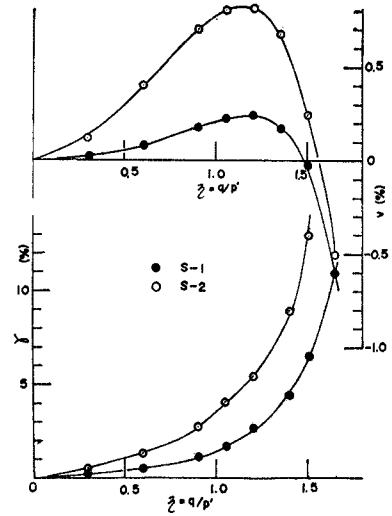


図-12 p' 一定試験における $\eta-\gamma$ 関係および $\eta-v$ 関係, 三軸圧縮試験

(新潟砂, 細砂, 高さ 6 cm × 直径 5 cm の円筒形供試体, Free-end-plate, 載荷は手動できわめて緩速), 三軸圧縮試験

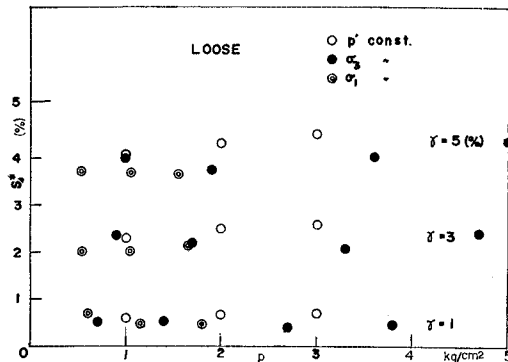


図-10 γ 一定に対する S_s^* の値 (相模川砂), 三軸圧縮試験

等方圧縮試験における処女載荷曲線および除荷曲線を用いて、式 (18) で示す \bar{S}^* の値から等方圧力による体積ひずみを差し引けば S_s^* が求まる。つまり、三軸圧縮試験においては、 σ_3 一定の場合、せん断応力経路を出发させる初期の等方圧力と各せん断段階における平均主応力間の等方圧縮曲線上の体積ひずみを \bar{S}^* の値から差し引けばよい。また、 σ_1 一定試験では、等方除荷曲線上の体積ひずみを \bar{S}^* に加算すればよい。このようにして求めた S_s^* の値を各 γ に対して S_s^*-p' 平面上に書

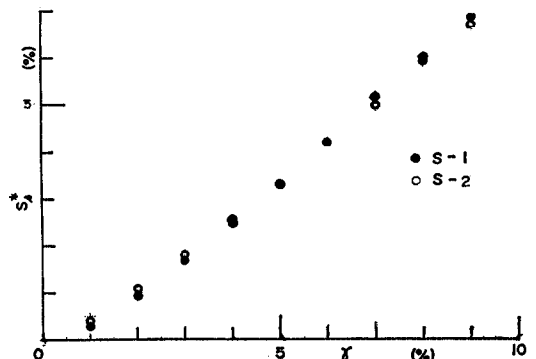


図-13 p' 一定試験における $S_s^*-\gamma$ 関係 (新潟砂, 三軸圧縮試験)

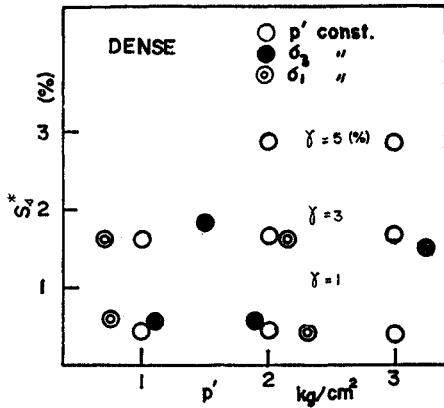


図-14 γ 一定に対する S_s^* の値 (相模川砂), 三軸伸張試験

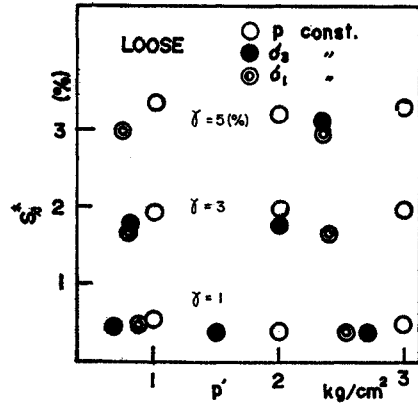


図-15 γ 一定に対する S_s^* の値 (相模川砂), 三軸伸張試験

いたのが図-9, 10である。これらの図で γ 一定であると S_s^* の値は p' によらないことが示されている。つまり, S_s^* という量は等方圧力による容積変形を \bar{S} の中の容積変形から除外して求めたものであるが, このような S_s^* は図-9, 10 を比較すると明らかなように, 砂の粗密によってあまり変わらず, せん断経路によらず, 初めと終りの状態のみによって定まるといえそうである。したがって, S_s^* のほうが S_{cs}^* よりも重要な状態関数であると考えられる。

ここで, 状態関数 S_s^* につき補足資料を示しておく。八木¹⁹⁾は密な豊浦砂について平均主応力一定の排水三軸圧縮試験を行った。彼のデータは式(8)と式(9)で表わされる変形法則が良好に適用できるものであった。そのデータをもとにして $p'=1.0 \text{ kg/cm}^2$ 一定の場合につき式(17)の S_s^* を求め γ に対して書いたのが図-11である。せん断ひずみが40%近くになるまでせん断され, 間げき比は初期間げき比は0.64であったものがせん断ひずみが最大にのびたところでは0.84まで増大している。このように, 間げき比が変形の途中で大きく変わっても, またせん断ひずみが大きくでている場合でも, S_s^* - γ 関係の直線性は良いものである。ただし詳細に観察すればせん断初期における S_s^* - γ 関係の傾きはそれ以後のものよりいくぶん小さくなっている。

図-12には, 筆者らの実験室で行った新潟砂(細砂)の排水三軸圧縮試験結果を示した。せん断は等方圧縮後, 平均主応力一定 ($p'=1.0 \text{ kg/cm}^2$) で行われた。図-12, 13において, S-1は, 最初密な状態に作製した供試体を水で飽和させたまま冷凍庫の中に12時間放置しておき, 凍った供試体を三軸室内で溶かした場合の結果である。S-2は, S-1と同程度の密度に作った供試体をそのまま試験に用いた場合の結果である。両者の場合につき S_s^* - γ 関係を示すと図-13のようになる。S-1

はいったん凍結作用を受けた供試体についての結果であるから, 当然一定の応力比に対するダイレイタンスーによる圧縮量もせん断ひずみもS-2の場合よりも大きくなっている(図-12)。しかし, 図-13からわかるように S_s^* - γ 関係においては両者の違いは見られない。

いままでの議論は三軸圧縮試験に対するものであった。では, 三軸伸張試験についてはどうであろうか。ここでは, 三軸圧縮試験と三軸伸張試験とによる結果の違いを調べることが本意でないから多くを述べない。圧縮の場合と同様竜岡¹⁴⁾のデータにより伸張の場合を検討してみた。結論を先にいうならば, 両者とも同じ内容の議論を展開できることがわかった。ちなみに, 三軸伸張試験の場合について γ 一定に対する S_s^* の値を S_s^* - p' 平面に書いてみると図-14, 15のようであった。図-14, 15と図-9, 10とは同じ意味を示すものであることは明らかである。ただ, 一定のせん断ひずみ γ に対する S_s^* の値は三軸圧縮の場合のほうが三軸伸張の場合よりも大きくなっている。このことは, 一般の三次元応力状態について中間主応力が変形に与える影響を調べる必要があることを示しているものと考えられる。三軸伸張の場合は,

$$S_s^* = \int dv_a + \frac{2}{3} \int \eta dr \dots\dots\dots (19)$$

$$\text{ここに, } \eta = q/p' = (\sigma_1' - \sigma_3') / \frac{1}{3} (2\sigma_1' + \sigma_3')$$

$$\gamma = \epsilon_1 - \epsilon_3$$

$v_a : v = 2\epsilon_1 + \epsilon_3$ のダイレイタンスー成分である。

4. 新しく導入された状態関数

等方圧縮状態を出発点としてそこからせん断が始まる

場合、砂のせん断変形を規定する状態量の存在が示唆されたが、その存在の意味するところを議論してみる。

式 (16), (17) で示される関数 S_{cs}^* , S_s^* が状態量であることは

$$S_{cs}^* = f_{cs}(p', r) \dots\dots\dots(20)$$

$$S_s^* = f_s(r) \dots\dots\dots(21)$$

なる一義的な関係が成り立つことである。処女せん断変形の際、可逆的な変形は無視してもさしつかえないというのが大方の見方である。したがって式 (17) の dW_s は塑性せん断仕事と見てさしつかえないことになる。このことは、状態関数 S_s^* がせん断に関する塑性仕事を規定するものであることを示している。一方、等方で砂を圧縮する場合の変形を調べてみると、一般に第一回目の载荷と除荷のサイクルでは可逆的なひずみばかりでなく大きなヒステリシスループが見られる。レオナード、ロスコーら⁹⁾ や最上⁹⁾ は、この等方圧力下におけるエネルギー消散を局所的なせん断によるものとしている。つまり、等方圧縮でも、全体としてはせん断が生じなくても、局所的にはせん断が生じエネルギーが消費されるというのである。コトスコットの¹⁾ はそのようなことはないものと考えているが、砂の等方圧縮における第二回目以後の载荷サイクルではヒステリシスループの面積は小さいことを考えると、コトスコットの見方は砂の初期の不均一なならび方が解消された場合に適用されるものと考えられる。状態関数 S_{cs}^* は等方圧縮成分を含むものであるから、塑性仕事ばかりでなく、内部に貯えられるエネルギーも S_{cs}^* の値に関与しているものと考えられるのである。

さて、式 (20) から

$$dS_{cs}^* = \left(\frac{\partial S_{cs}^*}{\partial r}\right)_{p'} dr + \left(\frac{\partial S_{cs}^*}{\partial p'}\right)_r dp' \dots\dots(22)$$

添字 p' , r は p' 一定, r 一定を示す。この微分形式は完全微分となっているはずである。この条件は、

$$\left(\frac{3}{2}\right) \frac{\partial}{\partial p'} \left(\frac{\partial S_{cs}^*}{\partial r}\right)_{p'} = \left(\frac{3}{2}\right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial S_{cs}^*}{\partial p'}\right)_r \dots\dots\dots(23)$$

図-7, 8 に示すように、 r 一定に対する S_{cs}^*-p' 曲線はほとんど平行である。したがって、 $(\partial S_{cs}^*/\partial p')_r$ の値は r によらない。ゆえに、 $(\partial S_{cs}^*/\partial p')_r = 0$ である。式 (23) の右辺が 0 であるから等号が成り立つためには、

$$\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\partial S_{cs}^*}{\partial r}\right)_{p'} = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{p'} + \eta = \left(\frac{3}{2}\right) \frac{dv_d}{\partial r} + \eta = \text{一定または } r \text{ だけの関数} \dots\dots\dots(24)$$

となっていなければならない。上式で示される条件式が、式 (17) の S_s^* が状態関数となる条件ともなっ

ていることは容易に理解できる。 $2/3 r = \epsilon$ とおき、式 (24) を書き換えると

$$\left. \begin{aligned} \eta_\mu &= \eta + \frac{dv_d}{d\epsilon} \\ \eta_\mu &= \frac{dS_s^*}{d\epsilon} = \frac{dW_s}{p' d\epsilon} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

のようになる。

式 (25) に示されている関係式はとりもなおさずエネルギー修正式となっており、また応力比・ひずみ増分比関係であることに気がつく。トゥレラジャとロスコー¹⁴⁾ は、実験的に次のようなエネルギー修正式を導いている。

$$\left(\frac{1}{p'}\right) \frac{dW^p}{d\epsilon} = \eta + \frac{dv}{d\epsilon} \dots\dots\dots(26)$$

彼らは、処女せん断変形における弾性的変形を無視し、等方圧による圧縮は全部弾性的なものであるとしているから、式 (25) と式 (26) とは同じものであることがわかる。

以上調べてきたように、式 (16), (17) で示される状態関数が存在する条件は、ダイレイタンシー効果を除外した応力比、式 (25) の η_μ がせん断ひずみだけの関数あるいは一定値をとることである。つまり、砂の發揮する物理的な理由による内部摩擦角が変形を通じて一定となっていたり、せん断ひずみだけによって表わされる場合に S_s^* や S_{cs}^* が状態量となるのである。実際、 S_s^* や S_{cs}^* を状態関数と見なしてよいことがわかっているから、現実の砂のせん断変形は上述のようなものと考えられる。また、式 (21) を見れば明らかなように、砂のせん断現象においてせん断ひずみ r が本質的な役割をしているのである。

式 (25) の μ_μ は、スコフィールドとロス⁹⁾ によって提案されているグランタ・レキ (Granta Gravel) の式

$$\frac{q}{p} = M - \frac{dv}{d\epsilon} \dots\dots\dots(27)$$

の中の定数 M および松岡⁹⁾ の式

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \lambda \cdot \left(-\frac{d\epsilon_N}{dr}\right) + \mu \dots\dots\dots(28)$$

λ : 定数, μ : 係数, τ_N : せん断面上のせん断応力, σ_N : せん断面上の垂直応力, ϵ_N : せん断に対する垂直方向のひずみ

の中の μ に相当する。式 (25) において、 $dv_d/dr = 0$ における応力比を $\eta_\mu = \eta_c$ とする。また、この場合のせん断ひずみを $r = r_c$ とする。 r_c と η_c の関係を竜岡のデータを用いて書いたのが 図-16 である。密な供試体における σ_s 一定試験では η_c はほぼ一定になっているが、他の試験では、 η_c の値は r_c の値により変化している。しかし、 η_c-r_c 関係は p' には依存しないある特定の関係を有しているようである。このことは式 (25) の

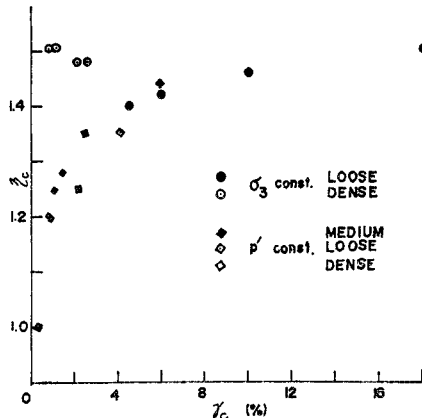


図-16 η_c と γ_c との関係 (相模川砂), 三軸圧縮試験

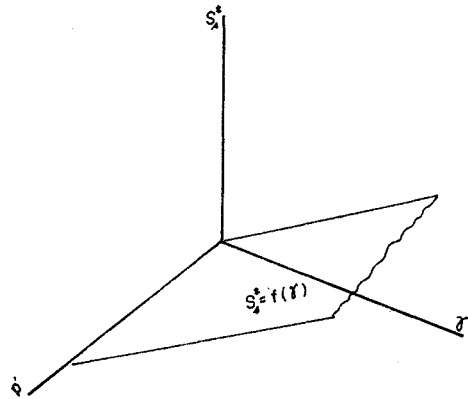


図-17 (S_s^* , p' , r) 状態空間と状態平面

$$dS_s^* \equiv \frac{dW_s}{p'} \equiv dW_s = 0 \dots \dots \dots (32)$$

条件を満足するものであり、間げき比にかかわらず状態関数 S_s^* が存在することに対する一つの傍証を与えるものであると考えられる。

5. せん断に関する降伏条件

われわれは、等方で圧縮した砂供試体を単調に増大する経路でせん断する場合を取扱っている。このような場合には常時塑性変形が生じている。せん断に関して塑性変形が生ずる条件は、

$$dW_s > 0 \dots \dots \dots (29)$$

である。つまり、ここで対象としている変形は、ある瞬間、ある瞬間に

$$dW_s = 0 \dots \dots \dots (30)$$

で指定される状態を、せん断の程度の小さい状態からせん断の程度の大きい状態へと常に登りつめていくものであると解釈される。

いままでに、外力によってなされる塑性せん断仕事 W_s は経路に依存するから、新しく導入した状態関数 S_s^* を用いて砂の状態を調べていく必要があることを述べてきた。塑性変形が進展していく状態を規定する条件を降伏条件とよぶが、せん断に関して降伏条件を考えていく上で S_s^* は重要となってくる。砂の状態を図-17 に示す (S_s^* , p' , r) 空間で表現するとき、その塑性変形状態を表わす点は、砂の粗密によってあまり変らない一つの曲面上にのってくる。この状態曲面の式は式(21)の

$$S_s^* = f_s(r)$$

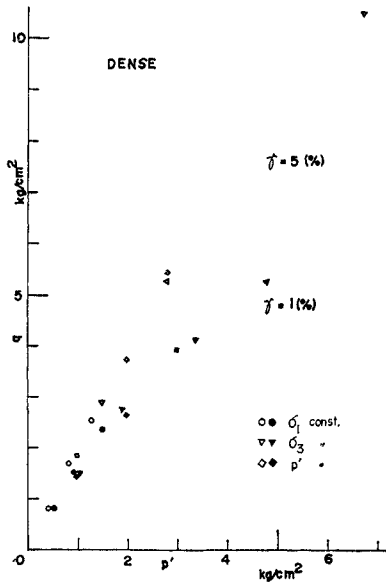
である。この曲面上で

$$S_s^* = \text{一定} (dS_s^* = 0) \dots \dots \dots (31)$$

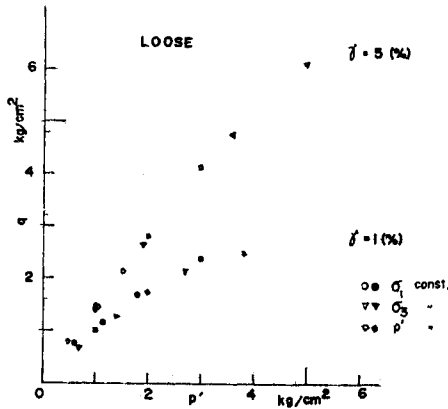
である場合を考える。式 (17) における S_s^* の定義から

となる。上式の右边が0である場合に限り、 $dW_s = 0$ と $dS_s^* = 0$ は同等となる。このことは、式 (31) で示される条件が降伏条件となることを表わしている。つまり、 $dS_s^* = 0$ ($S_s^* = \text{一定}$) で示される状態は $dW_s = 0$ ($W_s = \text{一定}$) で示される塑性仕事のない状態を、もちろんせん断経路にかかわらず、順次規定するものなのである。式 (31) は、(S_s^* , p' , r) 状態空間において、式 (21) で表わされる状態平面上で p' 軸に平行な多くの平行線群を作る。砂の状態がそれらの平行線群のどの線上に位置するものであるかはせん断ひずみ r の大きさによって定まる。このことは、 S_s^* が r だけの関数として表わされること、あるいは r 一定状態に対する各応力経路の S_s^* の値が 図-9, 10 の $S_s^* - p'$ 平面上で p' 軸に平行な点群を作っている実験結果から容易に理解される。

以上述べてきたことから、せん断ひずみ r の値がせん断の応力経路にかかわらず S_s^* の値を定めるものであることがわかる。すなわち、等 r 状態が降伏条件を与えることが理解できる。竜岡は、等 r 状態を与える応力点 (p' , q/p') は応力経路によらずに ($p' - q/p'$) 平面上においてある定まった曲線上にあることを示し、この曲線を等 r 線とよんでいる。つまり、複数の同じ初期間げき比をもつ砂供試体を等方でそれぞれある圧力まで圧縮した後、異なった応力経路でせん断する。このとき、各供試体について観測されるせん断ひずみ r は応力経路にかかわらず応力だけの関数として表わされる。竜岡¹²⁾は砂の三軸試験結果からせん断変形に関してこのような重要な性質があることを見出した。竜岡の等 r 線は砂のせん断に関する降伏条件を与えるものである。このことは、筆者らが状態関数 S_s^* を導入しせん断に関する降伏条件を議論してきたことから明らかである。等 r 線を (p' , q) 応力平面上に示すと図-18, 19 のようである。したがって、砂の降伏条件は q/p' 一定ではなく p' が大



図一八 等 γ 線 (相模川砂), 三軸圧縮試験



図一九 等 γ 線 (相模川砂), 三軸圧縮試験

きくなるほど、応力比が小さくなる傾向にあるが、本質的にはモール・クーロンの形をしていることがわかる。すでにプールシャスプ⁷⁾はこのような降伏条件を砂について考え用いている。竜岡¹³⁾もプールシャスプの行き方に習っている。筆者らはここに、砂のせん断に関する降伏条件について調べ、モール・クーロンのものが妥当であるという明確な根拠を示したことになる。

6. 最上の粒状体理論³⁾ に関する一考察

砂は砂の粒が集まってできている。砂の粒の集まりが示す変形は微視的な過程によるものである。このような現象は、確率統計的手法を用いた力学や情報理論的考察の対象となる。粒状体の力学において、最上は粒状体の

エントロピーという量を定義した。熱力学、統計力学、情報理論などにおいて状態量エントロピーは微視的な過程による現象を巨視的に把える必要がある場合に有用な概念であるとされている。

最上の考えは次のようである。定まった間げき比をもつ粒状体はいろいろな状態 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ をとり得る。いま、粒状体の状態が A_i である確率を $P(A_i)$ とするとき、状態の不確かさを表わす数 U は、シャノンの考え方によると

$$U = -K \sum P(A_i) \log P(A_i), \quad K: \text{定数} \dots (33)$$

である。粒状体の変形に関して一般的にこの U の形を求めることは困難である。ただ、

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dots = P(A_n) \dots (34)$$

の場合、式 (33) は

$$U = -K \sum \log P(A) \dots (35)$$

となる。そして、せん断変形がかなり大きくなり、ほぼせん断応力が一定となっている変形領域において、式 (35) を用いるのは、おかしくないというのである³⁾。

式 (35) を用いて定義される最上の粒状体のエントロピーは

$$S = K \left[(1+e) \log(1+e) - e \log e - \frac{s}{2e(1+e)} \right] \dots (36)$$

e : 平均的な間げき比

s : 間げき比のばらつき

である。 e と s とが独立であると仮定すると、 S の増分は

$$dS = K \left[\left\{ \log \frac{1+e}{e} + \frac{(1+2e)s}{2e^2(1+e)^2} \right\} de - \frac{1}{2} \frac{1}{e(1+e)} ds \right] \dots (37)$$

となる。

最上・今井⁴⁾のモデル粒状体についての実験において、せん断の後のほうでは、間げき比 e とそのばらつき s はほぼ一定値をとっている。したがって、その辺では若干のゆらぎはあるが、 S の値はほぼ一定となっているものと考えられる。一方、式 (17) で定義される状態関数 S_s^* は変形が進むにつれて常に増大する。この点 S と S_s^* は性格の異なる状態量である。しかし、砂のせん断変形に関する状態は $dS_s^* = 0$ として規定される。せん断変形後のほうでは最上のエントロピーは $dS = 0$ となっているものと考えられる。この辺に対象とする変形領域をしばれば

$$dS \equiv dS_s^* = 0 \dots (38)$$

という関係式を用いて砂の状態を規定していける。最上の論文において、いわゆる $(e, s) \rightleftharpoons (e, r)$ 変換を用いて式 (36) の S の増分は次のように書かれている。

$$dS = K \{ A de + k A dr \} \dots\dots\dots (39)$$

$$\text{ここに, } A = - \left\{ \log \frac{1+e-kr}{e-kr} + \frac{s_0}{2} \frac{(1+2e-2kr)}{(e-kr)^2(1+e-kr)^2} \right\}$$

$s_0: r=0$ のときの s

一方,

$$dS_s^* = \frac{de}{1+e} + \frac{2}{3} \eta dr \dots\dots\dots (40)$$

式 (38) を通して式 (39) と式 (40) を比べると,

$$\eta = \frac{k_m}{1+e}, \quad k_m = \frac{3}{2} k \dots\dots\dots (41)$$

k : 最上の k

を得る。この式は三軸試験の場合の最上の式と同じものである。最上は式 (36) の S を塑性ポテンシャルとして式 (41) のような結果を得ている。ここに、 S が塑性ポテンシャルであるなしにかかわらず、式 (41) を導くことが示されたわけである。砂の強度公式として式 (41) の有用性は示されている。

砂の集まりの配列構造を表わす状態量を定義し、あわせて砂の集まりの巨視的な変形に関する状態量を見出し、その両者の関連を調べていくことは、砂の力学的特性の取扱いにおいて、正統的な行き方であると考えられる。このような意味において最上により始められた粒状体の力学理論の示す方向は今後の土質力学の研究に対して非常に示唆的であるといえよう。

7. ま と め

(1) 砂のような粒状体では、外力によってなされる仕事は状態量とはならない。この点金属材料を取扱う場合と大きく事情が異なっていることを見出した。

(2) 砂の三軸試験結果を検討し、式 (17) と式 (16) によって定義される状態量 S_s^* 、 S_{cs}^* を考えてもよいことがわかった。

(3) 状態量 S_s^* は外力によってなされる塑性せん断仕事を規定するものであり、砂供試体の初期の締め具合にあまりよらないことがわかった。状態量 S_{cs}^* は等方圧縮とせん断の両成分を含むもので、塑性仕事ばかりでなく、等方圧縮に関する弾性的なエネルギーにも関連するものであり、砂供試体の初期の締め具合によって明らかに左右されていることを知った。

(4) 砂の状態の変化を表わすには平均主応力 p' とせん断ひずみ r を採用するのが適当であり、その状態の変化は状態空間 (S_s^* , p' , r) における状態曲面 $S_s^* = f_s(r)$ 上の状態点 (p' , r) の移動で表わされることを見出した。

(5) 状態量 S_s^* 、 S_{cs}^* が存在する条件は

$$\eta_\mu = \frac{dW_s}{p' d\epsilon} = \eta + \frac{dv_d}{d\epsilon} = \text{一定または } \epsilon \text{ だけの関数}$$

となることであり、この式はとりもなおさず土質力学において、エネルギー修正式あるいは、応力比・ひずみ増分比関係式となっていることを述べた。

(6) 式 (17) で定義された状態量 S_s^* を用いて砂のせん断に関する降伏条件を示した。そして竜岡の等 r 線が砂のせん断に関する降伏条件となることを示した。

(7) 砂のせん断に関する降伏条件はモール・クーロンのなものであるという明確な根拠を示した。

(8) 状態量 S_s^* を用いて最上の粒状体理論の現象論的側面を筆者ら自身にとって理解しやすいかたちで考察した。そして、式 (36) の粒状体のエントロピーを塑性ポテンシャルとしなくても最上の強度式が求められることを示した。

以上のような知見は粒状体としての砂の変形性状を理解し表現していく上で重要であると考えられる。このように砂の変形に関する基本的な考察を加えておくことができる実用公式を定めていく際にも要望されるものである。今後、微視的、巨視的両面から砂の変形に関するより一般的な状態量を追求し、その両者の関連を調べていかなければならない。そうすることにより、砂の微視的な配列構造の表現をも含む砂の集まりの全体的な変形に関する応力・ひずみ関係式が導かれるものと考えられる。

謝 辞：文末ではあるが、 S_s^* その他について深いご示唆と温いご教示とをいただいた日本大学 最上教授に心から感謝の念を表します。建設省 竜岡文夫氏には貴重なデータの提供を受けた。本学 佐武正雄教授からも有用なご教示を受けた。ここに記して深くお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) Ko, H.Y. and R.F. Scott: Deformation of Sand in Hydrostatic Compression, Proc., ASCE, SM 3, May, pp. 137-156, 1967.
- 2) Matsuoka, H.: Deformation Characteristics of Soil, Dept., Civ. Engg., Kyoto Univ., Aug., 1973.
- 3) 最上武雄編: 土質力学, 第8章, 技報堂土木工学叢書, 1969.
- 4) Mogami, T. and G. Imai: On the Failure of the Granular Material, Soils and Foundations, Vol. VII, No. 3, pp. 1-19, 1967.
- 5) 最上武雄: 粒状体に統計力学的手法を適用する 限界および意味, 第24回年次学術講演会講演概要集, 第三部, 土木学会, 1969.
- 6) Mogami, T.: A Report on Stress-Strain Relationship of Sand, presented to the First Iranian Congress of Civil Engineering and Engineering Mechanics, Pahlavi University, Shiraz, Iran, May, 1972.
- 7) Poorooshasb, H.B.: Deformation of Sand in Triaxial

- Compression, Proc., 4th Asian Regional Conference, Vol. 1, pp. 63-66, 1971.
- 8) Roscoe, K.H., A.N. Schofield and A. Thurairajah : Yielding of Clays Wetter than Critical, Geotechnique, Vol. 13, No. 4, pp. 211-240, 1963.
 - 9) Schofield, A.N. and C.P. Wroth : Critical State Soil Mechanics, McGraw Hill, London, 1968.
 - 10) 竜岡文夫：三軸せん断装置による砂の変形特性，東京大学学位請求論文，1972.
 - 11) 前出 10)
 - 12) 前出 10) または竜岡文夫：三軸圧縮における砂の応力-歪特性，第 26 回年次学術講演会講演概要集，第Ⅲ部，土木学会，1971.
 - 13) 前出 10) または竜岡文夫・吉原光美：三軸装置における砂の応力-歪特性，第 8 回土質工学研究発表会，発表講演集，土質工学会，1973.
 - 14) Thurairajah, A. and Roscoe, K.H. : The Correlation of Triaxial Compression Test Data on Cohesionless Granular Media, Proc., 6th I.C.S.M.F.E., Vol. 1, pp. 377-381, 1965.
 - 15) 八木則夫：砂のせん断抵抗について，京都大学防災研究所年報，第 13 号 B, pp. 493-503, 1970.

(1973.11.26・受付)