

管路水輸送システムのグラフ理論的解析*

GRAPH-THEORETIC ANALYSIS FOR PIPELINE SYSTEMS

常 松 芳 昭**
By Yoshiaki Tsunematsu

1. 緒 言

水需要の急激な増大はわが国のみならず世界的にも共通するものであり、水資源の確保が緊急を要する重要課題となっている。現実には、経済の高度成長ならびに都市への極端な人口集中による水需要の増大と偏在化は、もはやその周辺の限られた地域の水資源のみでは解決しえない問題を提起している¹⁾。さらにまた、人類活動の広範化かつ多様化に伴う水資源環境の悪化、公共水域の汚染等は必要などきに必要だけの水量を、しかも望ましい水質を獲得することを困難にしているのみならず、良質な水資源を得られる水源適地がしだいに山間奥地に限定される要因ともなっている。

このような水需給の逼迫化傾向に対処するためには、いくつかの政策的課題のほかに、重要な技術的課題も考えられなければならない。後者の主要なものに、用排水施設、取水・給水施設等の各種水管理施設の整備を行い、水利用のいっそうの合理化を推進すること、および水の高度開発ということの二つがある。このうち、水の高度開発のための技術的方法にはいくつかが考えられるが、相異なる複数の水系間を連絡する大規模長距離の多目的導水路網の建設はその一つであろう。

このように現実の水需給の問題には広域的かつ長期的な高度の技術的手段によらなければ解決されないものが多い。

ところで、前述の多目的導水路網による流域変更法や広域利水計画等を物理的に表現したものは水の輸送システムである。水理学において、これは、利用される水の輸送原理によって、圧力輸送システム(管路系)と重力輸送システム(開水路系)とに分けられる²⁾。いうまでもなく、前者は非圧縮性によって圧力の高いところから

低いほうへと流れる水の性質を利用したものである。しかし、利水計画が広域利水の方向に進むかぎり、水の供給地点と需要地点は空間的にかなり散在することになり、それに伴う水の圧力輸送システムは今後ますます大規模複雑化することが予想される。

圧力輸送システムの水理解析に関する従来の研究は、主として上水道の分野において副次的になされてきたにすぎず、問題を水理学において慣用される分布型システムとして取扱ったものがほとんどであるといつてよい。

ところが、輸送という点に重点をおいて取扱うとき、複雑な圧力輸送システムを分布型の表現よりもむしろこの型を単純化した集中型システムによるものに、グラフ理論の応用ならびに計算機シミュレーションを用いた水理解析が技術的にも実際的にもすぐれているといえよう。本研究はこのような観点に基づいて行われたものである。

2. 圧力輸送システムと有向グラフの相似性

従来の圧力輸送システムの水理計算法は管網計算における連立方程式を解く手法に関するものがほとんどであり、管網を有限個の素子の組み合わせで構成されるシステムとして取扱い、計算手法の総合化を試みた研究は少ない。実際、システムが複雑になると、比較的方法が単純なことから計算精度の点からしばしば用いられる Hardy Cross 法³⁾を基本とする各種の逐次近似計算法の手数はきわめて多くなる。それゆえ、複雑な圧力輸送システムに対しては、なんらかの簡単かつ実用的な水理計算法の展開が重要な課題となる。

一般に、圧力輸送システムは管、バルブ装置、ポンプ、貯留装置およびその他の構成要素から成り立っている。このシステムは電気回路網系、質点系、剛体系などと同様に、システムの有限個の構成要素が有限個の点で連結されたいわゆる集中型システム(Lumped System)

* 土木学会第 26 回年次学術講演会 II-152 にて一部発表

** 正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科

として取扱うことができるものの一つである。

一方、有向グラフは点と向きをもつ線から構成される線図である。これに関してグラフ理論で現在用いられている用語は標準化されていない。そこで、本論文ではグラフの点を節点 (Node)、線を枝 (Branch) と記述することにしておく。

さて、管路系を集中型システムとし、管路を枝で、管路接合部およびその他の構成要素を節点で描くと、これは一つのグラフで表現される。H.M. Trent⁴⁾ は、一般にある物理システムに関して Kirchhoff の電流法則および電圧法則にしたがう二つの状態変数、すなわち横断変数 (Across Variable) と通過変数 (Through Variable) との間に関数関係が存在している場合には、その物理システム全体に関する本質的な情報を導きだすのに有向グラフを利用する方法を展開している。その中で、彼は流体運動の記述に関するグラフは Euler および Lagrange の二つの解析法によってまったく異なる表現となることを示している。また同時に、管路系における流れを問題にすると、Euler の方法では横断変数および通過変数にそれぞれ圧力差 および流量が対応し、Lagrange の方法のもとではこれと逆の対応関係があることも示している。

以上要するに、圧力輸送システムは、その状態変数に流量とエネルギー位とを考え、性質の等しい管路部分を枝に、また管路接合部を節点に結びつけ、そして流体の流れを枝の向きに結びつければ、有向グラフによって取扱うことができる。

圧力輸送システムは少なくとも次の三つの基本的要素を具備していなければならない。すなわち、流れを発生、保存および吸収する要素である。これは一般に有向グラフの節点集合 (V) がそれぞれソース・ノード (V^+)、中間ノード (V^0) およびシンク・ノード (V^-) の三つの節点集合に分類されることに対応している。ここに、 $V = V^+ + V^0 + V^-$ である。また、圧力輸送システムの流量配分問題は、システムの幾何学的連結構造と状態変数に関する境界条件とによって、いくつかの基本的なタイプの境界値問題に分けられる⁵⁾。いま、実際上しばしば取扱われる流量配分問題をグラフ理論の立場より述べると、次のようである。

(A) ネットワーク・システムによる流量配分の問題

(i) システム外部との境界流量のみが V 上で与えられている場合に、各枝の流量を知る問題

(ii) システム外部との境界流量が V' (V の部分集合) 上で与えられている場合に、各枝の流量を知る問題

(B) トリー・システムによる流量配分の問題

(i) エネルギー位のみが V^+ および V^- 上で与

えられている場合に、各枝の流量を知る問題
(ii) エネルギー位は V^+ および V^- 上で、システム外部との境界流量は V^0 上でそれぞれ与えられている場合に、各枝の流量を知る問題

3. 管路系における定常流れのグラフ理論的表示

(1) 基礎方程式

圧力輸送システムの水理解析は一次元解析法によって得られる管路流れの数学モデルによって取扱われる。水が非圧縮性で、流れが定常であれば、これは次に示す連続方程式とエネルギー方程式 (Bernoulli の方程式) より構成される⁶⁾。

$$q = v \cdot S = \text{一定} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} + h_L \right) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 v : 断面平均流速、 S : 管断面積、 q : 流量、 z : 基準面より管路軸までの高さ、 p : 管内圧力、 ρ : 水の密度、 g : 重力の加速度、 α : Coriolis のエネルギー係数、 h_L : 表面抵抗による損失水頭、 x : 距離である。

α は管内の流速分布形によって定まり、一般に1より大きい、實用問題においては近似的に1とおいてよい。また、一般に乱流の場合、流体抵抗は相対粗度にしか関係しないから抵抗係数は管径のみの関数で規制されるいわゆる Darcy 型が適当である⁷⁾。したがって、実用的には、次に示す経験的な Darcy-Weisbach 公式によって表面抵抗による損失水頭を与えてよい。

$$\frac{dh_L}{dx} = f \frac{1}{D} \frac{v^2}{2g} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 f : Darcy-Weisbach の摩擦損失係数、 D : 管路の直径である。

さて、単一管路の流れにエネルギー方程式 (2) を適用するには、これを全管長にわたって積分すればよいが、このとき新たに形状抵抗が考慮されなければならない。いま、管路の形状が一様であれば、式 (2) を断面1から断面2まで管長 l にわたって積分すると、次式が得られる。

$$\Phi_1 = \Phi_2 + f \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{v_i^2}{2g} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\Phi \equiv v^2/(2g) + z + p/(\rho g)$: 断面のエネルギー位、 f_i : 各種の形状損失係数、 n : 形状抵抗を考慮すべき個所の数である。

ところで、断面1から断面2までの全区間における損失水頭 H は

$$H = f \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{v_i^2}{2g} \dots\dots\dots (5)$$

であるから、結局、式 (4) は次のように簡単に書かれ

る。

$$\phi_i = \phi_o + H \dots \dots \dots (6)$$

以上のことより、一様な形状の単一管路における定常流の数学モデルは式(1)および式(6)により構成されることがわかる。

(2) システム・モデルのグラフ理論的表示

管路系における流れは有向グラフにおける流れと、全体的な流れの様式という点において、幾何学的な相似性があることは前述したとおりである。この場合、基本的には管路系はネットワークとトリーに分けられ、その挙動解析のためのシステム・モデルは、有向グラフの節点と枝に対して、それぞれに定義された対応する管路系の物理量を使って表現されることになる⁹⁾。以下においては、各枝に対応するそれぞれの管路の形状は一様であるとして議論をすすめよう。

管路ネットワーク・システムにおける定常流れでは、式(6)がシステムを構成する要素管路について成立する。また、これは各ループにおける損失水頭の和は0であるという関係、すなわち Kirchhoff の電圧法則が成り立つ必要があることを意味している。この他に、各節点において流量保存則(Kirchhoff の電流法則)が成立する必要があることはいうまでもない。

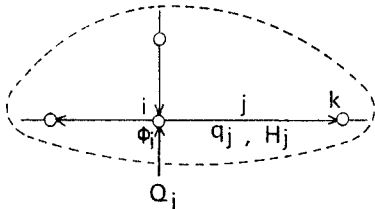


図-1 管路系要素のグラフ・モデル

いま、図-1 に示すように、有向グラフ $G(V, E)$ の任意の節点および枝を $i \in V, j \in E$ とし、 ϕ_i, Q_i, q_j および H_j でそれぞれ節点 i におけるエネルギー位、 i に対するシステム外部との境界流量、枝 j の流量および j における損失水頭を表わすことにすれば、上述の二つの条件は以下のように定式化することができる。

まず、節点 i における流量保存則は、 q_j に負の値(枝の方向と反対の向きの流れを意味する)を許容すれば、次式で表わされることは明らかである。

$$\sum_{j \in E} a_{ij} \cdot q_j = Q_i \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 a_{ij} は行に節点を、列に有向枝をもつ行列、すなわち有向接続行列の成分で、次のように定義されるものである⁹⁾。

$$a_{ij} = \begin{cases} 1: \text{節点 } i \text{ が有向枝 } j \text{ の始点なるとき} \\ -1: \text{節点 } i \text{ が有向枝 } j \text{ の終点なるとき} \\ 0: \text{節点 } i \text{ に有向枝 } j \text{ が閉路枝として接続} \end{cases}$$

のとき、あるいは節点 i に有向枝 j が接続していないとき

次に、枝 j に対する Bernoulli の方程式、すなわち枝 j の損失水頭はその両端の節点 i と k におけるエネルギー位之差に等しく、かつエネルギー位の減少方向と流れの方向は一致しなければならないという関係は、有向接続行列の転置行列は各枝についてその両端の節点で定義される量の差をとる一種の演算子であることを考慮すれば、次式で表わされることは明らかである。

$$\sum_{i \in V} a_{ji} \cdot \phi_i = H_j \dots \dots \dots (8)$$

ここで、以後の議論を簡単にするため、次のように記号を定義しておく。

- A: 有向接続行列
- A*: A の転置行列
- q: 管路(枝に対応)の流量を表わす列ベクトル
- q: 管路の流量を表わす対角行列
- H: 管路の損失水頭を表わす列ベクトル
- H: 管路の損失水頭を表わす対角行列
- Φ: 管路接合部(節点に対応)におけるエネルギー位を表わす列ベクトル
- Q: 管路接合部に対する流入・流出流量の列ベクトル(流入を正とする)
- K: 管路の水頭損失係数を表わす対角行列
- F: 管路の Darcy-Weisbach の摩擦損失係数を表わす対角行列
- L: 管路長を表わす対角行列
- D: 管の直径を表わす対角行列
- S: 管断面積を表わす対角行列

上述の記号を用いれば、式(7)および式(8)をそれぞれすべての $i \in V$ および $j \in E$ に適用して得られる式は、次のように行列とベクトルによって簡単に表わされる。

$$\text{流量保存則: } A \cdot q = Q \dots \dots \dots (9)$$

$$\text{Bernoulli の方程式: } A^* \cdot \Phi = H \dots \dots \dots (10)$$

ところで、有向グラフの一般的性質として、次の直交関係が成立する。

$$A \cdot B^* = 0, B \cdot A^* = 0 \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 B は行に有向原始ループを、列に有向枝をとり、成分 b_{ij} が次のように定義されるいわゆる有向原始ループ行列である¹⁰⁾。

$$b_{ij} = \begin{cases} 1: \text{有向原始ループ } i \text{ に有向枝 } j \text{ が同方向に含まれるとき} \\ -1: \text{有向原始ループ } i \text{ に有向枝 } j \text{ が反方向に含まれるとき} \\ 0: \text{有向原始ループ } i \text{ に有向枝 } j \text{ が含まれないとき} \end{cases}$$

したがって、式(10)と式(11)とから

$$B \cdot H = 0 \dots\dots\dots(12)$$

を得る。ここに、 0 ：零ベクトルである。上式は各ループにおけるエネルギー損失水頭の和は0であることを示しており、Kirchhoffの電圧法則の定式化に他ならない。

さて、損失水頭は式(5)で表現されるが、実際問題においては、使用される管路は長くしかも一様であるので、抵抗項は摩擦損失のみを考慮すれば十分である。したがって、管水路系に対するこの関係は、損失水頭の増加方向と流量の方向とは同じでなければならないから、

$$\text{抵抗則：} H = K \cdot |q| \cdot q \dots\dots\dots(13)$$

で表現される。ここに、 $K = F \cdot L \cdot D^{-5} \cdot S^{-1} \cdot S^{-1} / (2g)$ であり、 $|q|$ は管路の流量の絶対値を成分とする対角行列である。

摩擦損失水頭の他に形状損失水頭も考慮する必要があるとき、両者はいずれも流量の二乗に比例する形で示されるので、係数行列 K を形状損失係数を含めて適当に定めれば、形式上この場合にも式(13)で損失水頭を扱うことができる。したがって、管水路系における損失水頭は式(13)で表現してもなんら一般性を失うものでない。

以上論述したことより、ネットワークのシステム・モデルは式(9),(12)および式(13)により、またトリーのそれは式(9),(10)および式(13)によりそれぞれ構成されることがわかる。

4. 行列表示による流量計算式の誘導

管路系のトポロジー・モデルの性質を利用した流量計算法については、近年になっていくつかの研究がみられるにすぎない。その中には、有向グラフを用いた Jacoby および Twigg¹¹⁾、Kesavan および Chandrashekar¹²⁾ の研究、メッシュ流量を節点に、管路の水理特性を枝の伝達関数に対応させ、管網をフローグラフで取扱った Enger および Feng¹³⁾ の研究などがある。しかし、これらの研究において、管路系のもつ幾何学的性質を十分に生かした計算機シミュレーション法が系統的に図式化されているとは必ずしもいえないようである。

通常、管路系の水理解析は圧力あるいは流量を逐次近似する方法によらざるをえない。これには大別して式(13)の1次近似法と高次近似法の二種類があるが、実際問題としては、1次近似法で十分であるといわれている。したがって、本論文では1次近似法のうちでも接線にて式(13)を近似するいわゆる Newton-Raphson 法を用いることにする。なお、流量計算式化にあたって、対象とするシステム・グラフは $(n+1)$ 個の節点と e 個の枝をもつ連結グラフであると仮定しておく。

(1) 流量の逐次近似

a) 有向原始ループ行列の利用

節点に関する独立な成分は n 個¹⁴⁾ であるから、管路ネットワーク・システムの基礎式は次の三つの式で構成される。

$$A(n, e) \cdot q(e) = Q(n) \dots\dots\dots(14)$$

$$B(p_1, e) \cdot H(e) = 0(p_1) \dots\dots\dots(15)$$

$$H(e) = K(e, e) \cdot |q(e, e)| \cdot q(e) \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 p_1 はシステム・グラフの1次元ベッチ数で、ここでは連結グラフを考えているから、 $p_1 = e - n$ である。また、 $A(n, e)$ は n 行 e 列の行列を表わす。

式(14)は $e > n$ のとき非同次の連立一次方程式を表わすので、 A と q は次の形式で書くことができる。

$$A(n, e) = [A_1(n, n), A_2(n, p_1)] \dots\dots\dots(17)$$

$$q(e) = \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(p_1) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(18)$$

ところで、連結な有向グラフにおいては p_1 は原始ループの個数に等しい¹⁵⁾。また、ネットワークを考えると、常に $e > n$ である。したがって、部分行列 A_1, A_2 にそれぞれ行列 A_T, A_C を選ぶと、式(14)により

$$q_1(n) = -A_T^{-1}(n, n) \cdot A_C(n, p_1) \cdot q_2(p_1) + A_T^{-1}(n, n) \cdot Q(n) \dots\dots(19)$$

を得るから、流量ベクトルは I を単位行列として次のように表わされる。

$$q(e) = \begin{bmatrix} -A_T^{-1}(n, n) \cdot A_C(n, p_1) \\ I(p_1, p_1) \end{bmatrix} \cdot q_2(p_1) + \begin{bmatrix} A_T^{-1}(n, n) \cdot Q(n) \\ 0(p_1) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(20)$$

ここに、 A_T ：システム・グラフを張る木に関する行列、 A_C ：補木に関する行列であり、 $A = [A_T, A_C]$ 。

一般に、有向原始ループ行列と有向接続行列との間に

$$B = [-A_C^* \cdot (A_T^{-1})^* \cdot I]$$

の関係が成立するので、これを式(20)に適用すれば、結局

$$q(e) = B^*(e, p_1) \cdot q_2(p_1) + \begin{bmatrix} A_T^{-1}(n, n) \cdot Q(n) \\ 0(p_1) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(21)$$

を得る。上式より、節点に対する連続方程式のみの解ベクトル q は、一次独立な p_1 個の流量成分 q_2 およびその一次結合の項と定数項の和から成ることがわかる。これはまた、ネットワーク・システムの流量解析は本質的には補木に対する流量を決定することに他ならないことを意味している。

さて、 q で真値、 q' でその仮定値、 Δq で q' の補正値を表わすことにすれば、

$$q(e) = q'(e) + \Delta q(e) \dots\dots\dots(22)$$

である。補木に対する仮定流量 q_2' は連続方程式を満足しなければならないから、式 (21) と式 (22) とにより、

$$\Delta q(e) = B^*(e, p_1) \cdot \Delta q_2(p_1) \dots\dots\dots(23)$$

が得られる。

一方、仮定値 q' による損失水頭ベクトル H' の補正値を ΔH とすれば、

$$H(e) = H'(e) + \Delta H(e) \dots\dots\dots(24)$$

である。式 (16) を q' に関して 1 次近似化した式

$$H(e) \simeq K(e, e) \cdot |q'(e, e)| \cdot q'(e) + 2K(e, e) \cdot |q'(e, e)| \cdot \Delta q(e) \dots\dots(25)$$

より、損失水頭の補正値は次のように表わされる。

$$\Delta H(e) = 2K(e, e) \cdot |q'(e, e)| \cdot \Delta q(e) \dots\dots\dots(26)$$

ここで、式 (15) に式 (24) を適用して得られる次式

$$B(p_1, e) \cdot \Delta H(e) = -B(p_1, e) \cdot H'(e) \dots\dots(27)$$

の ΔH に式 (26) を代入し、式 (23) を用いれば、結局次式を得る。

$$\Delta q_2(p_1) = -\frac{1}{2} [B(p_1, e) \cdot K(e, e) \cdot |q'(e, e)| \cdot B^*(e, p_1)]^{-1} \cdot B(p_1, e) \cdot H'(e) \dots\dots\dots(28)$$

上式は仮定流量に対する補木の流量の補正値を与えるものである。したがって、これを用いて流量の逐次近似計算を行うことができる。図-2 はこの方法による流量計算の手順をフローチャートで示したものである。これ

について説明すると、次のようである。

step 1: 流量計算に必要なネットワーク・システムに対する諸条件として、システム・グラフの有向接続行列、損失水頭の係数を表わす対角行列、システム外部からの流入・流出流量ベクトル、補木に対する仮定流量ベクトルおよび流量の逐次近似に関する収束判定値を与える。

step 2: 有向接続行列の二つの部分行列、すなわち木に関する行列と補木に関する行列とから、有向原始ループ行列を作成する。

step 3: 補木に対する仮定流量より、システム全体の仮定流量を計算する。

step 4: step 3 で計算した仮定流量に対応する各枝の損失水頭を計算する。

step 5: 補木に対する仮定流量の補正値を計算する。

step 6: step 5 の流量補正値を初めの仮定流量に加えて、補木に対する流量の新しい近似値をつくる。

step 7: step 5 の流量補正値が収束判定値以下であるかどうか判定する。

step 8: step 6 の近似流量を補木に対する新しい仮定流量とする。

step 9: step 6 の近似流量を用いて、システムに対する流量を計算する。

step 10: step 9 で計算した流量を与えられた諸条件を満足する管路ネットワーク・システムの流量とする。

以上述べたことから明らかなように、この方法は閉管路における流量の代表値を補正して解く McIlroy¹⁶⁾、青木¹⁷⁾の方法と本質的に同じものであるが、その表現において異なるものである。すなわち、従来の方法における閉管路の仮定代表流量に相当するものとして、本方法ではシステム・グラフの有向原始ループを定義する補木に対してのみ仮定流量を選ぶことによって、ネットワーク・システムに対する流量の逐次近似式がシステムの幾何学的連結構造を表わす有向原始ループのみを用いた一般式で定式化されている。

b) 有向接続行列の利用

前述 a) で誘導された式 (28) には有向原始ループ行列が用いられているので、これをループを含まない管路トリー・システムに対して適用することはできない。

管路トリー・システムをも含めた一般の管水路系に対する基礎式は式 (14)、(16) の他に、次に示す Bernoulli の方程式 (29) の三つの式で構成される。

$$A^*(e, n) \cdot \Phi(n) = H(e) \dots\dots\dots(29)$$

式 (16) の 1 次近似式 (25) の代りに、ここではこれと等価な次式を用いることにする。

$$H(e) = E(e, e) \cdot q(e) + G(e) \dots\dots\dots(30)$$

ここに、 q' を仮定流量のベクトルとすれば

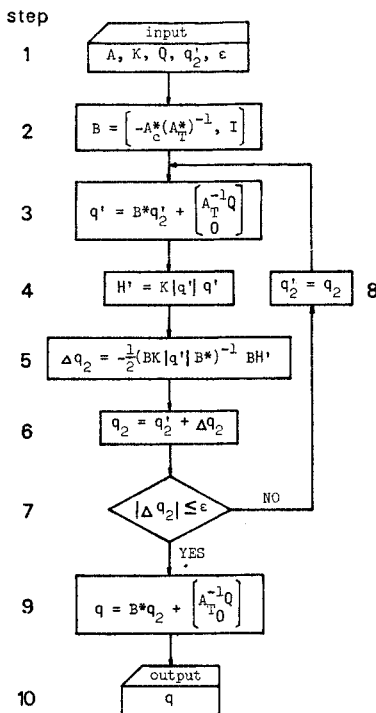


図-2 フローチャート

$$E(e, e) = 2K(e, e) \cdot |q'(e, e)| \dots\dots\dots(31)$$

$$G(e) = -K(e, e) \cdot |q'(e, e)| \cdot q'(e) \dots\dots\dots(32)$$

である。いま、

$$D(e) = \frac{1}{2} q'(e) \dots\dots\dots(33)$$

とおくと、式 (30) は次のように変形される。

$$q(e) = E^{-1}(e, e) \cdot H(e) + D(e) \dots\dots\dots(34)$$

上式と式 (14) とを連立し、これに仮定流量に対する連続条件を用いれば

$$A(n, e) \cdot E^{-1}(e, e) \cdot H(e) = \frac{1}{2} Q(n) \dots\dots\dots(35)$$

が得られる。さらに、これに式 (29) を適用して

$$\Phi(n) = \frac{1}{2} [A(n, e) \cdot E^{-1}(e, e) \cdot A^*(e, n)]^{-1} \cdot Q(n) \dots\dots\dots(36)$$

を得る。ここで、上式および式 (29) を式 (34) に適用し H と Φ を消去すると、結局次式を得る。

$$q(e) = \frac{1}{2} E^{-1}(e, e) \cdot A^*(e, n) \cdot [A(n, e) \cdot E^{-1}(e, e) \cdot A^*(e, n)]^{-1} \cdot Q(n) + D(e) \dots\dots\dots(37)$$

E および D は仮定流量に対してそれぞれ式 (31)、(33) で計算されるので、誘導された式 (37) は流量の逐次近似計算式である。

ところで、式 (37) を用いる方法と、補正流量を用いず、流量の近似値を直接求める合田および雄倉の方法¹⁸⁾とは逐次近似計算の面において類似のものである。しかし、後者は近似流量に関する連立一次方程式を示すにとどまっているのに対し、式 (37) は近似流量について直接解かれた式形となっており、本方法は流量計算式形の表現において明らかに後者と異なるものである。また、後者はすべての管路に対して流量を任意に仮定するが、システム・グラフの幾何学的性質が利用されている本方法では、ネットワーク・システムの場合には a) に述べたことから明らかなように、初めの仮定流量は単に補木についてのみ与えればよく、仮定流量の数が少なくすむ利点がある。図-3 はこの方法によるネットワーク・システムの流量計算の手順をフローチャートで示したものである。これについて簡単に説明すると、次のとおりである。

step 1, 2, 3: 図-2 のフローチャートにおける step 1, 2, 3 にそれぞれ同じである。

step 4: step 3 で計算したシステム全体の仮定流量を用いて、係数行列 E を計算する。

step 5: step 3 の仮定流量よりベクトル D を求める。

step 6: 仮定流量に対する流量の近似値を計算する。

step 7: step 6 で求めた近似流量と初めの仮定流量

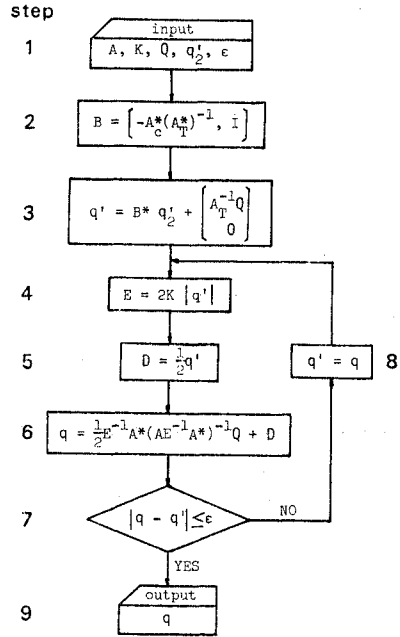


図-3 フローチャート

との差が収束判定値以下かどうか判定する。

step 8: step 6 で求めた近似流量を新しい仮定流量におきかえる。

step 9: step 6 で計算した近似流量を与えられた諸条件を満足する管路ネットワーク・システムの流量とする。

いうまでもないが、式 (37) には管路系の幾何学的連結構造を表わす行列のうち有向接続行列のみが用いられているので、これはネットワークあるいはトリーのいずれの管路系にも適用可能である。

以上、a) および b) に示した方法は近似計算に用いる技術的手段に相違はあるものの、ネットワーク・システムを対象とするとき、両者は本質的にまったく同じものである。この点に関してはすでに同様な指摘¹⁹⁾があるが、両者の等価性は、式 (11) を勘案すれば、より明確に理解されよう。実際、a) および b) で展開された方法はそれぞれ線形数学モデルで取扱われる電気回路網のループ電流解法と点電位解法²⁰⁾に相当している。

(2) エネルギー位の逐次近似

上述した (1) の方法とは逆に、節点における流量保存則を満足させるような節点エネルギー位を求めて流量を計算する方法もある。これは、配水コントロールなどのための計算法として、すぐれた利点をもつものであることが報告されている²¹⁾。しかし、この方向に沿う研究のいずれも節点圧力水頭あるいは節点エネルギー位に関する連立一次方程式の解法に関するものであり、管路系

のもつ幾何学的性質を応用した計算式化はこれまでになされていないようである。

ところで、管路水輸送システムの流量解析がエネルギー位の逐次近似によってなされる典型的なものに、管路トリー・システムによる貯水池間の水輸送問題がある。これは、貯水池に対応する節点にそのエネルギー位を表わす枝を零エネルギー位の基準節点に連結することによって、ネットワーク・システムとして扱うこともできる²²⁾。いずれにせよ、ソース・ノードおよびシンク・ノードに対してエネルギー位が与えられているとき、各枝の流量を知ることが實際上主要な問題である。

さて、行列演算の便宜上、番号 $(n+1)$ の節点にエネルギー位が既知の節点のうちどれか一つを基準節点として選び、これに基準エネルギー位として 0 を与えることにする。このような前提のもとでは、管路系一般に対して基準節点に関する行列成分はなんら一般性を失うことなく省略することができる。したがって、エネルギー位を未知数として解く場合にも、基礎式は式 (14)、(16) および式 (29) の三つの式で構成されることは明らかである。

いま、節点エネルギー位を表わすベクトル Φ は一般に基準節点を除いた m 個の既知成分 Φ_1 と残りの $(n-m)$ 個の未知成分 Φ_2 とから成るとする。また、有向接続行列およびシステム外部との境界流量の節点に関する成分を、エネルギー位の節点区分にしたがって、単純に分離することにする。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \Phi(n) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(m) \\ \Phi_2(n-m) \end{bmatrix} \\ A(n, e) &= \begin{bmatrix} A_1(m, e) \\ A_2(n-m, e) \end{bmatrix} \\ Q(n) &= \begin{bmatrix} Q_1(m) \\ Q_2(n-m) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

通常の場合、 Q_1 はソース・ノードおよびシンク・ノードに対するシステム外部との境界流量、 Q_2 は中間ノードに対するそれであるから、前者は枝流量が求まれば節点に対する連続条件より決められる未知量として、一方、後者は所与の条件を表わす既知量として取扱われる。そこで、以下においては、中間ノードに対するエネルギー位の逐次近似計算式を誘導しよう。

中間ノードにおける真のエネルギー位 Φ_2 は、仮定値を Φ_2' 、その補正値を $\Delta\Phi_2$ とすれば、

$$\Phi_2(n-m) = \Phi_2'(n-m) + \Delta\Phi_2(n-m) \dots\dots (39)$$

で表わされる。式 (38) および (39) を式 (29) に適用すれば、

$$\begin{aligned} H(e) &= A_1^*(e, m) \cdot \Phi_1(m) + A_2^*(e, n-m) \\ &\quad \cdot \{\Phi_2'(n-m) + \Delta\Phi_2(n-m)\} \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

を得る。仮定エネルギー位に対する枝の損失水頭を H' 、

その補正値を ΔH とすれば、上式より明らかのように、

$$\Delta H(e) = A_2^*(e, n-m) \cdot \Delta\Phi_2(n-m) \dots\dots\dots (41)$$

である。ここで、 $\mathbf{1}$ を単位列ベクトルとして、式 (16) の損失水頭に関する 1 次近似式

$$\begin{aligned} q(e) &= q'(e, e) \cdot \left\{ \mathbf{1}(e) + \frac{1}{2} H'^{-1}(e, e) \cdot \Delta H(e) \right\} \\ &\quad \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

に式 (14) および式 (41) を適用すると、結局、次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_2(n-m) &= 2[A_2(n-m, e) \cdot q'(e, e) \\ &\quad \cdot H'^{-1}(e, e) \cdot A_2^*(e, n-m)]^{-1} \\ &\quad \cdot \{Q_2(n-m) - A_2(n-m, e) \cdot q'(e)\} \\ &\quad \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

中間ノードの補正エネルギー位を計算する式 (43) は、1 次近似を用いている点で、圧力補正法として分類されている従来の諸方法^{23)~25)}と変わりはないが、近似計算式形の表現において明らかに異なっている。すなわち、式 (43) には管路系の幾何学的連結構造を表わす有向接続行列の部分行列が用いられている。また、式 (43) は補正エネルギー位について直接解かれた式形となっている。

図-4 は式 (43) を利用した流量計算の手順を図式化したものである。これについて簡単な説明を加えると、次のとおりである。

step 1: システム・グラフの有向接続行列、損失水頭の係数を表わす対角行列、中間ノードに対するシステム

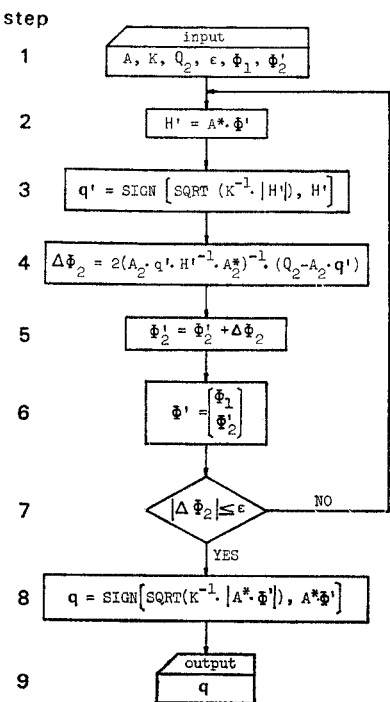


図-4 フローチャート

外部との境界流量，収束判定値およびエネルギー位の既知成分と未知成分の仮定値とを与える。

step 2：仮定エネルギー位より損失水頭を計算する。

step 3：損失水頭の係数行列の逆行列と step 2 で求めた損失水頭の絶対値との積をとり，その正の平方根に損失水頭の符号をつけ，仮定エネルギー位に対する流量を計算する。

step 4：step 2 と 3 のそれぞれで計算した損失水頭と流量を用いて，仮定エネルギー位の補正值を計算する。

step 5：step 4 で求めた補正值を用いて，中間ノードに対するエネルギー位の近似値を計算する。

step 6：システム全体に対する新しいエネルギー位値のベクトルを定める。

step 7：step 4 で求めたエネルギー位の補正值が収束判定値以下かどうか判定する。

step 8：step 6 で定めたエネルギー位について，流量を step 3 と同様にして計算する。

step 9：step 8 で計算された流量を与えられた諸条件を満足する管路系の流量とする。

5. 数値計算例

前章で提示した流量計算法を簡単なモデル・ケースに適用し，電子計算機で試行した結果を示そう。

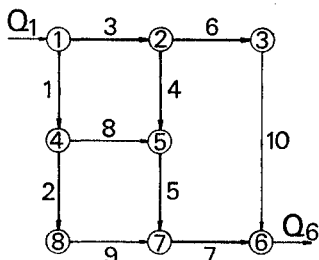


図-5 ネットワーク・システム

図-5 に示す管路ネットワークのシステム・グラフは 10 本の有向枝と 8 個の節点とから構成されている。これについて，損失水頭の係数は表-1，またシステム外部との境界流量は $Q_1=1.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ ， $Q_6=-1.0 \text{ m}^3/\text{sec}$ の条件のもとで，補木の流量 q_8, q_9, q_{10} をそれぞれ $0.100, 0.400, 0.400 \text{ m}^3/\text{sec}$ と仮定して計算を行った結果は表-2 のとおりである。これは，すでに述べた式 (28) と式 (37) の等価性，つまり，同一の仮定流量から出発すれば，同じ繰返し回数で同一の結果が得られることの具体的な一例証に他ならない。

図-6 は，図-5 のシステム・グラフと同一のものであ

表-1 損失水頭係数

枝	$K(\text{sec}^2/\text{m}^5)$
1	64.64
2	32.32
3	64.64
4	665.05
5	61.65
6	64.64
7	64.64
8	665.05
9	64.64
10	96.96

表-2 逐次近似計算結果

枝	流量 (m^3/sec)					
	式 (28)			式 (37)		
1	0.500	0.475	0.475	0.500	0.475	0.474
2	0.400	0.355	0.355	0.400	0.355	0.355
3	0.500	0.525	0.525	0.500	0.525	0.526
4	0.100	0.095	0.095	0.100	0.095	0.096
5	0.200	0.214	0.214	0.200	0.214	0.215
6	0.600	0.430	0.430	0.600	0.430	0.430
7	0.600	0.570	0.570	0.600	0.570	0.570
8	0.100	0.119	0.119	0.100	0.119	0.119
9	0.400	0.355	0.355	0.400	0.355	0.355
10	0.400	0.430	0.430	0.400	0.430	0.430
	1	2	3	1	2	3
くり返し演算回数						

るが，グラフを張る木の構造において，図-5 と異なるものである。この例について，補木の流量 q_8, q_9, q_{10} をそれぞれ $0.500, 0.400, 0.600 \text{ m}^3/\text{sec}$ と仮定して計算した結果を表-3 に示す。表-

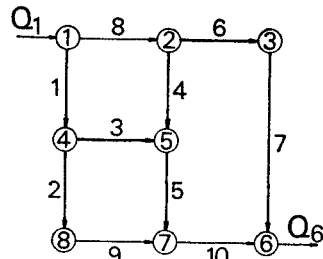


図-6 ネットワーク・システム

2 と表-3 を枝の番号づけに注意して比較すれば，流量はシステム・グラフを張る木の選び方に無関係に求められることがわかる。しかし，木の選び方によって繰返し計算の回数に差異が生ずるように見受けられるが，この点に関する詳細は数多くのケースについての結果に待

表-3 式 (28) による逐次近似計算結果

枝	流量 (m^3/sec)				
	1	0.500	0.480	0.476	0.475
2	0.400	0.364	0.358	0.356	0.356
3	0.100	0.116	0.118	0.119	0.119
4	0.100	0.097	0.096	0.096	0.096
5	0.200	0.213	0.214	0.214	0.214
6	0.400	0.423	0.429	0.430	0.430
7	0.400	0.423	0.429	0.430	0.430
8	0.500	0.500	0.524	0.525	0.526
9	0.400	0.364	0.358	0.356	0.355
10	0.600	0.577	0.571	0.570	0.570
	1	2	3	4	5
くり返し演算回数					

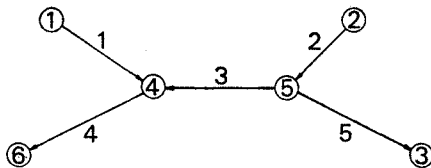


図-7 トリー・システム

表-4 エネルギー位と損失水頭係数

節点	エネルギー位 (m)	枝	K (sec ² /m ⁵)
1	10.0	1	35.73
2	15.0	2	7.09
3	8.0	3	93.70
6	0.0	4	316.55
		5	316.55

表-5 流量計算結果

枝	流量 (m ³ /sec)
1	-0.031
2	0.349
3	0.209
4	0.178
5	0.139

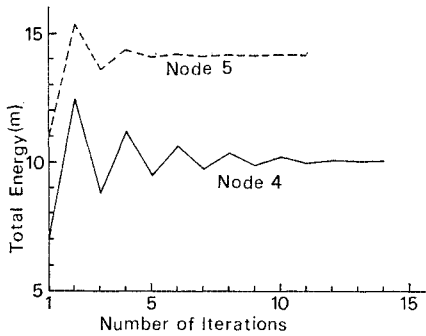


図-8 逐次近似計算の収束状況

たねばならない。

図-7 は 5 本の有向枝と 6 個の節点とから成る管路トリーのシステム・グラフである。節点 6 を零エネルギー位の基準節点を選び、表-4 に示すエネルギー位ならびに損失水頭の係数を条件として、中間ノードのエネルギー位 ϕ_4, ϕ_5 をそれぞれ 7.0, 11.0 m と仮定して計算した。結果は表-5 および図-8 に示すとおりである。表-5 において、枝 1 に対する負の流量は図-7 の有向枝 1 と反対方向に水が輸送されることを表わしている。また、収束状況を示す図-8 において、修正エネルギー位の値は増減を順次繰返し、しだいに収束している。しかし、このような収束性状が式 (43) に特有のものかどうかの判断は数多くのケースについての計算結果に待たねばならないことはいうまでもない。

6. 結 言

以上、管路水輸送システムの水理解析に有向グラフのトポロジーを応用し、計算機シミュレーションの立場から、行列とベクトルによって表現された実際的な流量計算法を提示した。得られた結果を要約すれば、以下のようである。

- (1) 管路系における定常流れの基礎方程式を状態ベクトルと有向グラフの行列によって簡明に表現した。
- (2) 流量を未知数とした 1 次近似法による在来の管網計算法のうち、すべての流量を任意に仮定する方法と閉管路について一つの代表流量を仮定する方法とに対応してそれぞれ式 (28), (37) の逐次近似計算式を示した。
- (3) 式 (28) を用いて管網計算をする場合、すべて

の流量を仮定する必要はなく、システムの独立なループを定義する補木について初めに流量を仮定するだけでよい。

(4) 節点エネルギー位を未知数として解く場合の逐次近似計算式として、中間ノードの補正エネルギー位を直接計算できる式 (43) を示した。

(5) 在来の方法でも標準的なプログラム化は可能であるが、本方法は管路系の状態ベクトルおよびその幾何学的連結構造を表わす行列によって統一的に表現されているので、この計算プログラムはきわめて簡単であり、しかも容易に標準化される。

(6) 管路系の連結構造に関する入力データは単純な有向接続行列の成分だけでよいため、本方法の利用にあたって、入力データの作成は容易である。

(7) 本計算法は逆行列の計算を含むため、一般に手動計算には不向きである。

(8) 行列の次元の大きさと実際の計算時間などとの関係は、大規模な管路水輸送システムに対して本手法の有用性を明らかにする上に、検討されるべき重要な点である。しかし、これは今後の課題として残されている。

最後に、本論文は筆者が京都大学工学部に在職中に行った水の輸送・配分システムの解析に関する研究の一部であり、研究をすすめるにあたり京都大学工学部 岩佐義朗教授のご指導を賜った。ここに深く感謝の意を表す次第である。また、計算その他の面においてご助力いただいた元京都大学学生 (現在、日本道路公団) 飯田章夫君にも謝意を表すものである。

参 考 文 献

- 1) 建設省河川局：広域利水調査第一次報告書, 1971.
- 2) 岩佐義朗：水理システムとシミュレーション, 1971 年度水工学に関する夏期研修会講義集, A コース, 土木学会水理委員会, 1971.
- 3) Cross, H.: Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors, Bulletin No. 286, Univ. of Illinois, 1936.
- 4) Trent, H.M.: Isomorphisms between Oriented Linear Graphs and Lumped Physical Systems, Journal American Acoustic Society, Vol. 27, No. 3, 1955.
- 5) Jacoby, S.L.S. and Twigg, D.W.: Computer Solutions to Distribution Network Problems, Proc. of the National Symposium on the Analysis of Water Resources Systems, Denver, Colorado, July, 1968.
- 6) 岩佐義朗：水理学, 朝倉土木工学講座 3, 朝倉書店, 1967.
- 7) 佐藤清一：水理学, 森北出版株式会社, 1960.
- 8) L.R. Ford, Jr. and D.R. Fulkerson: Flow in Networks, Princeton Univ. Press, 1962.
- 9) Berge, C.: The Theory of Graphs and its Applications, Methuen & Co. Ltd., London, 1962.
- 10) 前出 9).
- 11) 前出 5).
- 12) Kesavan, H.K. and Chandrashekar, M.: Graphthe-

- oretic Models for Pipe Network Analysis, Jour. of the Hydraulic Div., ASCE, Vol. 98, No. HY 2, 1972.
- 13) Enger, T. and Feng, C.C. : Flowgraph Analysis of Pipeline Networks, Jour. of the Hydraulic Div., ASCE, Vol. 97, No. HY 10, 1971.
- 14) 小野寺力男：グラフ理論の基礎，数学ライブラリー 6，森北出版株式会社，1968.
- 15) 前出 14).
- 16) McIlroy, M.S. : Pipeline Network Flow Analysis Using Ordinary Algebra, Jour. A.W.W.A., Vol. 41, No. 5, 1949.
- 17) 青木康夫：管網計算の連立一次方程式による新解法，水道協会雑誌，第 295 号，1959.
- 18) 合田 健・雄倉幸昭：1 次化連立式による新管網解法とその応用，土木学会論文集，第 138 号，1967.
- 19) 高桑哲男：配水管網流量計算法に関する研究（Ⅰ）—流量を未知数とした計算法と反復近似法による改良—，水道協会雑誌，第 421 号，1969.
- 20) 前出 14).
- 21) 高桑哲男：配水管網流量計算法に関する研究（Ⅲ）—節点エネルギー位を未知数とした計算法—，水道協会雑誌，第 423 号，1969.
- 22) 前出 12).
- 23) Marlow, T.A., et al. : Improved Design of Fluid Networks with Computers, Jour. of the Hydraulic Div., ASCE, Vol. 92, No. HY 4, 1966.
- 24) 高橋 澄・十時敏雄：電子計算機による配水管網の計算，水道協会雑誌，第 399 号，1967.
- 25) 前出 21).

(1974.2.13・受付)