

無限体中の円孔に部分分布荷重が作用する
ときの 3 次元応力解析ON THREE-DIMENSIONAL STRESS PROBLEM OF INFINITE
ELASTIC MEDIUM WITH A CYLINDRICAL HOLE PRESSED
BY PARTIALLY DISTRIBUTED LOADS

松岡 健一*・能町 純雄**

By Kenichi Matsuoka and Sumio Nomachi

1. はじめに

無限体中の円孔に部分分布荷重が作用する場合の応力問題は、非軸対称 3 次元問題である。3 次元弾性応力問題は、3 つの連立偏微分方程式を解くことに帰結される。この解法として、つり合いのベクトル方程式を積分する方法が一般的で、この他応力ポテンシャルから出発する方法などがあるが、3 次元応力問題を宮本¹⁾の分類に従えば、第 1 類に属する問題でも、任意の境界条件を満足する解を見いだすことは簡単ではない。さらに、第 2、第 3 類の問題で、特に非軸対称応力問題になると、その解法は複雑になり、一般的な解析解は非常に得にくいようである⁴⁾。

微分方程式の解法として、直接積分変換を行い、解の像関数を求め、これを逆変換して解を得る方法があるが、応力関数をこの方法で求めることもできる。3 次元応力問題に関しては、Sneddon²⁾らが円柱座標にこの方法を使い Hankel 変換により、半無限体や厚板の軸対称問題を解いているが、牟岐³⁾はこれを非軸対称問題に応用している。

著者らは、有限積分変換を行い有限弾性体の問題を解析してきたが^{5)~8)}、円柱座標に関する 3 次元応力問題では、有限 Fourier-Hankel 変換を用いる、有限円筒の一般解法を公表した⁷⁾。

本論文では、まず、この解法を、非軸対称 3 次元応力問題に拡張し⁹⁾、有限長円筒の 3 次元応力問題に関する一般解を求め、無限体中の円孔の内面に部分分布荷重がある場合にこれを応用して解析を行ったものである。この種の問題は、ダムサイトの弾性係数を調べるのに、岩

壁にトンネルを掘って載荷試験を行う方法があるが、この場合の弾性挙動の評価の参考にならう。また、この状態が半無限体の表面に部分分布荷重を載荷したとするいわゆる Boussinesq の問題とどの程度の差があるかは興味のある点である。

2. 基礎方程式

座標軸を r, θ, z に選んだ円柱座標における弾性体のつり合い方程式は、 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ をそれぞれ、 r, θ, z 方向の直応力度、 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$ をせん断応力度とすると、

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = K_r \quad \dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} = K_\theta \quad \dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = K_z \quad \dots\dots(3)$$

ここで、 K_r, K_θ, K_z は物体力の各方向成分である。

また、 u, v, w を r, θ, z 方向の変位成分とし、 μ, λ を Lamé の弾性定数とすれば、弾性問題における Hooke の法則は、

$$\sigma_r = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad \dots\dots(4)$$

$$\sigma_\theta = (2\mu + \lambda) \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad \dots\dots(5)$$

$$\sigma_z = (2\mu + \lambda) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right) \quad \dots\dots(6)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad \dots\dots(7)$$

$$\tau_{\theta z} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \quad \dots\dots(8)$$

$$\tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad \dots\dots(9)$$

* 正会員 工修 室蘭工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

となる。

3. 円柱座標における非軸対称 3 次元応用問題の解⁹⁾

まず円柱座標における非軸対称 3 次元力問題に対する一般解を求め、次に、その特別な例として、無限体中に円孔のある場合を取扱うこととしたい。

(1) 基礎方程式の有限 Fourier-Hankel 変換による解法

解法の基本は積分変換の応用であり、文献 7)~9) に述べてあるが、次に非軸対称問題の解法について簡単に説明する。解析の対象としては、図-1 に示すような内径 a 、外径 b 、長さ c の円筒体を考える。

具体的には、いま円筒体は各部分で変位および応力が連続しているものとする。この場合、積分変換の核となる関数として、 $L_1 = \cos \nu \theta \cdot X$, $L_2 = \sin \nu \theta \cdot X$, $L_3 = \cos$

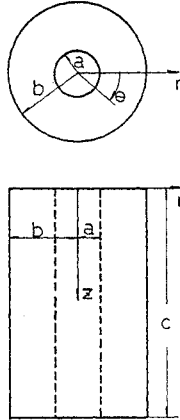


図-1 有限円筒

$\nu \theta \cdot X_0$ を、それぞれつり合い式 (1), (2), (3) に対して選ぶ。こうして、 θ に関して $(0, 2\pi)$ の間で、有限 Fourier 変換を行い、 r に関して (a, b) 、 z に関して $(0, c)$ の間で X, X_0 を核とする積分変換を行う。このとき、式 (4)~(9) の Hooke の法則を考慮して、応力を変位で表わす。このようにして求められる $C_\nu[u]$, $S_\nu[v]$ の r 方向の有限変換を完成するために次のようにおく。すなわち、

$$\begin{bmatrix} C_\nu[u] \\ S_\nu[v] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{\nu zr} \\ B_{\nu zr} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(10)$$

$$\begin{bmatrix} C_\nu[\tau_{rz}] \\ S_\nu[\tau_{\theta z}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{\nu zr}^a \\ T_{\nu zr}^b \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

式 (1), (2) を積分変換して得られた結果に式 (10), (11) を代入し、辺々相加えて $X = X_1 = rH_{\nu+1}(\xi_i r) \cdot \cos Nz$ とおき、 r, z に関する有限 Fourier-Hankel 変換を完成させる。次に、辺々相減じて $X = X_2 = rH_{\nu-1}(\xi_i r) \cdot \cos Nz$ とおき、同様変換を続行する。最後に、式 (3) を積分変換して得られた結果に、式 (10), (11) を代入後、 $X_0 = rH_\nu(\xi_i r) \cdot \sin Nz$ として積分計算を行う。ただし、 $C_\nu[f]$, $S_\nu[f]$, $H_\nu(\xi_i r)$, ξ_i 等については、付録 A に述べてある。さらに、 $N = n\pi/c$, $n = 1, 2, \dots$ である。

以上の計算により、変位成分の有限 Fourier-Hankel 変換値を含む 3 元連立方程式が次のように導かれる。

$$\begin{bmatrix} (3\mu + \lambda)\xi_i^2 + 2\mu N^2 & -(\mu + \lambda)\xi_i^2 & (\mu + \lambda)\xi_i N \\ -(\mu + \lambda)\xi_i^2 & (3\mu + \lambda)\xi_i^2 + 2\mu N^2 & -(\mu + \lambda)\xi_i N \\ (\mu + \lambda)\xi_i N & -(\mu + \lambda)\xi_i N & \mu\xi_i^2 + (2\mu + \lambda)N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\nu+1}C_n[A_{\nu zr}] \\ H_{\nu-1}C_n[B_{\nu zr}] \\ H_\nu C_n S_n[w] \end{bmatrix} \\ = rH_{\nu+1}(\xi_i r) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4\mu(\nu+1)/r & 0 & \mu N \\ -1 & 1 & 0 & 4\mu(\nu-1)/r & -\mu N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu\xi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\nu C_n[\sigma_r] \\ S_\nu C_n[\tau_{r\theta}] \\ C_n[A_{\nu zr}] \\ C_n[B_{\nu zr}] \\ C_\nu S_n[w] \end{bmatrix} \Bigg|_{r=a}^{r=b} \\ + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\lambda\xi_i \\ 0 & 2 & \lambda\xi_i \\ 0 & 0 & -(2\mu + \lambda)N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\nu+1}[T_{\nu zr}^a] \\ H_{\nu-1}[T_{\nu zr}^b] \\ H_\nu C_n[w] \end{bmatrix} \Bigg|_{z=0}^{z=c} \dots\dots\dots(12)$$

式 (12) を解くと、解の像関数が、円筒の境界における物理量の像関数を含む形で求められ、これを逆変換することにより、基礎方程式 (1)~(3) の解を変位の形で得ることができる。ただし、物体力は無視している。

(2) 変位成分の一般式

有限 Fourier-Hankel 変換の逆変換 (付録 A 参照) により各変位成分は次の形で示される。

$$u = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (A_{\nu zr} + B_{\nu zr}) C_\nu \cos \nu \theta \dots\dots\dots(13)$$

$$v = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_{\nu zr} - B_{\nu zr}) \sin \nu \theta \dots\dots\dots(14)$$

$$w = \frac{4}{\pi b^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu C_\nu S_n[w]$$

$$\cdot C_\nu \cos \nu \theta \cdot \frac{H_\nu(\xi_i r)}{\Theta_{\nu i}^2} \sin Nz \dots\dots\dots(15)$$

ただし、 $C_0 = 1/2$, $C_1 = C_2 = \dots = 1$ とする。さらに

$$A_{\nu zr} = \frac{2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left\{ \frac{2\nu a^{2\nu} b^{2\nu}}{b^{2\nu} - a^{2\nu}} \frac{1}{r^{\nu+1}} \int_a^b C_n[A_{\nu zr}] r^{-\nu} dr \right. \\ \left. + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} H_{\nu+1} C_n[A_{\nu zr}] \frac{H_{\nu+1}(\xi_i r)}{\Theta_{\nu i}^2} \right\} \cos Nz \dots\dots\dots(16)$$

$$B_{\nu zr} = \frac{2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left\{ \frac{2\nu}{b^{2\nu} - a^{2\nu}} r^{\nu-1} \int_a^b C_n[B_{\nu zr}] r^\nu dr \right. \\ \left. + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} H_{\nu-1} C_n[B_{\nu zr}] \frac{H_{\nu-1}(\xi_i r)}{\Theta_{\nu i}^2} \right\} \cos Nz \dots\dots\dots(17)$$

$\nu=0$ および $n=0$ に対する像関数の値は、式 (12) で

与えられるが、式 (16), (17) の第1項の積分値は式 (12) から得られないので、誘導過程において、 $X_1 = r^{-\nu} \cos Nz$, $X_2 = r^\nu \cos Nz$ ($n \neq 0$ のとき) および、 $X_1 = r^{2-\nu}$, $X_2 = r^{\nu+2}$ ($n=0$ のとき) として、変換を行う。また、 $\nu=n=0$ のときは、 $L_1 = \text{const.}$ として、式 (1) から求めることができる。

式の表現を簡単にするため、境界の物理量で与えられる値を次のようにおく。

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu nk} &= S_n C_n [\tau_{r\theta}]_{r=a_k} \\ \beta_{\nu nk} &= C_n C_n [\sigma_r]_{r=a_k} \\ A_{\nu nk} &= C_n [A_{\nu zr}]_{r=a_k} (\nu+1)/a_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{\nu nk} &= C_n [B_{\nu zr}]_{r=a_k} (\nu-1)/a_k \\ D_{\nu nk} &= N C_n S_n [w]_{r=a_k} \\ r_{\nu ik} &= H_{\nu+1} [T_{\nu zr}^a]_{z=0} \\ &\quad + (-1)^{n+k} H_{\nu+1} [T_{\nu zr}^a]_{z=c} \\ \delta_{\nu ik} &= H_{\nu-1} [T_{\nu zr}^b]_{z=0} \\ &\quad + (-1)^{n+k} H_{\nu-1} [T_{\nu zr}^b]_{z=c} \\ E_{\nu ik} &= \xi_i \{ H_n C_n [w]_{z=0} \\ &\quad + (-1)^{n+k} H_n C_n [w]_{z=c} \} \end{aligned}$$

ただし、 $k=1, 2$, $a_1=b$, $a_2=a$ とする。上の関係を用い、さらに有限 Fourier-Hankel 変換の逆変換公式 (付録 B 参照) を用いて、式 (15)~(17) の逆変換を行うと、

$$\begin{aligned} A_{\nu zr} &= \sum_{k=1}^2 \left[\frac{a^{2\nu} b^{2\nu}}{b^{2\nu} - a^{2\nu}} \cdot \frac{r^{-(\nu+1)}}{3\mu+\lambda} \cdot \frac{1}{c} \left((-1)^{k-1} a_k^{2-\nu} \left\{ \frac{1}{2} \alpha_{\nu 0k} + \frac{1}{2} \beta_{\nu 0k} + \frac{2\nu\mu - (\mu+\lambda)}{\nu+1} A_{\nu 0k} - \frac{\mu+\lambda}{\nu-1} B_{\nu 0k} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1+(-1)^k) \{ r_{\nu 0k} - \lambda E_{\nu 0k} \} + \frac{1}{c} f_{\nu k}^{(k)}(r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{\nu 0k} + \frac{1}{2(2\mu+\lambda)} \beta_{\nu 0k} + \frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} A_{\nu 0k} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} B_{\nu 0k} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \left(\frac{1}{2\mu} \chi_{\nu p}^{(k)}(Nr) \{ \alpha_{\nu nk} + \beta_{\nu nk} + 4\mu A_{\nu nk} + \mu D_{\nu nk} \} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)} \omega_{\nu p}^{(k)}(Nr) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{\nu nk} + A_{\nu nk} - B_{\nu nk} + D_{\nu nk} \right\} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_{\nu+1}(\xi_i r)}{\Theta_{\nu i}^2} \left(\phi^{(k)}(\xi_i z) \left\{ -\frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} r_{\nu ik} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \delta_{\nu ik} + \frac{\lambda}{2(2\mu+\lambda)} E_{\nu ik} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)} \{ \phi^{(k)}(\xi_i z) - \phi^{(k)}(\xi_i z) \} \{ r_{\nu ik} - \delta_{\nu ik} + 2\mu E_{\nu ik} \} \right) \right] \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{\nu zr} &= \sum_{k=1}^2 \left[\frac{1}{b^{2\nu} - a^{2\nu}} \cdot \frac{r^{\nu-1}}{3\mu+\lambda} \cdot \frac{1}{c} \left((-1)^{k-1} a_k^{\nu+2} \left\{ \frac{1}{2} \alpha_{\nu 0k} - \frac{1}{2} \beta_{\nu 0k} + \frac{\mu+\lambda}{\nu+1} A_{\nu 0k} + \frac{2\nu\mu + (\mu+\lambda)}{\nu-1} B_{\nu 0k} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1+(-1)^k) \{ \delta_{\nu 0k} - \lambda E_{\nu 0k} \} - \frac{1}{c} f_{\nu s}^{(k)}(r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{\nu 0k} - \frac{1}{2(2\mu+\lambda)} \beta_{\nu 0k} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} A_{\nu 0k} + \frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} B_{\nu 0k} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \left(-\frac{1}{2\mu} \chi_{\nu s}^{(k)}(Nr) \{ \alpha_{\nu nk} - \beta_{\nu nk} + 4\mu B_{\nu nk} + \mu D_{\nu nk} \} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)} \omega_{\nu s}^{(k)}(Nr) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{\nu nk} + A_{\nu nk} - B_{\nu nk} + D_{\nu nk} \right\} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_{\nu-1}(\xi_i r)}{\Theta_{\nu i}^2} \left(\phi^{(k)}(\xi_i z) \left\{ -\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} r_{\nu ik} - \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \delta_{\nu ik} - \frac{\lambda}{2(2\mu+\lambda)} E_{\nu ik} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)} \{ \phi^{(k)}(\xi_i z) - \phi^{(k)}(\xi_i z) \} \{ r_{\nu ik} - \delta_{\nu ik} + 2\mu E_{\nu ik} \} \right) \right] \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k=1}^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_\nu}{\pi} \left[\frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \sin Nz \left(G_\nu^{(k)}(Nr) D_{\nu nk} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} F_\nu^{(k)}(Nr) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{\nu nk} + A_{\nu nk} - B_{\nu nk} + D_{\nu nk} \right\} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_\nu(\xi_i r)}{\Theta_{\nu i}^2} \left(Q^{(k)}(\xi_i z) E_{\nu ik} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} P^{(k)}(\xi_i z) \{ r_{\nu ik} - \delta_{\nu ik} + 2\mu E_{\nu ik} \} \right) \right] \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

u, v は、式 (13), (14) により求められる。ただし、 $n=0$ のときは注意が必要である。すなわち、 $\nu=1$ に対しては、式 (18), (19) で $B_{\nu 0k}$ の項が $(\nu-1)$ を分母に含むが、 $B_{\nu 0k}$ 自身にも $(\nu-1)$ を含むこと、また $\nu=0$ に対しては、式 (18), (19) から直接求めることはできず、前述のように式 (1) から $L_1 = \text{const.}$ として別に誘導する。

以上により、有限円筒の非軸対称問題の一般解を求めた。式中に含まれる境界の物理量で与えられる定数は、境界条件を満足するように定める。

また、有限円柱の場合の一般解は、上式で $a=0$ とす

ることにより容易に求められる。

4. 無限体中の円孔に等間隔に外力が作用する場合

3. で円柱座標における非軸対称3次元応力問題の一般解を求めた。これを応用して、無限体中の円孔に部分分布荷重を受ける場合の解析を行うのであるが、本論では、分布荷重が円孔軸方向に等間隔に作用している場合を取扱う。こうすることにより、3. で求めた一般解を直接利用できること、有限長問題に展開しやすいことに

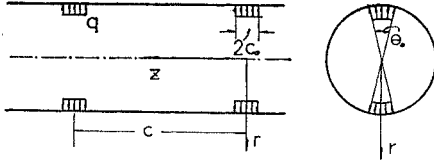


図-2 荷重状態

なり、荷重間隔を大きくすることにより、題意にも矛盾しないものとする。

(1) 変位および応力

いま、円孔の中心軸方向に z 軸をとり、作用している外力の中心間隔を c とし、その一つの中心に z 軸の原点をとる (図-2)。 $z=0$ および $z=c$ で変形が対称となり、

$$\sigma_r = \frac{2}{\pi c} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} \cos \nu \theta \left[\frac{(\nu+1)\mu}{(3\mu+\lambda)} r^{-(\nu+2)} a^{2-\nu} \left\{ \frac{1}{2} \alpha_{\nu 0} - \frac{1}{2} \beta_{\nu 0} + \frac{2\nu\mu - (\mu+\lambda)}{\nu+1} A_{\nu 0} - \frac{\mu+\lambda}{\nu-1} B_{\nu 0} \right\} \right. \\ - g_{\nu p}(r) \alpha_{\nu 0} + \left\{ g_{\nu}(r) - \frac{\mu}{2\mu+\lambda} g_{\nu s}(r) \right\} \beta_{\nu 0} + 2\mu \left\{ g_{\nu}(r) - g_{\nu p}(r) - \frac{\mu}{2\mu+\lambda} g_{\nu s}(r) \right\} A_{\nu 0} \\ - 2\mu \left\{ g_{\nu}(r) + g_{\nu p}(r) - \frac{\mu}{2\mu+\lambda} g_{\nu s}(r) \right\} B_{\nu 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \left(G_{\nu}(Nr) \{ \beta_{\nu n} + 2\mu(A_{\nu n} - B_{\nu n}) \} \right. \\ - G_{\nu p}(Nr) \alpha_{\nu n} - G_{\nu s}(Nr) (\beta_{\nu n} - \mu D_{\nu n}) - \frac{4\mu(\nu+1)}{Nr} \chi_{\nu p}(Nr) A_{\nu n} - \frac{4\mu(\nu-1)}{Nr} \chi_{\nu s}(Nr) B_{\nu n} \\ \left. - \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)} \{ 2F_{\nu}(Nr) - F_{\nu s}(Nr) \} \{ \beta_{\nu n} + 2\mu(A_{\nu n} - B_{\nu n} + D_{\nu n}) \} \right) \dots (23)$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\pi c} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} \cos \nu \theta \left[\left\{ \frac{\lambda}{2(2\mu+\lambda)} \beta_{\nu 0} + \frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda} (A_{\nu 0} - B_{\nu 0}) \right\} g_{\nu}(r) \right. \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \left(\frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} G_{\nu}(Nr) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{\nu n} + A_{\nu n} - B_{\nu n} + \frac{2(\mu+\lambda)}{\lambda} D_{\nu n} \right\} \right. \\ \left. + \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} F_{\nu}(Nr) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{\nu n} + A_{\nu n} - B_{\nu n} + D_{\nu n} \right\} \right) \dots (24)$$

$$\tau_{rz} = \frac{2}{\pi c} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{\nu} \cos \nu \theta \cdot \sin Nz \left[-\frac{\nu}{Nr} G_{\nu}(Nr) \{ \alpha_{\nu n} + \beta_{\nu n} - 4\mu B_{\nu n} \} - \chi_{\nu p}(Nr) \{ \beta_{\nu n} + 2\mu(A_{\nu n} - B_{\nu n}) \} \right. \\ \left. + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \left\{ \omega_{\nu p}(Nr) + \frac{\nu}{Nr} F_{\nu}(Nr) \right\} \{ \beta_{\nu n} + 2\mu(A_{\nu n} - B_{\nu n}) \} + \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \omega_{\nu p}(Nr) D_{\nu n} \right] \dots (25)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} g_{\nu p}(r) &= \frac{\nu+1}{r} f_{\nu p}(r) \pm \frac{\nu-1}{r} f_{\nu s}(r) \\ g_{\nu s}(r) &= \frac{\nu+1}{Nr} \chi_{\nu p}(Nr) \pm \frac{\nu-1}{Nr} \chi_{\nu s}(Nr) \\ F_{\nu p}(Nr) &= \frac{\nu+1}{Nr} \omega_{\nu p}(Nr) \pm \frac{\nu-1}{Nr} \omega_{\nu s}(Nr) \end{aligned} \right\}$$

前述のとおり、未知量は $k=2$ の場合のみであるから、上式中の未知係数の添字 k および、関数の肩添字 (k) は省略した。

その他の応力についても同様に求めることができる。

(2) 境界条件

4.(1) においてすでに、 z の有限領域における境界条件は導入されているので、ここでは円孔面における境界条件について考察する。ここで、円孔に作用する分布荷

$$w = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0 \text{ for } z=0, z=c \dots (21)$$

となる。また、無限体中に円孔のある場合の解は、式 (18)~(20) で $b=\infty$ とした場合であるから、式中の関数 α, ω, G, F に含まれる $R_{ij}(Nr)$ を $K_i(Nr)$ とし、 f においても $b=\infty$ とすることにより得られる。さらに、 $b=\infty$ で、境界の物理量はすべて 0 と考えられるから、 $k=2$ の場合だけとなり、式 (21) から、すべての ν, i, k に対して

$$\tau_{vik} = \delta_{vik} = E_{vik} = 0 \dots (22)$$

である。これらのことを考慮すれば、変位式は、式 (18)~(20) に同じである。

各応力成分の式は、式 (18)~(20) を Hooke の法則 (4)~(9) に代入して得られるが、ここでは、 $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$ のみについて結果を示す。

重は、すべて、円孔面に対して垂直に作用するものとし、せん断応力は働かないものとする。したがって、円孔面 $r=a$ における境界条件は、

$$\sigma_r = p(\theta, z) \text{ for } r=a \\ \therefore \beta_{\nu n} = \int_0^{2\pi} \int_0^c p(\theta, z) \cos \nu \theta \cos Nz d\theta dz \dots (26)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \text{ for } r=a \therefore \alpha_{\nu n} = 0 \dots (27)$$

$$\tau_{rz} = 0 \text{ for } r=a \dots (28)$$

ただし、 $p(\theta, z)$ は円孔面に作用する分布力である。式 (26), (27) より α, β が決定されるが、 $A_{\nu n}, B_{\nu n}, D_{\nu n}$ に対しては、式 (28) の他に、

$$A_{\nu zr}|_{r=a} = \frac{2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{a}{\nu+1} A_{\nu n} \cos Nz \dots (29)$$

$$B_{\nu zr}|_{r=a} = \frac{2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{a}{\nu-1} B_{\nu n} \cos Nz \dots (30)$$

の関係がある。一方、4.(1) に述べた条件での式 (18), (19) の A_{vzr} , B_{vzr} と式 (29), (30) とは等しくなければならぬ。したがって、これら3つの式より、 A_{vn} , B_{vn} , D_{vn} を決定することができる。

5. 数値解析

荷重の $\theta=0$ および $\theta=\pi$ における z 軸方向の分布と $z=0$ における θ 軸方向の分布は、図-2 に示すとおりである。

(1) 矩形荷重の場合

まず、最初に、円孔面を平面に展開したときの、荷重の分布が 図-3 のような $2c_0 \times 2\theta_0 a$ の矩形分布について計算する。このとき、式 (26) から

$$\beta_{vn} = \frac{2\{1+(-1)^n\}\{1+(-1)^n\}}{\nu N} q \sin Nc_0 \cdot \sin \nu\theta_0 \dots\dots\dots(31)$$

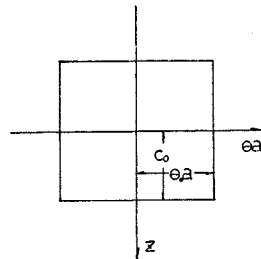


図-3 矩形分布

で、 $\theta_0 = \pi/2$, $c_0/a = 0.62$ とし、 c を十分大きくとり $c/a = 20$ とした。結果を表-1 に示す。この表は円孔面における半径方向変位を比較したものであるが、著者らの計算結果と、E. Tremmel の結果は、非常に良く合っている。

以上により、本理論の妥当性が確かめられたので、種々の大きさの正方形分布について計算し、結果を図-4~11 に示した。図-4~9 は、 $c_0/a = 0.4$ の正方形分布に対する変位および応力の変化を示したものである。まず

表-1 無限体中の円孔に軸対称部分荷重が作用した時の半径方向変位 u の値 ($r/a = 1.0$)

z/c_0	E. Tremmel の値	本理論値
0.0	$0.859 \left(\times \frac{qa}{E} \right)$	$0.861 \left(\times \frac{qa}{E} \right)$
1/3	0.837	0.838
2/3	0.758	0.761
1	0.521	0.524
1 1/4	0.277	0.280
1 1/2	0.187	0.187
2	0.132	0.130
3	0.061	0.054

図-4 は半径方向変位 u の変化を示したものであるが、変位は荷重中心から離れるに従い急激に減少する。すなわち、 $r=a$ における変位では、 $z/c_0 = 1.0$ で最大

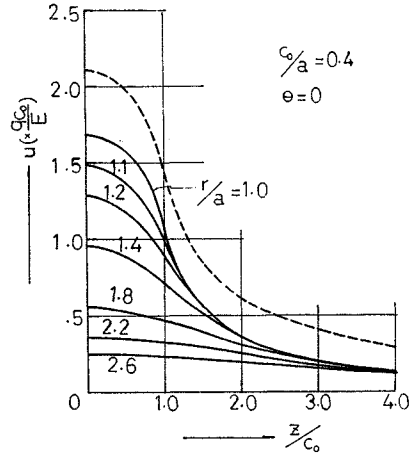


図-4 u の z 方向の変化

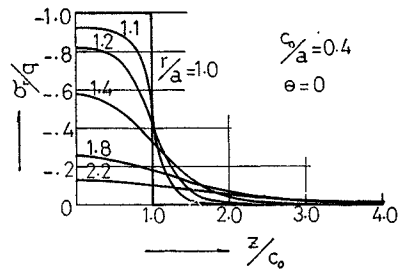


図-5 σ_r の z 方向の分布

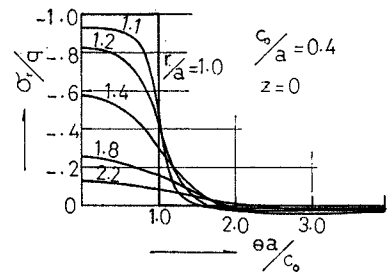


図-6 σ_r の θ 方向の分布

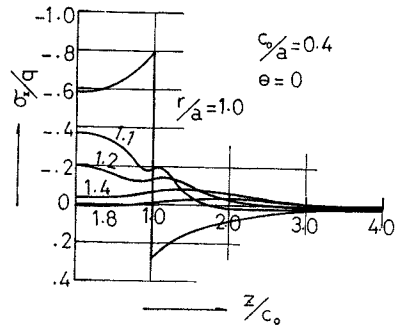


図-7 σ_z の z 方向の分布

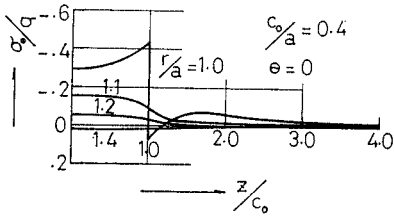


図-8 σ_r の z 方向の分布

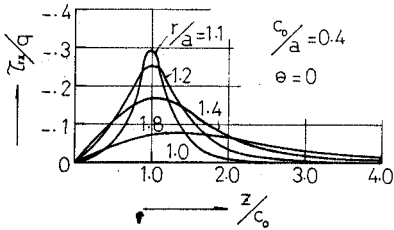


図-9 τ_{rz} の z 方向の分布

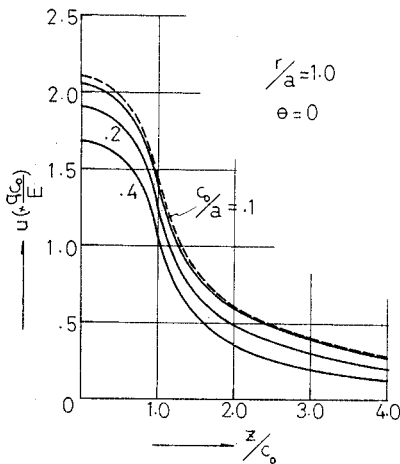


図-10 円孔面の変位 u の z 方向の変化

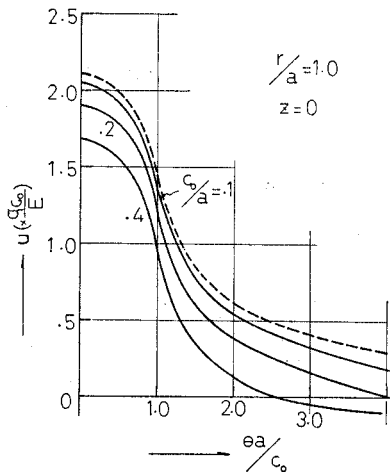


図-11 円孔面の変位 u の θ 方向の変化

値の約 60%, $z/c_0=2.0$ で約 20% となり, $z/c_0=4.0$ 付近では, r 方向に一定の値となる。なお, 図中の点線は半無限体表面に正方形荷重¹¹⁾したときの表面の変位を示したものである。図-5.6 は, σ_r の z 方向および θ 方向の分布を示したものであるが, 両図とも同様の傾向を示しており, $\theta=0, z=0$ では, $r=1.4a$ すなわち表面より c_0 だけ内部で表面における値の 60% 弱, $r=1.8a$ で 30% 弱に減少している。図-7~9 は $\sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ の z 方向の分布を示す。この場合, σ_θ は他の直応力に比べかなり小さく, τ_{rz} は $z/c_0=1.0$ で急激に増加している。図-10, 11 に, c_0/a を変化させたときの円孔面の半径方向変位の, z 方向および θ 方向の変化を, 半無限体荷重の場合(点線)とあわせて示した。どの図も, c_0/a の小さいものほど, 半無限体荷重の場合との差は小さいが, z 方向に比べ θ 方向における差のほうが大きく $\theta a/c_0$ が大きくなるほど, 大きくなっている。

(2) 円形荷重の場合

この場合は, 円孔面を平面に展開したとき, 荷重の分布が, 図-12 のように半径 c_0 の円形になる。したがって, 式 (26) は, $z=x \cos \varphi, \theta a=x \sin \varphi$ とすると,

$$\begin{aligned} \beta_{vn} &= \frac{q}{a} \int_A \cos(Nx \cos \varphi) \cdot \cos\left(\frac{\nu}{a} x \sin \varphi\right) x dx d\varphi \\ &= \frac{2\pi q c_0}{\sqrt{N^2 + (\nu/a)^2} \cdot a} \{1 + (-1)^n\} \{1 + (-1)^\nu\} \\ &\quad \cdot J_1(\sqrt{N^2 + (\nu/a)^2} c_0) \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

となる。

矩形分布の場合と同様, c_0/a の値を変化させて解析を行った。図-13~18 は $c_0/a=0.4$ に対する変位および応力の分布を示し, 図-19, 20 は, c_0/a を変化させた場合の円孔面の半径方

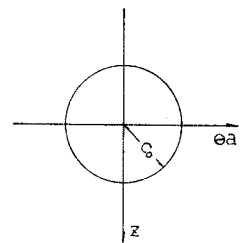


図-12 円形分布

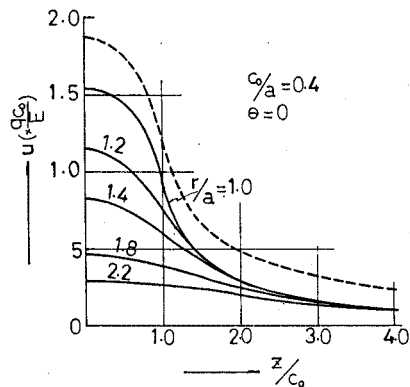


図-13 u の z 方向の変化

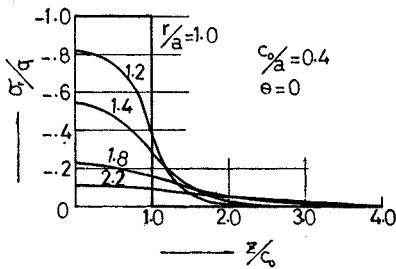


図-14 σ_r の z 方向の分布

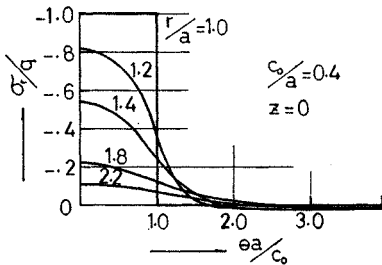


図-15 σ_r の θ 方向の分布

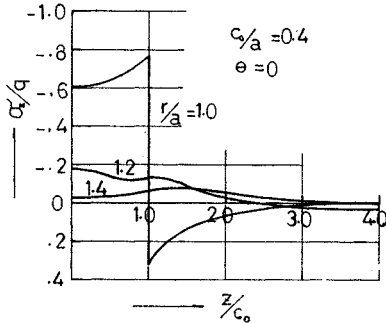


図-16 σ_z の z 方向の分布

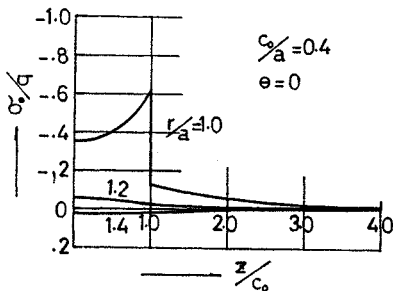


図-17 σ_z の z 方向の分布

向変位の図である。個々の図の傾向は、矩形分布の場合とほぼ同様であるが、矩形分布と比較すると、 σ_r と σ_θ に特に相違がみられる。図-14, 15 に示すように、 σ_r では $r=a$ 以外の面で分布に差があり、図-17 には σ_θ の分布が示されているが、図-8 と比較すると、その相違は特に著しい。すなわち、矩形分布の場合 σ_θ は $z/c_0 = 1.0$ で符号が反転しているのに、円形分布ではまだそ

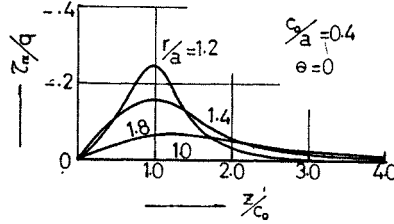


図-18 τ_{rz} の z 方向の分布

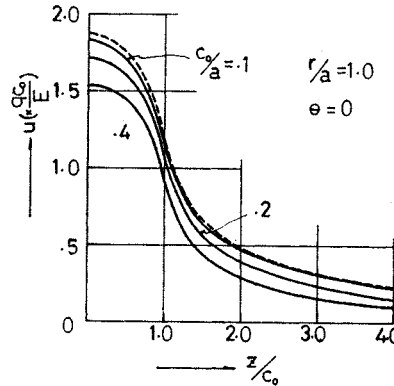


図-19 円孔面の変位 u の z 方向の変化

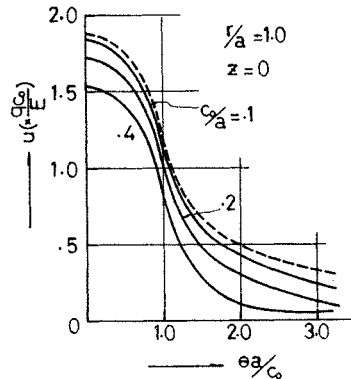


図-20 円孔面の変位 u の θ 方向の変化

の傾向はみられない。しかし、これは c_0/a を大きくすると同様の傾向になると思われる。なぜならば、ここには図示していないが、軸対称荷重の場合の σ_θ は、 $r=a$ で σ_r とは逆の符号を示していることから結論される。図-19, 20 には、半無限体表面に円形荷重した場合の値を点線で示しているが、この場合も c_0/a の小さいものは差が少なく、 θ 方向の変化に比べ z 方向の変化のほうが差が少ない。

以上の計算は、矩形分布、円形分布とも $c=20c_0$ 、級数は n に対して偶数項のみ 100 項、 ν に対して偶数項のみ 50 項、ポアソン比は 0.25 のものである。

最後に、無限級数の収束性を検討するため、 $c_0/a=0.4$ に対して、 $z=0, \theta=0$ で $r=a$ および $r=1.2a$ における u および σ_r の値を計算した。その結果を表-2 に示す。表から明らかのように、変位 u については 50 項で 125 項の場合の 100% に収束しており、応力 σ_r についても $r=1.2a$ の場合には 75 項で 125 項の 100%、 $r=a$ における σ_r のみは 100 項付近でもまだ 1~2% の誤

表-2 各級数項における u および σ_r ($c_0/a=0.4, c/c_0=20, \theta=z=0$)

項数 ($\nu = \frac{n}{2}$)	$u \left(\times \frac{qa}{E} \right)$		σ_r/q	
	$r=a$	$r=1.2a$	$r=a$	$r=1.2a$
6	0.7007	0.5180	-1.2140	-0.8841
12	0.6925	0.5222	-1.0850	-0.8701
25	0.6765	0.5155	-1.0600	-0.8229
50	0.6743	0.5155	-1.0380	-0.8219
75	0.6724	0.5155	-0.9942	-0.8218
100	0.6723	0.5155	-0.9941	-0.8218
125	0.6724	0.5155	-0.9896	-0.8218

差が認められる。

6. む す び

非軸対称 3 次元応力問題を数理的に取扱う方法として、有限 Fourier-Hankel 変換を取りあげ、まず、非軸対称問題の一般解を求めた。この一般解から、無限体中に円孔のある場合の変位および応力に関する解式を求め、この円孔に、部分分布荷重が作用した場合の解析を行った。このとき、荷重分布を等間隔に配置したが、このことにより、有限長の問題になり、先に得た一般解を応用できることになる。もし無限円孔中に一個の荷重がある場合には、この一般解で級数和の代りに無限積分を求めることになるが、これは将来の問題として、ここでは有限問題の場合を取扱った。また荷重間隔を大きくとることにより、単一荷重の状態に近づけることができる。

数値解析は、矩形分布、円形分布の 2 種について行ったが、いずれの場合も、分布幅が小さい範囲 ($c_0/a=0.1$ 以下) では、半無限体載荷の場合との差はわずかであった。得られた結果は、級数の収束に対して検討を加え、かなりの級数項をとったので、十分信頼できると思われるが表面における応力分布のみは、数%の誤差を含んでいる。

ここで取りあげた問題はもちろん、すべての面に境界値を含む問題にも適用できる。

以上の計算の多くは北海道大学大型計算機センターの FACOM-230-60 で行い、また一部は東京大学大型計算機センターの HITAC 8800/8700 で行った。

参 考 文 献

- 1) 宮本 博：3次元弾性論，裳華房，pp. 2-6, 1967
- 2) Sneddon, I.N. : Fourier Transforms, Chap. 10, Mc Graw-Hill, 1951
- 3) Muki, R. : Progress in Solid Mechanics, Vol. 1, Chap. VIII, North-Holland, 1960
- 4) たとえば，秦 謙一：三次元応力問題の解法について，北海道大学工学部研究報告，第 13 号，pp. 39-42, 昭和 30 年 12 月
- 5) Nomachi, S. : On the Method for Solving Three Dimensional Stress Problems by Means of Fourier Transformation, Proc. 6th-N.C.T.A.M., pp. 7-11, 1956
- 6) Nomachi, S. : A Stress Analysis of Simply Supported Rectangular Plate in Three-Dimensional Stress Problem, Proc. 9th-N.C.T.A.M., pp. 41-44, 1959
- 7) Nomachi, S.G. : On one Method of Solving Stress Problems in Cylindrical Co-ordinates by Means of Finite Fourier Hankel Transforms (Part I), Memoirs of Muroran Institute of Tech., Vol. 3, No. 3, pp. 91-115, 1960
- 8) Nomachi, S.G. : On one Method of Solving Stress Problems in Cylindrical Co-ordinates by Means of

Finite Fourier Hankel Transforms (Part II), Memoirs of Muroran Institute of Tech., Vol. 3, No. 4, pp. 128-138, 1961

- 9) 能町純雄・松岡健一：円筒座標に関する非軸対称三次元応力解析について，第 27 回年次学術講演会講演概要集第 1 部，pp. 127-130, 昭和 47 年 10 月
- 10) Tremmel, E. : Ausweitung des Kreiszyklindrischen Hohlraumes unter örtlichem Innendruck, Ingenieur-Archiv, Band 29, pp. 331-350, 1960
- 11) Timoshenko, S. and Goodier, J.N. : Theory of Elasticity; McGraw-Hill, pp. 366-372, 1951
- 12) 吉田耕作他：応用数学便覧，丸善，pp. 410, 1967
- 13) Sneddon, I.N. : Fourier Transforms, Chap. 1, 2, Mc Graw-Hill, 1951

【付録 A】 有限 Fourier-Hankel 変換記号および逆変換¹³⁾

A 1 有限 Fourier 変換

関数 $f(x)$ が $0 < x < a$ で Dirichlet の条件を満足するものとし、これの有限 Fourier 変換を次のように表わす。

$$S_n[f(x)] = \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx \dots\dots\dots (A.1)$$

$$C_n[f(x)] = \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi}{a} x dx \dots\dots\dots (A.2)$$

ただし、 $n=1, 2, \dots$

この逆変換は $0 < x < a$ で求められ、

$$f(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} S_n[f(x)] \sin \frac{n\pi}{a} x \dots\dots\dots (A.3)$$

$$f(x) = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n[f(x)] \cos \frac{n\pi}{a} x \dots\dots\dots (A.4)$$

A 2 有限 Hankel 変換

関数 $f(x)$ が $a < x < b$ で Dirichlet の条件を満足するものとし、これの有限 Hankel 変換を次のように表わす。

$$H_j[f(x)] = \int_a^b f(x) x H_j(\xi_i x) dx \dots\dots\dots (A.5)$$

ただし、 $i=1, 2, \dots$

$$H_j(\xi_i x) = J_j(\xi_i x) Y_j(\xi_i a) - J_j(\xi_i a) Y_j(\xi_i x)$$

であり、 ξ_i は $H_j(\xi_i b) = 0$ の根を小さい順に並べたものである。また J, Y は第 1 種および第 2 種の Bessel 関数である。

この逆変換は、 $a < x < b$ で求められ、

$$f(x) = \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} H_j[f(x)] \frac{H_j(\xi_i x)}{\theta_{\nu i}^2} \dots\dots\dots (A.6)$$

$$f(x) = \frac{2\nu}{b^{2\nu} - a^{2\nu}} x^{\nu-1} \int_a^b f(x) x^{\nu} dx + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} H_{\nu-1}[f(x)] \frac{H_{\nu-1}(\xi_i x)}{\theta_{\nu i}^2} \dots\dots\dots (A.7)$$

$$f(x) = \frac{2\nu a^{2\nu} b^{2\nu}}{b^{2\nu} - a^{2\nu}} x^{-(\nu+1)} \int_a^b f(x) x^{-\nu} dx + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} H_{\nu+1}[f(x)] \frac{H_{\nu+1}(\xi_i x)}{\Theta_{\nu i}^2} \dots \dots \dots (A.8)$$

ここで,

$$\Theta_{\nu i}^2 = \{H_{\nu-1}(\xi_i b)\}^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \{H_{\nu-1}(\xi_i a)\}^2$$

【付録 B】 有限 Fourier-Hankel 変換の逆変換公式

B 1 Fourier 逆変換

Fourier 変換の逆変換公式はすでに発表されているが,ここでは,本論に必要な公式を述べる。 $N=n\pi/a$ として,

$$\phi^{(k)}(\xi_i x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \{1 + (-1)^{k+n}\} \frac{\xi_i}{N^2 + \xi_i^2} \cos Nx - \{1 + (-1)^k\} \frac{1}{\xi_i a} = \frac{\sinh \xi_i(a-x) + (-1)^k \sinh \xi_i x}{\cosh \xi_i a - (-1)^k} \dots \dots \dots (B.1)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(k)}(\xi_i x) - \psi^{(k)}(\xi_i x) &= \frac{4}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \{1 + (-1)^{k+n}\} \frac{\xi_i N^2}{N^2 + \xi_i^2} \cos Nx \\ &= \phi^{(k)}(\xi_i x) - \xi_i \frac{x \cosh \xi_i(a-x) + (-1)^k(a-x) \cosh \xi_i x}{\cosh \xi_i a - (-1)^k} \dots \dots \dots (B.2) \end{aligned}$$

$$Q^{(k)}(\xi_i x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \{1 + (-1)^{k+n}\} \frac{N}{N^2 + \xi_i^2} \sin Nx = \frac{\cosh \xi_i(a-x) - (-1)^k \cosh \xi_i x}{\cosh \xi_i a - (-1)^k} \dots \dots \dots (B.3)$$

$$P^{(k)}(\xi_i x) = \frac{4}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \{1 + (-1)^{k+n}\} \frac{\xi_i^2 N}{(N^2 + \xi_i^2)^2} \sin Nx = \xi_i \frac{x \sinh \xi_i(a-x) - (-1)^k(a-x) \sinh \xi_i x}{\cosh \xi_i a - (-1)^k} \dots \dots \dots (B.4)$$

B 2 Hankel 逆変換

Hankel 変換に関する逆変換理論は,紙面の都合で省略し,公式のみをここに記す。

$$G_{\nu}^{(k)}(Nx) = \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \xi_i a_k}{N^2 + \xi_i^2} H_{\nu+1}(\xi_i a_k) \frac{H_{\nu}(\xi_i x)}{\Theta_{\nu i}^2} = \frac{R_{\nu, \nu}^{(k)}(Nx)}{R_{\nu, \nu}^{(k)}(Na_k)} \dots \dots \dots (B.5)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\nu \rho}^{(k)}(Nx) &= \frac{2\nu a_k^{2\nu}}{b^{2\nu} - a^{2\nu}} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{Na_k} \left(\frac{a_k}{x}\right)^{\nu-1} + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} Na_k}{N^2 + \xi_i^2} H_{\nu+1}(\xi_i a_k) \frac{H_{\nu+1}(\xi_i x)}{\Theta_{\nu i}^2} \\ &= \frac{R_{\nu+1, \nu}^{(k)}(Nx)}{R_{\nu, \nu}^{(k)}(Na_k)} \dots \dots \dots (B.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{\nu s}^{(k)}(Nx) &= \frac{2\nu a_k^{2\nu}}{b^{2\nu} - a^{2\nu}} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{Na_k} \left(\frac{x}{a_k}\right)^{\nu+1} - \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} Na_k}{N^2 + \xi_i^2} H_{\nu+1}(\xi_i a_k) \frac{H_{\nu-1}(\xi_i x)}{\Theta_{\nu i}^2} \\ &= \frac{R_{\nu-1, \nu}^{(k)}(Nx)}{R_{\nu, \nu}^{(k)}(Na_k)} \dots \dots \dots (B.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\nu}^{(k)}(Nx) &= \frac{4}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^k N^2 \xi_i a_k}{(N^2 + \xi_i^2)^2} H_{\nu+1}(\xi_i a_k) \frac{H_{\nu}(\xi_i x)}{\Theta_{\nu i}^2} \\ &= \frac{N}{\{R_{\nu, \nu}^{(k)}(Na_k)\}^2} [R_{\nu, \nu}^{(k)}(Na_k) \{x R_{\nu-1, \nu}^{(k)}(Nx) - a_{k-1} R_{\nu, \nu+1}^{(k)}(Nx)\} \\ &\quad - R_{\nu, \nu}^{(k)}(Nx) \{a_k R_{\nu-1, \nu}^{(k)}(Na_k) - a_{k-1} R_{\nu, \nu+1}^{(k)}(Na_k)\}] \dots \dots \dots (B.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{\nu \rho}^{(k)}(Nx) &= -\frac{4}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^k N \xi_i^2 a_k}{(N^2 + \xi_i^2)^2} H_{\nu+1}(\xi_i a_k) \frac{H_{\nu+1}(\xi_i x)}{\Theta_{\nu i}^2} \\ &= \frac{N}{\{R_{\nu, \nu}^{(k)}(Na_k)\}^2} [R_{\nu, \nu}^{(k)}(Na_k) \{x R_{\nu, \nu}^{(k)}(Nx) - a_{k-1} R_{\nu+1, \nu+1}^{(k)}(Nx)\} \\ &\quad - R_{\nu+1, \nu}^{(k)}(Nx) \{a_k R_{\nu-1, \nu}^{(k)}(Na_k) - a_{k-1} R_{\nu, \nu+1}^{(k)}(Na_k)\}] \dots \dots \dots (B.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{\nu s}^{(k)}(Nx) &= \frac{4}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^k N \xi_i^2 a_k}{(N^2 + \xi_i^2)^2} H_{\nu+1}(\xi_i a_k) \frac{H_{\nu-1}(\xi_i x)}{\Theta_{\nu i}^2} \\ &= \frac{N}{\{R_{\nu, \nu}^{(k)}(Na_k)\}^2} [R_{\nu, \nu}^{(k)}(Na_k) \{x R_{\nu, \nu}^{(k)}(Nx) - a_{k-1} R_{\nu-1, \nu-1}^{(k)}(Nx)\} \\ &\quad - R_{\nu-1, \nu}^{(k)}(Nx) \{a_k R_{\nu+1, \nu}^{(k)}(Na_k) - a_{k-1} R_{\nu, \nu+1}^{(k)}(Na_k)\}] \dots \dots \dots (B.10) \end{aligned}$$

ただし $R_{i, j}^{(k)}(Nx) = I_i(Nx) K_j(Na_{k-1}) - (-1)^{i+j} I_j(Na_{k-1}) K_i(Nx)$ であり I, K は第1種および第2種の変形 Bessel 関数である。

また, $N=0$ のときは

$$g_{\nu}^{(k)}(x) = \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a_k}{\xi_i} H_{\nu+1}(\xi_i a_k) \frac{H_{\nu}(\xi_i x)}{\Theta_{\nu i}^2} = \frac{a^{\nu} b^{\nu}}{b^{2\nu} - a^{2\nu}} \left\{ \left(\frac{x}{a_{k-1}} \right)^{\nu} - \left(\frac{a_{k-1}}{x} \right)^{\nu} \right\} \dots\dots\dots (B.11)$$

$$f_{\nu p}^{(k)}(x) = \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a_k}{\xi_i^2} H_{\nu+1}(\xi_i a_k) \frac{H_{\nu+1}(\xi_i x)}{\Theta_{\nu i}^2} = \frac{a^{\nu} b^{\nu}}{b^{2\nu} - a^{2\nu}} \left\{ \frac{a_{k-1}}{2(\nu+1)} \left(\frac{x}{a_{k-1}} \right)^{\nu+1} - \frac{a_{k-1}}{2} \left(\frac{a_{k-1}}{x} \right)^{\nu-1} \right\} \\ + \frac{1}{x^{\nu+1}} \left[\frac{2\nu a^{2\nu} b^{2\nu}}{(b^{2\nu} - a^{2\nu})^2} \left\{ \frac{a^2 - b^2}{4(\nu+1)} a_{k-1}^{-\nu} + \frac{a_{k-1}^{\nu}}{4(\nu-1)} (a^{-2(\nu-1)} - b^{-2(\nu-1)}) \right\} \right] \dots\dots\dots (B.12)$$

$$f_{\nu s}^{(k)}(x) = \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k}{\xi_i^2} H_{\nu-1}(\xi_i a_k) \frac{H_{\nu-1}(\xi_i x)}{\Theta_{\nu i}^2} = \frac{a^{\nu} b^{\nu}}{b^{2\nu} - a^{2\nu}} \left\{ \frac{a_{k-1}}{2} \left(\frac{x}{a_{k-1}} \right)^{\nu+1} + \frac{a_{k-1}}{2(\nu-1)} \left(\frac{a_{k-1}}{x} \right)^{\nu-1} \right\} \\ + x^{\nu-1} \left[\frac{2\nu a^{\nu} b^{\nu}}{(b^{2\nu} - a^{2\nu})^2} \left\{ \frac{a_{k-1}^{-\nu}}{4(\nu+1)} (a^{2(\nu+1)} - b^{2(\nu+1)}) + \frac{a_{k-1}^{\nu}}{4(\nu-1)} (a^2 - b^2) \right\} \right] \dots\dots\dots (B.13)$$

上式中 $a_1=b$, $a_2=a$, $a_0=a$ である。式 (B.11)~(B.13) は $\nu=0$ および $\nu=1$ のときは、別の形をとるがここでは省略する。

(1974.3.11・受付)