

層流実験に基づく橋脚前面の局所流の研究

LOCAL FLOW AT THE UPSTREAM SIDE OF BRIDGE PIERS IN LAMINAR CONDITION

宇 民 正*

By Tadashi Utami

1. 概 説

橋脚周辺部における河床の局所的な洗掘現象についてはかなり古くから研究されているが¹⁾、流れが三次元的であること、河床面と流れとが相互に影響しあって洗掘が進行することなどのために、明快な説明がなされるまでには至っていない。本文は、三次元的な局所流の一つとして、また上記の問題を解決する手がかりとして、主に円柱橋脚前面における局所流について実験的にその特性を見出すとともに、その結果に基づいて理論的解析を試みたものである。

さて、橋脚周辺河床の局所洗掘現象のうち、前面に発生する深掘れの原因が、橋脚前面の脚部をとり囲みかつ水平な軸をもつ馬蹄型渦であることは従来から指摘されているが²⁾、この渦の発生機構や特性についての研究がされるようになったのはごく最近である。こうした研究には二つの考え方があり、その一つは小川³⁾や吉川⁴⁾の研究で、橋脚前面部におけるいわゆる下降流を水深方向の流速差に基づく圧力差から説明しようとするものであり、他は Schneider ら⁵⁾や中川⁶⁾らの研究で、馬蹄型渦や下降流の生成を渦度の概念から説明しようとしたものである。しかし、前者の考え方では馬蹄型渦の発生やそれに伴って生ずる橋脚前面の河床近傍の逆流を説明することが難しい。また Schneider らの研究では、馬蹄型渦の原因と考えられる主流の速度勾配と下降流によって橋脚前面に生じる速度勾配とを区別していない点に不十分さを残しており⁷⁾、中川らの研究では、Hawthorne⁸⁾が渦度の三次元的な変

形に関して導き出した理論が適用されているが、二次流の速度成分が主流のそれに比して十分小さいという仮定に立っているのが、主流にほぼ匹敵する流速をもつ馬蹄型渦を解析するには十分とはいえないと考えられる。

本研究は、こうした事情を考慮したうえで、平滑な固定床上に設置された円柱橋脚を対象として、第一に、前面橋脚近傍に発生する馬蹄型渦の特性を実験的に把握し、第二に、そこで明らかになった渦の力学的機構を基礎にして渦を含む全体の流況を表現するための解析モデルを提示して、渦運動に伴う橋脚前面の下降流や水路床面に沿う逆流の大きさなどを推定する方法を示したものである。

なお、説明の都合上、ここで本文に用いる主な記号を示しておく(図-1および図-10参照)。

x : 円柱の中心または角柱の前面の中心から下流方向に測った距離

y : 円柱の中心から水路に直角方向に測った距離

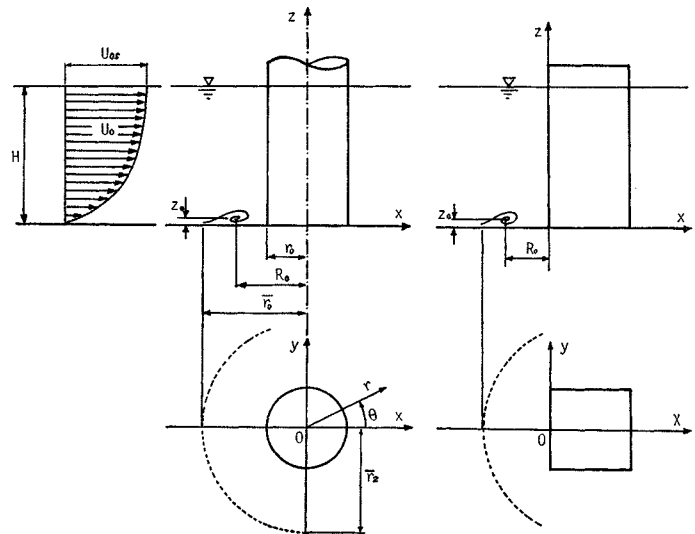


図-1 記号の説明

* 正会員 工修 京都大学助手 防災研究所

- z : 水路床面からそれに垂直上向きに測った距離
 r : 円筒座標系において円柱中心から測った距離
 θ : r 軸が x 軸の正方向となす角度
 r_0 : 円柱の半径
 r_0' : 円柱前面の流れの対称面において、水路床のごく近傍で x 方向の流速が 0 となる点の r 座標
 r_1 : 流速を求めようとする点の渦軸からの距離
 r_1' : 流速を求めようとする点の渦軸の鏡像の位置からの距離
 r_2 : 水路床近傍で円柱の中心から水路横断方向に逆流域の境界線まで測った距離
 R_0 : 円柱中心から馬蹄型渦の中心までの距離
 z_0 : 水路床から馬蹄型渦の中心までの高さ
 a : 二次流を規定する渦度領域の断面 (円形) の半径
 U_0 : 水路床から高さ z における接近流の流速
 U_{0s} : 接近流の水面における流速
 U_r, U_θ, U_z : 点 (r, θ, z) における流速のそれぞれ r, θ, z 方向成分
 u_r, u_θ, u_z : 点 (r, θ, z) における主流流速のそれぞれ r, θ, z 方向成分
 u_r', u_θ', u_z' : 点 (r, θ, z) における二次流流速のそれぞれ r, θ, z 方向成分
 H : 水深
 κ : 渦度領域のまわりの循環の値で、二次流を規定するもの。渦度ベクトルが θ の正方向をむくとき正
 ω_0 : 渦度領域内の渦度で $\kappa/\pi a^2$ に等しい
 η : 流れの対称面における渦度ベクトルの y 方向成分

2. 主流が層流の場合の実験的研究⁹⁾

一般に橋脚周辺の流れの場が乱流であることはいうまでもない。二、三の予備的な実験結果によって、主流が乱流の場合には橋脚前面の脚部に馬蹄型渦は発生するが、その強さや位置が常に変動しており、渦の内部まで立ち入った詳細な実験的研究が非常に難しいことが判明した。ところで、前述の Hawthone の研究や Schneider らの考察で示されているように、橋脚といった流れの中の障害物のために主流の渦度とその前面に集中することによって馬蹄型渦が形成されると考えてよいようである。そこで、主流が層流の場合にも、そこには渦度が存在するので (最も渦度の大きさや分布は乱流の場合とは異なるが)、安定な馬蹄型渦が形成されると考えて、研究の第一段階として、グリセリンと水との混合液を使用し、低レイノルズ数の主流を作って実験を行った。

(1) 実験水路と実験方法

実験に使用した水路は幅 20 cm、高さ 15 cm、長さ 6 m であり、底勾配は 1/500 で固定した。また水路は透明アクリル樹脂製で、底面からも側面からも Flow Visualization の方法が適用できるようにした。

使用した橋脚は、直径 $2r_0=5.0, 4.025, 3.525, 2.20, 2.025, 1.80$ cm の 6 種類の円柱、および一辺 5.0 cm の正方形断面をもつ角柱であり、それを水路中央で上流端から 330 cm の位置に設置して表-1 に示す条件のもとで実験を行った。

表-1 実験条件

Run	水深 H (cm)	最大流速 U_{0s} (cm/sec)	動粘性係数 ν (cm ² /sec)	レイノルズ数 HU_{0s}/ν	橋脚の種類
A	4.63	3.74	5.62	3.08	角柱
B	3.00	4.00	2.21	5.44	円柱
C	3.00	3.25	2.71	3.59	円柱
D	3.92	2.66	5.67	1.84	円柱

(2) 角柱の場合の流況特性

前述したように、流れは三次元的であるが、流れの対称面においては流速ベクトルはその面内に含まれているので測定は比較的容易である。さらに、その面内における流れの諸特性が明らかになれば、橋脚前面 ($90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) の流れ全体についてもある程度のことは推測することができる。また、円柱、角柱いずれの場合にも渦の発生機構に本質的な差異はなく、一方同一の水理条件の下では、角柱の場合の方が馬蹄型渦が顕著に現われるという実験的事実から、まず角柱橋脚前方の対称面における流れの特性、特に馬蹄型渦の発生の機構を実験によって明らかにしようとした。

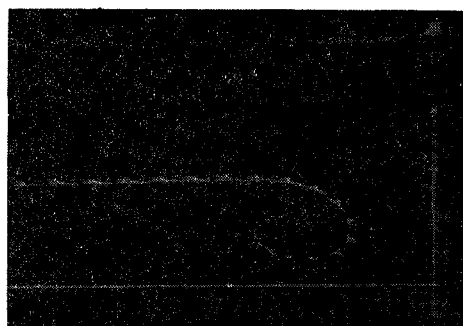
測定は Flow Visualization の方法の一つである水素気泡法によった。すなわち、角柱橋脚前面の中心より上流 $x=-7.5$ cm の位置に、直径 0.05 mm の白金線を水路横断方向に水平に張り、それを陰極として 0.4 秒間隔にパルス状の電圧をかける。このとき陰極の白金線に発生した水素気泡が流体とともに下流に向かって運ばれるが、流れの対称面、すなわち水路の中心軸を含む鉛直面とその近傍のみを水路底面から照明し、水路の側面から写真撮影することによって 0.4 秒間隔のスナップとして流線が示されることとなる。

a) 対称面内の流れの変化と流速分布

写真-1 はこのようにして撮影した写真の例である。 (a) は白金線の陰極を水路床面上 $z=3.0$ cm においた場合、 (b) は $z=2.0$ cm の場合である。これらの写真から、角柱橋脚前方の対称面内における流線を求めた結果が図-2 である。この図から、渦を構成する流線は渦巻き状に主流から連なっているという重要な特性を



(a) $z=3.0\text{cm}$



(b) $z=2.0\text{cm}$

写真-1 対象面内の流線（角柱）

見出すことができる。すなわち、橋脚前面に発生する馬蹄型渦は、隅角部などに発生する二次元的な渦と異なり、渦を構成する流体が主流から供給されており、また連続の条件から考えて、供給された流体は渦軸方向に橋脚の両側をまわるようにして下流へ流下することが推測される。さらに具体的にいうと、橋脚の上流部で底面から約 1.0 cm までの範囲の流体は渦による逆流におされて渦の外側をまわるように横方向へ流下している。この領域を A 領域とよぶことにする。また、上流部で $z > 1.0\text{ cm}$ の範囲にある流体は渦にまきこまれるような流線を描くが、特に $z=1.0\sim 2.5\text{ cm}$ の範囲の流体は渦軸の位置にまで達していることが認められる。これらの流線を含む領域を B 領域とよぶことにする。さらに、上流で $z=2.5\text{ cm}$ から水面までの流線は橋脚の直前面で下降流を形成するが、渦の周辺で逆流するまでには至っていない。このような流線を含む領域を C 領域とよぶことにする。

次に、対象面内での流速の絶対値 q を接近流の平均流速 2.5 cm/sec で除して無次元化した等流速線図が図-3 である。図から、渦の周辺でもかなり大きな流速が存在し、また渦軸 ($x/H=-0.517, z/H=0.193$) では流速はほぼ 0 であり、その近傍では渦軸からの距離の増加とともに流速が増加する領域が存在することが認められる。

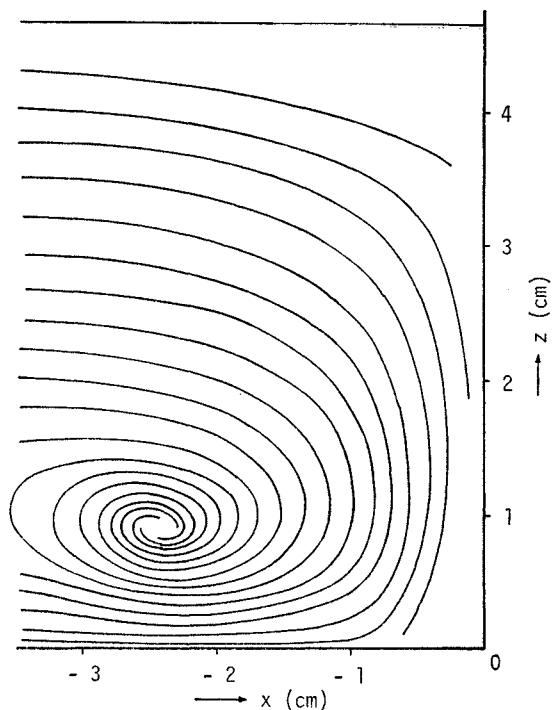


図-2 対象面内の流線（角柱）

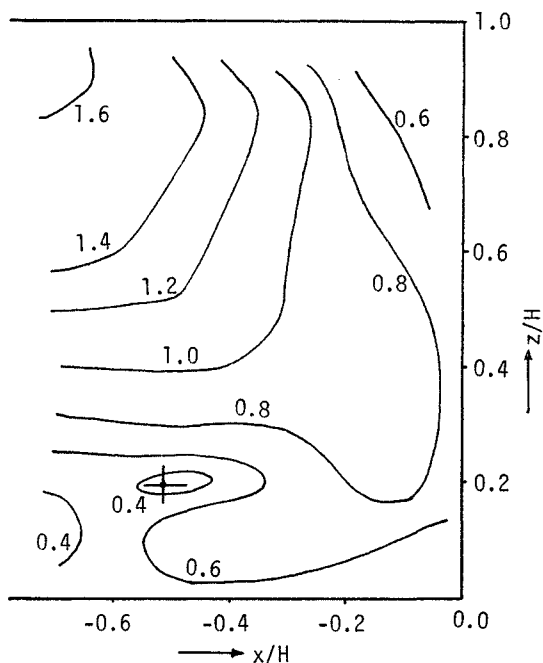


図-3 対象面内の絶対流速分布（角柱）

b) 対称面内における渦度分布

上と同じ実験について、対称面内における y 方向の渦度成分 ω_y を計算したものが図-4 である。計算にあたっては、図-2 および 図-3 を用い、流線の曲率半径を R

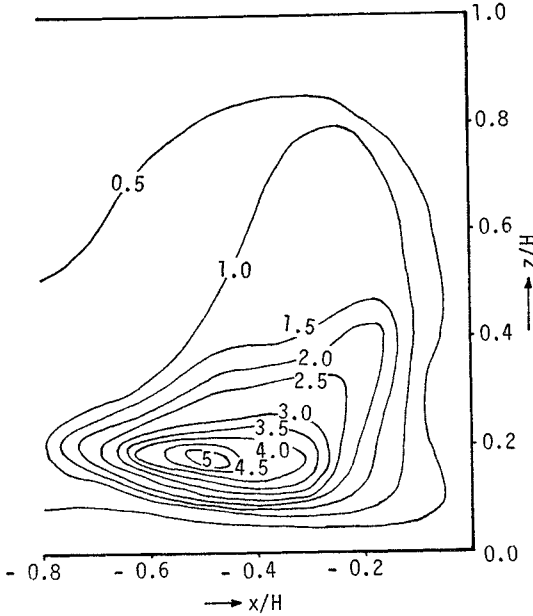


図-4 対象面内の渦度分布 (角柱)

として、 $\eta = q/R + \partial q/\partial R$ の関係を用いたので、計算精度はあまり良好とはいえない。しかしながら、渦軸に近づくにつれて渦度が急激に大きくなっていることが明らかに認められる。このことと、前述した流線の形状の特徴とをあわせ考えると、馬蹄型渦の発生は主流に含まれている渦度が橋脚によって集中させられるためであることが認められよう。

次に、対称面内において、橋脚の影響をうけない上流部で単位面積をしめる流体部分が、流下するに伴って変形して対称面内で占める面積が α となり、そこでの渦度の y 成分を η とすると、 $\alpha \cdot \eta$ の分布を図-2、図-3および図-4から計算したものが図-5である。この図において、左側の縦軸は接近流の渦度分布すなわち $\alpha \cdot \eta$ を示している。この図と図-2の流線図とを比較してみると、渦軸、水路床面および橋脚前面のごく近傍を除いて、流線に沿って $\alpha \cdot \eta$ の値がほぼ一定になり、非粘性流体に関する Helmholtz の渦度保存則が近似的に成立していることが認められる。このことは、前述の接近流の渦度の集中による馬蹄型渦の発生とともに重要な特性である。

(3) 円柱の場合の流況特性

ここでは対称面内のみならず、橋脚前方全域にわたる流れの特性を円柱橋脚を設けた場合について巨視的に観測した結果を述べる。

それに先立って、円柱と角柱とは渦の発生機構に本質的な差異がないことを実験によって確かめておく必要

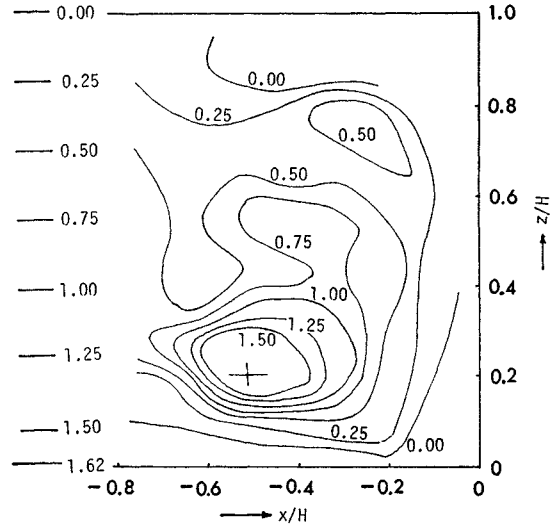


図-5 対象面内の $\alpha \cdot \eta$ の分布 (角柱)

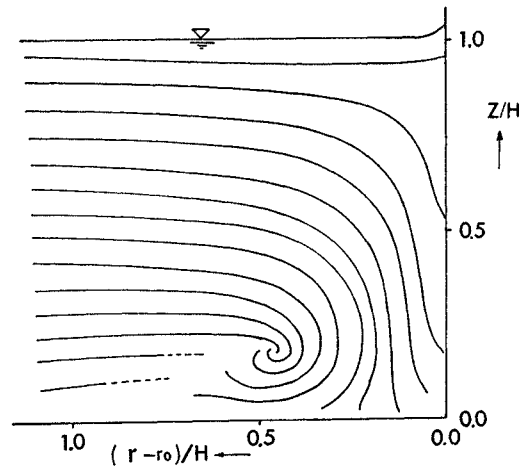


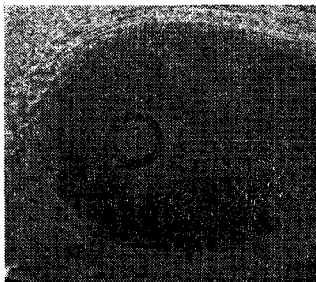
図-6 対象面内の流線 (円柱)

がある。図-6はrun Bで直径5cmの円柱橋脚を設置した場合の対称面内での流線パターンを示している。この図から、円柱橋脚の場合にも角柱の場合と同様に、前面での渦を構成する流体は主流から供給されており、それは橋脚より上流においてほぼ $z = z_0$ から $z = (2 \sim 3)z_0$ に位置する主流の部分であることが認められる。さらに渦の立体的な形状を比較観察するために、run Aの接近流速をもつ流れに一辺5cmの正方形角柱をおいた場合および直径2cmの円柱をおいた場合を対象として、その上流に水素気泡法の陰極を水路横断方向に水平にはり、陰極の高さを種々に変えた場合に発生する水素気泡の条線が流れに従って描く模様を水路の底から写真撮影した。観測結果の一例を写真-2に示す。これから、 $z = 0.1$ cmの位置に陰極をおいた場合、橋脚前面では逆流のためにトレーサーは横方向におし流され、渦にまき

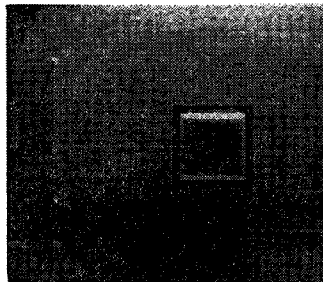
こまれないこと、また、水路床付近での逆流域がいずれもほぼ円形に近い形で形成されていることが認められる。また $z=1.5\text{ cm}$ の場合にはトレーサーは馬蹄型渦にまきこまれ、水路床付近では逆流していることが認められる。 $z=3.0\text{ cm}$ の場合には、トレーサーは橋脚前面の下降流に連行されてはいるが、河床付近の逆流域に巻き込まれることはない。

以上の観察から、円柱橋脚前面の流れについても角柱橋脚前面の流れと同様に、馬蹄型渦を構成する流体は主流から供給され、従って馬蹄型渦の形成は Helmholtz の渦度保存則によるとの考えが妥当であること、また、先に角柱前方の対称面内の流れについて示した A, B, C の三種の領域区分が、角柱の場合でも円柱の場合でもしかもその前面の全領域について適用されることが認められた。

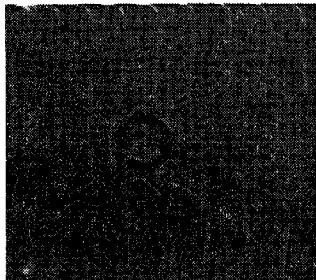
さて、以後の解析に必要な馬蹄型渦の幾何寸法を決定するために、写真観測の結果を利用して円柱前面での水路床付近の逆流域の性状をさらに考察してみる。写真一



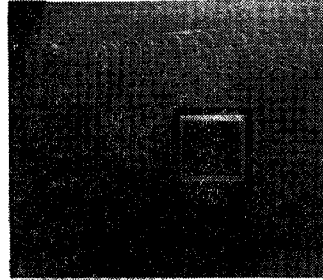
(a) $z=0.1\text{ cm}$



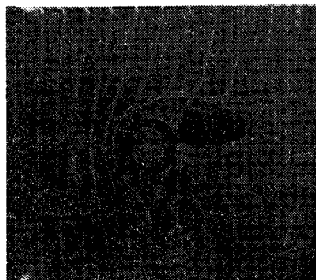
(d) $z=0.1\text{ cm}$



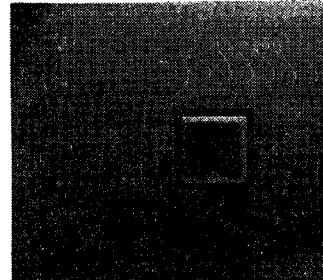
(b) $z=1.5\text{ cm}$



(e) $z=1.5\text{ cm}$

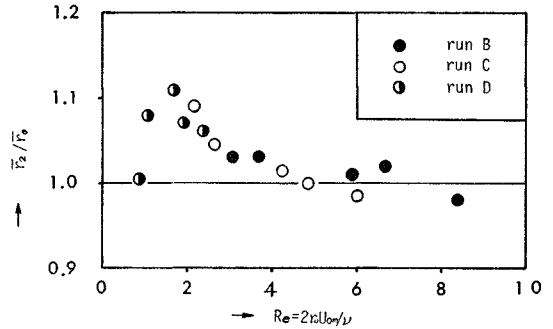


(c) $z=3.0\text{ cm}$



(f) $z=3.0\text{ cm}$

写真一2 流れの模様底面からの撮影



図一7 r_2/\bar{r}_0 の変化 (円柱)

2 から逆流域外縁がほぼ円柱と同心円の平面形状を示すことが認められるが、主流方向と直角な断面での円柱中心から水路床近傍の逆流域外縁までの距離 \bar{r}_2 (図一1 参照) と対称面内における距離 \bar{r}_0 との比 \bar{r}_2/\bar{r}_0 を実測値から求め、図示すると 図一7 のようになる。図一7 の横軸は接近流の平均流速と円柱の直径を用いて計算したレイノルズ数 R_e である。 R_e の変化の範囲は限られてはいるが、 $R_e > 4$ では \bar{r}_2/\bar{r}_0 は R_e に無関係にほぼ 1 の一定値をとることが認められ、従って円柱前面の水路床近傍の逆流域の形状はほぼ円柱と同心の円形状であるといえる。またこのことから馬蹄型渦の渦軸も近似的に同心円で表わされると考えてよい。

以上の実験的事実から、もし対称面内における逆流域の大きさや渦軸の位置が明らかになれば、円柱前面全域での渦の位置や大きさを決定することができる。そこで、表一1 に示す実験条件のもとで円柱橋脚を設置したとき、対称面内での渦軸の橋脚前面からの距離 $R_0 - r_0$ および渦軸の水路床面からの高さ z_0 の水深 H で除した無次元量を r_0/H と関係づけたところ 図一8 が得られた。この図から渦軸の位置は r_0/H の関数として与えられ、その関係を指数関数で近似させると、

$$\left. \begin{aligned} (R_0 - r_0)/H &= 0.57(r_0/H)^{0.6} \\ z_0/H &= 0.21(r_0/H) \end{aligned} \right\} \text{または} \\ z_0 &= 0.21 r_0 \\ \dots\dots\dots (1)$$

が得られる。この式から特に z_0 は橋脚半径によって決定されることがわかる。

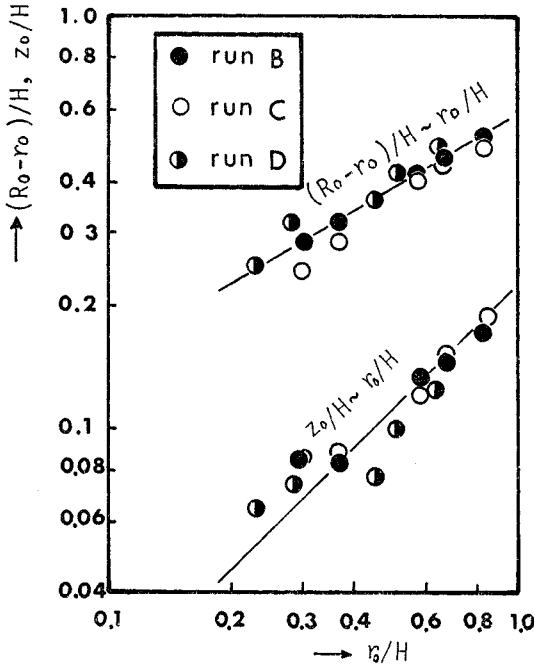


図-8 渦軸の位置 (円柱)

3. 流れの機構に関する解析的研究

(1) 解析モデルの構成

前節に述べた所から、馬蹄型渦は主流中に存在していた渦度が橋脚のために集中させられた結果発生することならびに渦軸のごく近傍や境界面近傍の粘性の影響が大きい所を除けば、渦度の集中の機構は非粘性流に関する Helmholtz の渦度保存則にほぼ支配されることが実験的に認められた。渦度の存在する流れの場の解析は Rosenhead¹⁰⁾ あるいは Yieh¹¹⁾, Long¹²⁾ らによってすでになされているが、これらはいずれも二次元場の解析にとどまっている。一方三次元的な流れの場に渦度が分布する場合に関しては Lamb¹³⁾ の解があるが、この解は無限に広がる流れの場を前提としているため、物体周辺の流れのように複雑な境界条件をもつ流れの場の解を求めることは困難のようである。物体周辺の三次元的な流れの解析的取扱い方法については、主流を非回転流とし、二次流をそれからの微小な偏差と考え、渦度保存則に基づいて解析する方法が Squire と Winter¹⁴⁾ によって翼列および曲管内の二次流に関して展開され、Hawthone⁹⁾ や Lighthill¹⁵⁾ によりこの方法はさらに発展させられた。しかし Hawthone の理論は先述のように限界をもっている。

そこで本文では橋脚周辺の層流に関する実験的観測を

基礎にして、馬蹄型渦の存在とそれに伴う下降流と逆流をも考慮に入れた解析モデルを設定し、それによる流れの解析を行った。モデルの設定に際して、流れの場は主流と二次流とから成るとした。主流としては水路床面に平行な断面内では二次元非回転流を仮定し、水深方向の流速分布については接近流の流速分布形状が保持されるとした。これらの仮定は Hawthone⁹⁾ の方法を踏襲したものである。一方、円柱橋脚周辺での二次流は主流と匹敵しうるぐらい大きいので、Hawthone の微小偏差の仮定は満足されず、ここでは馬蹄型渦による回転運動とそれに伴う流体運動を二次流と仮定し、それらが主流に重ねあわされることにより局所流全体が形成されるものと考えた。

a) 主流の流速成分

主流の r, θ, z 方向の流速成分をそれぞれ u_r, u_θ, u_z とするとき、これらは二次元非回転流理論によって次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= U_0 \{1 - (r_0/r)^2\} \cos \theta \\ u_\theta &= -U_0 \{1 + (r_0/r)^2\} \sin \theta \\ u_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 U_0 は接近流の流速分布を表わし、層流の場合には放物型分布式に従うとすれば次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U_0/U_{0s} &= (z/H)(2-z/H) \\ U_{0s} &= gH^2i/2\nu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 U_{0s} は接近流の水面における流速であり、 i は水路床の勾配、 ν は動粘性係数である。

b) 二次流の流速成分

まずはじめに馬蹄型渦の渦軸近傍の渦度の分布を検討する。いま、角柱の場合を例にとってみると図-4に示された対称面内の渦度分布の実測値から主流のもっている渦度をさし引くと二次流を与える渦度分布が図-9のように得られる。このように二次流を与える渦度は渦軸の周辺に集中的に分布していることがわかる。したがって、二次流の大きさを正確に求めるにはこのような渦度の分布を前提とすべきであるが、ここでは便宜的に二次流を与える渦度の分布を次のように単純化して考える。すなわち、図-10(a)に示すように円柱前面に渦軸からの距離が一定値 a 以内の一つの領域を設定し、それが二次流を与える渦度が存在する領域であるとし、それ以外の領域では二次流の渦度は0であるとする。またこの領域の $\theta = \theta$ 断面(図-10(b))内では二次流の渦度 ω_0 は一様に分布するが、 ω_0 の値は θ とともに変化するものとする。また渦軸の位置は円柱の前面 ($90^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$) では式(1)によって与えられるものとする。

以上の設定の下で各 $\theta = \theta$ 断面内で二次流を求めようとするわけであるが、上述のように単純化された渦度分布の下ででも円柱表面および水面における境界条件を満

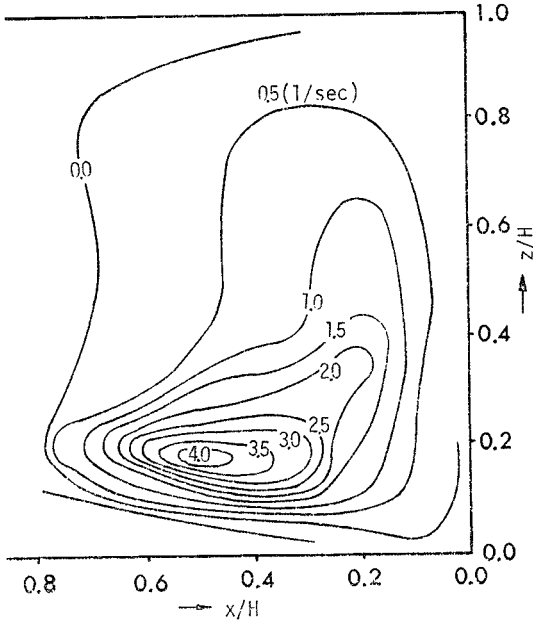


図-9 二次流の渦度分布 (角柱)

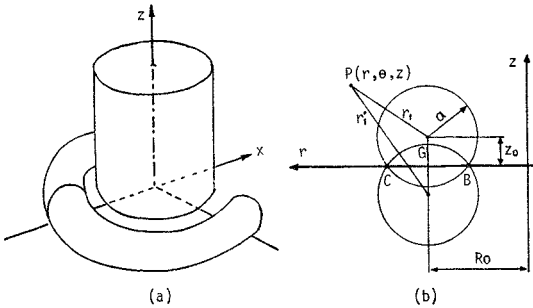


図-10 記号の説明

足する解を求めることは困難なので、ここでは無限に広がった空間内におかれた渦輪およびその近傍の流れについて Lamb⁽³⁾ が与えた次式を近似的に利用することにした。すなわち、軸対称流の場合に定義される流れ関数を ψ_1 とするとき、渦領域の内部において

$$\psi_1 = -(\kappa/2\pi)R_0 \{ \log(8R_0/a) - 3/2 - (r_1/a)^2/2 \} \dots\dots\dots(4)$$

渦領域の外部において、

$$\psi_1 = -(\kappa/2\pi)R_0 \{ \log(8R_0/r_1) - 2 \} \dots\dots\dots(5)$$

である。ここで κ は渦領域周辺の循環の強さで θ の正方向をむく渦度ベクトルに対して κ は正となるようにしており、その値は $\pi a^2 \omega_0$ に等しい。 r_1 は ψ_1 を求めるべき点と渦軸との距離を意味する。上式においては κ は θ 方向に変化しないことが前提となっているが、ここでは κ は θ の関数であるとする。さらに上式は先述のように無限に広がった空間におかれた渦輪の式であるからこのままでは水路床面、水面および円柱橋脚表面に

おける境界条件を満たしていない。ここでは水路床面における境界条件のみを考慮し、水面および円柱橋脚表面での境界条件は考えないことにした。水路床面における境界条件を考慮するには、渦領域の水路床面に関する鏡像を求め、鏡像による流れ関数 ψ_2 とともに流れ関数 ψ_1 との和を ψ とするとき、 ψ を流れ関数として用いるとよい。この場合、図-10 (b) に示すように $a > z_0$ であれば渦領域は水路床面と交わることになる。そのときは \triangle CGB の領域で二次流の渦度は 0 となる。

二次流の z および r 方向の流速成分をそれぞれ u_z' , u_r' とするとき、これらは

$$u_z' = -(1/r)(\partial\psi/\partial r), \quad u_r' = (1/r)(\partial\psi/\partial z) \dots\dots\dots(6)$$

で与えられるから (二次流の θ 方向流速成分は 0 としている)、図-10 (b) に示すように渦軸の鏡像の位置から流速を求めるべき点 $P(r, z)$ までの距離を r_1' とするとき、点 (r, z) における u_z' および u_r' はそれぞれ次のようになる。

① $r_1 \leq a$ かつ $r_1' \leq a$ の領域で、

$$u_z' = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$u_r' = -\frac{\kappa}{\pi r} \frac{R_0 z_0}{a^2} \dots\dots\dots(8)$$

② $r_1 \leq a$ かつ $r_1' > a$ の領域で、

$$u_z' = \frac{\kappa}{2\pi r} \frac{R_0(r-R_0)}{a^2} \left(-1 + \frac{a^2}{r_1'^2} \right) \dots\dots\dots(9)$$

$$u_r' = -\frac{\kappa}{2\pi r} R_0 \left(-\frac{z-z_0}{a^2} + \frac{z+z_0}{r_1'^2} \right) \dots\dots\dots(10)$$

③ $r_1 > a$ かつ $r_1' > a$ の領域で、

$$u_z' = \frac{\kappa}{2\pi r} R_0(r-R_0) \left(-\frac{1}{r_1'^2} + \frac{1}{r_1^2} \right) \dots\dots\dots(11)$$

$$u_r' = \frac{\kappa}{2\pi r} R_0 \left(\frac{z-z_0}{r_1'^2} - \frac{z+z_0}{r_1^2} \right) \dots\dots\dots(12)$$

c) κ の値の決定

円柱橋脚周囲の流れの三次元的な流速分布は式 (2) で与えられる主流の各流速成分と式 (7) ないし (12) で与えられる二次流の各流速成分とをそれぞれ加えあわせることにより求められる。ところで、層流の場合には、先述のように渦軸の位置はほぼ安定していることが実験的に認められたので、その場合、渦軸の位置における合成された流速の r 方向および z 方向成分は 0 とならなければならない。この条件を用いて κ の値を求めると次式が得られる。

$$\kappa = \frac{\pi \delta^2 U_{os}}{H} \left(2 - \frac{z_0}{H} \right) \left(1 - \frac{r_0^2}{R_0^2} \right) \cos \theta \dots\dots\dots(13)$$

ここで、 δ は $a \geq 2z_0$ のときは a に等しく、 $a < 2z_0$ のときは $2z_0$ に等しい量である。上式から κ は θ 方向には $\cos \theta$ の形で変化すること、従って ω_0 も同様に変化することがわかる。

d) 三次元流速分布式

式 (13) により与えられる κ の値を二次流の流速分布式 (7)~(12) に代入し、これを主流の流速分布式 (2) に加えあわせることにより円柱橋脚前面における三次元的な流速の r, θ, z 方向成分 U_r, U_θ, U_z が与えられるものとした。これらの合成された流速成分は流体の運動方程式を厳密な意味では満足していないが、近似式としては適用できると考え、その近似の度合いあるいは適用範囲については後で実験的に検討することにした。以上のようにして得られた三次元流速分布式は次のようである。

① $r_1 \leq a$ かつ $r_1' \leq a$ の領域で、

$$\frac{U_r}{U_{0s}} = -\frac{R_0 \delta^2}{a^2 r} \frac{z_0}{H} \left(2 - \frac{z_0}{H}\right) \left(1 - \frac{r_0^2}{R_0^2}\right) \cos \theta + \frac{z}{H} \left(2 - \frac{z}{H}\right) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \cos \theta \dots\dots(14)$$

$$\frac{U_\theta}{U_{0s}} = -\frac{z}{H} \left(2 - \frac{z}{H}\right) \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \sin \theta \dots\dots(15)$$

$$U_z = 0 \dots\dots(16)$$

② $r_1 \leq a$ かつ $r_1' > a$ の領域で、

$$\frac{U_r}{U_{0s}} = -\frac{R_0 \delta^2}{2H} \left(2 - \frac{z_0}{H}\right) \left(1 - \frac{r_0^2}{R_0^2}\right) \frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{z-z_0}{a^2} + \frac{z+z_0}{r_1'^2}\right) \cos \theta + \frac{z}{H} \left(2 - \frac{z}{H}\right) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \cos \theta \dots\dots(17)$$

$$\frac{U_\theta}{U_{0s}} = -\frac{z}{H} \left(2 - \frac{z}{H}\right) \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \sin \theta \dots\dots(18)$$

$$\frac{U_z}{U_{0s}} = \frac{R_0 \delta^2}{2H} \left(2 - \frac{z_0}{H}\right) \left(1 - \frac{r_0^2}{R_0^2}\right) \frac{r-R_0}{r} \cdot \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r_1'^2}\right) \cos \theta \dots\dots(19)$$

③ $r_1 > a$ かつ $r_1' > a$ の領域で、

$$\frac{U_r}{U_{0s}} = -\frac{R_0 \delta^2}{2H} \left(2 - \frac{z_0}{H}\right) \left(1 - \frac{r_0^2}{R_0^2}\right) \frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{z-z_0}{r_1^2} + \frac{z+z_0}{r_1'^2}\right) \cos \theta + \frac{z}{H} \left(2 - \frac{z}{H}\right) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \cos \theta \dots\dots(20)$$

$$\frac{U_\theta}{U_{0s}} = -\frac{z}{H} \left(2 - \frac{z}{H}\right) \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \sin \theta \dots\dots(21)$$

$$\frac{U_z}{U_{0s}} = \frac{R_0 \delta^2}{2H} \left(2 - \frac{z_0}{H}\right) \left(1 - \frac{r_0^2}{R_0^2}\right) \frac{r-R_0}{r} \cdot \left(-\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1'^2}\right) \cos \theta \dots\dots(22)$$

ここで、 δ は式 (13) において定義したものと同一である。

e) 渦領域の大きさの決定

以上の解析モデルを用い、対称面内の渦軸位置での r 方向速度成分の分布を求めた結果の一例が 図-11 であり、実測値と比較されている。図中 U_s はその位置にお

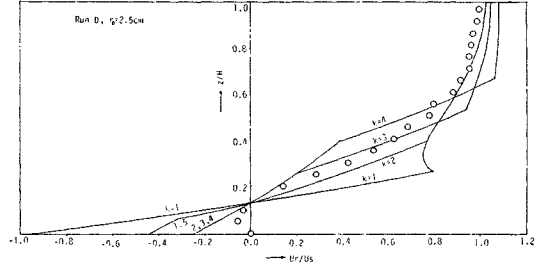


図-11 対象面内・渦軸の位置における U_r の分布 (円柱)

ける水面での流速で、 $U_s = U_{0s} \{1 - (r_0/R_0)^2\}$ で与えられる。また、図中、 k は a/z_0 を表わしているが、図から k が 2.0 の場合に解析値と実測値の適合性がよいようであり、以下では k は一定値 2.0 をとるものとして考察をすすめる。

f) 渦度の集中に関する検討

先述したように、馬蹄型渦を形成する渦度は主流中に含まれていた渦度が集中したものであるが、解析モデルの渦領域における渦度が主流のどの部分からどれほど供給されているかを検討してみよう。

対称面においては渦軸と水路床の近傍の粘性の影響が大きな部分を除けば非粘性流に関する Helmholtz の渦度保存則がほぼ成り立つことが実験的に認められた。対称面内での渦度ベクトルはその面に直角方向の成分 η だけをもつと考えられ、その面内に任意の閉じた平面領域を設定すると、その境界線上で、

$$\oint \eta(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) = 0 \dots\dots(23)$$

が成立つ。ここで \mathbf{u} は流速ベクトルであり、 $d\mathbf{s}$ は境界線に沿う微小長さを大きさとし、境界線の内側法線方向を向くベクトルである。

図-12 に示すように対称面内の渦度領域を BCF とし、

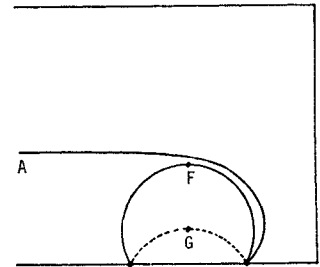


図-12 記号の説明

B を通過する流線を AB とするとき、領域 ABFCD について式 (23) の成立の度合いを検討してみよう。AB および DC はそれぞれ流線と一致しているから、それに沿う式 (23) の左辺の積分は 0 である。次に DA に沿う積分は、

$$\int_D^A \eta(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) = \int_0^{z_A} \eta U_0 dz = \{U_0(z_A)\}^2/2$$

となる。ここで z_A は A 点の z 座標であるが、ここでは 図-6 を考慮して近似的に $z_A = a + z_0 = 3z_0$ とした場合と、 $z_A = H$ とした場合について考察する。 U_0 に

式(3)を代入して上式を計算すると次のようになる。

$$\int_D^A \eta(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) = U_{0s}^2 \cdot g_1(z_0/H)$$

ここで、 $z_A = 3z_0$ の場合は、

$$g_1(z_0/H) = (9z_0^2/2H^2)(2-3z_0/H)^2$$

となり、 $z_A = H$ の場合は、 $g_1 = 0.5$ となる。一方、BF C に沿う積分は

$$\int_B^C \eta(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) = -U_{0s}^2 \cdot g_2(r_0/H)$$

の形で表わせられ、 g_2 は式(2)、(17)~(19)を用いて数値積分を行うことによって求められ、結果は図-13のようになる。図-13には g_1 も r_0/H の関数に書きかえて記入したが、両者を比較してみると、たとえ $z_A = 3z_0$ の場合でも $r_0/H = 0.1$ に対し $g_2/g_1 = 0.32$ 、また $r_0/H = 1$ で $g_2/g_1 = 0.77$ であるから、つねに $g_1 > g_2$ となり、これは渦度領域で想定した渦度は上流の $z_A = 3z_0$ 以下を流下する渦度の一部しか含んでいないことを示している。残りの部分は、水路床近くの流体が渦領域にまきこまれずにその外側を流下するために、その流れのもつ渦度も渦領域に含まれなかったものと考えられる。また上流において $z_A = 3z_0$ から水面までの間を流

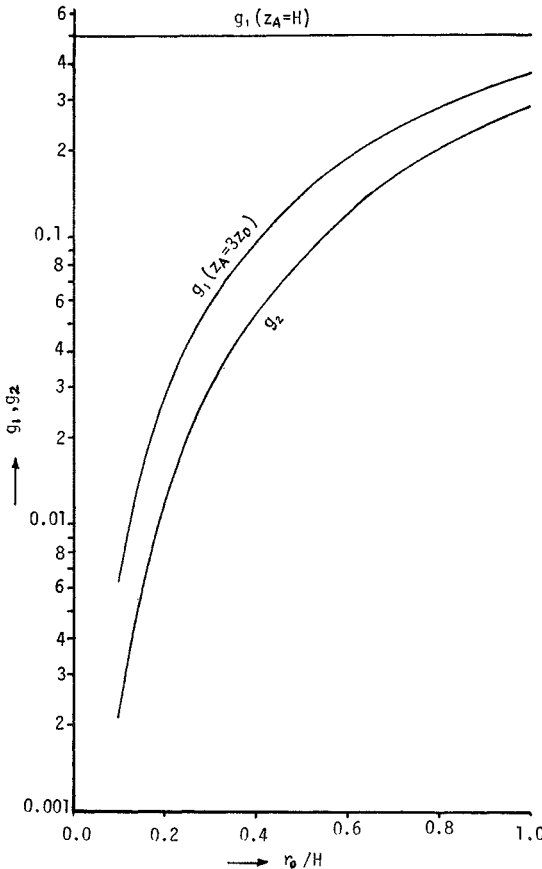


図-13 Helmholtz の渦度保存則の検討

下する渦度(図で $z_A = H$ の場合の g_1 と $z_A = 3z_0$ の場合の g_1 との差で表わされている)も、渦度領域に流入する渦度に比べてとくに r_0/H が小さい場合に大きくなっていることが認められる。ところが本解析では、この渦度は無視される結果になっていることがわかる。

(2) 解析結果の実験的検討

以上、橋脚前面における局所流の三次元流速分布の解析方法を提示したが、解析の過程で用いた仮定あるいは近似を整理すると次のようである。

まず、主流と二次流とを算術的に加算することにより局所流の流速が得られるとした点についてであるが、渦度場から速度場を求める Lamb¹⁹⁾ の式によれば、両者は線型の関係にあるので、このような加算の方法自体は Lamb が示した条件に適合する限り正当である。ただ本文の場合、無限遠においても主流に渦度があるとしており、また二次流の渦度分布としてかなり単純化されたモデルを仮定している。さらにそれから流速を求める際にも橋脚表面および水面における境界条件を無視した近似式を用いており、また二次流の θ 方向流速成分も無視される結果になっている。したがって、結果として得られた局所流の流速分布式は流体の運動方程式を厳密には満たしていないことになる(連続の条件に関しては、主流も二次流もおおのこのを満たしており、連続の条件式は線型であるから、合成された流速分布式も連続の条件を満たしている)。本解析はまた完全流体を前提としているので、粘性の影響の強い底面付近においては解析式は適用しにくいと考えられる。

以上のような仮定あるいは近似に基づく限り、本解析の適用には自ずと制約があると考えられ、本節ではそれを明らかにする目的で run D の条件で直径 4.025 cm の円柱橋脚を設置した場合の実測値と解析値とを比較する。

a) z 方向流速成分の検討

対称面内において底から $3H/4, H/2, H/4$ および z_0 の高さでの z 方向流速成分の解析値と実測値とを比較して図-14 に示す。図で実測値は白い丸印、解析値は実線、さらに吉川らの解析値は破線で示されている。まず、これらの図の全体を通していえることは、解析値ではいずれの高さにおいても渦軸の位置より上流部分にかなりの上昇流が算出されているが、実測値では上昇流が存在しないことである。この差異の原因としては、解析では二次流の θ 方向流速成分を 0 としているため、下降流あるいは逆流を形成する流れが連続条件に従って上昇流を形成する結果になったこと、さらに二次流の渦度領域以外の渦度の存在を解析では無視したが、実際にはこの無視された渦度が上昇流をおさえる役割を果たしているこ

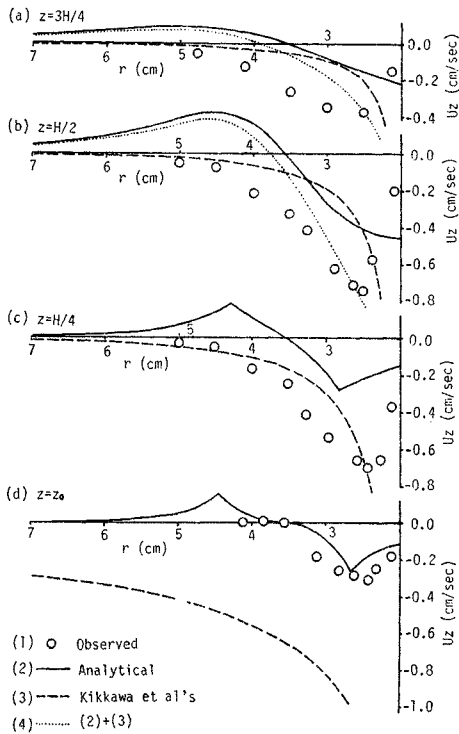


図-14 対象面内における U_z の分布の検討 (円柱)

などが考えられる。次に、 $z=z_0$ (渦軸の高さ) における下降流については解析値と実測値とはかなりよい一致を示していることが認められるが、 $z=H/4, H/2, 3H/4$ の各高さでは解析値は実測値より若干少なく算出されている。

橋脚前面の流れの場は A, B および C 領域に区分されることを先に示したが、A 領域では粘性の影響が大きいので、ここでは本解析も吉川らの解析も適用することができない。本解析は B 領域で適合性がよいといえよう。このことは先述の実測値と解析値との比較からもいえるが、また解析方法の基礎となっている渦度の集中を主として B 領域に注目して考慮したことや、さらに本解析で無視した円柱および水面における境界条件の影響が B 領域では小さいと考えられることなどからもいえる。いいかえるならば、本解析では C 領域に存在する渦度の影響を無視しているわけで、この領域に生成される下降流も B 領域で集中した渦度の影響によるものとして説明される結果になっている。一方、吉川らの解析では B 領域における渦度の集中およびそれが下降流に及ぼす影響は無視されており、その意味で吉川らの解析は、C 領域の流れを対象にしたものと考えられる。したがって、C 領域の流れについては本解析結果と吉川らの解析結果とを加えあわせたものがよりいっそう現象をよく説明すること

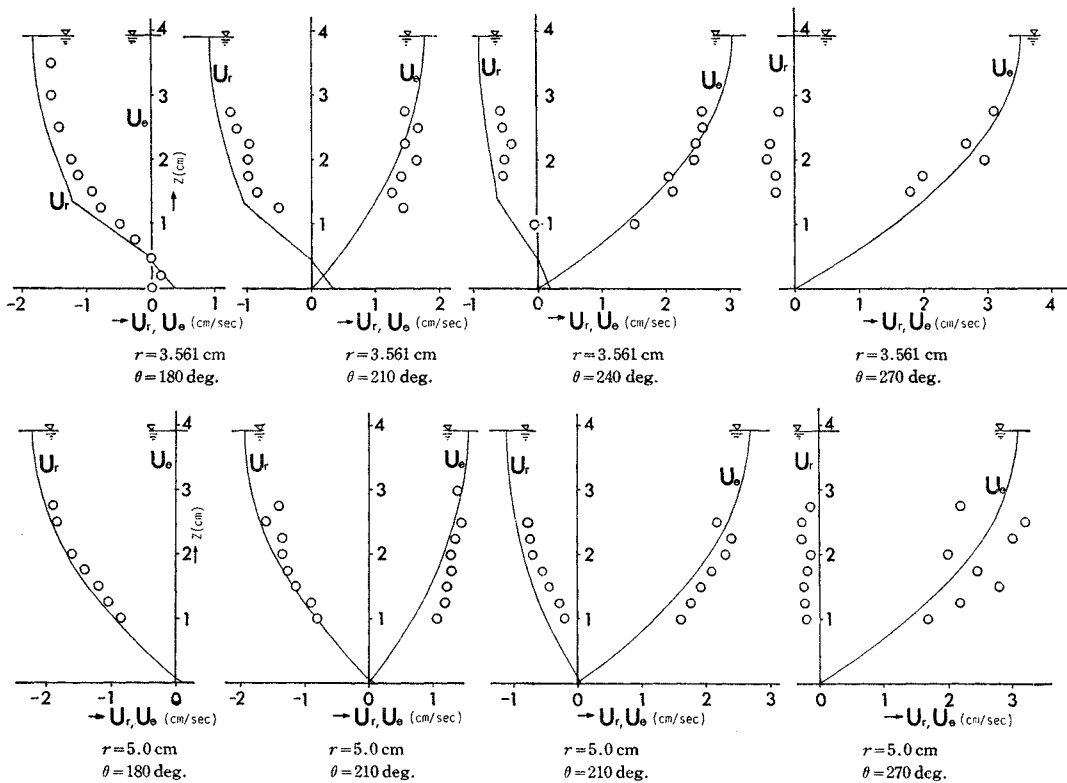


図-15 U_r および U_o の分布の検討 (円柱)

が考えられる。事実、図-14で両者の解析結果を加えあわせたものを点線で示しているが、以上の考察を裏づけたものになっている。

b) r および θ 方向流速成分の検討

$\theta=180^\circ, 210^\circ, 240^\circ$ および 270° の各断面において、 $r=3.561$ cm (渦軸の位置) および $r=5$ cm の位置での U_r および U_θ の鉛直分布を示したものが図-15である。この図から実測値と計算値との一致はかなりよいことが認められる。ただ $\theta=180^\circ$ の断面 (対称面) で認められる逆流については、水路床面のごく近くで実測値との隔りがあるが、これは水路床面における粘性の影響を無視したためであろう。また、 U_θ については全般的に水路床面に近づくにつれて実測値が解析値より大きくなる傾向が認められる。これは、解析においては二次流の θ 方向流速成分を 0 としているために、図-14に現われるような上昇流が算出されるが、実際にはさきにも述べたように上昇流が形成されず、その結果その分だけ連続の条件に従って水路床近くで流量が増え、従って U_θ が解析値より大きくなるものと考えられる。

4. 結 論

橋脚前面の局所流について馬蹄型渦の発生に注目して層流状態で実験を行い、その結果に基づいて流れの場をモデル化することにより三次元的な流速分布式を導き出した。得られた結論のうち主なものをあげると次のとおりである。

① 橋脚前面に発生する馬蹄型渦を構成する流体は主流から供給されている。

② 馬蹄型渦の発生は、主流の中に存在していた渦度が橋脚前面の水路床近くに集中させられるためであり、渦度が集中する機構は Helmholtz の渦度保存則にほぼ支配されていることが実験的に認められた。

③ 円柱橋脚前面での馬蹄型渦の軸は水路床面からほぼ一定の高さにあり、また円柱の軸からもほぼ等距離にあることが実験的に認められた。

④ 円柱橋脚前面の三次元的な流速分布は式 (14) ~ (22) で与えられる。一方、橋脚前面の流れの場は、馬蹄型渦との関連を考慮して A, B および C 領域に区分される。本解析は B 領域における渦度の集中にとくに注目したものであり、C 領域に存在する渦度の効果は無視している。したがって C 領域に生成される下降流も B 領域の集中した渦度の作用によるものとして説明される結果になっている。一方、吉川らの解析を固定床に設置された円柱橋脚周辺の流れに適用することを考えると、その解析は B 領域における渦度の集中およびその効果は無視しており、C 領域の渦度の効果を考察の対称としてい

ることがわかる。以上の考察の結果が x 方向流速成分の検討により確かめられた。また r 方向および θ 方向流速成分については実測値と解析値とはかなりよい一致を示すことが認められた。

なお、著者は従来から段落部の流れ、開水路急縮部の流れ、橋脚周辺の流れなどといった局所的な流れについて主として渦度の集中に着目して実験的あるいは解析的に研究してきたが^{7), 9), 16) ~ 20)}、本研究はこれらの研究の一環であることを付記する。また、本研究は、層流の実験に基づいて解析モデルを構成し、それによって解析式を導き、解析結果を層流を用いて実験的に検討したものであるが、本解析と同様な方法が乱流の場合にも適用できないかという点について現在検討中である。

末筆であります。本研究を行うにあたって終始懇切なご指導を賜った石原安雄京都大学防災研究所教授、ならびに貴重なお助言を賜った中川博次京都大学工学部教授に深甚の謝意を表する次第です。

参 考 文 献

- 1) Rouse, H. and S. Ince : History of Hydraulics, Dover Publications Inc., New York, pp. 220-222, 1963.
- 2) 石原藤次郎他編 : 応用水理学, 中 I, p. 86, 昭 32.
- 3) Shen, H.W., S. Karaki and Y. Ogawa : Time Variation of Bed Deformation Near Bridge Piers, 11th Proc. of IAHR, Vol. 3, No. 3, 14, Leningrad, 1965.
- 4) 吉川秀夫・福岡捷二・岩間 汎・小曾川久貴 : 橋脚の洗掘ならびにその防止に関する考察, 土木学会論文報告集, No. 194, pp. 83-90, 1971-10.
- 5) Roper, A.T., V.R. Schneider and H.W. Shen : Analytical Approach to Local Scour, 12th Proc. of IAHR, Vol. 3, Colorado State University, USA, pp. 151-161, 1967.
- 6) 中川博次・鈴木幸一 : 円柱橋脚周辺の流れと局所洗掘について, 第 16 回水理講演会講演集, 土木学会水理委員会, pp. 31-36, 1972.
- 7) 宇民 正 : 橋脚前面の渦の機構に関する実験的研究, 京都大学防災研究所年報, No. 16 B, pp. 533-542, 1973-4.
- 8) Hawthone, W.R. : The Secondary Flow about Strut and Airfoils, Journal of the Aeronautical Science, No. 21, pp. 588-608, 1954.
- 9) 宇民 正 : 開水路断面急変部における流れの局所機構について, 第 16 回水理講演会講演集, 土木学会水理委員会, pp. 37-42, 1972-2.
- 10) Rosenhead, L. : The Formation of Vortices from a Surface of Discontinuity, Proc. Royal Society, London, A 134, pp. 170-192, 1932.
- 11) Yieh, C.S. : Two Solutions for Inviscid Rotational Flow with Corner Eddies, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 5, pp. 36-40, 1959.
- 12) Long, R.R. : Some Aspects of the Flow of Stratified Fluids, Tellus, Vol. 5, pp. 42-58, 1953.
- 13) Lamb, H. : Hydrodynamics, Cambridge, 1932.
- 14) Squire, H.B. and K.G. Winter : The Secondary Flow in a Cascade of Airfoils in a Nonuniform Stream, Journal of the Aeronautical Science, No. 18, pp. 271-277, 1951.
- 15) Lighthill, M.J. : Drift, Journal of Fluid Mechanics,

- Vol. 1, pp. 31-53, 1956.
- 16) 中川博次・宇民 正：底部スリットを有する開水路流れの特性について（第2報），京都大学防災研究所年報，第11号 B, pp. 233-248, 1968-3.
- 17) 宇民 正：橋脚周辺部における流れのパターンについて，京都大学防災研究所年報，第12号 B, pp. 529-541, 1969-3.
- 18) 宇民 正：開水路局所流の機構について，京都大学防災研究所年報，第13号 B, pp. 361-372, 1970-3.
- 19) 宇民 正：橋脚前面の局所流に関する実験的研究，京都大学防災研究所年報，第14号 B, pp. 231-238, 1971-3.
- 20) 宇民 正：開水路中におかれた障害物前面の渦の機構について，京都大学防災研究所年報，第15号 B, pp. 475-484, 1972-3.

(1974.2.14・受付)
