

補剛材つき板の弾性ならびに非弾性圧縮座屈強度

ELASTIC AND INELASTIC BUCKLING STRENGTH OF
STIFFENED PLATES IN COMPRESSION

宇佐美 勉*

By Tsutomu Usami

1. 緒 言

軸方向圧縮力または曲げと軸方向圧縮力を受ける柱材は、部材全体から定まる不安定現象（屈服または横ねじれ座屈で全体強度と総称する）に対して安全であるばかりでなく、それを構成する板要素の局部座屈に対しても安全であるように設計されなければならない。全体強度は主として柱の細長比を適切に選ぶことによって防止でき、また早期の局部座屈は板要素の幅厚比を制限すれば防ぐことができる。ところが最近のように巨大な鋼構造物が建設されるようになると、柱材の断面形状もまた非常に大きなものとなって板要素のみで早期の局部座屈を防止することは不経済または施工上から不可能となり、補剛材として縦、横のリップを配置して局部座屈強度を高める必要性が生じてくる。いま吊橋のタワー、トラス、アーチなどの箱形断面柱の圧縮フランジをとりあげると、この板要素には幅方向にほぼ一様に分布する圧縮応力が一方に作用し、縦方向の補剛材は、通常、板を等分割するように配置される。このような一様圧縮を受ける縦方向補剛材つき板（補剛板）の弾性座屈強度は、板の四辺を単純支持および補剛材のねじり剛性を無視という条件のもとで、Timoshenko¹⁾によりエネルギー法によって解かれており、その結果はDIN 4114²⁾の設計規準の基になっている。これによれば、補剛材と板の曲げ剛度の比、すなわち剛比を板および補剛材の寸法比から定まる最適剛比以上に保てば、補剛板の座屈強度を隣接した縦方向補剛材間で単純支持されたサブパネルの一様圧縮による座屈強度まで高めることができる。しかしながら、Timoshenkoの解は初期不整（溶接による残留応力、初期変形など）のない理想的な弾性板の座屈強度に基づいたものであって、それをそのままの形で補剛板

の設計に用いることは、現在の構造工学からみれば、疑問になる。そこで、わが国の鋼鉄道橋設計標準（1970年）³⁾および道路橋示方書（1972）⁴⁾では、いずれも溶接による残留応力を初期不整として考慮し、Timoshenkoによる解を修正した形の規定を採用している。

さて、本研究は柱材の圧縮フランジを一方の一様圧縮を受ける四辺単純支持の補剛板として捉え、その弾性ならびに非弾性域における座屈強度を溶接による残留応力を考慮して有限帯板法⁵⁾によって解析したものである。この研究では特に補剛材のねじり剛性（St. Venantおよびそりねじり剛性）を解析の中に取り入れ、従来の研究^{6),7)}では十分に評価されてきたとは思われない補剛材のねじり剛性の影響について詳細な考察を試みている。なお、この論文では板および補剛材の初期変形は無視し、さらに後座屈強度についても触れていない。本研究が対象としている柱材の圧縮フランジのように、ほぼ一様な圧縮応力を受けかつその幅厚比が降伏点応力近辺で決定される場合には、それらの影響は小さく座屈強度によって耐荷力を十分推定できるものと思われる。

圧縮力を受ける補剛板の弾性座屈についてはすでに多くの著書^{1),8)}に詳細に述べられている。一方、補剛板の非弾性座屈強度または耐荷力を取扱った理論的研究は最近発表された数編の論文^{9)~14)}にみられる。このうち、文献9)~12)は初期変形または初期変形と残留応力を同時に考慮して補剛板の耐荷力を求めたものである。また、文献13),14)は本論文と同様に初期不整として残留応力のみを考え、補剛板の非弾性座屈強度を固有値問題として解析したものである。このうち、文献13)は補剛材に存在する残留応力が補剛板の座屈強度を著しく低下させることを初めて指摘した論文であるが、補剛材のねじり剛性の影響は考慮されていない。

* 正会員 D. Sc. 岐阜大学助教授 工業短期大学部土木工学科

2. 解析方法

解析の対象としたものは Fig. 1 に示すような一方方向の圧縮力を受ける縦方向補剛材つき板である。ここでは、板の載荷辺は単純支持であるが非載荷辺の境界条件は任意、また補剛材の本数およびその位置は任意、という一般的な場合を考えている。まず、解析に用いる仮定ならびに条件を列挙すれば次のようになる。

- a) 板および補剛材の材質は等しくかつ完全弾塑性体としてひずみ硬化を考えない。
- b) 板および補剛材には初期変形がなく座屈するまで真直である。
- c) 板および補剛材には溶接による残留応力が圧縮力方向の初期応力として存在し、その応力分布は板の長さ方向に一様である。
- d) 座屈時にはひずみの反転は起らないものとし、塑性域では Bijlaard の塑性変形理論¹⁵⁾を用いる。
- e) 載荷辺は単純支持されているものとし、板の長さ方向の座屈波形は正弦曲線で近似する。
- f) 補剛材は矩形断面の片側補剛材とする。
- g) 補剛材のねじり剛性を考慮するときには補剛材の断面寸法はすべて一様とする。

さて、いま板の任意位置に Fig. 1 の斜線で示したような帯板要素 ij を考え、この要素の幅を ξb (b は板の総幅) として座標軸を図のようにとる。この補剛材が座屈を起した時に生じる x, y 軸まわりの曲げモーメントを、それぞれ、 M_x, M_y 、ねじりモーメントを M_{xy} 、 z

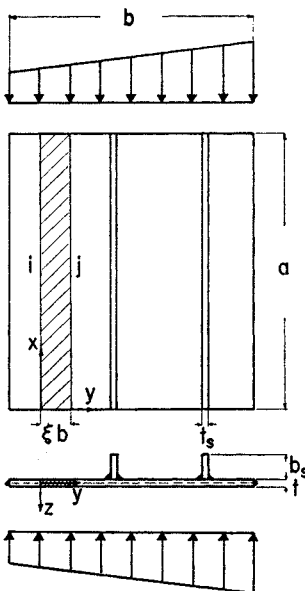


Fig. 1 Stiffened Plate to be Analysed.

方向の変位を w とし、座屈直前に x 軸方向に作用している残留応力を含めた軸方向圧縮応力を σ とすれば帯板要素 ij に対する仮想仕事の式は次のようになる¹⁸⁾。

$$\begin{aligned}
 & -\int_0^a \int_0^{\xi b} \left(M_x \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial y^2} \right. \\
 & \quad \left. - 2 M_{xy} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x \cdot \partial y} + \sigma \cdot t \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right) dx \cdot dy \\
 & = \int_0^a \left[V_y \cdot \delta w \right]_0^{\xi b} dx - \int_0^a \left[M_y \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} \right]_0^{\xi b} dx \\
 & \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

ここに、 t は板の厚さ、 a は板の x 方向の長さ、 δw は仮想変位、 V_y は y 断面に作用する合せ断力を表わし、 M_x, M_y, M_{xy}, V_y の正の方向は文献 1) の規則に従うものとする。曲げモーメント M_x, M_y 、ねじりモーメント M_{xy} と曲率との間には Bijlaard の塑性理論に従えば次式が成り立つ。

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & 0 \\ \kappa_2 & \kappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w / \partial x \cdot \partial y \end{Bmatrix} \dots\dots(2)$$

ここで、 D は板の曲げ剛度である。上式の係数 $\kappa_1 \sim \kappa_4$ は弾性域ではポアソン比 ν のみに関する定数であるが、塑性域では塑性ひずみの関数となる。これらの係数の表現式は文献 16), 17) に与えられている^{註 1)}。次に、帯板要素 ij のたわみ w の近似式として、 x 軸方向には半波の正弦曲線、 y 軸方向にははり要素の曲げの問題と同様に i, j 節線でのたわみ w_i, w_j およびたわみ角 θ_i, θ_j を用いた 3 次多項式を利用する。すなわち、 w を

$$w = b \cdot [\phi(\bar{y})] \{W\} \sin \pi x / a \dots\dots\dots(3)$$

とおく。ここに、

$$\{W\}^T = [w_i/b, \theta_i, w_j/b, \theta_j] \dots\dots\dots(4)$$

$$\begin{aligned}
 [\phi(\bar{y})] = & [1 - 3\bar{y}^2 + 2\bar{y}^3, \xi(\bar{y} - 2\bar{y}^2 + \bar{y}^3), \\
 & \bar{y}^2(3 - 2\bar{y}), \xi(-\bar{y}^2 + \bar{y}^3)] \dots\dots\dots(5)
 \end{aligned}$$

である。上式中、 $[]$ は行ベクトル、 $\{ \}$ は列ベクトル、 T は転置行列を表わし、 $\bar{y} = y/\xi b$ である。さらに、式 (1) の右辺の V_y および M_y をたわみ w と同様に x 軸方向に半波の正弦曲線を用いて次のように表わす。

$$\begin{aligned}
 V_y = & (D/b^2) \cdot \bar{V}(\bar{y}) \cdot \sin \pi x / a \\
 M_y = & (D/b) \cdot \bar{M}(\bar{y}) \cdot \sin \pi x / a \dots\dots\dots(6)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{V}(\bar{y}), \bar{M}(\bar{y})$ は無次元量で \bar{y} のみの関数である。式 (2), (3), (6) を式 (1) に代入し、 x に関する積分を実行すれば最終的に次に示すような要素の剛性方程式が得られる。

$$([S] - \lambda^2 [S_G]) \{W\} = (\alpha/\pi)^2 \{\bar{F}\} \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 λ は無次元化した板の幅厚比、 α は板の縦横寸法比 (Aspect ratio) で、それぞれ次式で定義される。

$$\lambda = (b/t) \sqrt{\sigma_Y/E}, \quad \alpha = a/b \dots\dots\dots(8)$$

注 1) 係数 $\kappa_1 \sim \kappa_4$ は文献 16), 17) の $k_1 \sim k_4$ を $(1-\nu^2)$ 倍したものである。

ここに、 σ_Y は降伏応力、 E は弾性係数である。

また、 $[S]$ 、 $[S_G]$ は、それぞれ、帯板要素 ij の曲げの剛性行列、安定係数行列で補遺 1 に示すようになる。 $\{\bar{F}\}$ は帯板要素の節線に作用する節線力を集めたベクトルで、

$$\bar{V}_i = -\bar{V}(0), \bar{V}_j = \bar{V}(1), \bar{M}_i = \bar{M}(0), \bar{M}_j = -\bar{M}(1) \quad (1)$$

$$\{\bar{F}\}^T = [\bar{V}_i, \bar{M}_i, \bar{V}_j, \bar{M}_j \dots \dots \dots] \quad (9)$$

で表わされる。

次に、Fig. 2 (a) に示すように帯板要素の節線 i に補剛材がある場合にこの節線での座屈後のつり合い条件式を導く。いま、Fig. 2 (b) のように板と補剛材を切り離したときにそれらの間に働く z 方向の力および x 軸まわりのモーメントを、それぞれ、 $q_i(x)$ および $m_i(x)$ とする。これらを無次元量 \bar{q}_i, \bar{m}_i を用いて次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} q_i(x) &= (D/b^2) \cdot \bar{q}_i \cdot \sin \pi x/a \\ m_i(x) &= (D/b) \cdot \bar{m}_i \cdot \sin \pi x/a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

したがって、節線 i の左および右端に作用する板の無次元化した合せん断力、曲げモーメントを、Fig. 2 (b) のように、 \bar{V}_i^l, \bar{M}_i^l および \bar{V}_i^r, \bar{M}_i^r とすれば、節線 i での力のつり合い条件式は

$$\bar{V}_i^l + \bar{V}_i^r = -\bar{q}_i, \quad \bar{M}_i^l + \bar{M}_i^r = -\bar{m}_i \dots (11)$$

となる。次に上式の \bar{q}_i, \bar{m}_i と i 節線での板の変位 w_i, θ_i との関係式を求めるが、その際、補剛材の座屈後の変形に関して以下のような仮定を設ける。

- h) 補剛材の断面変形 (Distortion) は考えない。
- i) 曲げ変形の中立軸は Fig. 2 (a) の A 点を通して板面に平行な軸に一致する。
- j) ねじり変形の中心は A 点に拘束されているものと

し、A 点は z 方向に変位および x 軸まわりに回転するのみで y 方向には変位しない。

k) 部分的に塑性化した補剛材断面のせん断中心はその弾性部分の重心に一致する。

仮定 i) は片側補剛材が座屈するときは板の相当部分も補剛材断面として有効に働くことを考慮したもので、DIN 4114 ならびにわが国の示方書で用いられている考え方である。また、仮定 j) は Bleich⁸⁾ によって補剛材のねじり座屈の解析に用いられたものである。さて、いま座屈前の補剛材断面に対して Fig. 2 (b) に示すように A 点を原点にして直角座標 y_s, z_s を考え、補剛材が座屈を起したときの A 点の z_s 方向変位を w_s 、ねじり角を φ_s とすれば、補剛材の座屈後のつり合いを表わす微分方程式は次のようになる^{6), 8)}。

$$\left. \begin{aligned} q_i(x) &= B_y \cdot \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + P_s \cdot \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ m_i(x) &= (C_w + B_z \cdot d^2) \frac{\partial^4 \varphi_s}{\partial x^4} \\ &\quad - (C_T + K - P_s d^2) \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

ここに、 P_s は座屈直前に補剛材に作用している残留応力を含めた圧縮応力の合力、 B_y, B_z, C_w, C_T は座屈直前の応力状態から定める補剛材の剛度で、それぞれ、 y_s 軸まわりの曲げ剛度、 z_s 軸まわりの曲げ剛度、せん断中心に関するそりねじり剛度、St. Venant のねじり剛度を表わす。また、 d は A 点から補剛材の弾性部分の重心までの距離、 K は補剛材の幅を b_s 、厚さを t_s とすると次式で表わされる。

$$K = -t_s \int_0^{b_s} \sigma_s (y_s^2 + (z_s - d)^2) dz_s \dots \dots \dots (13)$$

上式中、 σ_s は座屈直前に補剛材の z_s 軸上に作用している残留応力を含めた圧縮応力であり、 σ_s の y_s 軸方向の変化は無視している。ところが、 w_s, φ_s は板の i 節線での変位によって

$$w_s = (w)_{y=0}, \quad \varphi_s = (\partial w / \partial y)_{y=0}$$

と表わされるから、式 (3)、(10)、(12) より次式が得られる。

$$(\alpha/\pi)^2 \bar{q}_i = \{r \cdot \bar{B}_y \cdot (\pi/\alpha)^2 - 12(1-\nu^2) \cdot \delta \cdot \bar{P}_s \cdot \lambda^2\} \cdot (w_i/b) \dots \dots \dots (14)$$

$$\begin{aligned} (\alpha/\pi)^2 \bar{m}_i &= \{(\tau_w \cdot \bar{C}_w + \tau_z \cdot \bar{B}_z \cdot \bar{d}^2) (\pi/\alpha)^2 \\ &\quad + \tau_T \cdot \bar{C}_T + \bar{K} - 12(1-\nu^2) \\ &\quad \cdot \delta \cdot \bar{P}_s \cdot (b_s/b)^2 \cdot \bar{d}^2 \cdot \lambda^2\} \theta_i \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

ここに、 $r, \delta, \tau_w, \tau_z, \tau_T$ は補剛材の特性を表わすパラメータで、それぞれ、曲げ剛比、面積比、そりねじり剛比、弱軸まわりの曲げ剛比、St. Venant のねじり剛比と称し

$$\left. \begin{aligned} r &= EI_y/bD, \quad \delta = A_s/bt, \quad \tau_w = EI_w/b^3D \\ \tau_z &= EI_z \cdot b_s^2/b^3D, \quad \tau_T = GK_T/bD \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

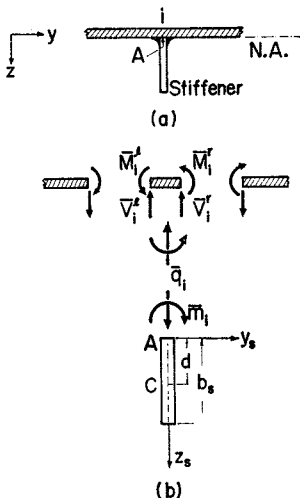


Fig. 2 (a) Plate-Stiffener Junction, and (b) Equilibrium of Forces and Moments.

と定義される。上式中、 EI_y, EI_z, EI_ω および GK_T は弾性域における補剛材の剛度で、それぞれ、 B_y, B_z, C_ω および C_T に対応する量であり、 A_s は補剛材の断面積を表わす。また、式 (14), (15) 中の $\bar{B}_y, \bar{B}_z, \bar{C}_\omega, \bar{C}_T$ は B_y, B_z, C_ω, C_T をそれぞれの弾性域における値で除したものであり、 $\bar{P}_s, \bar{K}, \bar{d}$ は次式で定義される。

$$\bar{P}_s = P_s/A_s\sigma_Y, \bar{K} = K/bD, \bar{d} = d/b_s \dots \dots \dots (17)$$

式 (14), (15) が \bar{q}_i, \bar{m}_i と板の変位成分 w_i, θ_i との関係を表わす式であり、これらを式 (11) に用いれば節線 i でのつり合い条件式が得られる。

式 (7) と上記のようにして求めたつり合い条件式を用いて補剛板全体の剛性行列、安定係数行列を組み立て、支点の拘束条件を考慮すれば、最終的に次に示すような同次の連立一次方程式が得られる。

$$([S] - \lambda^2[S_G])\{W\} = 0 \dots \dots \dots (18)$$

ここで、 $[S], [S_G], \{W\}$ は補剛板全体の剛性行列、安定係数行列、節線変位ベクトルを表わす。非弾性域では、後に述べるように、 $[S], [S_G]$ はともに x 軸方向の作用軸ひずみ ϵ_{cr}/ϵ_Y (ここに ϵ_Y は降伏ひずみ) の関数となるから、数値計算の際にはこの軸ひずみをまず与え、式 (18) から固有値問題として λ を求めることになる。ところが、このような数値計算方法をとると補剛材のねじり剛性を考えるときには次のような特別な考慮が必要になってくる。すなわち、いま補剛材の断面寸法をすべて一定とすれば、板および補剛材の寸法は4つの量 (b, t, b_s, t_s) で決まり、その一つで無次元化すれば相対的な寸法は互いに独立な3つの無次元パラメータによって表わすことができる。ところが、固有値として板の幅厚比 λ を求めるのであるから、計算の当初に与えることのできるパラメータは2つになる。補剛材のねじり剛性を考えないときには、式 (16) のうち r と δ のみを考えればよいから、これらの量を補剛材の特性を表わすパラメータとして使用できる。ところが、ねじり剛性を考えるときには、式 (16) に示すように5つのパラメータがあるから、繰返し計算を避けるためにはこれらを2つの独立なパラメータおよび λ の関数に変換する必要がある。この2つの独立なパラメータとして、補剛材のねじり剛性を考えないときと同様に δ と r を用いてもよいが、この論文では δ および次式で定義される量

$$\tau = (t_s/t) \sqrt{\sigma_Y/E} \dots \dots \dots (19)$$

を導入して数値計算を行うことにする。式 (16) の r, r_ω, r_z, r_T は δ, τ および λ によって次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} r &= 4(1-\nu^2)\delta^3\lambda^2/\tau^2, r_\omega = (1-\nu^2)\delta^3 \\ r_T &= 2(1-\nu)\delta\tau^2/\epsilon_Y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

さらに式 (17) の \bar{K} は δ, τ および λ によって

$$\bar{K} = -(1-\nu^2)\delta\tau^2\bar{P}_s - 12(1-\nu^2)(\delta^3/\tau^2)\epsilon_Y\bar{K}_p\lambda^2 \dots \dots \dots (21)$$

で表わされる。ここに、

$$\bar{K}_p = (1/b_s^3\sigma_Y) \int_0^{b_s} \sigma_s(z_s-d)^2 dz_s \dots \dots \dots (22)$$

である。式 (20) からわかるように、補剛材のねじり剛性を考慮するために新しく導入された剛比 r_T, r_ω, r_z は、パラメータ δ および τ が与えられれば板の幅厚比 λ に無関係に一義的に定まることになる。したがって、後に数値計算結果の所で詳しく述べるように、補剛材の特性を表わすパラメータとして δ と τ を考える方法は、補剛材のねじり剛性に着目したパラメータの取り方であり、従来のように δ と r を考える方法は補剛材の曲げ剛性に着目したパラメータの取り方であるといえよう。なお、式 (20), (21) には形式的に材質に関する量 ϵ_Y が含まれるが、これは補剛材のねじり剛性を考慮すると材質に関して無次元化した解を得ることができなくなることを示すものである。また、式 (21) の右辺第1項は第2項に較べて影響が小さく、この項を無視してもさしつかえない。

さて、次に補遺 (1) に示す帯板要素の剛性行列および安定係数行列の求め方に触れる。これらに含まれる積分は、残留応力がない場合を除いて、係数 $\kappa_1 \sim \kappa_4$ および σ/σ_Y が作用軸ひずみ ϵ_{cr}/ϵ_Y および板の残留応力の関数となり y 軸方向に複雑に変化するため簡単に求めることができない。そこで、そのような場合には、帯板要素の幅方向 (y 軸方向) を N 等分割し、分割点での $\kappa_1 \sim \kappa_4$ および σ/σ_Y の値を与えられた ϵ_{cr}/ϵ_Y および残留応力から求め、シンプソンの公式より $[S], [S_G]$ に含まれる積分の値を求めることにした。また、式 (14), (15) に含まれる $\bar{B}_y, \bar{B}_z, \bar{C}_\omega, \bar{C}_T, \bar{d}, \bar{P}_s$ および式 (22) の \bar{K}_p の計算方法は補遺 (2) に示してあるが、補剛材に作用する軸ひずみならびに補剛材の残留応力が与えられれば、これらの量は完全に求められる。

3. 数値計算結果

前節では一般的な補剛板の座屈解析の方法について述べたが、ここでは箱形断面柱の圧縮フランジを対象として、以下に示す条件のもとで行った数値計算結果について述べることにする。

- 1) 板および補剛材は一樣な圧縮応力を受けている。
- 2) 板の非載荷辺は単純支持されている。
- 3) 補剛材の断面寸法はすべて等しい。
- 4) 補剛材は板を等分割するように配置されている。
- 5) 板および補剛材に存在する溶接による残留応力

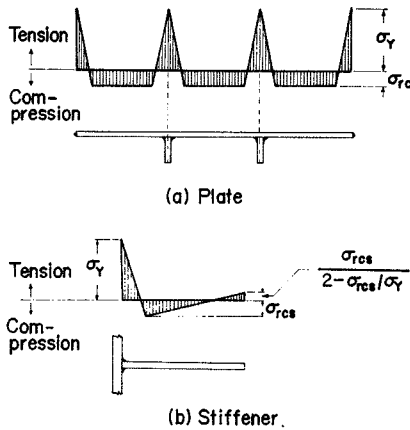


Fig. 3 Assumed Residual Stress Patterns in (a) Plate, and (b) Stiffener.

布は Fig. 3 に示すようなものとする。

Fig. 3 に示した残留応力分布は、板についてはサブパネルで、補剛材についてはそれ自身で自己つり合い条件を満足するように定めたものである。もちろん残留応力は必ずしもこのような条件を満足する必要がなく、実際には補剛板全体で自己つり合い条件を満たしているものと思われる。文献 19) の実測データによれば、補剛板のような組立板の残留応力分布は、単一板の溶接ビードによる分布形に較べると補剛材では引張残留応力部が増大し、逆に板では圧縮残留応力の絶対量が大きくなる傾向にある。しかしながら、この変化の割合は板および補剛材の断面寸法、溶接方法など多くの要因に支配されるもので、現在では十分な実測データが得られているとはいえない。したがって、ここでは解析の容易さも考慮して、Fig. 3 のような残留応力分布を用いることにした。なお、電子計算機のプログラムは、補剛材の特性を表わすパラメータとして、従来のように δ, r を用いる場合（補剛材のねじり剛性を無視した場合）と、 δ と τ を用いる両方の場合について作成されたが、前者による解を“ δ - r Base”による解、後者による解を“ δ - τ Base”による解と以下称することにする。

(1) 解の収束状態

この論文では、すべて、帯板要素によって各サブパネルが等分割されるようにして数値計算を行った。したがって、いまサブパネルの数を n 、各サブパネル中の要素の数を M とすると、板の全要素数は $n \times M$ となる。

Fig. 4 は補剛材の本数が 2 本の板（縦横寸法比 $a = 1/3$ ）の残留応力を無視した弾性解の収束状態を座屈係数の誤差率（%）を用いて表わしたものである。同図の (a) は補剛材のねじり剛性を無視した場合で、パラメータ r と τ の値は補剛材の寸法がほぼ同一となり注 2)、

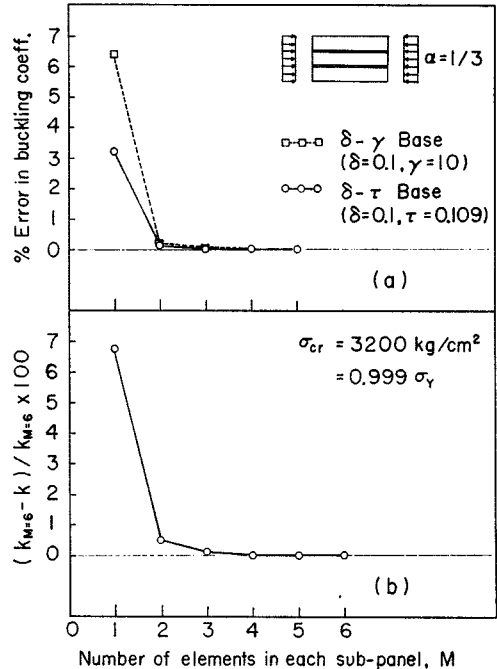


Fig. 4 Convergence of Elastic Buckling Solutions, Torsional Rigidities of Stiffeners (a) Neglected, and (b) Considered.

かつ座屈モードが補剛材のある位置で節線となるように定めてある。したがって、この場合の座屈係数の正解値は $4n^2 = 36.0$ である。図より、解の収束は非常に早く、各サブパネルを 2 等分割する程度 ($M=2$) で誤差率が 0.3% 以下になることがわかる。図の (b) は (a) と同一の補剛板を補剛材のねじり剛性を考慮して計算したときの解の収束状態を示したもので、この場合は正解値が不明であるので、縦軸には各サブパネルを 6 等分割したときの座屈係数 $k_{M=6} = 47.151$ を基準にした率をとっている。補剛材のねじり剛性を考慮すると解の収束状態はいくぶん悪くなるが、それでも各サブパネルを 2 分割する程度で十分精度のよい解が得られるようである。なお、補剛板全体が幅方向に半波のモードで座屈する場合には、補剛材のある位置で座屈モードが節線となるときよりも収束状態がさらによくなる。したがって、この論文では、各サブパネルを 2 等分割 ($M=2$) して数値計算を行うことにした。

上記の例はいずれも残留応力を考えない場合であったが、これを考慮するときは剛性行列および安定係数行列に含まれる積分を計算するために各要素中の分割数 N を与えてやらなければならない。この N の変化による

注 2) 式 (20) の第 1 式からわかるように、 r は τ と板の幅厚比 λ すなわち座屈応力 σ_{cr}/σ_Y の関数となるため、 $\sigma_{cr}/\sigma_Y = 0.999$ のとき同一寸法の補剛材が得られるように r と τ の値を定めた。

解の収束状態を調べるために、Fig. 4 に示した補剛板に残留応力 $\sigma_{rc} = \sigma_{rcs} = 0.5 \sigma_Y$ (ここに、 σ_{rc} , σ_{rcs} は板、補剛材の最大圧縮残留応力、Fig. 3 参照) を考え、 $M=2$ の場合について $N=10 \sim 24$ (すべての要素について N は一定とした) と変化させて種々の応力状態に対する解を求めてみたが、結果はほとんど変わらなかった。したがって、以下の数値計算ではすべて $N=10$ を用いることにした。

(2) 弾性座屈

ここでは、板および補剛材の残留応力を無視した弾性領域内の座屈解を特に補剛材のねじり剛性の影響を中心にして述べることにする。補剛材のねじり剛性を考慮する場合には、補剛板の座屈係数はパラメータ δ と τ の関数として表わされる。ところが、このようにして求めた座屈係数は τ を変数として含むため、既存の結果特にねじり剛性のない場合の結果と比較するには不便である。したがって、数値計算より得られた座屈係数を δ と r の関数に変換した結果も併記して考察することにする。

Fig. 5 の太実線および破線は補剛材が2本で面積比および板の縦横寸法比を固定 ($n\delta=0.4$, $\alpha=1.0$) してパラメータ τ および座屈応力 σ_{cr}/σ_Y を変化させて行った数値計算結果を $R-\tau$ 曲線で示したものである。ここで、 R は板の等価幅厚比と称し次式で定義される。

$$R = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k_0}} = \frac{0.5259}{n} \lambda, \quad k_0 = 4n^2 \dots \dots \dots (23)$$

上式中、 k_0 は補剛材のねじり剛性を考えないときの補剛板の座屈係数の上限値で、板がサブパネル間で単独座屈を起すときの座屈係数に等しい。なお、解析方

法の所で述べたように補剛材のねじり剛性を考えるときは降伏ひずみ ϵ_Y の値を与えないと数値計算できないので、 $\epsilon_Y = 0.0015$ ($\sigma_Y \cong 3200 \text{ kg/cm}^2$) を用いた。したがって、この図の曲線は形式的に材質に関して無次元化した形になっているが、実際にはパラメータ R , τ および σ_{cr}/σ_Y に上記の σ_Y の値を代入した次元を持つ量に対して成り立つものである。また、同図の細実線は補剛材の幾何学的関係を示すもので、式 (20) の第 1 式に $r = m \cdot r^*$ を代入し、 λ を式 (23) の R に置き換え τ について解いた式、すなわち、

$$\tau = 3.625 \cdot n \delta \cdot R \cdot \sqrt{\delta/mr^*} \dots \dots \dots (24)$$

を表わす。ここで、 r^* は補剛材のねじり剛性を考えないときに補剛板の座屈係数を k_0 に保つために必要とする

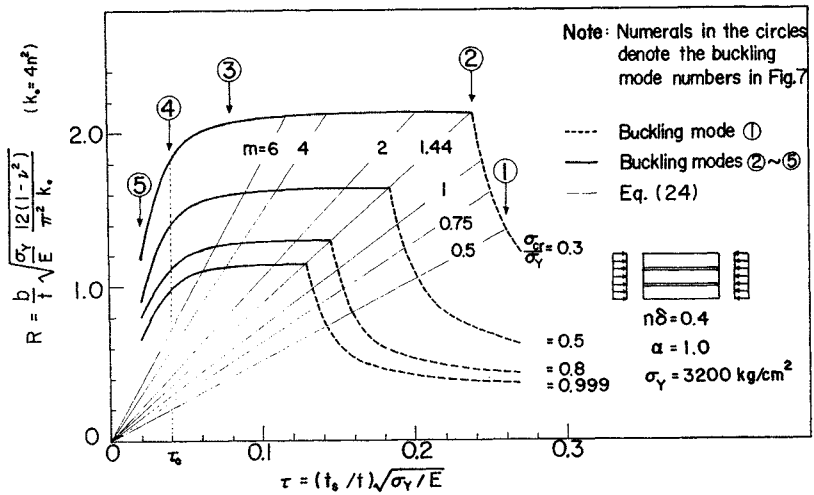


Fig. 5 $R-\tau$ Curves for Elastic Buckling of Stiffened Plate.

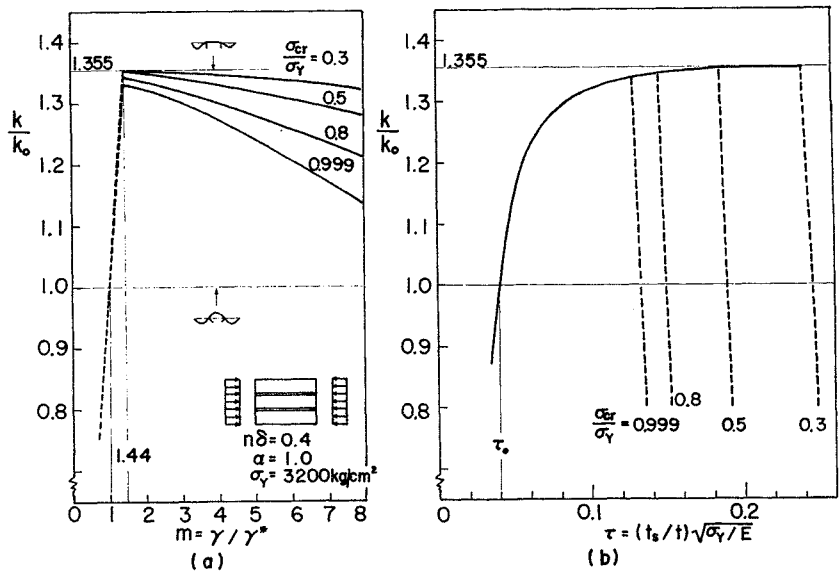


Fig. 6 Elastic Buckling Coefficient plotted against (a) m , and (b) τ .

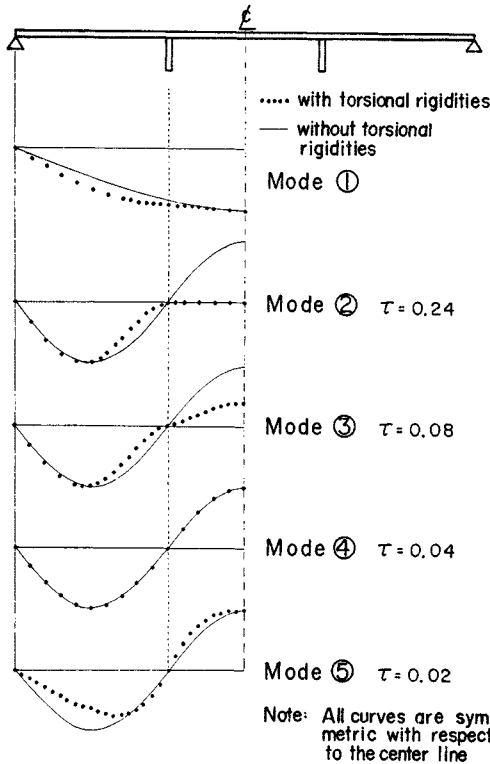


Fig. 7 Buckling Modes of Stiffened Plates.

る補剛材の最小曲げ剛比で DIN 4114 に定める最適剛比であり、 m は定数である。したがって、数値計算より求められた R - τ 曲線と式 (24) を表わす直線との交点は、補剛材の特性が δ と $\tau = m\tau^*$ で与えられたときの σ_{cr}/σ_Y と R の値を与え、さらに、

$$k/k_0 = R^2 \cdot \sigma_{cr}/\sigma_Y \dots\dots\dots (25)$$

より座屈係数 k の値が求められる。このようにして求めた座屈係数 k/k_0 を m に対してプロットしたものが Fig. 6 (a) である。図中、 $k/k_0 = 1.355$ すなわち $k = 5.42 n^2$ はサブパネルの非載荷辺の一边が固定で他端が単純支持の場合の座屈係数である。また、Fig. 6 (b) は座屈係数を τ に対してプロットしたものである。これらの図の曲線の実線および破線部はそれぞれ Fig. 5 の曲線の太実線および破線部に対応している。ただし、Fig. 6 (b) の実線部は座屈応力にほとんど無関係となるので 1 本の曲線にまとめてある。さらに、Fig. 7 は Fig. 5 に示した ①~⑤ での座屈モードを補剛材のねじり剛性を考慮しないときの座屈モードと比較して描いたものである。座屈モード ① は Fig. 5, 6 の曲線の破線部注 3)、②~⑤ は与えられた τ に対応する実線部の座

屈モードを表わす。Fig. 5~7 から次のことがいえるであろう。

1) 座屈係数 k/k_0 は、 m または τ のいずれに対してプロットした場合も、座屈応力に対して一義的に定まらず、 m に対してプロットしたときは実線部、 τ に対してプロットしたときは破線部が特に変動する。このことは次のように説明できよう。

図の破線部での座屈モードは Fig. 7 のモード ① に対応するが、この座屈モードでは補剛材の曲げ抵抗の影響が卓越し、ねじり抵抗の影響は小さいため、従来からよく知られているように、座屈係数は曲げ剛比 r に対してプロットすれば座屈応力にほぼ無関係になるのである (Fig. 6 (a))。ところが、Fig. 6 の実線部は、Fig. 7 の座屈モード ②~⑤ よりわかるように、補剛材のある位置での板のたわみが 0 に拘束された場合に対応し、この座屈モードでは補剛材の曲げ抵抗は 2 次的 (すなわち、曲げ剛比がある値以上あれば座屈荷重に影響を与えない) なものになり、ねじり抵抗が座屈荷重の大小を支配することになる。先に述べたように、補剛材のねじり剛比は δ と τ によって一義的に定まるため、座屈係数は τ に対してプロットしたとき座屈応力に無関係になるのである (Fig. 6 (b))。それに反し曲げ剛比に対してプロットしたときは、式 (20) よりわかるように、たとえ δ と r が一定でも St. Venant のねじり剛比 r_T は板の幅厚比すなわち座屈応力によって変化するため、座屈係数は座屈応力の値によって変動することになるのである (Fig. 6 (a))。上で述べたことを式の展開から実証すれば補遺 (3) に示すようになるが、要するに、座屈モードが Fig. 7 のモード ① のときには δ と r が、モード ②~⑤ のときは δ と τ が座屈係数を表現するのに適切な (座屈応力に関係なくなる意味で) パラメータであるといえよう。

2) 補剛材のねじり剛性を考えたときの座屈係数は、曲げ剛比が最適剛比以下 ($m \leq 1$) ではそれを考慮しないときの座屈係数とほとんど変わらないが、 $m > 1$ となると前者は後者の上限値 k_0 を越え、最大 $k = 1.355 k_0$ 近くに達する。 k 値がピークとなるときの m の値は座屈応力の値に関係なくほぼ 1.44 である。しかしながら、 m が 1.44 を越えると座屈係数は逆に減少し始め、ついには k_0 より低下することとなる。これは、後に詳しく述べるように、面積比 δ を固定して曲げ剛比 r を増大 (または τ を減少) させると、補剛材の幅厚比は増大し、ねじり剛性が低下するため、座屈係数が k_0 に達する以前に補剛材のねじり座屈が生じてしまうからである。

3) 補剛材が少なくとも k_0 の座屈係数を確保するまで補剛材のねじり座屈が生じないための限界の τ は、

注 3) 座屈モード ① は、正確にいえば、 $\sigma_{cr}/\sigma_Y = 0.3$ 、 $\tau = 0.26$ のときの座屈モードであるが、Fig. 5, 6 の破線部分の座屈モードはこれとほとんど変わらない。

Fig. 6 (b) の実線で示した曲線が $k/k_0=1.0$ となる時の τ すなわち τ_0 であり、ここに示した例では座屈応力に無関係に $\tau_0=0.04$ となる。したがって、補剛板が座屈係数 k_0 を確保するためには、 $\tau \geq \tau_0$ が必要となる条件になり、後に述べるように、この τ_0 から補剛材のねじり剛性による座屈強度の上昇を期待しないときの補剛材の幅厚比制限値が求められる。

4) **Fig. 7** に示した座屈モードを考察すると上で述べたことがより明りょうになる。座屈モード①は曲げ剛比が最適剛比以下で補剛材の曲げ抵抗が小さいため補剛板全体が幅方向に半波長で座屈した場合である。しかし、補剛材のねじり抵抗は十分あるため、補剛材のある位置での板のたわみ角は非常に小さい。座屈モード②は補剛材が曲げならびにねじりに対して十分強く、補剛材のある位置での板のたわみならびにたわみ角がほぼ剛に拘束された場合で、このとき補剛板の座屈係数はその上限 ($1.355 k_0$) となる。さらに τ が減少 (すなわち、ねじり抵抗が減少) すると座屈モード③が得られ、補剛材のある節線での板のたわみ角の拘束が不十分となった場合である。この拘束がほぼ0となった状態 (すなわち、補剛材のねじり抵抗が0となった状態) が座屈モード④で、このときの τ の値は τ_0 である。したがって、このときの座屈モードは補剛材のねじり剛性を考えないときのそれとほとんど変わらない。座屈モード⑤は $\tau < \tau_0$ で補剛材のねじり座屈が板の座屈に先行してしまっただと考えられる場合である。

上記の考察は、サブパネルの数 n 、板の縦横寸法比 α 、および補剛材と板の面積比 δ を固定して考えた場合であるが、これらの値が変化したときの影響を調べたも

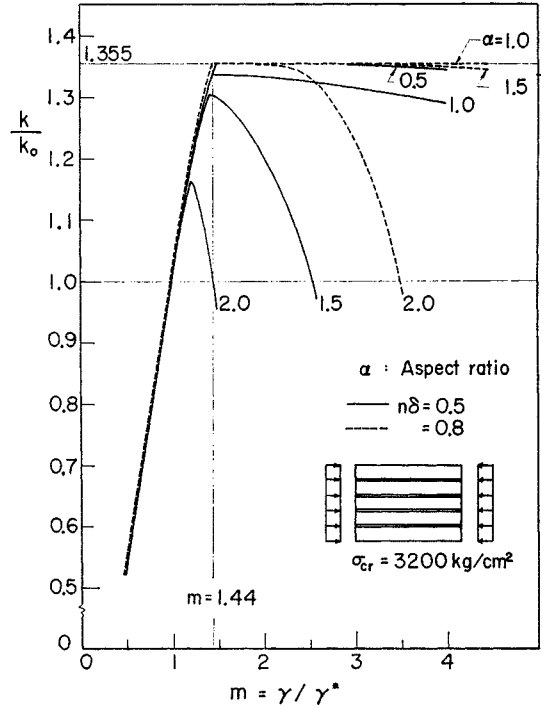


Fig. 9 Elastic Buckling Coefficients for Stiffened Plates with Various Values of Aspect Ratio α .

のが **Fig. 8, 9** である。**Fig. 8** は $n=3$ 、 $\alpha=1.0$ で $n\delta$ の値が $0.2 \sim 0.8$ まで変化したときの座屈係数を $m = \tau/\tau^*$ および τ に対してプロットしたものであり、**Fig. 9** は $n=5$ 、 $n\delta=0.5, 0.8$ で α の値が $0.5 \sim 2.0$ と変化したときの座屈係数を m に対してプロットしたものである。両図とも座屈応力は $\sigma_{cr}=3200 \text{ kg/cm}^2$ の

場合についてのみ考えており、**Fig. 8** の (b) 図では **Fig. 7** の座屈モード①に対応する曲線部分は省略してある。これらの図より一般的にいえることは、板の縦横寸法比が一定の場合は面積比 δ が大きいほど、また面積比が一定のときは板の縦横寸法比が小さいほど座屈係数はその上限値 ($k/k_0=1.355$) 近くには達することである。さらに、座屈係数がピークとなるときの曲げ剛比の値は、座屈係数の最大値が上限値近くにあるときは最適剛比の 1.44 倍前後であることがわかる。

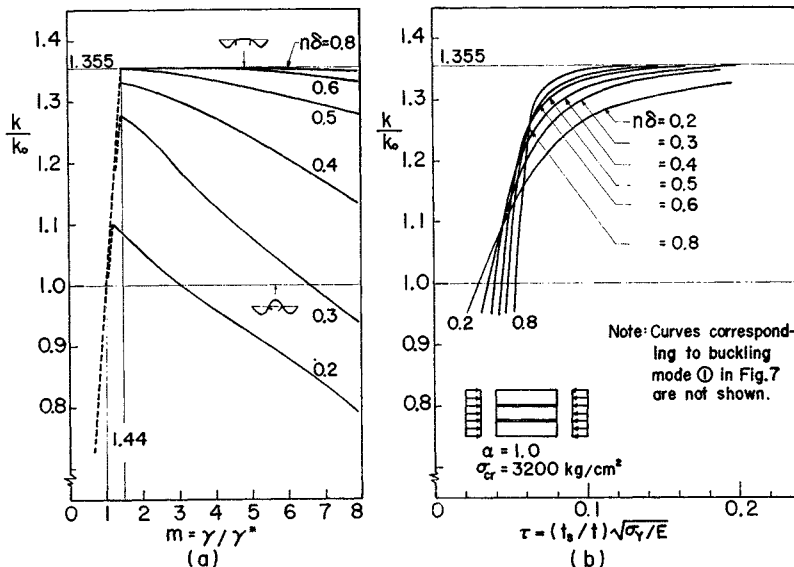


Fig. 8 Elastic Buckling Coefficients for Stiffened Plates with Various Values of $n\delta$.

これまでの考察により、補

剛材のねじり剛性を考えたときの補剛材の座屈係数は、曲げ剛比が最適剛比以上であれば $k_0=4n^2$ から最大 $1.355k_0$ の範囲内のある値まで上昇する可能性があるが、この値は板の幅厚比、板の縦横寸法比、補剛材と板の面積比によって大きく変化することがわかった。この理由を説明する前に、ここで補剛材のねじり剛性を考えない場合の座屈解とここで述べたような補剛材のねじり剛性を解析にとり入れたときの解との関連について考えてみる。まず前者の場合には、補剛材の曲げ剛比が最適剛比以上であれば、補剛材の座屈係数は δ, r の値にかかわらず一定値 $4n^2$ となる。補剛材のねじり剛性を考慮しない板の解析から得られるのはここまでであるが、補剛材自身の局部座屈（ねじり座屈）が板全体の座屈に先行しないためにはもう一つの条件が必要であって、それが補剛材の幅厚比制限となる。すなわち、この場合には、補剛材の曲げ抵抗のみを考慮した板の座屈と補剛材単独のねじり座屈を別々に取り扱っていることになる。それに反し、補剛材のねじり剛性を考慮した解析方法では、上記の2つの座屈を連成座屈として捉えていることになる。これは、補剛材の座屈後のつり合い条件を表わす式 (12) を考察すれば明らかである。すなわち、補剛材のねじり剛性を考えないときの補剛材の解析には第1式のみ用いられ、 $m_i(x)=0$ とおいた第2式から補剛材単独のねじり座屈強度が求められる⁹⁾。それに反し、補剛材のねじり剛性を考慮する場合には、これらの両式を同時に補剛材の解析に用いているからである。したがって、後者の解析から得られる座屈解は、補剛材の幅厚比に関係なく常に真の座屈解を与えることになり、このことから Fig. 6, 8, 9 で示したような結果が得られた理由を説明できる。すなわち、これらの図で示したように、面積比 δ を固定して τ のみを減少させて補剛材の曲げ剛比を上昇させてゆくと、補剛材の幅厚比は必然的に増大し、そのねじり抵抗は減少することになる。したがって、 δ をある程度大きくしておかないと、たとえ曲げ剛比が最適剛比以上となったとしても、補剛材による板のたわみ角の拘束が不十分となって座屈強度の上昇を余り望めなくなるわけである。このことは Fig. 8, 9 に示した結果によく表われている。さらに、上記と同様な理由により、曲げ剛比がある値より大きくなると座屈強度はかえって低下し始めるという理由も説明できよう。これらのことを言い換えるならば、補剛材の幅厚比にあらかじめある制限をつけておき、曲げ剛比が最適剛比以上となるように補剛材の寸法すなわち面積比 δ を定めるようにすれば、補剛材のねじり剛性による座屈強度の上昇率を

常に一定値に保つことが可能になるものと思われる。以下に、この幅厚比の制限値を先に示した Fig. 8 (b) から求める方法について説明する。まず、補剛材の幅厚比は簡単な演算により

$$\frac{b_s}{t_s} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4(1-\nu^2)}} \cdot \frac{n\delta}{\tau^2} \cdot R \cdot \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \dots \dots \dots (26)$$

で表わされる。したがって、座屈係数 k に k_0 の定数倍 (β 倍) の値を確保させるのに必要とする補剛材の幅厚比の制限値は、Fig. 8 (b) の曲線群と $k/k_0=\beta$ との交点から求まる τ の値および式 (25) で $k/k_0=\beta$ において求めた R を上式に代入すれば、 $n\delta$ および σ_{cr}/σ_Y の関数として求めることができる。このようにして求められた b_s/t_s の値を、 $\beta=1$ すなわち $\tau=\tau_0$ の場合の値 ($b_s/t_s)_0$ を基準にしてプロットしたものが Fig. 10 である。なお、 β の値の最大値は 1.355 であるが、 β がこの値での τ の値を Fig. 8 (b) から正確に読み取るのは困難であるので、ここでは $\beta=4/3=1.333$ までを考えている。 $(b_s/t_s)_0$ は補剛材のねじり剛性を考慮しない補剛材の設計に用いられる補剛材の幅厚比制限値で既知な量であるから、この図から設計で期待する座屈係数 $k=\beta k_0$ に対応する幅厚比制限値が簡単に求められる。この図よりわかるように、補剛材の幅厚比制限は β の値が大きくなると相当に厳しいものとなる。なお、この図はサブパネルの数 n が3の場合について求められたものであるが、横軸に $n\delta$ をとることにより、 n の値が任意の場合にも近似的に適用できることを指摘しておく。

最後に、この節で述べたことのみとまとめとして、補剛材の座屈係数を k_0 から βk_0 ($1 < \beta \leq 1.333$) まで高めるために補剛材が満足しなければならない条件をまとめると、

- 1) $r \geq 1.44 r^*$,
- 2) 補剛材の幅厚比が Fig. 10 に示した制限値以下にあること、

の2つである。ただし、 r は必ずしも 1) の条件を満足

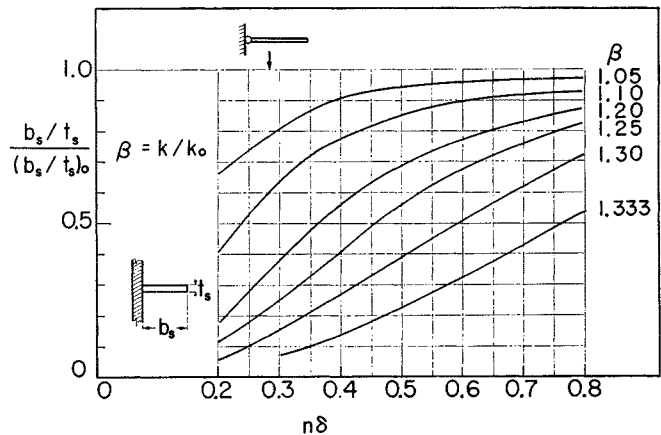


Fig. 10 Width-Thickness Requirements for Stiffeners.

する必要はなく、 β の値に応じて r^* から $1.44r^*$ の間のある値以上であれば十分であるが、簡単なため上の制限に統一した。

(3) 非弾性座屈

ここでは補剛板に Fig. 3 に示した残留応力が存在するものと仮定して行った数値計算結果について述べる。なお、降伏応力は 3200 kg/cm^2 として計算してある。

Fig. 11 の太実線および破線は数値計算より求めた $R-\tau$ 曲線を平均座屈応力 σ_{cr}/σ_Y (または座屈時の作用軸ひずみ ϵ_{cr}/ϵ_Y) をパラメータにして描いたものである。ここで、補剛板の諸元は $n=3, n\delta=0.5, \alpha=1.0$ で、残留応力の大きさは $\sigma_{rc}=\sigma_{rcs}=0.3\sigma_Y$ としている。また、同図の細実線は式 (24) を表わす。ただし、同式中の r^* としては、 $R \geq 0.7$ のときは弾性座屈のところで定義した量すなわち DIN 4114 で規定している最適剛比であるが、 $R \leq 0.7$ のときはわが国の道路橋示方書および鋼鉄道橋設計標準の規定をチェックするため、それらに示されている縦方向補剛材の必要最小剛比を用いている。後者の場合には r^* は板の幅厚比の関数となるため式 (24) の τ と R は直線関係とならない。Fig. 12 は Fig. 11 から求めた $m=r/r^*=1, 2, 4$ のときの座屈曲線 ($\sigma_{cr}/\sigma_Y - R$ 曲線) を示す。図中、曲線 ① は補剛材の曲げ剛比が最適剛比以上で残留応力および補剛材のねじり剛性を考えないときの補剛板の弾性座屈曲線、曲線 ② および ③ は無補剛板 ($n=1$) の座屈曲線で、それぞれ、両非載荷辺単純支持および非載荷辺の一边が固定で他辺が単純支持の場合に対応する。したがって、弾性域 ($\sigma_{cr}/\sigma_Y < 0.7$) では、曲線 ② はねじり剛性のない補剛材をもつ板がその補剛材間で単独座屈を起すときの座屈曲線に、また曲線 ③ は補剛材のねじり剛性を考慮したときの補剛板の座屈曲線の上限曲線にもなる注 4)。さらに、Fig. 13 は Fig. 12 と同様な関係を面積比のみを小さくした場合 ($n\delta=0.3$) について示したものである。Fig. 11~13 から次のことが考察できるであろう。

1) 弾性域で、曲げ剛比が最適剛比以上 ($m \geq 1$) でも座屈曲線が曲線 ① に収束しないのは補剛材のねじり剛性による座屈強度上昇のためである。座屈強度は、(2) 弾性座屈で述べたように、面積比 δ を固定して曲げ剛比を大きくしても必ずしも上昇するわけではなく、曲げ剛比がある値より大きくなるとかえって低下し、この低下の程度は面積比が小さいほど大きくなる。また、 $n\delta=0.5$ のときの座屈曲線は曲げ剛比が最適剛比の 1~4 倍のとき曲線 ③ 近辺まで上昇する。このときの座屈

注 4) 非弾性域では板と補剛材の塑性化の割合が違うため、これらは必ずしも一致しない。

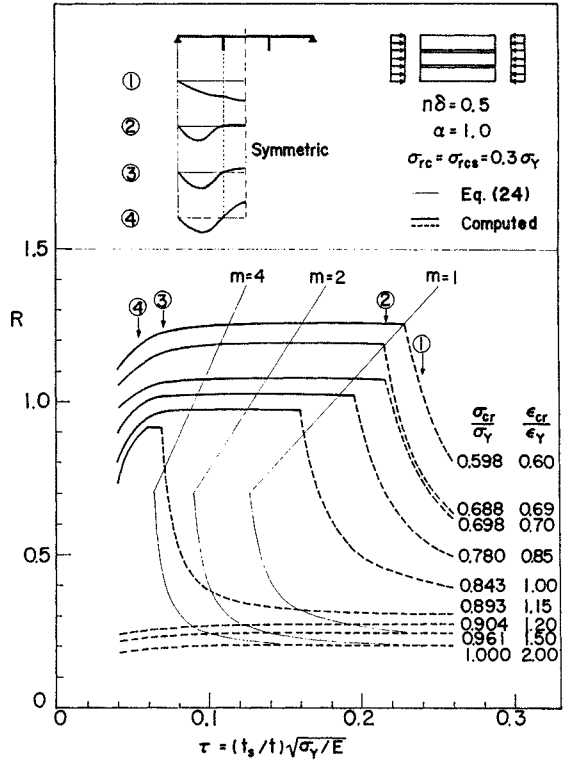


Fig. 11 $R-\tau$ Curves for Elastic and Inelastic Buckling of Stiffened Plate with Residual Stresses.

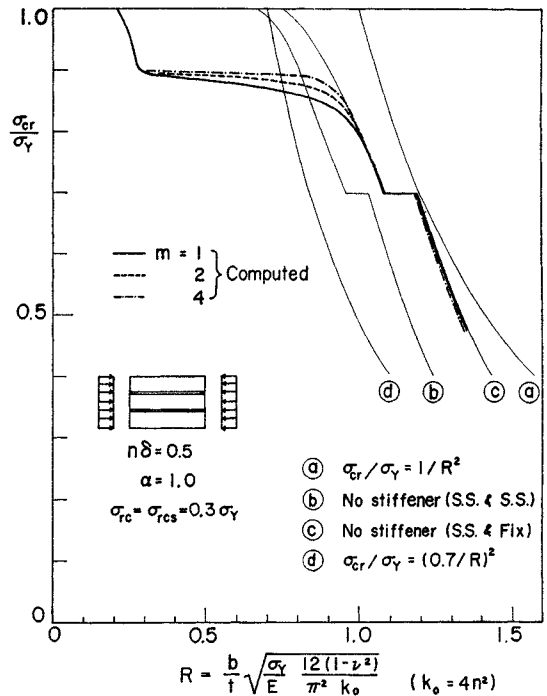


Fig. 12 Buckling Curves of Stiffened Plates ($n\delta=0.5$).

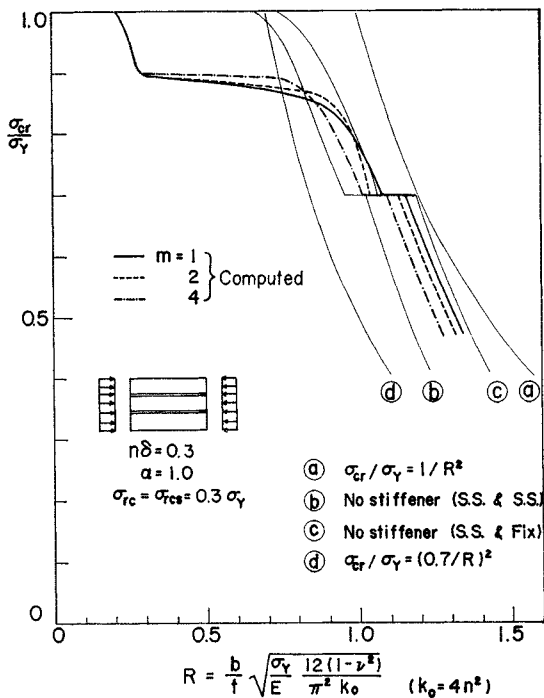


Fig. 13 Buckling Curves of Stiffened Plates ($n\delta=0.3$).

モードは Fig. 11 に示した ② であり、補剛板の座屈強度の上限にほぼ等しい。なお、 δ が一定のとき弾性域での座屈強度がピークとなる曲げ剛比の値は、ここに示した例では、Fig. 11 からわかるように最適剛比にほぼ等しい ($m \cong 1$) が、この値は残留応力の大きさによって変化し、板および補剛材の最大圧縮残留応力が $0.3\sigma_Y$ 以下のときは最適剛比の 1~1.44 倍の間にあり、それ以上のときの最適剛比より小さくなるのが別の計算結果からわかっている。

2) 非弾性域での座屈曲線は σ_{cr}/σ_Y の値によってほぼ 3 つの領域にわけられる。まず第一の領域は $\sigma_{cr}/\sigma_Y \leq 0.8$ で、ここでは弾性域の場合とほぼ同じことがいえ、補剛材はまだ十分な剛性を持っていることがわかる。第 2 の領域は $0.8 \leq \sigma_{cr}/\sigma_Y \leq 0.9$ で、ここでは曲げ剛比が小さい (すなわち m が小さい) 板から座屈モードが ② から ① に移行し (Fig. 11 参照)、したがって、 r を r^* 以上にする効果がこの領域で初めて表われ、Fig. 12 に示した m の範囲内では $m=4$ のときの座屈強度が最も大きくなっている。しかし、座屈強度の大きな上昇はあまり望めない。残りの領域では、補剛材の曲げ剛度 B_y の極端な低下のために座屈モードはすべて ① のようになり、補剛材がない板とほぼ同じような状態になって幅厚比 R は急激に低下している注 5)。

上記の 2) で述べたことを捕捉する意味で、補剛材の剛度のうち座屈強度におよぼす影響の大きい曲げ剛度

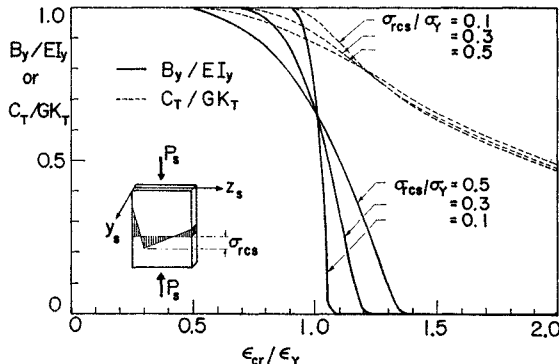


Fig. 14 Variation of Bending and St. Venant Torsional Rigidities of Stiffener.

B_y および St. Venant のねじり剛度 C_T の変化を軸ひずみ ϵ_{cr}/ϵ_Y に対してプロットしたものが Fig. 14 である。補剛材の最大圧縮残留応力 σ_{rcs} が $0.3\sigma_Y$ のとき、 $\epsilon_{cr}/\epsilon_Y \geq 1.2$ (または Fig. 11 より $\sigma_{cr}/\sigma_Y \geq 0.9$) では、 B_y はほぼ 0 となり C_T のみ存在することになるが、このときの座屈モードでは補剛材のねじり剛性による座屈強度の上昇はほとんど望めないから、補剛板の座屈曲線は無補剛板のそれとほぼ一致することになるのである。

次に、残留応力の大きさを変化させたときの座屈曲線を示したものが Fig. 15 である。ここで、対象とした補剛板は Fig. 13 の場合と同じ (ただし $r=r^*$ のときのみ) であり、板と補剛材の最大圧縮残留応力の大きさは等しいものとしている。また、図に示した曲線 ④ は道路橋示方書⁴⁾ および鋼鉄道橋設計標準⁵⁾ で用いられている補剛板の耐荷力曲線である。この曲線は Fig. 12, 13 にも曲線 ④ としてプロットしてある。Fig. 15 からわかるように、座屈曲線は平均座屈応力 σ_{cr} が降伏点応力 σ_Y 近辺になるとほとんど 1 本の曲線に収束してしまふ。したがって、 $\sigma_{cr}=\sigma_Y$ となる板の等価幅厚比 R の値すなわち R_{cr} は、残留応力の大きさに無関係にほぼ一定値 0.21 となり、この値は示方書で期待している $R_{cr}=0.7$ とは大きな差が生じている。もちろん、ここで述べた計算結果は多くの仮定より求められたもので、その裏づけのためには実験による検証が必要なことはいうまでもない。ところが、柱材の圧縮フランジの設計にとって重要な幅厚比の比較的小さい ($R \leq 0.7$) 補剛板の耐荷力実験結果は現在のところあまり多くない。したがって、上述の計算結果が妥当かどうかに対してははっきりした結論を導くことはできないが、これまでに発表さ

注 5) Fig. 12, 13 の曲線 ④, ⑤ の横軸は $k_0=4 (n=1)$ として計算してあることに注意。横軸にサブパネルの数に無関係な板の幅厚比をとれば、 $\sigma_{cr}/\sigma_Y \geq 0.9$ では計算より求めた補剛板の座屈曲線はすべて曲線 ④ にほぼ一致することになる。

れている実験データ^{20)~22)}と計算結果(サブパネルの数が2, 3 および 5 の場合)との比較を Fig. 16 に示す。ただし, 実験結果はすべて耐荷力を基にしており, r が r^* に較べて極端に低い場合の補剛板の実験結果(文献 20)の一例は除外してある。また, 試験体の補剛材の本数, 補剛材の寸法, 板の縦横寸法比の値などは必ずしも計算で用いたデータ(計算値はすべて $\alpha=1.0$,

$r=r^*$ の場合)とは一致しないが, R が 0.7 付近では前述の理由によりこの相異はあまり問題にならない。この図からわかるように, R が 0.7 前後の実験データは比較的まとまっており, 板および補剛材の最大圧縮残留応力が $0.1\sigma_Y$ と $0.3\sigma_Y$ の計算結果の間にほぼ納まるようである。ただし, 文献 22)の実験データはすべて計算結果より上にあるが, これらは HT 80 を使用した実験であって, 奥村ら¹⁷⁾が指摘しているように応力-ひずみ曲線が降伏後正の勾配を持つことによる耐荷力上昇の影響が表われているためと思われる。

4. 結 言

箱形断面柱材の圧縮フランジの局部座屈強度を対象にして, 一様圧縮を受ける四辺単純支持の縦方向補剛材つき板の弾性ならびに非弾性座屈強度の数値計算結果について述べた。この研究によって得られた結論をまとめると次のようになる。

解析方法

- (1) 残留応力および補剛材のねじり剛性の影響を解析にとり入れた。
- (2) 本文 3. で述べた条件のもとでの解の収束は非常に早く, 各サブパネルを 2 分割する程度で高精度の解が得られた。

弾性座屈

(1) 補剛材のねじり剛性を考えた解析は, それを無視したときの補剛板の座屈と補剛材単独のねじり座屈を連成座屈として捉えていることになる。したがって, この解析から得られた座屈解は, 補剛材の幅厚比に關係なく常に真の座屈解を与え, 補剛材のねじり剛性を無視した場合の座屈解より上昇もするし低下もする。

(2) 補剛材と板の面積比 δ および補剛材の曲げ剛比 r を適当に選べば補剛材のねじり剛性による座屈強度の上昇が期待でき, 座屈係数を $4n^2$ (補剛材のねじり剛性を無視したときの座屈係数の上限値) から最大 $5.42n^2$ まで高めることが可能である。

(3) 補剛材の幅厚比ならびに曲げ剛比に制限をつければ補剛材のねじり剛性による座屈強度の上昇を常に一定に保つことができる補剛板の設計方法が可能となる。その幅厚比制限は Fig. 10 に与えられており, 曲げ剛比は $r \geq 1.44 r^*$ (ここに r^*

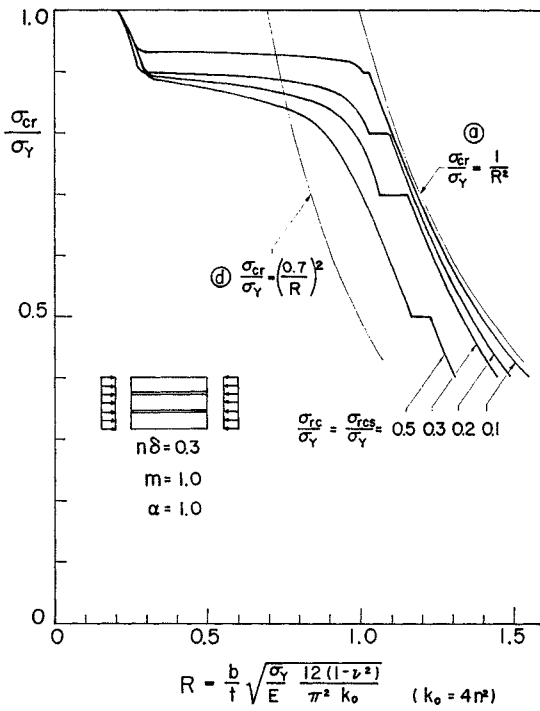


Fig. 15 Effect of Residual Stresses.

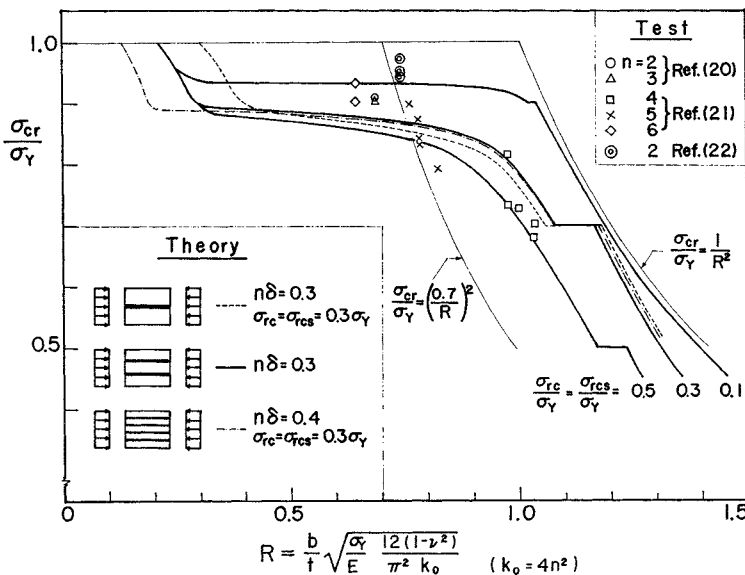


Fig. 16 Comparison of Theory and Test.

は DIN 4114 に定める最適剛比)を満足すれば十分である。

非弾性座屈

(1) 平均座屈応力が降伏点応力近辺にある補剛板は、残留応力の大きさ、補剛材の本数および補剛材の剛度に無関係にその幅厚比が定り、それは無補剛板の幅厚比にほぼ等しい。

(2) したがって、平均座屈応力が降伏点応力に達するために必要とする補剛板の幅厚比はわが国の道路橋示方書ならびに鋼鉄道橋設計標準で期待している値より大幅に低下する。

(3) 幅厚比の比較的小さい(式(23)の R が 0.7 より小さい)補剛板の耐荷力実験結果は現在非常に少ないため、上記(2)で述べたことも考えあわせて、この領域での実験を今後集中的に実施する必要がある。

最後に、研究の当初から終始変わらぬご指導をいただいた福本晴士名古屋大学助教授に深謝したい。なお、本研究の一部は昭和 48 年度の文部省科学研究費(一般研究 C・研究代表者 福本晴士大助教授)の補助を受けた。また、数値計算には名古屋大学大型計算機センターの FACOM 230-60 を使用した。

5. 補 遺

(1) 剛性行列 $[S]$ と安定係数行列 $[S_G]$ の表現

$$[S] = (\pi/\alpha)^2 \int_0^{\xi} \kappa_{1L} \phi_J^T \phi_J d\bar{y} - \int_0^{\xi} \kappa_2 (\phi_J^T \phi_J + \phi_J^T \phi_J) d\bar{y} + 4 \int_0^{\xi} \kappa_4 \phi_J^T \phi_J d\bar{y} + (\alpha/\pi)^2 \cdot \int_0^{\xi} \kappa_3 \phi_J^T \phi_J d\bar{y} \dots (A.1)$$

$$[S_G] = 12(1-\nu^2) \int_0^{\xi} (\sigma/\sigma_Y) \phi_J^T \phi_J d\bar{y} \dots (A.2)$$

ここに、' (prime) は \bar{y} についての微分を表わす。

(2) 非弾性域における補剛材の剛度の計算方法

いま、補剛材に作用する軸ひずみはその断面について一定とし、残留応力分布を直線分布とすれば、これらの合ひずみは残留応力分布が不連続となる点のひずみが定まれば完全に求められる。すなわち、Fig. 3 (b) のような残留応力分布の場合には、補剛材の両端部と中間の 1 点の合計 3 点のひずみが定まればよい。そこで、Fig. 17 (a) に示したように、これらの点で補剛材を長さ方向に 2 分割し、分割点および分割要素に図のような番号をつける。なお、以下の記述では簡単のため座標 y_s, z_s の下記号 s を省略することにする。さて、要素 ① ($i =$

1, 2) の弾性部分の長さを h_i^e 、塑性部分の長さを h_i^p 、弾性部分の重心の z 座標を z_{ci} とし、それらを b_s で除して無次元化した量を上に $-$ を付けて表わすと、補剛材全体の弾性部分の重心 C の z 座標 $\bar{d} = d/b_s$ は次のようになる。

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^2 \bar{z}_{ci} \cdot \bar{h}_i^e / \bar{h}^e}{\sum_{i=1}^2 \bar{h}_i^e} \dots (A.3)$$

上式中、 \bar{h}^e は補剛材全体の弾性部分の長さ h^e を b_s で除した量である。次に定義により、

$$B_y = E \cdot t_s \int_{h^e} z^2 dz, \quad B_z = E \cdot t_s \int_{h^e} y^2 \cdot dz,$$

$$C_w = E \cdot (h^e \cdot t_s)^3 / 144$$

であるから、これらをそれぞれの弾性域の値で除し多少の変形を行えば次式を得る。

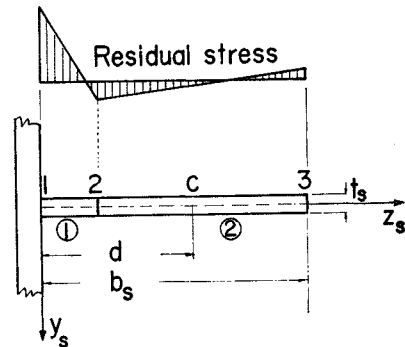
$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_y &= 3 \sum_{i=1}^2 (z_{ci}^2 + (\bar{h}_i^e)^2 / 12) \bar{h}_i^e \\ \bar{B}_z &= \bar{h}^e, \quad \bar{C}_w = (\bar{h}^e)^3 \end{aligned} \right\} \dots (A.4)$$

また、St. Venant のねじり剛度 C_T は²³⁾

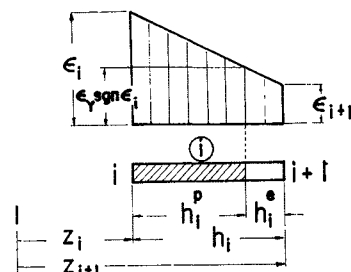
$$C_T = \frac{E \cdot t_s^3}{3} \int_0^{b_s} \frac{dz}{2(1+\nu) + 3e}, \quad e = \left| \frac{\epsilon^p}{\epsilon_Y} \right| = |\bar{\epsilon}^p|$$

で表わされるから、

$$\bar{C}_T = \sum_{i=1}^2 \bar{C}_{Ti}, \quad \bar{C}_{Ti} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{2(1+\nu)}{2(1+\nu) + 3e} d\bar{z} \dots (A.5)$$



(a)



(b)

Fig. 17 (a) Stiffener Cross-Section, and (b) Strain Distribution in an Element.

となる。ここで、 ϵ^p は合ひずみの塑性ひずみ成分、 $\bar{z} = z/b_s$ であり、 \bar{z}_i, \bar{z}_{i+1} は $i, i+1$ 点の \bar{z} の値を表わす。さらに、式 (22) の \bar{K}_p および \bar{P}_s は次のように表わすことができる。

$$\bar{K}_p = \sum_{i=1}^2 \bar{K}_{pi}, \quad \bar{K}_{pi} = \int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}_{i+1}} \bar{\sigma}_s (\bar{z} - \bar{d})^2 d\bar{z} \dots (A.6)$$

$$\bar{P}_s = \sum_{i=1}^2 \bar{P}_{si}, \quad \bar{P}_{si} = \int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}_{i+1}} \bar{\sigma}_s \cdot d\bar{z} \dots (A.7)$$

ここに、 $\bar{\sigma}_s = \sigma_s / \sigma_Y$ である。

次に分割要素 ④ のひずみ状態を考える。いま、Fig. 17 (b) に示したように、分割要素 ④ の始点 i 、終点 $i+1$ の合ひずみを $\epsilon_i, \epsilon_{i+1}$ とし、それらを降伏ひずみ ϵ_Y で除したものを上に $-$ を付けて表わす。④ 要素のひずみ状態は $\bar{\epsilon}_i, \bar{\epsilon}_{i+1}$ の値によって次の 4 つの場合に分類される。

- Ⓐ $|\bar{\epsilon}_i|, |\bar{\epsilon}_{i+1}| \leq 1$ 弾性
- Ⓑ $|\bar{\epsilon}_i|, |\bar{\epsilon}_{i+1}| \geq 1$ 全塑性
- Ⓒ $|\bar{\epsilon}_i| > 1, |\bar{\epsilon}_{i+1}| \leq 1$ 始点 i 側の一部塑性
- Ⓓ $|\bar{\epsilon}_i| \leq 1, |\bar{\epsilon}_{i+1}| > 1$ 終点 $i+1$ 側の一部塑性

以下、ひずみ状態 ③ の場合についてのみ考える。Fig. 17 (b) より次式が簡単に求まる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}_i^e &= \bar{h}_i (\bar{\epsilon}_{i+1} - \text{sgn}(\bar{\epsilon}_i)) / (\bar{\epsilon}_{i+1} - \bar{\epsilon}_i) \\ \bar{h}^p &= \bar{h}_i - \bar{h}_i^e \end{aligned} \right\} \dots (A.8)$$

$$\bar{z}_{ci} = \bar{z}_{i+1} - \bar{h}_i^e / 2 \dots (A.9)$$

$$e = \text{sgn}(\bar{\epsilon}_i) \cdot \bar{\epsilon}^p$$

$$-\bar{\sigma}_s = \bar{\epsilon}_i + (\bar{\epsilon}_{i+1} - \bar{\epsilon}_i) (\bar{z} - \bar{z}_i) / \bar{h}_i - \bar{\epsilon}^p$$

$$\bar{\epsilon}^p = (\bar{\epsilon}_i - \text{sgn}(\bar{\epsilon}_i)) (1 - (\bar{z} - \bar{z}_i) / \bar{h}_i^p)$$

$$\bar{\epsilon}^p = 0$$

$$\bar{z}_i \leq \bar{z} \leq \bar{z}_i + \bar{h}_i^p$$

$$\bar{z}_i + \bar{h}_i^p \leq \bar{z} \leq \bar{z}_{i+1}$$

ここで、sgn は signum 記号である。上式の $e, \bar{\sigma}_s$ を式 (A.5)~(A.7) の $\bar{C}_{Ti}, \bar{K}_{pi}, \bar{P}_{si}$ に代入して積分を行えば次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{C}_{Ti} &= \bar{h}_i^e + \frac{2(1+\nu)\bar{h}_i^p}{3 \cdot \text{sgn}(\bar{\epsilon}_i) \cdot (\bar{\epsilon}_i - \text{sgn}(\bar{\epsilon}_i))} \log_e \\ &\quad \cdot \left| 1 + \frac{3 \cdot \text{sgn}(\bar{\epsilon}_i) \cdot (\bar{\epsilon}_i - \text{sgn}(\bar{\epsilon}_i))}{2(1+\nu)} \right| \end{aligned} \dots (A.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{pi} &= -\bar{h}_i \left(\bar{h}_i^2 \frac{\bar{\epsilon}_i + 3\bar{\epsilon}_{i+1}}{12} + \bar{h}_i (\bar{z}_i - \bar{d}) \frac{\bar{\epsilon}_i + 2\bar{\epsilon}_{i+1}}{3} \right. \\ &\quad \left. + (\bar{z}_i - \bar{d})^2 \frac{\bar{\epsilon}_i + \bar{\epsilon}_{i+1}}{2} \right) + \bar{h}_i^p (\bar{\epsilon}_i - \text{sgn}(\bar{\epsilon}_i)) \\ &\quad \cdot \left(\frac{(\bar{h}_i^p)^2}{12} + \frac{\bar{h}_i^p (\bar{z}_i - \bar{d})}{3} + \frac{(\bar{z}_i - \bar{d})^2}{2} \right) \end{aligned} \dots (A.11)$$

$$\bar{P}_{si} = -(\bar{\epsilon}_i + \bar{\epsilon}_{i+1}) \bar{h}_i / 2 + (\bar{\epsilon}_i - \text{sgn}(\bar{\epsilon}_i)) \bar{h}_i^p / 2 \dots (A.12)$$

したがって、式 (A.3)~(A.12) より $\bar{d}, \bar{B}_y, \bar{B}_z, \bar{C}_\omega, \bar{C}_T, \bar{K}_p$ および \bar{P}_s がすべて求まることになる。

(3) 一様圧縮を受ける補剛板の弾性座屈の基礎式

ここでは、本文中の弾性座屈の数値計算結果の所で述べたことを捕捉する目的で、一様圧縮を受ける補剛板の弾性座屈の基本式を座屈係数 k を用いて表わしておく。まず、式 (A.1), (A.2) の要素の剛性行列、安定係数行列は、係数 $\kappa_1 \sim \kappa_4$ および座屈応力が要素の幅方向に変化しないから、

$$[S] = [S(\alpha)], \quad [S_G] = 12(1-\nu^2) \cdot \sigma_{cr} / \sigma_Y \cdot [\bar{S}_G] \dots (A.13)$$

と表わされる。ここに、 $[S(\alpha)]$ は剛性行列が α のみの関数であることを示し、 $[\bar{S}_G]$ は一定行列である。ところが、座屈係数 k は

$$k = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y} \cdot \lambda^2 \dots (A.14)$$

で表わされるから、式 (7) の要素の剛性方程式は

$$([S(\alpha)] - k \cdot [\pi^2 \cdot \bar{S}_G]) \{W\} = (\alpha / \pi)^2 \{F\} \dots (A.15)$$

となる。次に、式 (14), (15) において、

$$\begin{aligned} \bar{B}_y = \bar{C}_\omega = \bar{B}_z = \bar{C}_T &= 1.0, \quad \bar{P}_s = \sigma_{cr} / \sigma_Y, \quad \bar{d} = 1/2 \\ (b_s/b)^2 &= (\delta/\tau)^2 \cdot \epsilon_Y, \quad \bar{K}_p = (1/12) \cdot \sigma_{cr} / \sigma_Y \\ \bar{K} &\equiv - (1-\nu^2) (\delta^3/\tau^2) \cdot \epsilon_Y \cdot (\sigma_{cr} / \sigma_Y) \cdot \lambda^2 \end{aligned}$$

であるから、式 (A.14) を考慮すれば、 \bar{q}_i および \bar{m}_i は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} (\alpha/\pi)^2 \bar{q}_i &= f_1(\delta, \tau, k, \sigma_{cr}, \alpha) \cdot (w_i/b) \\ (\alpha/\pi)^2 \bar{m}_i &= f_2(\delta, \tau, k, \alpha) \theta_i \end{aligned} \right\} \dots (A.16)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= k \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{\delta^3 \cdot \epsilon_Y}{3\tau^2} \frac{(\pi/\alpha)^2}{\sigma_{cr}/E} - \delta \right) \\ f_2 &= (1-\nu^2) \cdot \delta^3 \cdot (\pi/\alpha)^2 / 3 \\ &\quad + 2 \cdot (1-\nu) \cdot \delta \cdot \tau^2 / \epsilon_Y - k \cdot \pi^2 \cdot (\delta^2 \epsilon_Y / 3 \tau^2) \end{aligned} \right\} \dots (A.17)$$

である。なお、式 (A.16) を導く際、式 (21) の右辺第 1 項は影響が小さいため省略してある。式 (A.16) は補剛材のパラメータとして δ と τ を用いた場合であるが、 δ と r を用いるときには、式 (20) の第 1 式を用いて式 (A.17) 中の τ を消去すればよい。すなわち、いま

$$\left. \begin{aligned} f_1(\delta, \tau, k, \sigma_{cr}, \alpha) &= g_1(\delta, r, k, \alpha) \\ f_2(\delta, \tau, k, \alpha) &= g_2(\delta, r, k, \sigma_{cr}, \alpha) \end{aligned} \right\} \dots (A.18)$$

とおくと、関数 g_1, g_2 は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= r \cdot (\pi/\alpha)^2 - k \cdot \delta \cdot \pi^2 \\ g_2 &= (1-\nu^2) \cdot \delta^3 \cdot (\pi/\alpha)^2 / 3 \\ &\quad + k \frac{2(1-\nu) \cdot \delta^4}{3r} \frac{\pi^2}{\sigma_{cr}/E} - r \frac{\sigma_{cr}}{E} \end{aligned} \right\} \dots (A.19)$$

したがって、要素の剛性方程式として式 (A.15)、補剛

材のある節点でのつり合い条件式に式 (A.16) または同式中の f_1, f_2 を g_1, g_2 に置き換えた式を用いて補剛板全体の剛性方程式を組み立てれば固有値として座屈係数 k が直接求められる。このようにして得られる座屈係数を Fig. 6 に示した結果と対比しながら考察してみる。まず、同図の破線部分の座屈モードでは、本文中で述べたように、補剛材の曲げ抵抗の影響が大きく、ねじり抵抗の影響は小さいため、近似的に式 (A.16) で $\bar{m}_i = 0$ と考えれば、座屈係数は関数 f_2 または g_2 に無関係となるため、次のような形で表わされる。

$$k = k(\delta, \tau, \sigma_{cr}, \alpha) = k(\delta, \tau, \alpha)$$

すなわち、座屈係数はパラメータ δ と τ を用いたときに座屈応力にはほぼ無関係となる (Fig. 6 (a))。それに反し、Fig. 6 の実線部の座屈モードは補剛材のある位置で変位が 0 であるから、式 (A.16) で $w_i = \bar{q}_i = 0$ となり、座屈係数は関数 f_1 または g_1 に無関係となって

$$k = k(\delta, \tau, \alpha) = k(\delta, \tau, \sigma_{cr}, \alpha)$$

のように表わされる。すなわち、この場合には、座屈係数はパラメータとして δ と τ を用いたとき座屈応力に無関係になり (Fig. 6 (b))、 δ と τ を用いたときは座屈応力によって変動することとなる (Fig. 6 (a))。

記 号

- A_s : 1本の補剛材の断面積
 a : 板の x 軸方向の長さ (Fig. 1)
 B_y, B_z, C_ω, C_T : 補剛材の剛度で、曲げ剛度、弱軸まわりの曲げ剛度、そりねじり剛度、St. Venant のねじり剛度
 $\bar{B}_y, \bar{B}_z, \bar{C}_\omega, \bar{C}_T$: B_y, B_z, C_ω, C_T をそれぞれの弾性域の値で除した量
 b : 板の全幅 (y 軸方向の長さ, Fig. 1)
 b_s : 補剛材の幅
 D : 板の曲げ剛度 $= Et^3/12(1-\nu^2)$
 d, \bar{d} : 板と補剛材の接点から補剛材重心までの距離, d/b_s
 $\{\bar{F}\}$: 要素の節線力ベクトル (式 (9))
 I_y, I_z, I_ω, K_T : 補剛材の弾性断面定数で、強軸まわりの断面 2 次モーメント、弱軸まわりの断面 2 次モーメント、そりねじり定数、St. Venant のねじり定数
 K, \bar{K}, \bar{K}_b : 式 (13) で定義される量, K/bD , 式 (22) で定義される量
 k : 補剛板の座屈係数
 k_0 : 補剛材のねじり剛性を考えないとき、板がサブパネル間で単独座屈を起すときの補剛板の座屈係数 $= 4n^2$
 M : 各サブパネル中の要素の数
 \bar{M}_i', \bar{M}_i' : i 節線の左, 右に作用する無次元化した曲げモーメント (Fig. 2)
 m : 曲げ剛比と最適剛比 $= r/r^*$
 $m_i(x), \bar{m}_i$: i 節線の不静定モーメント, 無次元化した不静定モーメント
 n : サブパネルの数
 P_s, \bar{P}_s : 1本の補剛材に作用する軸方向圧縮力, $P_s/A_s\sigma_Y$
 $q_i(x), \bar{q}_i$: i 節線の不静定反力, 無次元化した不静定反力
 R, R_{cr} : 板の等価幅厚比 (式 (23)), $\sigma_{cr} = \sigma_Y$ のときの R の値
 $[S], [S_G]$: 要素の剛性行列, 安定係数行列
 $[S], [S_G]$: 補剛板全体の剛性行列, 安定係数行列
 t, t_s : 板の厚さ, 補剛材の厚さ
 \bar{V}_i', \bar{V}_i' : i 節線の左, 右に作用する無次元化した合せん断力 (Fig. 2)
 $\{W\}, \{W\}$: 要素, 補剛板全体の節線変位ベクトル (式 (4))
 w, w_i, w_j : 座屈によって生ずる板のたわみ
 w_s, φ_s : 補剛材の z_s 軸方向の変位, ねじり角
 x, y, z : 座屈前の板に対する座標系 (Fig. 1)
 y_s, z_s : 座屈前の補剛材に対する座標系 (Fig. 2)
 α : 板の縦横寸法比 $= a/b$
 $\beta = k/k_0$
 r, r_z, r_ω, r_T : 補剛材の曲げ剛比, 弱軸まわりの曲げ剛比, そりねじり剛比, St. Venant のねじり剛比
 r^* : 弾性座屈の場合は DIN 4114 に定める最適剛比, 非弾性座屈で $R \leq 0.7$ のときはわが国の道路橋示方書 (1972) で定める最小必要剛比
 δ : 補剛材と板の面積比
 $L\phi(\bar{y})$: 式 (5) で定義される多項式ベクトル
 $\epsilon_{cr}, \epsilon_Y$: 座屈時の x 軸方向作用軸ひずみ, 降伏ひずみ
 θ_i, θ_j : i, j 節線での板のたわみ角
 λ : 式 (8) で定義される無次元化した板の幅厚比
 ξ : 帯板要素の幅と板の全幅との比
 $\sigma, \sigma_{cr}, \sigma_Y$: 板の x 軸方向に作用する応力, 座屈時の平均圧縮応力, 降伏応力
 $\sigma_{rc}, \sigma_{rcs}$: 板, 補剛材の最大圧縮残留応力 (Fig. 3)
 τ, τ_0 : 式 (19) で定義される量, $k = k_0$ のときの τ

参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
- 2) DIN 4114, Blatt 2 : Stahlbau, Stabilitätsfälle (Knickung, Kippung, Beulung), Berechnungsgrundlagen, Richtlinien, Feb. 1953.
- 3) 土木学会 : 鋼鉄道橋設計標準解説, 1970.11.
- 4) 日本道路協会 : 道路橋示方書・同解説, 1973.2.
- 5) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971.
- 6) 楠田忠雄 : 圧縮力を受ける補強板の塑性座屈について (第一報), 造船協会論文集, 第105号, 1959.
- 7) 吉田宏一郎 : 帯板要素による平板構造の座屈解析, 造船協会論文集, 第130号, 1972.
- 8) Bleich, F. : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, New York, 1952.
- 9) Merrison Committee : Criteria for the Assessment of Steel Box Girder Bridges with Particular Reference to the Bridges at Milford Haven and Avonmouth, Sept. 1971.
- 10) Maquoi, R. and Massonnet, C. : Non-Linear Theory of Post-Buckling Resistance of Large Stiffened Box Girders (in French), IABSE Publications, Zürich, Vol. 31-II, 1971.
- 11) Massonnet, C. and Maquoi, R. : New Theory and Tests on the Ultimate Strength of Stiffened Box Girders, International Conference on Steel Box Girder Bridges, ICE, London, 1973.
- 12) 岡村宏一・吉田公憲 : リブ付鋼板の弾塑性曲げ座屈, 土木学会第28回年次講演会概要集, 1973.
- 13) 奥村敏恵・長谷川彰夫・長浜正孝 : 差分法によるリブ付板の弾塑性座屈解析, 第27回年次講演会概要集, 1972.
- 14) 長谷川彰夫・太田孝二・奥村敏恵 : 帯板法によるリブ付板の弾塑性解析, 第28回年次講演会概要集, 1973.
- 15) Bijlaard, P.P. : Theory of the Plastic Stability of Thin Plates, IABSE Publications, Zürich, Vol. 6, 1940.
- 16) Nishino, F. and Tall, L. : Residual Stress and Local Buckling of Steel Columns, Proc. JSCE, No. 172, Dec. 1969.
- 17) 奥村敏恵・西野文雄・長谷川彰夫 : 箱形断面柱の局部座屈強度, 土木学会論文報告集, 第205号, Sept. 1972.
- 18) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon-Press, 1968.
- 19) 小松定夫ら : 補剛材を有する板要素の溶接残留応力に関する研究, 第27回年次講演会概要集, 1972.
- 20) 伊藤文人・田島二郎 : 補剛材をもった高張力鋼板による溶接角形短柱の圧縮試験, 鉄道技術研究報告, No. 313, 1962.
- 21) Dorman, A.P. and Dwight, J.B. : Tests on Stiffened Compression Plates and Plate Panels, International Conference on Steel Box Girder Bridges, ICE, London, Feb. 1973.
- 22) 小松定夫・吉田 紀・牛尾正之 : 80 キロ鋼の補剛板の極限強度に関する実験, 土木学会論文報告集, 第218号, 1973.10.
- 23) Nishino, F. et. al. : Residual Stress and Torsional Buckling Strength of H and Cruciform Columns, Trans. of JSCE, Vol. 160, Dec. 1968.

(1973.12.22・受付)