

## 荷重履歴による強度劣化を伴う構造物の信頼性理論

### RELIABILITY THEORY OF STRUCTURES WITH RESISTANCE DETERIORATION IN LOAD HISTORY

小池 武\*・亀田 弘行\*\*

By Takeshi Koike and Hiroyuki Kameda

#### 1. 緒 論

構造物を合理的に設計するためには、外部荷重と構造部材の抵抗強度を適切に評価する方法を確立することが本質的に重要である。そして、それらを結びつけて、力学的にも、経済的にも、よくバランスのとれた構造物の実現を目指さねばならない。

この問題に内在する困難の一つは、規準となる外荷重が、多くの場合ランダムな性質を有すること、さらに、構造部材の強度も、同様にランダムな性質を有していることである。構造物の信頼性理論は、上述の不確実性を統一的に取り扱うことによって、実際設計における構造物の安全性の適切な解析方法を与えるために発展させられたものである。

本論文の解析は、強い外部荷重を繰返し受ける構造物の信頼性理論の一つの新しい分野を形成するためになされたものである。

信頼性理論は、1947年、A.M. Freudenthal<sup>6)</sup>によってその基礎が与えられ、その後、多くの研究者によって発展させられてきた<sup>1), 4), 10), 13)</sup>。特に、A.M. Freudenthal, J.M. Garrelts, M. Shinozuka<sup>7)</sup>は、1966年、この分野の総括を行い、古典信頼性理論を確立した。一方、A.H.-S. Ang と M. Amin<sup>2), 3)</sup>は、取扱わねばならない確率分布の予測の際に含まれる主観的不確実性を考慮することによって、拡張された信頼性理論を提示した。今日では信頼性理論を実際設計における評価規準に適用するために数多くの研究がなされている<sup>3), 5), 7), 10)</sup>。

上述の著しい成果にもかかわらず、繰返し荷重に対する構造物の信頼性に関して、ある本質的な問題が未解決

のままに残されている。

構造物は、たとえば強震地震動のような強い荷重に耐えるように設計されねばならないのは当然であるが、たとえ構造物がそれらの荷重の下で生き残ったとしても、内部に損傷を受けているかもしれない。その結果、その抵抗強度は、ある程度の強度劣化を生じる可能性がある。大荷重下での構造物のこのような挙動に対する信頼性理論を確立する際には、二つの異なる効果を評価することが必要である。すなわち、一つの効果は、大荷重を受けて構造物が生き残ったということは、その抵抗強度が作用荷重よりも大きかったことを保証するものであり、その結果、載荷前に与えられていた抵抗強度の確率分布は、構造物が生き残ることができたという条件にしたがって修正されねばならない。このことは、その信頼性を向上させることになる。もう一つの効果は、構造物が強い荷重を受けて強度劣化を生じたということである。このことは、将来の荷重に対する信頼性を低下させる。本論文では、これらの二つの効果を、それぞれ非破壊効果、および強度劣化効果とよぶ。

次章で述べるように、繰返し荷重に対する従来の信頼性理論は、これらの効果を適切に評価することを行っていない。本研究は、非破壊効果と、荷重の大きさに依存する強度劣化効果を考慮して、繰返し荷重に対する信頼性理論を展開しようとするものである。本論文での理論解析結果、および数値計算結果より、従来の方法に較べて、繰返し大荷重が作用する場合の構造物の挙動をより合理的に説明しうることがわかった。

本研究の理論は、構造物が耐用期間中のすべての大荷重に対して安全であるための安全率の決定や、過去に既知の大荷重を受けた構造物の将来の信頼性の予測など、構造設計法の基礎として、有力な役割を演ずることができるものと考えられる。

\* 学生会員 工修 京都大学大学院博士課程 交通土木工学専攻

\*\* 正会員 工博 京都大学助教授 工学部 交通土木工学教室

### 2. 従来の信頼性理論

#### (1) 信頼性理論の基礎概念<sup>7)</sup>

一回の荷重を受ける構造物の信頼性を議論するとき、構造物の安全性の確率、すなわち信頼性関数  $L$  は、次式で表わされる。

$$L = \int_0^\infty F_S(y) f_R(y) dy \dots\dots\dots(1)$$

ただし  $F_S(y)$  は荷重の大きさの確率分布であり、 $f_R(y)$  は構造物抵抗強度の確率密度である。

一連の荷重を受ける構造物の信頼性を議論する場合には、構造物の寿命を、荷重の作用回数  $N$  を使って表現できるから、その信頼性関数は次式で定義される。

$$L_N(n) = P(N > n) \dots\dots\dots(2)$$

そして、区間  $[1, n]$  における破壊確率は、次式で与えられる。

$$F_N(n) = 1 - L_N(n) = P(N \leq n) \dots\dots\dots(3)$$

構造物が、ちょうど第  $n$  回目の荷重で破壊する確率  $f_N(n)$  は、死亡率ともいわれ、次式で与えられる。

$$f_N(n) = P(N=n) = F_N(n) - F_N(n-1) \dots\dots\dots(4)$$

構造物が、 $n-1$  回の荷重下で生き残ったとして、第  $n$  回目の荷重によって破壊する条件付確率は、危険率ともいわれ、次式で与えられる。

$$h_N(n) = P(N=n | N > n-1) = f_N(n) / L_N(n-1) \dots\dots\dots(5)$$

#### (2) 繰返し荷重に対する古典信頼性理論

##### a) 強度劣化を伴わない構造物の場合

まず、荷重の確率分布  $F_S(y)$  と構造物の抵抗強度の確率分布  $F_R(y)$  が、ともに時間的に不変であり、構造物および構造物材は、強度劣化を生じない場合を考察する。

$n$  個の互いに独立な作用荷重の中の最大荷重  $S^*(n)$  の確率分布は、次式で表わされる。

$$F_{S^*}(x) = \{F_S(x)\}^n \dots\dots\dots(6)$$

構造物が強度劣化を生じない場合には、式(1)が適用され<sup>7)</sup>、したがって、式(6)を式(1)に代入して、 $n$  回の荷重を受ける構造物の信頼性関数  $L_N(n)$  が、次式で与えられている。

$$L_N(n) = \int_0^\infty F_{S^*}(y) f_R(y) dy = \int_0^\infty \{F_S(y)\}^n f_R(y) dy \dots\dots\dots(7)$$

ところで、式(7)は、構造物の抵抗強度が、起こりうる荷重の大きさに比べて非常に高く、強度劣化が生じない

時にのみ正しい評価を与えるが、作用荷重が強度劣化を起こすほどに大きい場合には、構造物の信頼性を過大評価することになる。

b) 荷重回数に依存して強度が劣化する構造物の場合  
強度劣化が、荷重回数だけに依存するとき、第  $k$  回目の荷重を受けた構造物の抵抗強度  $R(k)$  は、文献 7) において次式のように取扱われている。

$$R(k) = R(0) \psi(k) \dots\dots\dots(8)$$

ただし、 $\psi(k)$  は  $k$  の単調非増加正值関数である。

この条件下で、信頼性関数は式(7)と同様にして、次式で与えられている。

$$L_N(n) = \int_0^\infty \left[ \prod_{k=1}^n F_{S(k)} \{y(0) \psi(k)\} \right] \cdot f_{R(0)} \{y(0)\} dy(0) \dots\dots\dots(9)$$

ただし、 $F_{S(k)}(x)$  は、第  $k$  番目の荷重の確率分布を表わしている。

式(8)によって特徴づけられる強度劣化タイプは、荷重列が一定の大きさをもつ場合か、または狭帯域に分布している場合には妥当と考えられるが、荷重のばらつきが大きい場合には荷重の大きさに依存して強度劣化が生じるので、この仮定は適用できない。この場合、式(9)の結果は、比較的大きな荷重に対して強度劣化の効果を過小評価することになり、逆に、比較的小きな荷重に対してそれを過大評価することになる。

### 3. 荷重の大きさに依存して強度劣化を生じる場合の信頼性理論

#### (1) 強度劣化に関する仮定

材料の破壊過程が、本質的に確率統計的であることは材料強度学により早くから指摘されているが、ここでは荷重  $S$  を受けた構造物材の抵抗強度は、 $S$  に依存するある確定関数  $\varphi(S)$  に比例して劣化してゆくものとする。

構造物材料の初期強度を  $R_0$  で表わし、 $N$  個の荷重列  $S_1, S_2, \dots, S_N$  に生き残った後での残存強度を  $R_N(S_1, S_2, \dots, S_N)$ 、または簡単に  $R_N$  と表わす。

本研究中の強度劣化モードは、次の仮定の下で取扱うものとする。

仮定：荷重  $S$  による強度劣化の割合は、強度劣化係数  $\varphi(S)$  によって与えられる。この係数は、荷重の大きさのみに依存し、次のような値をとる。

$$0 < \varphi(S) \leq 1$$

上の仮定を使うと、次の関係が得られる。

$$R_N = \varphi(S_N) R_{N-1} \dots\dots\dots(10 a)$$

あるいは、

$$R_N(S_1, S_2, \dots, S_N) = R_0 \prod_{j=1}^N \varphi(S_j) \dots\dots\dots(10b)$$

ただし、 $R_N$  は  $N$  個の荷重を受けて生き残った後の残存強度、 $S_N$  は第  $N$  番目の荷重の大きさを示す。

強度劣化係数の形としては、次のような2種の典型的な場合を考える。

[A] 指数関数タイプの劣化モード

クラックの発生過程が、ポアソンパターンであると仮定すると、材料の内部破壊（損傷）とクラックの発生数との関係から、強度劣化係数が導ける。文献 9) に示す解析結果より、期待される残存強度の比  $r_1/r_0$  として、次式が与えられる。

$$e^{-\lambda V} \leq r_1/r_0 \leq 1 \dots\dots\dots(11)$$

ただし、 $r_0$  は初期強度、 $r_1$  は期待残存強度、そして  $\lambda$ 、 $V$  は定数である。

[B] 実験結果に基づく劣化モード

丹羽・小柳・中川<sup>11)</sup>は、コンクリート供試体の一軸破壊過程の実験を行い Fig. 1 のような結果を得た。同図において  $\sigma_0$  は荷重履歴を持たない供試体の平均一軸圧縮強度を表わす。また  $\sigma_1$  なる先行応力で載荷し、いったん除荷したのち再び載荷した場合の圧縮強度が  $\sigma_f$  である。したがって、同図の  $\sigma_f/\sigma_0$  は荷重履歴  $\sigma_1/\sigma_0$  に対する供試体の強度劣化の程度を表わしている。Fig. 1 を参考にして強度劣化係数を定める。

以上の議論より、強度劣化係数  $\varphi(x)$  の二つの典型的なタイプを想定することができる。具体的には、次の二つの式を提示する。

[A]  $\varphi_A(x) = \exp(-c_A x/r_{m0}) \dots\dots\dots(12)$

$c_A$ : 無次元パラメータ

[B]  $\varphi_B(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x/r_{m0} - \xi}{\sqrt{2} c_B} \right) \right\} \dots\dots\dots(13)$

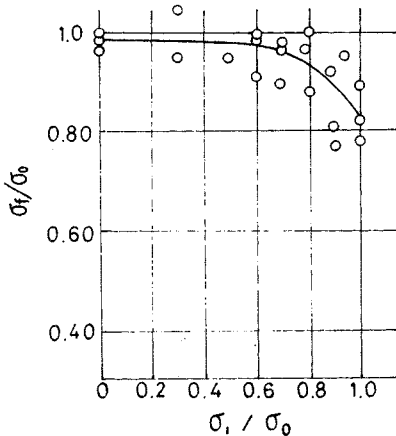


Fig. 1 Experimental result on the residual resistance<sup>11)</sup>.  
(after Y. Niwa, et al., 1971)

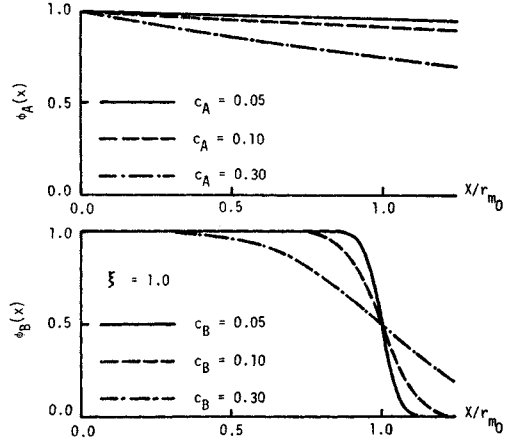


Fig. 2 Resistance deterioration factor.

$r_{m0}$ : 初期抵抗強度の平均値

$c_B, \xi$ : 無次元パラメータ

Fig. 2 は、強度劣化係数  $\varphi_A(x)$  と  $\varphi_B(x)$  を図示したものである。同図より、タイプAは荷重の全域にわたって強度劣化を生じるものであり、タイプBは、 $\xi r_{m0}$  近傍の荷重領域で急激な強度劣化を示すものである。強度劣化係数については、以上2種以外にも種々の形が考えられるが、この点を詳細に論ずるに十分な実験資料は著者らの知る範囲では得られていないのが現状であり、将来の研究の進展により、より一層実際に即した強度劣化モデルが提示されるべきであろう。また現実には、強度劣化をこうむる程度の荷重を受けた構造物は、それ以後に損傷箇所を修復補強されるであろうから、その効果をも考慮しなければならない。式 (10) で示す強度劣化係数は、この補強効果も含めた形で与えられるとすればより一層現実的となるであろう。

(2) 残存強度の確率分布

繰返し荷重を受けた構造物の安全性の目安としては、3.(3) で論ずる信頼性関数とともに、荷重を受けて生き残った後の構造物の残存強度の確率分布が有用である。

いま、構造物がある荷重列  $s_1, s_2, \dots, s_n$  を受けて生き残った場合を考えよう。このときの残存強度の確率分布は Fig. 3 に模式的に示された手順で求められる。構造物が最初の荷重  $s_1$  を受けて生き残ったということは、真の初期強度  $R_0$  が  $s_1$  よりも大きかったことを示している。したがって、この場合の  $R_0$  の条件付確率密度は、Fig. 3 (b) のように、 $f_{R_0}(x)$  の左端尾部を切断した形で与えられる。これが非破壊効果である。この結果に加えて、式 (10 a), 式 (10 b) に従う強度劣化効果を考慮すると、残存強度  $R_1$  の確率密度  $f_{R_1}(x; s_1)$  が、Fig. 3 (c) のように与えられる。荷重が複数個作用す

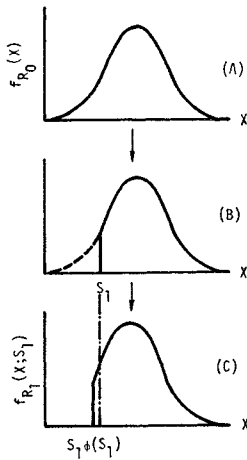


Fig. 3 Illustration of the probability distribution of the residual resistance (1st load).

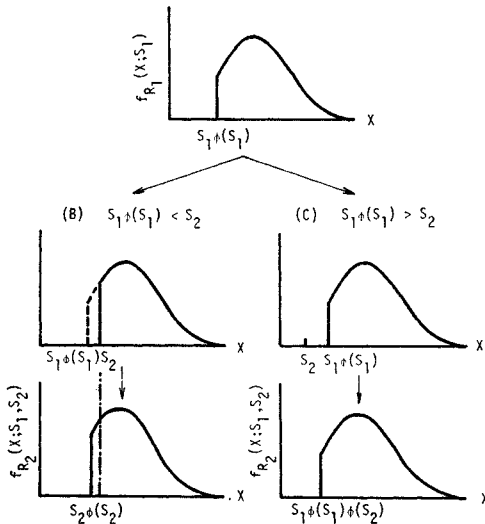


Fig. 4 Illustration of the probability distribution of the residual resistance (2nd load).

る場合にも、同様の手続きを繰返せばよい。たとえば、荷重  $s_1, s_2$  が作用した場合の残存強度の確率密度  $f_{R_2}(x; s_1, s_2)$  は、Fig. 4 に示されるように、おのおのの荷重の相対的な大小関係および載荷順序によって (B) または (C) のどちらかの場合が存在することになる。一般に、 $n$  個の荷重が作用する場合には、残存強度の確率密度  $f_{R_n}(x; s_1, s_2, \dots, s_n)$  は荷重の相対的な大小関係および載荷順序により、 $2^{n-1}$  個の場合がありうることになる。

a) 既知の荷重列載荷後の残存強度

構造物が  $l$  個の既知の荷重  $s_1, s_2, \dots, s_l$  を受けて生き残っている場合のその残存強度  $R_0^{(l)}$  の条件付確率分布  $F_{R_0^{(l)}}(x; s_1, s_2, \dots, s_l)$  を求めよう。式 (10 b) より、

$$R_0^{(i)} = \prod_{j=1}^i \varphi(s_j) R_0 = \alpha_{i1}(s) R_0; \quad i=1, 2, \dots, l \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここで、

$$\alpha_{ik} = \prod_{j=k}^i \varphi(s_j)$$

Fig. 3, 4 に示したように抵抗強度の確率密度の左端尾部が、非破壊効果のために切断される結果、載荷のたびに残存強度の下限値が変更される。たとえば、Fig. 4 のように 2 回荷重を受けた場合には、この下限値は、 $\max(s_2\varphi(s_2), s_1\varphi(s_1)\varphi(s_2))$  となる。したがって、 $R_0^{(l)}$  の下限値  $\sigma_{\max}^{(l)}$  は次式で与えられる。

$$\sigma_{\max}^{(l)} = \max(\alpha_{l1}(s)s_1, \alpha_{l2}(s)s_2, \dots, \alpha_{ll}(s)s_l) \quad \dots\dots\dots(15)$$

さて、 $R_0^{(l)}$  の条件付確率分布は、次のように求められる。

$$\begin{aligned} F_{R_0^{(l)}}(x; s_1, s_2, \dots, s_l) &= P[R_0^{(l)} \leq x | (R_0 > s_1) \cap (R_0^{(1)} > s_2) \cap \dots \\ &\quad \cap (R_0^{(l-1)} > s_l)] \\ &= P[\alpha_{l1}(s)R_0 \leq x | (R_0 > s_1) \cap (\alpha_{l1}(s)R_0 > s_2) \cap \dots \\ &\quad \cap (\alpha_{l-1,1}(s)R_0 > s_l)] \\ &= P\left[R_0 \leq \frac{x}{\alpha_{l1}(s)} \mid \left(R_0 > \frac{\alpha_{l1}(s)s_1}{\alpha_{l1}(s)}\right) \cap \left(R_0 > \frac{\alpha_{l2}(s)s_2}{\alpha_{l1}(s)}\right) \cap \dots \cap \left(R_0 > \frac{\alpha_{ll}(s)s_l}{\alpha_{l1}(s)}\right)\right] \\ &= P\left[R_0 \leq \frac{x}{\alpha_{l1}(s)} \mid R_0 > \frac{\sigma_{\max}^{(l)}}{\alpha_{l1}(s)}\right] \\ &= \frac{P\left[\left(R_0 \leq \frac{x}{\alpha_{l1}(s)}\right) \cap \left(R_0 > \frac{\sigma_{\max}^{(l)}}{\alpha_{l1}(s)}\right)\right]}{P\left[R_0 > \frac{\sigma_{\max}^{(l)}}{\alpha_{l1}(s)}\right]} \\ &= \frac{F_{R_0}\left(\frac{x}{\alpha_{l1}(s)}\right) - F_{R_0}\left(\frac{\sigma_{\max}^{(l)}}{\alpha_{l1}(s)}\right)}{1 - F_{R_0}\left(\frac{\sigma_{\max}^{(l)}}{\alpha_{l1}(s)}\right)} H(x - \sigma_{\max}^{(l)}) \quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

ただし、 $F_{R_0}(x)$  は初期抵抗強度の確率分布、 $H(x)$  は Heaviside step function である。

式 (16) から、 $R_0^{(l)}$  の確率密度は次式で与えられる。

$$f_{R_0^{(l)}}(x; s_1, s_2, \dots, s_l) = \frac{f_{R_0}\left(\frac{x}{\alpha_{l1}(s)}\right) H(x - \sigma_{\max}^{(l)})}{\alpha_{l1}(s) \left\{1 - F_{R_0}\left(\frac{\sigma_{\max}^{(l)}}{\alpha_{l1}(s)}\right)\right\}} \quad \dots\dots\dots(17)$$

ただし、 $f_{R_0}(x)$  は初期抵抗強度の確率密度である。

b) 将来の荷重列に対する残存強度

将来の  $n$  個の荷重  $S_1, S_2, \dots, S_n$  を受けて生き残る構造物の残存強度  $R_n$  の確率分布を求める。この場合、 $S_1, S_2, \dots, S_n$  は確率変数であるから、Fig. 3, 4 に関して前述した  $2^{n-1}$  通りの荷重状態のすべての発生確率を考慮することが必要となる。式 (16) を参考にすれば、

$$\begin{aligned}
 B_n(x) &= P[(R_n \leq x) \cap (\text{survival in } S_1, S_2, \dots, S_n)] \\
 &= P\left[\left(R_0 \leq \frac{x}{\alpha_{n1}(S)}\right) \cap \left\{\left(R_0 > \frac{\alpha_{n1}(S)S_1}{\alpha_{n1}(S)}\right) \cap \left(R_0 > \frac{\alpha_{n2}(S)S_2}{\alpha_{n1}(S)}\right) \cap \dots \cap \left(R_0 > \frac{\alpha_{nn}(S)S_n}{\alpha_{n1}(S)}\right)\right\}\right] \\
 &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_{D_{1k}} dy_1 \int_{D_{2k}} dy_2 \dots \int_{D_{nk}} \left\{F_{R_0}\left(\frac{x}{\alpha_{n1}(y)}\right) - F_{R_0}\left(\frac{\sigma_{nk}}{\alpha_{n1}(y)}\right)\right\} H(x - \sigma_{nk}) f_{S_1, S_2, \dots, S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_n \dots \dots \dots (18)
 \end{aligned}$$

したがって、

$$B_n(\infty) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_{D_{1k}} dy_1 \int_{D_{2k}} dy_2 \dots \int_{D_{nk}} \left\{1 - F_{R_0}\left(\frac{\sigma_{nk}}{\alpha_{n1}(y)}\right)\right\} f_{S_1, S_2, \dots, S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_n \dots \dots \dots (19)$$

ただし、 $f_{S_1, S_2, \dots, S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n)$  は、 $S_1, S_2, \dots, S_n$  の同時確率密度である。パラメータ  $\sigma_{nk}$  と積分区間  $D_{mk}$  ;  $m=1, 2, \dots, n$  は、Table 1, 2 に与えられている。

以上より、 $R_n$  の条件付確率分布  $F_{R_n}(x)$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 F_{R_n}(x) &= P(R_n \leq x | \text{survival in } S_1, S_2, \dots, S_n) \\
 &= \frac{B_n(x)}{B_n(\infty)} \dots \dots \dots (20)
 \end{aligned}$$

また、 $R_n$  の条件付確率密度  $f_{R_n}(x)$  は次式で与えられる。

$$f_{R_n}(x) = \frac{dB_n(x)}{B_n(\infty)} \dots \dots \dots (21)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 b_n(x) &= \frac{dB_n(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_{D_{1k}} dy_1 \int_{D_{2k}} dy_2 \dots \\
 &\int_{D_{nk}} \frac{1}{\alpha_{n1}(y)} f_{R_0}\left(\frac{x}{\alpha_{n1}(y)}\right) H(x - \sigma_{nk}) \\
 &\cdot f_{S_1, S_2, \dots, S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_n \dots \dots \dots (22)
 \end{aligned}$$

c) 過去から将来にわたる荷重列に対する残存強度

前述の結果 a), b) を参考にすれば、 $l$  個の既知の荷重  $s_1, s_2, \dots, s_l$  を受け、さらに、 $n$  個の将来の荷重列を受けるという条件下での残存強度  $R_n^{(l)}$  の確率分布  $F_{R_n^{(l)}}(x; s_1, s_2, \dots, s_l)$  および確率密度  $f_{R_n^{(l)}}(x; s_1, s_2, \dots, s_l)$  は、式 (18), (19) の  $F_{R_0}(x)$  の代りに、式 (16) の  $F_{R_0}^{(l)}(x; s_1, s_2, \dots, s_l)$  を代入することによって次式のように得られる。

$$F_{R_n^{(l)}}(x; s_1, s_2, \dots, s_l) = \frac{B_n^{(l)}(x; s_1, s_2, \dots, s_l)}{B_n^{(l)}(\infty; s_1, s_2, \dots, s_l)} \dots \dots \dots (23)$$

$$f_{R_n^{(l)}}(x; s_1, s_2, \dots, s_l) = \frac{b_n^{(l)}(x; s_1, s_2, \dots, s_l)}{B_n^{(l)}(\infty; s_1, s_2, \dots, s_l)} \dots \dots \dots (24)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 B_n^{(l)}(x; s_1, s_2, \dots, s_l) &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_{D_{1k}} dy_1 \int_{D_{2k}} dy_2 \dots \\
 &\int_{D_{nk}} \left\{F_{R_0}^{(l)}\left(\frac{x}{\alpha_{n1}(y)}; s_1, s_2, \dots, s_l\right) - F_{R_0}^{(l)}\left(\frac{\sigma_{nk}}{\alpha_{n1}(y)}; s_1, s_2, \dots, s_l\right)\right\} H(x - \sigma_{nk}) \\
 &\cdot f_{S_1, S_2, \dots, S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | s_1, s_2, \dots, s_l) dy_n \dots \dots \dots (25)
 \end{aligned}$$

Table 1 Resistance parameters  $\sigma_{nk}$

$n=1$	$s_1\phi(s_1)$	$\sigma_{11}$
$n=2$	$s_1\phi(s_1)\phi(s_2)$ $s_2\phi(s_2)$	$\sigma_{21}$ $\sigma_{22}$
$n=3$	$s_1 \prod_{j=1}^3 \phi(s_j)$ $s_2\phi(s_2)$ $s_3\phi(s_3)$	$\sigma_{31}$ $\sigma_{32}, \sigma_{34}$ $\sigma_{33}$

Table 2 Intervals of integration  $D_{mk}$

	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$0 \sim \infty$	$D_{11}$	$D_{11}, D_{12}$	$D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}$
$0 \sim s_1\phi(s_1)$ $s_1\phi(s_1) \sim \infty$	—	$D_{21}$ $D_{22}$	$D_{21}, D_{22}$ $D_{23}, D_{24}$
$0 \sim s_1\phi(s_1)\phi(s_2)$ $s_1\phi(s_1)\phi(s_2) \sim \infty$	—	—	$D_{31}$ $D_{32}$
$0 \sim s_2\phi(s_2)$ $s_2\phi(s_2) \sim \infty$	—	—	$D_{33}$ $D_{34}$

$$\begin{aligned}
 b_n^{(l)}(x; s_1, s_2, \dots, s_l) &= \frac{d}{dx} B_n^{(l)}(x; s_1, s_2, \dots, s_l) \\
 &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_{D_{1k}} dy_1 \int_{D_{2k}} dy_2 \dots \int_{D_{nk}} \frac{1}{\alpha_{n1}(y)} f_{R_0}^{(l)}\left(\frac{x}{\alpha_{n1}(y)}; s_1, s_2, \dots, s_l\right) H(x - \sigma_{nk}) \\
 &\cdot f_{S_1, S_2, \dots, S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | s_1, s_2, \dots, s_l) dy_n \dots \dots \dots (26)
 \end{aligned}$$

ここに、 $f_{S_1, S_2, \dots, S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | s_1, s_2, \dots, s_l)$  は、既知の荷重列  $s_1, s_2, \dots, s_l$  が発生した後の  $S_1, S_2, \dots, S_n$  の条件付同時確率密度である。

(3) 強度劣化効果と非破壊効果を考慮した信頼性理論

a) 将来の荷重列に対する信頼性

式 (19) の  $B_n(\infty)$  は、構造物が将来  $S_1, S_2, \dots, S_n$  という荷重列を受けて生き残れる確率を表わしているから、それは信頼性関数  $L_N(n)$  と一致する。すなわち、

$$\begin{aligned}
 L_N(n) &= B_n(\infty) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_{D_{1k}} dy_1 \int_{D_{2k}} dy_2 \dots \\
 &\int_{D_{nk}} \left\{1 - F_{R_0}\left(\frac{\sigma_{nk}}{\alpha_{n1}(y)}\right)\right\} \\
 &\cdot f_{S_1, S_2, \dots, S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_n \dots \dots \dots (27)
 \end{aligned}$$

危険率  $h_N(n)$  は、次式で与えられる。

$$h_N(n) = 1 - \frac{L_N(n)}{L_N(n-1)} = 1 - \frac{B_n(\infty)}{B_{n-1}(\infty)} \dots\dots\dots(28)$$

もし、 $S_1, S_2, \dots, S_n$  が互いに独立な確率変数であれば、式(5)の定義より、 $h_N(n)$  は次式で与えられる。

$$h_N(n) = \int_0^\infty F_{R_{n-1}}(x) f_{S_n}(x) dx \dots\dots\dots(29)$$

ただし、 $f_{S_n}(x)$  は第  $n$  番目の荷重の大きさ  $S_n$  の確率密度である。

このとき、信頼性関数は次式より計算できる。

$$L_N(n) = \prod_{k=1}^n \{1 - h_N(k)\} \dots\dots\dots(30)$$

独立な荷重列に対しては、危険率および信頼性関数は式(29)、(30)より逐次求めることができる。

この節の諸結果は、以下に述べることにより、古典信頼性理論の一般化と考えられる。すなわち、強度劣化効果が無視できる場合、言いかえれば  $\alpha_{ik}(y) \equiv 1$  の場合には、式(27)は式(7)と一致する。このことは、式(7)と式(18)の右辺を比較すれば明らかである。同様に、もし、強度劣化効果が式(8)で取扱ったように荷重の載荷回数だけに依存する場合は、式(27)は式(9)と一致する。

**b)** 過去から将来にわたる荷重列に対する信頼性

過去の  $l$  個の荷重  $s_1, s_2, \dots, s_l$  を受け、さらに、将来の荷重列に対する構造物の信頼性関数  $L_N^{(l)}(n; s_1, s_2, \dots, s_l)$  および危険率  $h_N^{(l)}(n; s_1, s_2, \dots, s_l)$  は、式(27)、(28)の誘導と同様にして得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} L_N^{(l)}(n; s_1, s_2, \dots, s_l) &= B_n^{(l)}(\infty; s_1, s_2, \dots, s_l) = \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{D_{1k}} dy_1 \int_{D_{2k}} dy_2 \dots \\ &\int_{D_{nk}} \left\{ 1 - F_{R_n}^{(l)} \left( \frac{\sigma_{nk}}{\alpha_{nk}(y)}; s_1, s_2, \dots, s_l \right) \right\} \\ &\cdot H(x - \sigma_{nk}) f_{S_1, S_2, \dots, S_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | s_1, s_2, \dots, s_l) \\ &\cdot dy_n \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

$$h_N^{(l)}(n; s_1, s_2, \dots, s_l) = 1 - \frac{B_n^{(l)}(\infty; s_1, s_2, \dots, s_l)}{B_{n-1}^{(l)}(\infty; s_1, s_2, \dots, s_l)} \dots\dots\dots(32)$$

独立な荷重列に対しては、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} h_N^{(l)}(n; s_1, s_2, \dots, s_l) &= \int_0^\infty F_{R_{n-1}^{(l)}}(x; s_1, s_2, \dots, s_l) f_{S_n}(x) dx \\ &\dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_N^{(l)}(n; s_1, s_2, \dots, s_l) &= \prod_{k=1}^n \{1 - h_N^{(l)}(k; s_1, s_2, \dots, s_l)\} \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

**4. 数値計算結果と考察**

**(1) 概 説**

前章までに得られた解析結果に基づいて数値計算を

行った。初期抵抗強度  $R_0$  の確率分布は正規分布を採用した。一方、ランダム荷重列は同一の確率分布に従う独立な確率変数とし、その分布形は極値的な大きさを取扱うために、対数正規分布、最大値に関する第1種極値分布<sup>(4)</sup> (以下、簡単のために極値分布とよぶ)、正規分布を用いた。

これらの確率分布を決定するパラメータには、次の値を与えた。

中央安全率 = (平均初期抵抗強度) / (平均荷重)

$$\nu = r_{m0} / s_m = 1.2 \sim 4.0$$

荷重の変動係数<sup>(5)</sup>

$$c_S = 0.2 \sim 0.6$$

初期抵抗強度の変動係数<sup>(2)</sup>

$$c_R = 0.05 \sim 0.20$$

式(10)の劣化係数を決定するパラメータには次の数値を用いた。

Type [A], 式(12)  $c_A = 0.1$

Type [B], 式(13)  $c_B = 0.1$

$$\xi = 1.0$$

上に示したパラメータ値に対して得られた数値結果については、次節以降で議論を行うが、本研究の方法と古典理論を比較検討するために、2.(2)の結果についての数値計算を行った。その際に、式(8)の劣化係数  $\psi(k)$  には次の形を仮定した。

$$\psi_A(k) = \{\exp(-c_A \cdot s_m / r_{m0})\}^k = \exp(-c_A k / \nu) \dots\dots\dots(35)$$

$$\psi_B(k) = \left[ \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{s_m / r_{m0} - \xi}{\sqrt{2} c_B} \right) \right\} \right]^k \dots\dots\dots(36)$$

上式において、 $\psi_A(k), \psi_B(k)$  は、それぞれタイプA、タイプBの強度劣化係数  $\varphi_A(s), \varphi_B(s)$  において荷重  $s$  をその平均値  $s_m$  に固定したときの値に等しい。

**(2) 残存強度の確率分布**

初期強度  $R_0$  と残存強度  $R_1, R_2$  の確率分布を、タイプAとBについてそれぞれ **Fig. 5** と **Fig. 6** に示した。これらの図は、正規確率紙上に示されているから、 $F_{R_0}$  は直線となる。**Fig. 5** のタイプAでは、 $F_{R_1}, F_{R_2}$  とともにほぼ直線で、正規分布の特徴を保持しているのに対し、**Fig. 6** のタイプBでは、 $x/r_{m0} < 0.8$  で  $F_{R_1}$  と  $F_{R_2}$  は特異な曲線となっている。 $F_{R_1}, F_{R_2}$  はいずれの場合にも  $F_{R_0}$  より大きな値を示しているから、 $F_{R_1}, F_{R_2}$  と  $F_{R_0}$  の相違は強度劣化効果によるものと考えられるが、この結果は荷重の広い範囲で強度劣化を生じるタイプAと、平均初期抵抗強度に近い荷重で急激に劣化するタイプBの特徴を反映しているものと考えられる。**Fig. 5, 6** は荷重が対数正規分布に従う場合であるが、他の場合についてもまったく同様の結果が得られた。

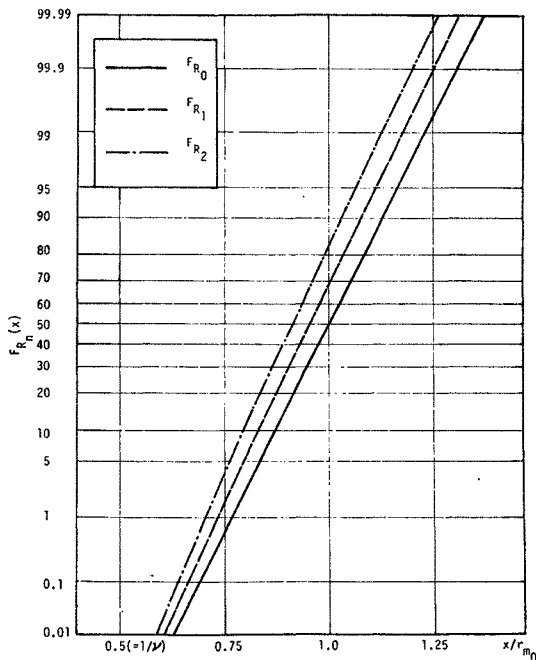


Fig. 5 Probability distribution of the residual resistance with type A deterioration (log-normal load distribution;  $\nu=2.0$ ,  $c_R=0.10$ ,  $c_S=0.40$ ,  $c_A=0.10$ ).

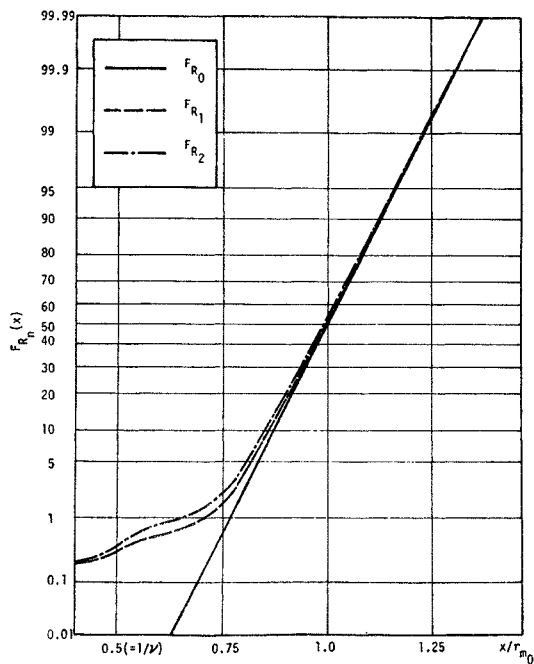


Fig. 6 Probability distribution of the residual resistance with type B deterioration (log-normal load distribution;  $\nu=2.0$ ,  $c_R=0.10$ ,  $c_S=0.40$ ,  $c_B=0.10$ ,  $\xi=1.0$ ).

(3) 残存強度の平均値と変動係数

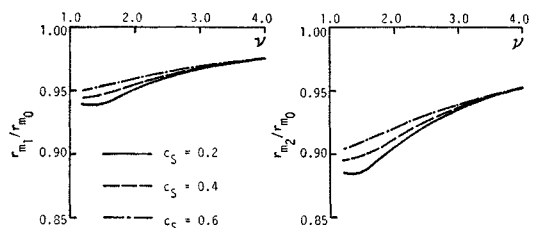
a) 平均値

Fig. 7 は、荷重が対数正規分布に従う場合について、構造物が第1番目さらに第2番目の荷重に生き残った後の残存強度の平均値  $r_{m1}$  および  $r_{m2}$  と平均初期抵抗強度  $r_{m0}$  との比をそれぞれ示したものである。Fig. 7 (a) は、タイプAの劣化モードに対して、(b) はタイプBの劣化モードに対して示されている。

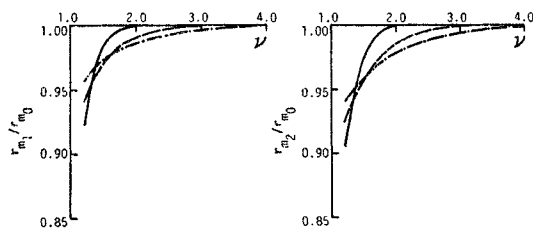
この図の曲線の縦軸が全般的に1より小さい値を示していることがまず注目される。これは強度劣化効果による結果であるが、中央安全率  $\nu$  が小さいほど  $r_{m1}/r_{m0}$ ,  $r_{m2}/r_{m0}$  の値が小さくなり、より顕著な強度劣化効果を示しているのは当然である。 $r_{m2}/r_{m0}$  が  $r_{m1}/r_{m0}$  よりも小さい値をとるのは、繰返し荷重の下で強度劣化効果が累積してゆくことを示している。

荷重の変動係数  $c_S$  の大きい値は、荷重条件が厳しいことを意味するから、小さな  $c_S$  の場合よりも大きな強度劣化効果を示すことになる。そして、Fig. 7 の大半の結果がこの議論と一致している。しかし、Fig. 7 (b) において  $\nu$  の小さな範囲では、逆に  $c_S$  が大きくなるにしたがって  $r_{m1}$  も  $r_{m2}$  も大きくなる。このことは、小さな安全率のもとでさらに  $c_S$  が大きいという厳しい荷重条件に生き残った事実を評価する非破壊効果によるものと考えられる。

タイプAとBの強度劣化特性の相違が、Fig. 7 に明確に現われている。タイプAを示す Fig. 7 (a) では、強度劣化効果が  $\nu$  の広い範囲にわたって認められる。このことは、 $\phi_A(S)$  が指数形の結果、比較的小さな荷



(a) type A deterioration ( $c_A = 0.10$ ,  $c_R = 0.10$ )



(b) type B deterioration ( $c_B = 0.10$ ,  $c_R = 0.10$ )

Fig. 7 Mean value ratio of the residual resistance (log-normal load distribution).

重においてもかなりの強度劣化を生じることによる。他方、タイプ B を示す Fig. 7 (b) では、 $\nu=1.0$  に近づくにつれて急激な強度劣化を生じる一方、 $\nu$  が増加するにつれて強度劣化効果は急速に消失する。これは、強度劣化が構造物の平均抵抗強度に近い荷重に対して急激に生じるという  $\varphi_B(S)$  の形に基づくものである。

荷重が、正規分布、極値分布に従う場合も Fig. 7 に示す対数正規分布の場合と同様の傾向を示している。荷重の三つの分布形に関して残存強度の平均値を比較したのが Fig. 8 である。同図より、タイプ A では対数正規分布と極値分布の値はほとんど一致し、正規分布の値が  $\nu$  の小さな範囲を除いてやや下回っているが、全般的には三者ともよく一致した値を示している。このことは、タイプ A では分布形の相違は平均残存強度に顕著な影響を与えないことを示している。

一方タイプ B では、 $\nu$  の小さな範囲で、平均値の大きさは、正規分布、極値分布、対数正規分布の順に 1 に近づくが、 $\nu$  の大きい範囲では、逆に対数正規分布と極値分布は正規分布ほど速かには 1 に収束しない。このことは、 $\nu$  の小さな範囲で二つの極値分布は正規分布ほど非破壊効果が顕著でなく、 $\nu$  の大きな範囲で二つの極値系分布は正規分布以上に強度劣化効果が認められることを示している。以上の結果は、最大値に関する極値分布の系統の特徴である密度関数の上側の“すそ”の広がり大きいことに依存しているものと考えられる。

#### b) 変動係数

第 1 荷重と第 2 荷重に生き残った後の残存強度の変動係数  $C_{R1}$  と  $C_{R2}$  を  $F_{R1}(x)$ ,  $F_{R2}(x)$ ,  $r_{m1}$ ,  $r_{m2}$  より算出し、初期抵抗強度の変動係数  $C_{R0}$  に対する比として

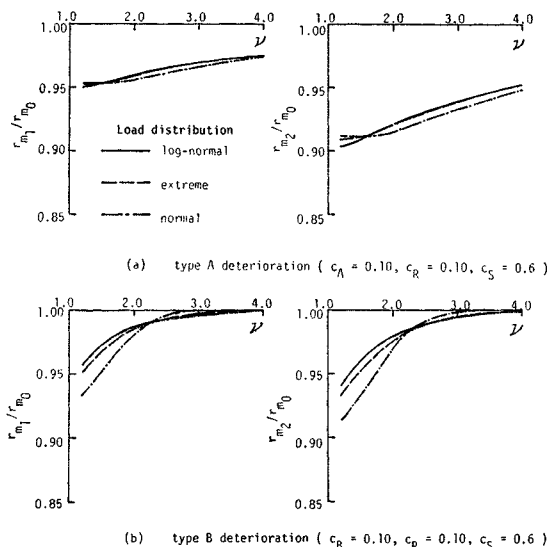


Fig. 8 Mean value ratio of the residual resistance (effect of load distribution).

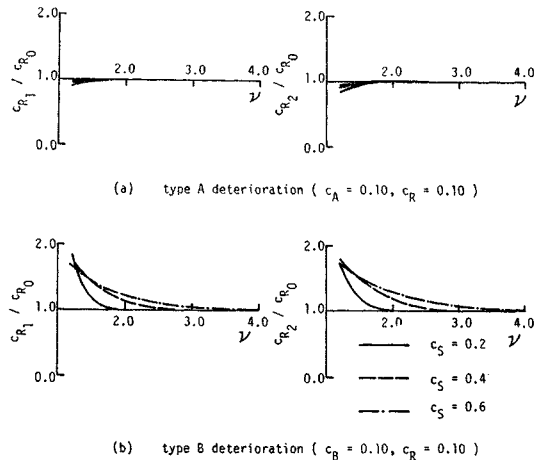


Fig. 9 Ratio of the coefficient of variation of the residual resistance (log-normal load distribution).

示したのが Fig. 9 である。この図は荷重が対数正規分布に従う場合を示したものである。

Fig. 9 (a) はタイプ A の劣化モードに対する結果であり、Fig. 9 (b) はタイプ B に対する結果である。タイプ A の場合、荷重が繰返されるにつれて  $C_{Rn}$  は減少傾向にあるが、その程度は小さい。一方タイプ B は、特に  $\nu$  の比較的小さな範囲で繰返し荷重に対して  $C_{Rn}$  の増加が著しい。この対照的な結果は、残存強度の確率分布を示す Fig. 5. 6 と比較すれば了解できる。

Fig. 5 から指摘できることは、タイプ A の強度劣化は荷重の広い範囲にわたって強度劣化効果が現われる結果、残存強度の確率分布が初期抵抗強度の確率分布に平行に移動する傾向がある。そのために、Fig. 7 (a) にみたように強度劣化効果によって残存強度の平均値が強く影響されても、その変動係数は  $C_{R0}$  からほとんど変化しない。Fig. 9 (a) の変動係数  $C_{Rn}/C_{R0}$  が 1 より少し小さいのは、非破壊効果の結果と考えられる。というのは、Fig. 3 (b) に例示したように、非破壊の条件によって残存強度の確率密度の左方の端部を切り離す結果、そのばらつきを小さくするからである。

タイプ B の強度劣化モードにしたがった場合、残存強度の確率分布  $F_{R1}$ ,  $F_{R2}$  は 4. (2) の議論より、 $x/r_{m0} < 0.8$  で  $F_{R0}$  の値よりも大きな値を示していた。一方、 $C_{R1}/C_{R0}$ ,  $C_{R2}/C_{R0}$  は、1 より大きな値を示しているが、これは上述の議論よりタイプ B の強度劣化効果による結果であることは明白である。

また、変動係数に関しては、対数正規分布、極値分布、正規分布の間にほとんど差異がなく、いずれも Fig. 9 と同様の結果を示した。



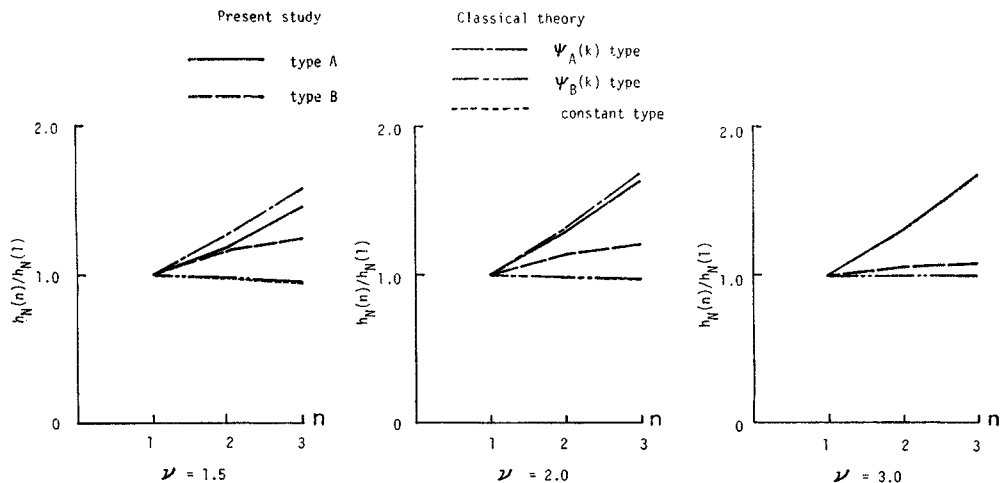


Fig. 10 Failure rate ratio (log-normal load distribution;  $c_R=0.10, c_S=0.40, c_A=0.10, c_B=0.10, \xi=1.0$ ).

(4) 将来の荷重列に対する構造物の信頼性

a) 危険率

Fig. 10 は、対数正規分布に従う繰返し荷重についてタイプAとタイプBの劣化モードによる危険率  $h_N(n)$  の変化を示したものである。まず注目されることは、タイプAに対する危険率が中央安全率  $\nu$  の値をどのようにとっても、増加傾向にあることである。これは、 $\nu$  の広い範囲にわたる強度劣化効果の存在を強調するものである。一方、タイプBに対する危険率は、小さな  $\nu$  に対してのみ同様の挙動を示す。この結果は、前節で述べたこれら二つのタイプの強度劣化特性と一致する。

Fig. 10 には、また、2.(2)の古典理論に対する数値計算結果が示されている。一定の抵抗強度をもつ場合の危険率は、式(5)から計算したものである。この曲線は、A.H.-S. Ang と M. Amin<sup>3)</sup>が指摘したように、 $n$  に対して単調減少性を示す。しかし、 $\nu=3.0$  の場合には、タイプBの劣化モードに対する本研究の結果は、古典理論における一定の抵抗強度をもつ場合の結果とほぼ一致する。これは、タイプBでは  $\nu=3.0$  のとき強度劣化がほとんど生じないためであると考えられる。

Fig. 10 において顕著なことは、本研究に基づくタイプAの劣化モードに対する危険率と古典理論に基づく  $\Psi_A(k)$  タイプの劣化モードに対する危険率とがかなり近接した値をとることである。このことは、Fig. 10 と式(35)で定義した  $\Psi_A(k)$  の形の議論から、タイプAの劣化モードに対する危険率を求める際には、平均荷重  $s_m$  をランダム荷重  $S$  の代表値として取扱い

うることを示している。一方、式(36)で定義した  $\Psi_B(k)$  の値は、 $\nu=1.5\sim 3.0$  の領域ではほとんど1に等しいため、強度劣化が生じていない場合に相当し、したがって  $\Psi_B(k)$  タイプの危険率は一定抵抗強度の場合の危険率の値にほとんど一致することになる。

荷重の三つの分布形に関して、危険率を比較したのが Fig. 11 である。タイプAでは正規分布が他の二つの分布に比べて大きな値をとっているが、タイプBでは三者とも非常に近接した値をとっている。

また対数正規分布と極値分布に限れば、いずれのタイプにおいてもほとんど等しい値をとっている。

b) 信頼性関数

Fig. 12 は、前述の危険率の数値を使って、式(7)、(9)、(30)から求めた信頼性関数の数値結果である。

初期信頼性関数  $L_N(1)$  は、 $\nu$  の増加とともに1に漸近することがこの図よりわかる。 $L_N(2)$  と  $L_N(3)$  の挙動は、式(30)より危険率  $h_N(n)$  の直接の影響下に

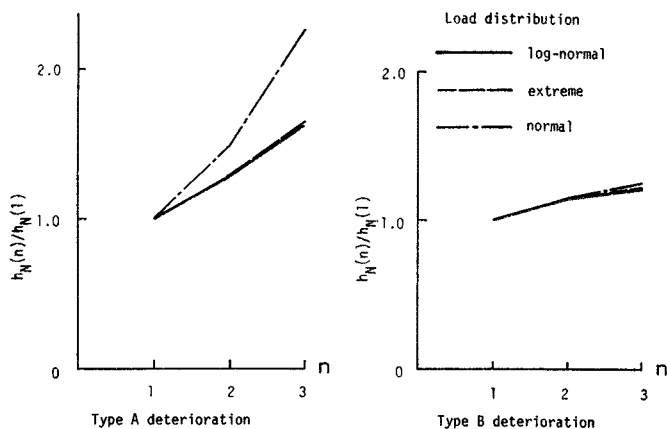


Fig. 11 Failure rate ratio (effect of load distribution;  $\nu=2.0, c_R=0.10, c_S=0.40, c_A=0.10, c_B=0.10, \xi=1.0$ ).

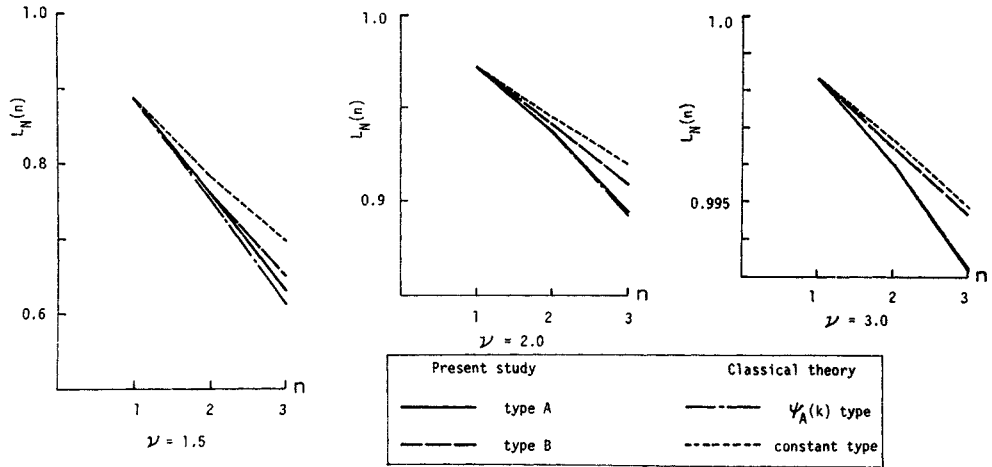


Fig. 12 Reliability function (log-normal load distribution;  $c_R=0.10, c_S=0.40, c_A=0.10, c_B=0.10, \xi=1.0$ ).

ある。すなわち、安全率  $\nu$  が増加すると、タイプBの強度劣化に対する結果は、古典理論の一定抵抗強度をもつ場合の値に急速に接近する。そして、タイプAの場合は古典理論の  $\psi_A(k)$  タイプの強度劣化の場合の値にかなりよく一致する。

信頼性関数に対する分布関数形相互の関係を示したのが Fig. 13 である。タイプA, B のいずれの場合においても、対数正規分布と極値分布は非常に近接しているのに対し、正規分布の値は前二者の値に較べて大きな値をとっている。

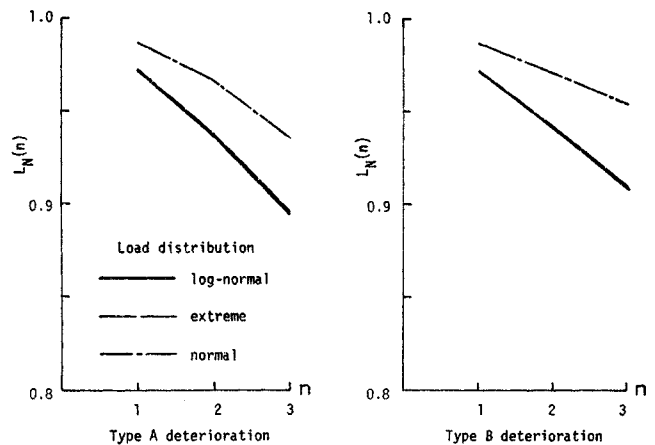


Fig. 13 Reliability function (effect of load distribution;  $\nu=2.0, c_R=0.10, c_S=0.40, c_A=0.10, c_B=0.10, \xi=1.0$ ).

(5) 過去に荷重を受けた構造物の将来の信頼性

Fig. 14 は、平均荷重  $s_m$  に等しい大きさの荷重を過去に受けた場合について、(3) b) で述べた信頼性の結果をプロットしたものである。タイプAの強度劣化の場合に対応する Fig. 14 (a) では、過去の荷重の影響が顕著である。一方、タイプBの強度劣化の場合を示す Fig. 14 (b) では過去の荷重は将来の信頼性にほとんど影響を与えない。2つのタイプの間この相違も、それぞれの強度劣化係数  $\varphi(s)$  の特性から説明される。すなわち、平均値に等しい大きさの過去の荷重というのは、タイプBの構造物に強度劣化を生じさせるほどに十分な大きさでなく、一方タイプAの構造物では平均荷重下でも劣化がかなりの程度生じることによる。

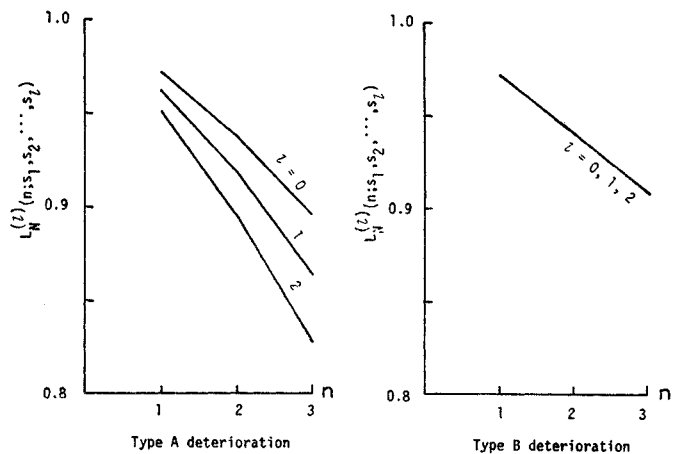


Fig. 14 Reliability with past load experiences (log-normal load distribution;  $\nu=2.0, c_R=0.10, c_S=0.40, c_A=0.10, c_B=0.10, \xi=1.0$ ).

## 5. 結 論

本研究は、荷重の大きさに依存する強度劣化の概念を導入し、これに加えて非破壊効果を考慮することによって、繰返し荷重に対する構造物の信頼性理論に新しい分野を開こうとしたものであり、理論解析、および数値計算結果から、いくつかの本質的かつ興味ある結果を得ることができた。本研究の成果を要約すると以下のとおりである。

(1) 荷重の大きさに依存して強度劣化を生じる構造物の信頼性を、本研究に示す方法によって求めることができる。そこでは、強度劣化係数の形状が大きな影響をもつ。

(2) 繰返し荷重を受けた場合の信頼性理論に関連する構造物の挙動は、非破壊効果と強度劣化効果を使って説明できる。本研究で提示した解析方法は、従来の理論に比べてより一般的かつ現象により忠実な結論を与えていると考えられる。

(3) 本研究は、既知の過去の大きな荷重に生き残った構造物の将来の荷重に対する信頼性の問題にも拡張されている。

(4) 本研究の理論は、比較的作用回数の少ない、しかし強大な荷重に対する信頼性評価に有力な方法となろう。

謝辞：本論文作成にあたり、終始適切なるご助言と激励をいただいた京都大学の後藤尚男教授に深謝する次第である。なお、本研究の数値計算は、京都大学大型計算機センターの FACOM 230-75 によったことを付記する。

### 参 考 文 献

- 1) Ang, A.H.-S., and Amin, M. : Reliability of Structures and Structural Systems, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol. 94, No. EM 2, pp. 671-691, April, 1968.
- 2) Ang, A.H.-S., and Amin, M. : Safety Factors and

Probability in Structural Design, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 95, No. ST 7, pp. 1389-1405, July, 1969.

- 3) Ang, A.H.-S., and Amin, M. : Formulation of Wind-Resistant Design Based on Acceptable Risk, Proc. Third Int. Conf. on Wind Effects on Buildings and Structures, Tokyo, pp. 511-520, 1971.
- 4) Cornell, C.A. : Bounds on the Reliability of Structural Systems, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 93, No. ST 1, pp. 171-200, Feb., 1967.
- 5) Ellingwood, B.R. and Ang, A.H.-S. : A Probabilistic Study of Safety Criteria for Design, Technical Report under Grant GK-1812 X, Univ. of Illinois, June, 1972.
- 6) Freudenthal, A.M. : Safety of Structures, Transactions, ASCE, Vol. 112, pp. 125-180, 1947.
- 7) Freudenthal, A.M., Garrelts, J.M. and Shinozuka, M. : The Analysis of Structural Safety, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 92, No. ST 1, pp. 267-325, Feb., 1968.
- 8) Kameda, H. : Probability Distribution of the Maximum Response of Structures Subjected to Non-stationary Random Earthquake Motion, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto Univ., Vol. 33, Part 4, Kyoto, Japan, pp. 243-280, Oct., 1971.
- 9) Koike, T. and Kameda, H. : Reliability Theory of Structures with Strength Degradation in Load History, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto Univ., Vol. 35, Part 4, Kyoto Japan, Oct., 1973.
- 10) Lind, N.C. : Consistent Partial Safety Factors, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 97, No. ST 6, pp. 1651-1669, June, 1971.
- 11) 丹羽義次・小柳 冷・中川浩二：三軸圧縮応力下のコンクリートの破壊過程，土木学会論文報告集，No. 185，pp. 31-42，昭和46年1月。
- 12) 岡田 清・明石外世樹・神山 一・児玉武三：土木材料学，国民科学社，p. 203，昭和45年。
- 13) Yao, J.T.P. and Yeh, H.-Y. : Formulation of Structural Reliability, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 95, No. ST 12, pp. 2611-2619, Dec., 1969.
- 14) Ferry Borges, J. and Castanheta, M. : Structural Safety, National Laboratory of Civil Engineering, 2nd ed., Lisbon, Portugal, 1971.

(1973.12.7・受付)