

## 沈殿池の非定常最適操作に関する一考察

A CONSIDERATION ON NONSTEADY STATE OPTIMUM  
OPERATION OF A SETTLING BASIN

芝 定 孝\*・井 上 頼 輝\*\*・高 松 武 一 郎\*\*\*

By Sadataka Shiba, Yoriteru Inoue and Takeichiro Takamatsu

## 1. 緒 言

沈殿池などの水処理施設へ流入する原水の水質および水量は時間的に変動しているのが常である<sup>1),2)</sup>。そして、この原水の流入条件の時間的変動によってもたらされる浮遊物質の沈殿池内での濃度分布や流出水中の濃度の変化などの特性を解析すると、沈殿池内の流動特性の変動に起因する乱れ混合の状態や沈殿物の再浮上の状態などの変化が沈殿池流出水の非定常特性にかなり関与していることがわかる<sup>3),4)</sup>。したがって、流入原水の水質および水量が常に一定の値で流入する定常状態でその操作条件が設定される従来の定常運転では流入条件の変動によってもたらされる処理効率の時間的な変動に対処することは不可能であり、沈殿池流出水の水質などは必ずしも満足のゆく状態は得られていないことが予想される。処理水に対して常に一定以上の処理水準が要求される場合が多いが、沈殿池流出水の水質あるいは沈殿池の状態を適当な水準に維持するためには、流入原水の時間的な変動を考慮し、それに応じて各時刻での操作変数を適当な値に設定しなすような、非定常操作を行う必要があるものと思われる。水処理における沈殿池の第1の機能は浮遊物質を除去することであるが、さらに貯水の機能をも有している。本研究は沈殿池の貯水機能を利用し、これら2つの機能を適当な比率で働かせることにより沈殿池の非定常最適操作を行おうとするものである。

非定常操作を行うに際しては流出水の水質あるいは沈殿池の貯水容積を予測するための沈殿池モデルにいかなるものを用いるかが1つの重要な問題となってくる。流入水条件が非定常で時間的に変動する場合に現象論的により厳密な定常モデルを用いるべきか、あるいはより巨

視的な非定常モデルを用いるべきかは、対象とするプロセスおよびその目的よりみて明らかであろう。この場合は、もちろん後者をとるべきものと思われる。それは、たとえ現象論的には厳密な定常モデルによって濃度あるいは貯水容積などを求めたとしても、状態の非定常な変化を無視して定常状態としてしまっている点において、すでに合目的的厳密さを失ってしまっているからである。より簡単な非定常モデルで、非定常な流入条件の変化を考慮し、合目的的かつ実質的な厳密さを求めるほうがより良い方法であるといえるであろう。この意味で本論文では沈殿物の再浮上を考慮した3次元非定常拡散方程式の空間的な集中化を行い、時間に関して変係数を有する常微分方程式とした集中系の非定常モデルを用いている。

このような集中系の非定常モデルを用いて流入水の水質および流量が正弦波的に変動した場合に流出水の流量を正弦波的に操作すると、その操作に最適性の存在することがすでに確かめられたが<sup>5)</sup>、本論文では流出水の流量操作はこのような特定のパターンにはとらわれずにある操作制限のもとに、全く任意に操作されるものとして解析した。流入水の変動パターンが全く任意な場合にも本論文の非定常最適操作の方法を適用することは可能であるが、計算の便宜上、流入水の水質および水量の変動は正弦波的なもので行っている。

非定常操作は流出水中の浮遊物質の時間平均濃度および、沈殿池の平均貯水容積の和を評価関数として、ある期間にわたる非定常操作の結果が評価関数の値を最小とするように行った。評価関数に含まれる流出水中の浮遊物質濃度および沈殿池貯水容積のいずれに重点を置くかによって最適な非定常操作のパターンにはかなりの違いのあることが確かめられた。これは流出水流量の操作の仕方により、池内の流動特性が相当変化して、沈殿物の再浮上量などが異なってくるためと思われるが、いずれにしても沈殿池の非定常操作には十分注意をする必要の

\* 正会員 工修 大阪大学助手 基礎工学部化学教室化学工学科

\*\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部衛生工学教室

\*\*\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部化学工学教室

あることを示すものであると思われる。

ここに、その沈殿池の非定常最適操作の方法の一例を示し、得られた流出水流量の非定常最適操作のパターンについて若干の解析結果を述べる。

2. 集中系モデルと非定常最適操作の方法

沈殿池内の浮遊物質の挙動に対して用いる基礎方程式は次のような3次元非定常拡散方程式である。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(uC)}{\partial x} + \frac{\partial(vC)}{\partial y} + \frac{\partial(wC)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( E_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( E_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( E_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) = 0 \dots\dots\dots(2.1)$$

ここに、 $C$ は沈殿池内の浮遊物質濃度、 $u, v, w$ はそれぞれ  $x, y, z$  方向の浮遊物質の速度成分で、 $E_x, E_y, E_z$ はそれぞれ  $x, y, z$  方向の乱れによる浮遊物質の拡散係数である。式(2.1)のような基礎式は偏微分方程式であるために与えられた初期および境界条件で解を求めるのはごくわずかな特殊な場合を除いては非常に困難でほとんど不可能に近いといえよう。したがって、本論文では沈殿池の非定常最適操作という目的により、できるだけ簡単な非定常モデルを用いることにする。本モデルは沈殿池底面に合田の境界条件を適用して式(2.1)を  $x, y, z$  について積分し、空間的に集中化を行ったもので、沈殿池内の浮遊物質濃度は一様とみなして体積平均濃度を用いている。時間に関する変係数を有する線形一階の常微分方程式で表わされる次のような集中系モデルである<sup>9)</sup>。

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q_{IN} + (1-k)w_P S_B}{V} C + \frac{Q_{IN} C_{IN}}{V} \dots\dots\dots(2.2)$$

ただし、 $k$ は沈殿物の再浮上パラメータで、 $w_P$ は浮遊粒子の沈降速度、 $S_B$ は沈殿池の底面積、 $V$ は沈殿池の貯水容積、 $C_{IN}, Q_{IN}$ はそれぞれ流入水の濃度および流量である。

また、沈殿池内の水に対しては、連続の式

$$\frac{\partial \rho_W}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_W u_W)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_W v_W)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_W w_W)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(2.3)$$

を集中化して次式が得られる。ただし、 $\rho_W$ は水の密度で、 $u_W, v_W, w_W$ は流速の  $x, y, z$  成分である。

$$\frac{dV}{dt} = Q_{IN} - Q \dots\dots\dots(2.4)$$

式(2.2)の  $C(t)$  は次のような体積平均濃度である。

$$C(t) = \frac{1}{V} \iiint_V C(t, x, y, z) dV \dots\dots\dots(2.5)$$

また式(2.2)に含まれる再浮上パラメータ  $k$  は河床洗掘に関する合田の境界条件におけるものと同じ物理的意味を有するもので、それは次のとおりである。

- $k=0$  : 沈殿のみ
- $0 < k < 1$  : 沈殿の傾向 (一部分再浮上)
- $k=1$  : 沈殿と再浮上とがバランス
- $k > 1$  : 洗掘の傾向

この再浮上パラメータ  $k$  は沈殿池内における物質移動過程で重要な役割を演ずるが、池内の流動特性の時間的な変動に応じて変化し、沈殿池の操作パターンに大きな影響を与えるものである。したがって、その評価はきわめて重要なものとなってくる。本論文では再浮上パラメータ  $k$  は別に行った模型水槽実験により得られた結果を用いている。それは  $k$  を流下方向の乱流拡散係数  $E_x$  の関数としたもので、次のような式で表わされる<sup>9)</sup>。

$$k = 1.17 \exp(-8.05/E_x) \dots\dots\dots(2.6)$$

また、 $E_x$  は Froude 数  $F$  の関数として次のように与えられる<sup>9)</sup>。

$$E_x = 3.59 \exp(58.5 F) \dots\dots\dots(2.7)$$

$$F = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gH}} \dots\dots\dots(2.8)$$

ただし、 $\bar{H}, \bar{u}$  はそれぞれ次の式(2.9)、(2.10)で与えられる池内の平均水深および平均流速である。

$$\bar{H}(t) = \frac{V(t)}{S_B} = \frac{1}{S_B} \left\{ \int_0^t (Q_{IN} - Q) dt' + V(0) \right\} \dots\dots\dots(2.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= \frac{\bar{Q}(t)}{B \cdot \bar{H}(t)} \\ &= \frac{(Q_{IN} + Q)/2}{(B/S_B) \left\{ \int_0^t (Q_{IN} - Q) dt' + V(0) \right\}} \dots\dots\dots(2.10) \end{aligned}$$

ただし、 $B$ は沈殿池の幅である。ここで沈殿池の初期貯水容積  $V(0)$  および操作期間内の平均流入水流量  $Q_{IM}$  による理論滞留時間を  $T_0$  とすると、

$$\frac{V(0)}{Q_{IM} T_0} = 1 \dots\dots\dots(2.11)$$

である。また、この  $T_0$  による無次元時間を  $\tau = t/T_0$  とし、 $V(0)$  で  $V(t)$  を無次元化したものを  $\hat{V}(\tau)$ 、 $Q_{IM}$  で  $Q_{IN}(t), Q(t)$  を無次元化したものをそれぞれ  $\hat{Q}_{IN}(\tau), \hat{Q}(\tau)$  とすると、Froude 数は、

$$F(\tau) = \frac{1}{2 \alpha^{1/2}} \cdot \frac{\hat{Q}_{IN}(\tau) + \hat{Q}(\tau)}{\hat{V}(\tau)^{3/2}} \dots\dots\dots(2.12)$$

と表わせる。ただし、 $\alpha$ は無次元数で、

$$\alpha = \frac{g T_0^2}{L_0} \cdot \frac{H_0}{L_0} \dots\dots\dots(2.13)$$

で定義される。 $L_0, H_0$ は沈殿池の初期長さおよび初期水深であり、 $g$ は重力加速度である。

沈殿池への流入水の水量  $Q_{IN}(t)$  および浮遊物質濃度  $C_{IN}(t)$  は正弦波的に変動するものとし、それらを平均流入水流量  $Q_{IM}$ , 平均流入水濃度  $C_{IM}$  で無次元化したものを  $\hat{Q}_{IN}(\tau)$ ,  $\hat{C}_{IN}(\tau)$  とすれば,

$$\hat{Q}_{IN}(\tau) = 1 + \frac{Q_I}{Q_{IM}} \sin(\omega_{IQ} T_0 \tau + \phi_{IQ}) \dots (2.14)$$

$$\hat{C}_{IN}(\tau) = 1 + \frac{C_I}{C_{IM}} \sin(\omega_{IC} T_0 \tau + \phi_{IC}) \dots (2.15)$$

と書ける。 $Q_I, C_I$  は流量および濃度の変動の振幅で、 $\omega_{IQ} T_0, \omega_{IC} T_0$  は角周波数、 $\phi_{IQ}, \phi_{IC}$  は位相角である。

緒言でも述べたように、本論文における非定常最適操作では流入水の水量および水質の変動が任意の形の場合についても計算することが可能である。このことは後に述べるような式 (2.19) 以下の最適操作の定式化においても明らかである。しかし、本論文では計算の便宜上、一例として流入水の水量および水質が、それぞれ式 (2.14), (2.15) で与えられるような正弦波の変動をする模擬流入水を用いることにした。ただし、水処理施設に流入する原水の水量および水質の任意の変動はフーリエ解析によって三角関数で記述できることが明らかにされている<sup>1),2)</sup> ので、本沈殿池モデルが線形であることを考慮すれば、式 (2.14), (2.15) のような変動をする流入原水の個々の周波数成分について計算しておき結果を重ね合わせることで、任意の流入水変動に対する最適解を得ることも可能であると考えられる。

水質に関する連続の式 (2.2) と水量に関する連続の式 (2.4) とを平均流入水濃度  $C_{IM}$  と平均流入水流量  $Q_{IM}$  とによって無次元化すると、それぞれ

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\hat{C}}{d\tau} &= -\frac{\hat{Q}_{IN} + (1-k)p}{\hat{V}} \hat{C} + \frac{\hat{Q}_{IN} \hat{C}_{IN}}{\hat{V}} \\ &\dots \dots \dots (2.16) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\hat{V}}{d\tau} &= \hat{Q}_{IN} - \hat{Q} \\ &\dots \dots \dots (2.17) \end{aligned} \right.$$

となる。ただし、 $p$  は次式 (2.18) で定義される無次元量で、理想沈殿池<sup>7),8)</sup> における沈殿除去効率に相当するものである。

$$p = \frac{w_p S_B}{Q_{IM}} = \frac{T_0}{H/w_p} \dots \dots \dots (2.18)$$

沈殿池の非定常最適操作は期間  $\tau_f$  にわたって、その期間における流出水中の浮遊物質濃度の平均値と沈殿池の貯水容積の平均値との和を最小にするように行うものとする。沈殿池の平均貯水容積を小さくすることは沈殿池内における流入水の滞留時間を短くし、したがって処理時間が短縮され沈殿池をコンパクトにすることに対応する。上述のような操作目標に対する評価関数は次のように表わすことができる。

$$f(\tau_f) = \frac{a_1}{\tau_f} \int_0^{\tau_f} \hat{C} d\tau + \frac{a_2}{\tau_f} \int_0^{\tau_f} \hat{V} d\tau + \int_0^{\tau_f} g_f(\tau) d\tau \dots \dots \dots (2.19)$$

$a_1, a_2$  は  $\hat{C}$  および  $\hat{V}$  の時間平均値にかかる重みで、流出水中の浮遊物質濃度を低くすることと、沈殿池の貯水容積を小さくすることのいずれに重点をおくかによって適当に選ばれるものである。沈殿池の非定常最適操作は式 (2.19) を用いると、

$$\min_Q f(\tau_f) = \min_Q \int_0^{\tau_f} g_f(\tau) d\tau \dots \dots \dots (2.20)$$

にしたがって行われる。ただし、流出水濃度  $C$ , 沈殿池貯水容積  $V$  および流出水の操作流量  $Q$  に対しては次のような制約条件がある (以後、 $\hat{C}, \hat{V}, \hat{Q}$  などは単に  $C, V, Q$  と略記する)。

$$\left\{ \begin{aligned} C &\leq C_{\max} \dots \dots \dots (2.21) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} V_{\min} &\leq V \leq V_{\max} \dots \dots \dots (2.22) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_{\min} &\leq Q \leq Q_{\max} \dots \dots \dots (2.23) \end{aligned} \right.$$

数値計算の都合上、沈殿池の非定常最適操作はある設定期間  $\tau_f$  にわたって一定時間間隔  $\Delta\tau$  ごとに離散的に行うものとする。各時刻において操作される流出水流量  $Q$  による  $\tau=0 \sim \tau_f$  までの水量の総和を  $SQ(\tau_f)$  とすると、 $SQ(\tau_f)$  は水量に対する連続の式 (2.17) より求められる。すなわち、

$$SQ(\tau_f) = \int_0^{\tau_f} Q d\tau = \int_0^{\tau_f} Q_{IND} \tau + V(0) - V(\tau_f) \dots \dots \dots (2.24)$$

である。ところが沈殿池の貯水容積には式 (2.22) に示すような制約条件があるから  $SQ(\tau_f)$  のとるべき値の範囲は

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{\tau_f} Q_{IND} \tau + V(0) - V_{\max} \\ \leq \int_0^{\tau_f} Q_{IND} \tau + V(0) - V_{\min} \end{aligned} \right\} \leq SQ(\tau_f) \dots \dots \dots (2.25)$$

でなければならない。また、一方  $SQ(\tau_f)$  は各時刻  $\tau=0, \Delta\tau, 2\cdot\Delta\tau, \dots, (n-1)\cdot\Delta\tau$  において流出流量  $Q_1(0), Q_2(\Delta\tau), Q_3(2\cdot\Delta\tau), \dots, Q_n(\tau_f - \Delta\tau)$  で離散的に操作された流出水量の総和であるから次式が成立する。

$$SQ(\tau_f) = \{Q_1(0) + Q_2(\Delta\tau) + \dots + Q_n(\tau_f - \Delta\tau)\} \cdot \Delta\tau \dots \dots \dots (2.26)$$

ここで、式 (2.16), (2.17), (2.19) の右辺をそれぞれ  $g_c(C, V, Q), g_v(Q), g_f(C, V)$  とおき、積分して離散的に表現すると、それぞれ次のように書ける。

$$\left\{ \begin{aligned} C_n &= C_{n-1} + g_c(C_{n-1}, V_{n-1}, Q_{n-1}) \cdot \Delta\tau \\ &\dots \dots \dots (2.27) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} V_n &= V_{n-1} + g_v(Q_{n-1}) \cdot \Delta\tau \dots \dots \dots (2.28) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + g_f(C_{n-1}, V_{n-1}) \cdot \Delta\tau \dots \dots \dots (2.29) \end{aligned} \right.$$

また、式 (2.20) のような方策を

$$F_n \{SQ(\tau_f)\} = \min_{SQ(\tau_f)} \{SQ(\tau_f)\} \dots \dots \dots (2.30)$$

と表現すれば、

$$F_n \{SQ(\tau_f)\} = \min_{SQ(\tau_f)} \left\{ \int_{\tau_f - \Delta\tau}^{\tau_f} g_f(\tau) d\tau + \int_0^{\tau_f - \Delta\tau} g_f(\tau) d\tau \right\} \dots \dots \dots (2.31)$$

と書けるから、式 (2.19) の関係を式 (2.31) の右辺の { } 内の第 2 項に適用して、

$$F_n\{SQ(\tau_f)\} = \min_{SQ(\tau_f)} \left[ \int_{\tau_f-d\tau}^{\tau_f} g_f(\tau) d\tau + f_{n-1}\{SQ(\tau_f-d\tau)\} \right] \quad (2.32)$$

となる。式 (2.27), (2.28), (2.29) のような表現をすれば  $g_{f,n-1}$  は  $C_{n-1}, V_{n-1}$  の関数であるから  $Q_{n-2}$  の関数となり、したがって  $f_n$  は  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{n-2}$  の関数となることがわかる。ゆえに式 (2.32) はさらに、次のように変形していくことができる。

$$F_n(SQ) = \min_{d\tau \cdot Q_{n-1}} \left[ \min_{SQ-d\tau \cdot Q_{n-1}} \int_{\tau_f-d\tau}^{\tau_f} g_f(\tau) d\tau + \min_{f_{n-1}\{SQ(\tau_f-d\tau)\}} \right] = \min_{d\tau \cdot Q_{n-1}} [g_{f,n-1}(d\tau \cdot Q_{n-2}) \cdot d\tau + \min_{SQ-d\tau \cdot Q_{n-2}} f_{n-1}(SQ-d\tau \cdot Q_{n-2})]$$

したがって、最終的には次のような再帰関係 (recurrence relation)<sup>9)</sup> を示す関数方程式が得られる。

$$\begin{cases} F_n(SQ) = \min_{d\tau \cdot Q_{n-1}} [g_{f,n-1}(d\tau \cdot Q_{n-2}) \cdot d\tau + F_{n-1}(SQ-d\tau \cdot Q_{n-2})], & (n \geq 4) \\ \dots\dots\dots (2.33) \\ F_3(SQ) = g_{f,2}(d\tau \cdot Q_1) \cdot d\tau + F_2, & (n=3) \\ \dots\dots\dots (2.34) \end{cases}$$

ただし、 $F_2$  は初期状態  $C_1, V_1$  により定まっている。

式 (2.19) および式 (2.30) から明らかなごとく、初期状態  $C_1, V_1$  が与えられると  $F_2$  は定まってしまうから最適な操作の流出水流量の列  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  を求めるには  $F_3, F_4, F_5, \dots, F_{n+2}$  を評価することになる ( $F_1$  は初期値であるが式 (2.19) および式 (2.30) より  $F_1 = f_1 = 0$  となる)。したがって、 $F_i$  の添え字  $i$  を  $(i-2)$  とすれば  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  の添え字と一致するが、ここではそのまま式 (2.33), (2.34) を用いることにする。

流出水流量の総和  $SQ(\tau_f)$  には式 (2.25) で示すような制限があるが、流入水流量が式 (2.14) のような時間的変動をしているものとする、 $SQ(\tau_f)$  は次のように評価される。たとえば、 $\tau_f=1.0, \omega_{IQ}=3.0 \text{ rad/sec}, Q_I/Q_{IM}=0.25, \phi_{IQ}=0.8 \text{ rad}, V(0)=1.0, V_{\min}=0.1, V_{\max}=1.5$  とすると、式 (2.25) より

$$0.624 \leq SQ(\tau_f) \leq 2.024 \quad (2.35)$$

である。したがって、操作可能な最小の単位流量を  $dQ$  とし、たとえば  $dQ=0.1, d\tau=0.1$  とすると、操作可能な最小の単位水量  $dSQ$  は

$$dSQ = d\tau \cdot dQ = 0.01 \quad (2.36)$$

となる。このとき  $\tau=0 \sim \tau_f$  の間に操作可能な最大の総単位数を  $I_{\max}$  とすると、

$$I_{\max} = \left[ \frac{2.024}{0.01} \right] = 202 \dots\dots\dots (2.37)$$

である ( $[ ]$  はガウスの記号)。式 (2.25) より操作可能な最小の総単位数  $I_{\min}$  も存在する。

以上のような沈殿池の非定常最適操作の方法をまとめると、沈殿池に対する適当な非定常モデルを用いて、操作可能な総流出水量  $SQ$  を非定常最適操作の対象となる期間内の各時刻において、濃度、沈殿池貯水容積、操作流量などに対する各種の制約条件すなわち、式 (2.21), (2.22), (2.23) を満足させながら与えられた式 (2.19) の評価関数を最小にするように割当てるということになる。

上記の非定常最適操作流量は次のようにして計算することができる。第 1 段階 ( $n=3$ ) については、総水量  $SQ=0, dSQ, 2 \cdot dSQ, \dots, I_{\max} \cdot dSQ (=SQ)$  のおのに対して式 (2.34) を用いて  $F_3(SQ)$  を求める (ただし、制約条件を満足しないものは後で除かれる)。

$$(1) \begin{cases} SQ=Q_1=0 \text{ のとき } F_3(0) = g_{f,2}(0) \cdot d\tau + F_2 \\ SQ=Q_1=dSQ \text{ のとき } F_3(dSQ) = g_{f,2}(dSQ) \cdot d\tau + F_2 \\ SQ=Q_1=2 \cdot dSQ \text{ のとき } F_3(2 \cdot dSQ) = g_{f,2}(2 \cdot dSQ) \cdot d\tau + F_2 \\ \dots\dots\dots \\ SQ=Q_1=I_{\max} \cdot dSQ \text{ のとき } F_3(I_{\max} \cdot dSQ) = g_{f,2}(I_{\max} \cdot dSQ) \cdot d\tau + F_2 \end{cases}$$

次に、第 2 段階 ( $n=4$ ) については式 (2.33) より

$$F_4(SQ) = \min_{d\tau \cdot Q_1} [g_{f,3}(d\tau \cdot Q_2) \cdot d\tau + F_3(SQ-d\tau \cdot Q_2)]$$

を  $SQ=0, dSQ, 2 \cdot dSQ, \dots, I_{\max} \cdot dSQ$  について計算する。

$$(2) \begin{cases} SQ=0 \text{ のとき } F_4(SQ) = g_{f,2}(0) \cdot d\tau + F_3(0) \\ SQ=dSQ \text{ のとき } F_4(SQ) = \min \left\{ \begin{array}{l} g_{f,2}(0) \cdot d\tau + F_3(dSQ) \\ g_{f,2}(dSQ) \cdot d\tau + F_3(0) \end{array} \right\} \\ SQ=2 \cdot dSQ \text{ のとき } F_4(SQ) = \min \left\{ \begin{array}{l} g_{f,2}(0) \cdot d\tau + F_3(2 \cdot dSQ) \\ g_{f,2}(dSQ) \cdot d\tau + F_3(dSQ) \\ g_{f,2}(2 \cdot dSQ) \cdot d\tau + F_3(0) \end{array} \right\} \\ \dots\dots\dots \\ SQ=SQ \text{ のとき } F_4(SQ) = \min \left\{ \begin{array}{l} g_{f,2}(0) \cdot d\tau + F_3(SQ) \\ g_{f,2}(dSQ) \cdot d\tau + F_3(SQ-dSQ) \\ \dots\dots\dots \\ g_{f,2}(SQ) \cdot d\tau + F_3(0) \end{array} \right\} \end{cases}$$

ただし、濃度  $C$ 、貯水容積  $V$ 、操作流量  $Q$  に対する式 (2.21), (2.22), (2.23) などの制約条件を満足するもののみをとる。以下同様に第  $i$  段階での  $F_{i+2}$  は前の第  $(i-1)$  段階の  $F_{i+1}$  を用いて計算し、制約条件を満足するものの中から  $F_{i+2}(SQ)$  を選んで最終の  $F_{n+2}(SQ)$  に至るまで計算する。そして  $F_{n+2}(SQ)$  の中で最小の

**Table 1** Variations of Weighting Factor ( $a_1, a_2$ ), Value of Objective Function  $X$  and Total Discharge  $SQ$

$a_1$	$a_2$	$X$					$SQ$				
		$p$ 0.5	$p$ 1.0	$p$ 1.5	$p$ 2.0	$p$ 10.0	$p$ 0.5	$p$ 1.0	$p$ 1.5	$p$ 2.0	$p$ 10.0
1.000	0.000	0.873	0.795	0.727	0.666	0.251	13.2	13.2	13.2	13.2	13.2
0.995	0.005	0.874	0.797	0.729	0.668	0.255	13.2	13.2	13.2	13.2	13.2
0.975	0.025	0.878	0.803	0.736	0.677	0.272	13.2	13.2	13.2	13.2	13.2
0.925	0.075	0.883	0.814	0.751	0.697	0.310	14.7	13.2	13.2	13.2	13.2
0.875	0.125	0.879	0.815	0.759	0.709	0.341	15.0	13.2	13.2	13.2	14.0
0.825	0.175	0.872	0.811	0.760	0.714	0.366	17.6	15.2	15.0	14.5	15.0
0.775	0.225	0.866	0.804	0.758	0.715	0.390	20.1	15.0	15.0	15.0	15.1
0.725	0.275	0.858	0.791	0.752	0.715	0.414	20.1	18.0	15.0	15.1	15.0
0.675	0.325	0.851	0.779	0.743	0.710	0.432	20.2	18.1	18.0	15.0	18.0
0.625	0.375	0.844	0.766	0.734	0.703	0.450	20.2	20.0	18.2	18.0	18.1
0.575	0.425	0.837	0.750	0.721	0.697	0.466	20.2	20.2	20.2	18.2	18.4
0.525	0.475	0.830	0.735	0.704	0.686	0.477	20.2	20.0	20.2	18.3	17.1
0.475	0.525	0.823	0.720	0.688	0.670	0.487	20.2	20.0	20.2	20.2	17.2
0.425	0.575	0.815	0.705	0.673	0.654	0.493	20.2	18.6	20.2	20.2	17.4
0.375	0.625	0.808	0.687	0.656	0.639	0.498	20.2	19.7	20.2	20.2	17.5
0.325	0.675	0.801	0.671	0.639	0.622	0.502	20.2	19.7	20.2	20.1	20.2
0.275	0.725	0.794	0.655	0.622	0.604	0.505	20.2	19.7	20.2	19.9	20.2
0.225	0.775	0.786	0.639	0.605	0.587	0.508	20.2	19.7	19.3	19.9	20.2
0.175	0.825	0.779	0.623	0.587	0.570	0.507	20.2	19.7	18.4	18.4	20.2
0.125	0.875	0.772	0.615	0.570	0.552	0.500	20.2	19.6	18.4	18.4	20.2
0.075	0.925	0.765	0.599	0.553	0.535	0.492	20.2	19.6	18.4	18.4	20.2
0.025	0.975	0.758	0.584	0.536	0.518	0.470	20.2	19.6	18.4	18.4	19.9
0.000	1.000	0.754	0.576	0.527	0.509	0.464	20.2	19.6	18.4	18.4	19.9

ものを選べば、そのときの総水量  $SQ$  とその時刻における最適操作流量  $Q_n$  が求まる。これから逆に  $F_{n+1}(SQ - Q_n)$ ,  $F_n(SQ - Q_n - Q_{n-1})$ , ...,  $F_3(Q_1)$  をたどってゆけば、各時刻における最適操作流量  $Q_{n-1}$ ,  $Q_{n-2}$ , ...,  $Q_2$ ,  $Q_1$  が順次、決定されていく。

上述のようにして計算された最適解については沈殿池流出水の受入れ側（沈殿池に後続する処理施設もしくは放流水域）から要求される流出水の流量  $Q$ 、濃度  $C$  に対する許容範囲が存在し、これを常に満足していなければならないことはいうまでもない。最適計算の過程すなわち第1段階、第2段階、……、第  $n$  段階における流出水の  $C$ 、 $Q$  を求める際にはこれらがそれぞれの制約条件である式 (2.21)、(2.23) を満足しているかを、そのつど判定して、制約条件（許容範囲）を満足しているもののみを最適解の候補として残し、満足しないものは捨て次段階の計算に進んでいる。このような計算の結果得られた各段階（時刻）の  $C$ 、 $Q$  の最適解候補集団の中のいずれを取り出しても流出水に対する制約条件を満足しており、最適解は常に制約条件すなわち許容範囲を満足している。その様子は 図-1~6 に示す最適解の  $C$ 、 $V$ 、 $Q$  の変化のパターンとこれらに対する制約条件とを対比すれば明らかである。

### 3. 非定常最適操作の数値計算例

筆者らはさきに、沈殿池への流入水中の浮遊物質濃度および流量がそれぞれ式 (2.15)、(2.14) に示すように正

弦波的に変動した場合について、流出水の流量もやはり正弦波的な操作が行われるものとして、沈殿池の非定常操作に関して最適性の存在することを明らかにした<sup>7)</sup>。本論文においても計算の便宜上、流入水の条件については同様に正弦波的な変動を与え、可変容量型の沈殿池操作を行うものとしているが、流出水流量の操作パターンについてはなんら制限を加えずに全く自由に操作されることを想定して沈殿池の非定常最適操作についての検討を行った。また、筆者らのこれまでの研究と同様に沈殿池底面からの沈殿物の再浮上を考慮している。

式 (2.16)、(2.17) のような非定常モデルを用いて式 (2.33)、(2.34) で示される非定常最適操作の例を以下に数値計算によって示す。数値計算は式 (2.18) で定義する無次元数  $p$  が 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 10.0 の各場合について、評価関数式 (2.19) の中の重み係数  $a_1$ 、 $a_2$  を **Table 1** のように変化させて行った。 $p$  は流入水中の浮遊物質の沈降特性、平均流入水流量、および沈殿池底面積によって変化するものであるが、浮遊物質の沈降特性が対象としている操作期間中に変化しないものとする、 $p$  はその期間においては一定とみなすことができる。また、重み係数  $a_1$  と  $a_2$  とは **Table 1** では補数の関係で変化させているが、これらの値はその水の処理の目的に応じて、適当に設定されるべきもので **Table 1** の値は単なる一例にすぎない。本論文では、 $a_1$  と  $a_2$  との関係を相対的な大きさと表現するために補数で与えたが、 $a_1$  と  $a_2$  との関係が補数でない場合には  $a_1' = a_1 / (a_1 + a_2)$ 、 $a_2' = a_2 / (a_1 + a_2)$  のように書きかえると  $a_1'$  と

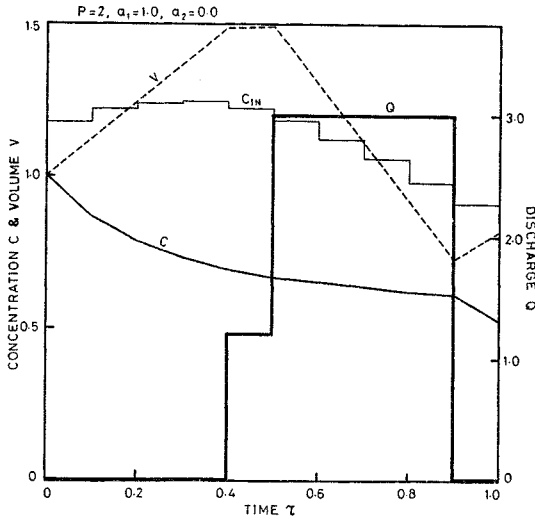


Fig. 1 Variations of Discharge  $Q$ , Effluent Concentration  $C$  and Volume  $V$  with Time  $\tau$  (1)

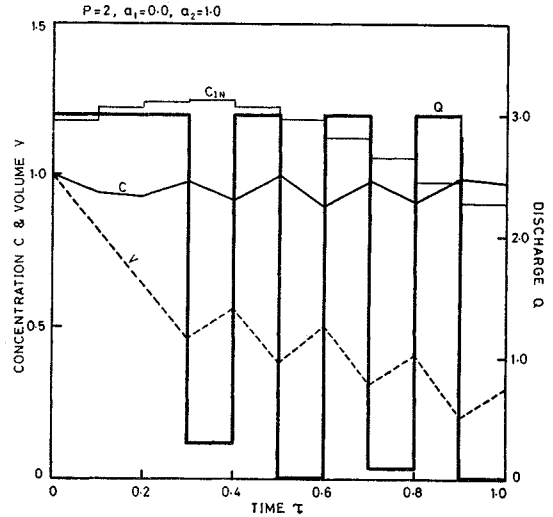


Fig. 3 Variations of Discharge  $Q$ , Effluent Concentration  $C$  and Volume  $V$  with Time  $\tau$  (3)

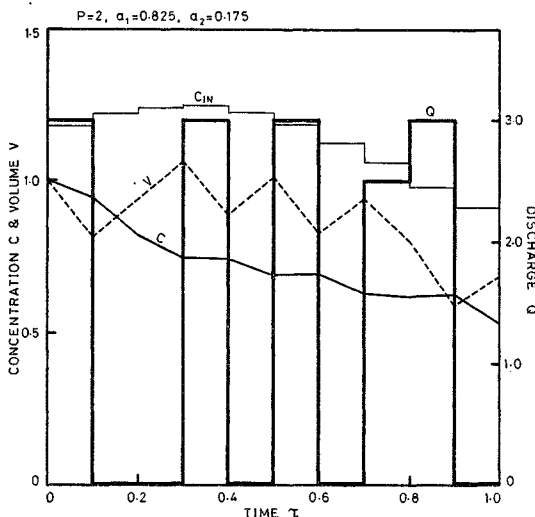


Fig. 2 Variations of Discharge  $Q$ , Effluent Concentration  $C$  and Volume  $V$  with Time  $\tau$  (2)

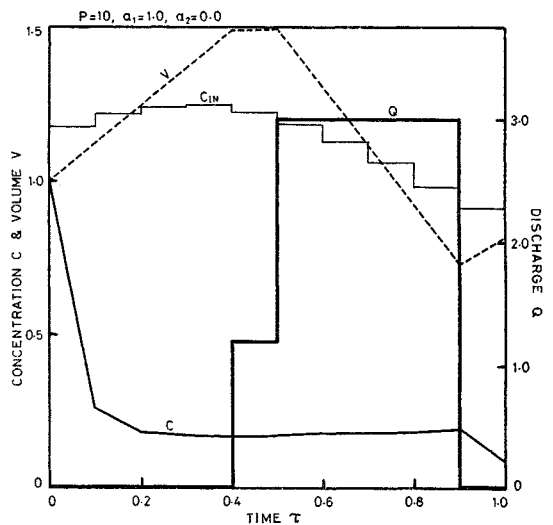


Fig. 4 Variation of Discharge  $Q$ , Effluent Concentration  $C$  and Volume  $V$  with Time  $\tau$  (4)

$a_2'$  とは Table 1 の  $a_1$ ,  $a_2$  と同じ意味をもつ。

非定常最適操作を行う期間  $\tau_f$  は流入水の浮遊物質濃度および流量の変動の予測がすでに行われた期間であれば、任意の長さにとりうるが、本数値計算では操作期間を適当な数に分割し、式 (2.33), (2.34) のような関数方程式を用いて各時刻 (段階) における関数  $F_i$  の値を求めて記憶するために、電算機の容量によってその総ステップ数には制限がある。したがって、操作期間をあまり長くすれば計算のステップ幅すなわち時間幅が大きくなり流量操作の間隔は大きくなる。また、あまり長い期間では流入水条件の予測そのものが不正確になるから、非定常最適操作の評価についてもその信頼性は低くなるも

のと思われる。 $\tau_f=1.0$  とすると、これは沈殿池の操作を行う期間の平均的な理論滞留時間に相当する。したがって、0.1のステップ幅で計算するものとする、通常の水処理施設の場合には理論滞留時間は1~2時間程度<sup>10)</sup>であるから、5~10分程度の間隔で流出水流量の操作を行うことになる。本数値計算では $\tau_f=1.0$ とし、対象期間では0.1の無次元時間ごとに10回の流出水流量の操作を行っている。

流出水流量の操作可能な最小単位は計算の都合上、無次元流量で0.1としている。この値を小さくすれば、評価関数の計算量と記憶量が増大し、やはり、電算機の容量から制限を受けるものと思われる。操作可能な流量の

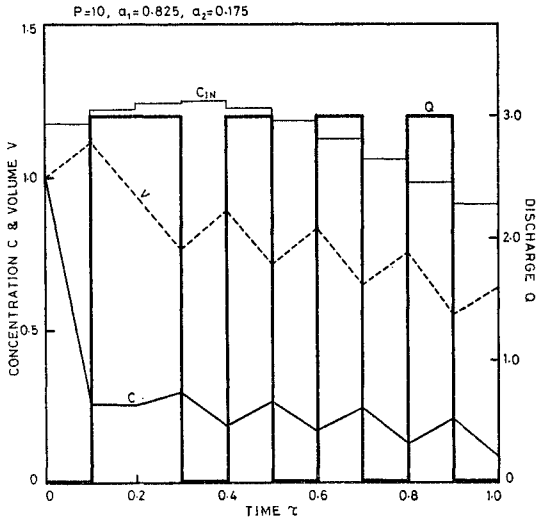


Fig. 5 Variations of Discharge  $Q$ , Effluent Concentration  $C$  and Volume  $V$  with Time  $\tau$  (5)

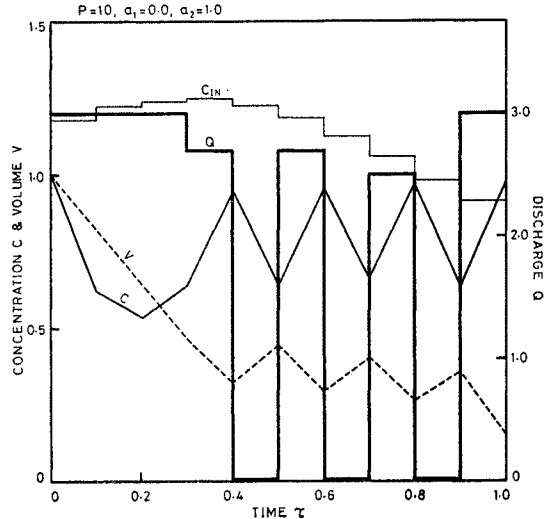


Fig. 6 Variations of Discharge  $Q$ , Effluent Concentration  $C$  and Volume  $V$  with Time  $\tau$  (6)

最小単位を0.1とした場合には、流出水流量  $Q$  には式 (2.23) のような制約条件があったから  $Q_{\min}=0, Q_{\max}=3.0$  とすると

$$Q=0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 2.9, 3.0$$

のうちのいずれかの値をとることになる。さらに、沈殿池貯水容積  $V$  についても式 (2.22) のような制約があり、 $V_{\min}=0.1, V_{\max}=1.5$  としている。以上のような制約条件のもとに操作可能な流出水流量の総和  $SQ$  を求めると式 (2.25) より、

$$0.63 \leq SQ \leq 2.02$$

となる。

式 (2.33), (2.34) に基づいて  $\tau=0 \sim 1.0$  の期間の沈殿池の非定常最適操作を行った場合の流出水流量  $Q$ , 流出水中の浮遊物質濃度  $C$ , 沈殿池の貯水容積  $V$  の時間的変化のパターンを示すと Fig. 1~6 のようになる。無次元数  $p$  が変化すれば、沈殿池の除去効率が変わるために予想されるごとく流出水中の浮遊物質濃度も変化している。また、流出水流量の操作パターンも係数  $a_1$  と  $a_2$  の値によってかなり変化している。それに応じて沈殿池の貯水容積も変化している。 $p$  の大きいほうが、すなわち理想沈殿効率の良いほうが流出水中の浮遊物質濃度は低くなるが、Table 1 に見られるごとく総処理水量  $SQ$  は必ずしも多くはならない点が注目される。総処理水量  $SQ$  を評価関数の中に考慮する余地があるものと思われる。Table 1 の評価関数の値  $X$  を見ると  $p=1.0$  を除いては、平均濃度  $C$  を重視した場合 ( $a_1 > a_2$ ) の極限 ( $a_1=1, a_2=0$ ) のほうが平均貯水容積  $V$  を重視した場合 ( $a_1 < a_2$ ) の極限 ( $a_1=0, a_2=1$ ) よりも評価関数の値は大きくなっている。これは  $p$  が相当大きい沈殿

池を除いては、流出水流量の操作という手段によって流出水中の浮遊物質濃度を下げるのは沈殿池の貯水容積を小さくすることよりも困難であることを示すものであるといえよう。また、Table 1 では操作期間  $\tau_f$  にわたる流出水の総水量  $SQ$  が最大となるのは必ずしも沈殿池の貯水容積  $V$  を小さくすることに重点を置いた場合の極限 ( $a_1=0, a_2=1$ ) においてではなく、むしろその極限にいたる途中の段階の  $a_1 \neq 0, a_1 < a_2$  の場合に  $SQ$  の最大値が実現されている ( $p=1.0, 1.5, 2.0, 10.0$  の場合)。これは沈殿池底面からの沈殿物の再浮上が加味されているためであると思われる。数値計算では  $a_1+a_2=1$  としているので貯水容積の重み  $a_2$  が大きくなると濃度の重み  $a_1$  は小さくなり、したがって、濃度  $C$  は少々高くともできるだけ貯水容積  $V$  を減少させるように非定常操作されるわけである。このように初期の段階から貯水容積  $V$  を減少させるように  $Q$  を大きくすると沈殿物の再浮上によって早い時期に濃度が高くなり、制約条件  $C \leq C_{\max}$  によって、それ以後の操作流量がかえって押えられるために  $SQ$  は小さくなるのであろう。流量操作のパターンについていえば、濃度重視型の非定常操作では操作流量は前半よりも後半に大きくなり、貯水容積重視型では操作流量は後半よりも前半に大きくなる傾向がみられる。このように貯水容積重視型の操作では操作期間の後半に流出流量  $Q$  が小さくなるという数値実験の結果は次のように説明されよう。総処理水量  $SQ$  に関して述べたと同様に期間全体を通じて貯水容積  $V$  を小さくするためには初期の段階から流出流量  $Q$  を大きくとり貯水容積を小さくする必要があるが、このように  $Q$  を大きくすると後半に濃度  $C$  がしだいに高くなるか

ら制約条件  $C \leq C_{\max}$  を満足すべく流出流量  $Q$  を押えるようになるからであると思われる。また、濃度重視型の操作で後半に流出流量  $Q$  が大きくなるのは、濃度  $C$  を低くするために沈殿池貯水容積を大きく、したがって、流出流量  $Q$  を小さくしなければならないが、貯水容積  $V$  に対する制約条件  $V_{\min} \leq V \leq V_{\max}$  があるので、いつまでも流出流量  $Q$  を小さくして貯水容積を増加させずにはいかず、後半に流出流量  $Q$  をある程度とらねばならなくなった結果であると解釈できよう。

また、数値計算の結果みられる流出水流量の操作パターンのもう1つの特徴は操作流量  $Q$  が制約条件の両端  $Q_{\max}$  と  $Q_{\min}$  に設定されることが多く、その中間の流量で操作されることは比較的少ないことである。これは、非定常沈殿池モデルにおける最適操作の検討を Maximum Principle<sup>11)</sup> で行えばはっきりするが、Hamiltonian に操作変数が線形に入った場合に得られる、いわゆる Bang-Bang Control<sup>12)</sup> と類似の傾向である（付録参照）。

以上の数値計算例で明らかごとく、流出水流量の操作のパターンは評価関数式 (2.19) における重み係数  $a_1$

と  $a_2$  の値によって相当顕著に変化することがわかった。したがって、評価関数に濃度変動のばらつきあるいは貯水容積変動のばらつきなどの因子も加えた場合には、さらに異なった流量操作のパターンの得られることが予想される。

なお、 $a_1=1, a_2=0$  として最適操作を行った場合および最適操作を行わなかった場合のそれぞれの流出水濃度  $C_{opt}$  と  $C$  との変化を調べて比較すると Fig. 7~11 のようになり、いずれの  $p$  の値についても、最適操作を行った場合の流出水中の浮遊物質の濃度は最適操作を行わなかった場合よりも低く、最適操作の効果がはっきりと現われている。

また、操作期間全体を通じての流出水中の浮遊物質の平均濃度を比較してみても Table 2 のようになり、やはり、最適操作の効果が認められる。

Fig. 7~11 と Table 2 とは瞬間値と平均値というそれぞれ別の観点からこの最適操作の結果と最適操作を行わなかった場合の結果とを比較したものである。Fig. 7~11 の  $\tau=0$  は初期状態からの沈殿操作開始 (start up) に相当し、この瞬間では流出水濃度は流入水濃度と同一

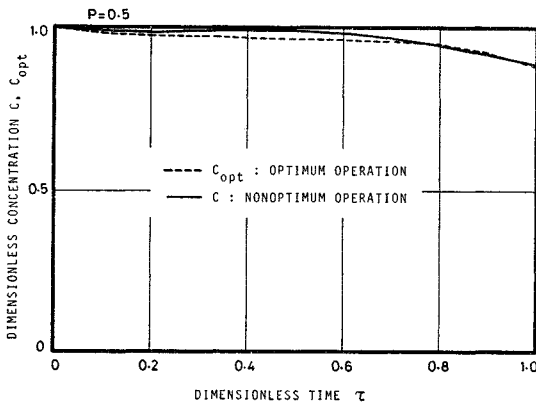


Fig. 7 Variations of Effluent Concentration  $C$  and  $C_{opt}$  with Time  $\tau$  (1)

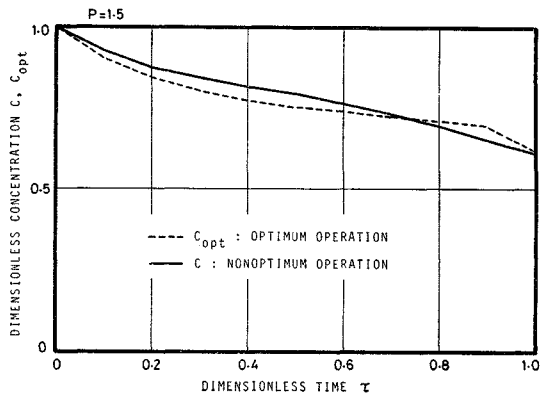


Fig. 9 Variations of Effluent Concentration  $C$  and  $C_{opt}$  with Time  $\tau$  (3)

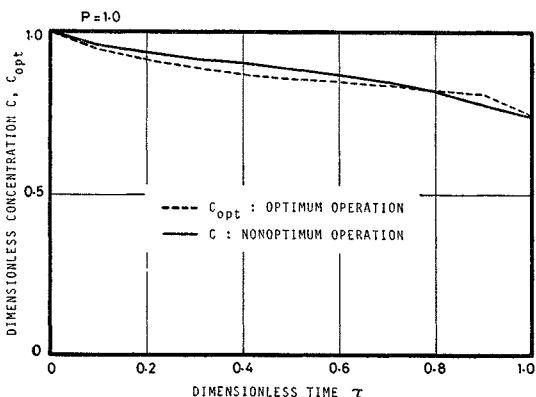


Fig. 8 Variations of Effluent Concentration  $C$  and  $C_{opt}$  with Time  $\tau$  (2)

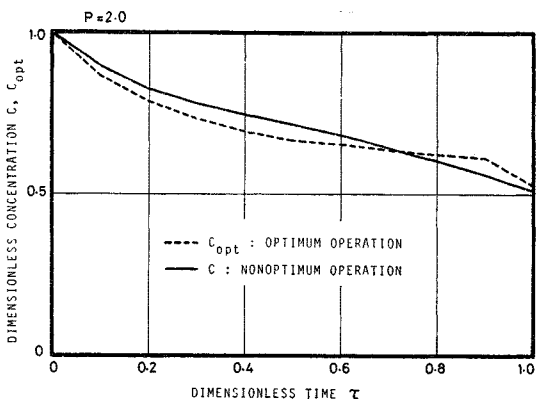


Fig. 10 Variations of Effluent Concentration  $C$  and  $C_{opt}$  with Time  $\tau$  (4)



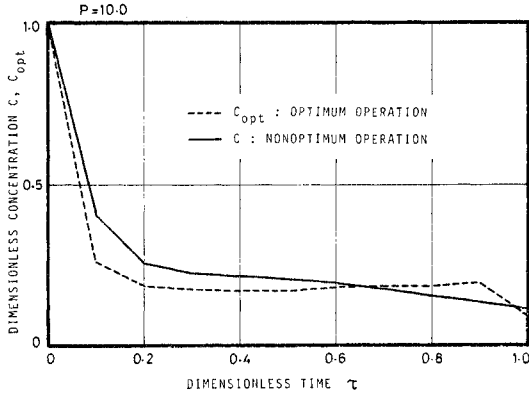


Fig. 11 Variations of Effluent Concentration  $C$  and  $C_{opt}$  with Time  $\tau$  (5)

Table 2 Average Concentrations in Case of Optimum Operation and in Case of Nonoptimum Operation

$p$	Optimum Operation	Nonoptimum Operation
0.5	0.958	0.969
1.0	0.863	0.875
1.5	0.780	0.794
2.0	0.709	0.725
10.0	0.254	0.280

なので無次元濃度では最適操作を行った場合も行わなかった場合も同じで、 $C=C_{opt}=1.0$  となる。この濃度から時間の経過とともに最適操作の効果が現われ、流出水濃度はパラメータ  $p$  の値にしたがってそれぞれ変化する。全体に  $C_{opt} < C$  で最適操作の効果がみられるが、操作期間の一部においては  $C_{opt} > C$  となる。これは一時的にはたとえ  $C_{opt} > C$  となっても Table 2 に見られるごとく操作期間全体にわたってみれば、流出水の平均濃度をより低くするという評価基準は達成されていることを示すものである。

上述の数値実験での結果は流入原水の水質および水量の変動の周期と位相が両方とも一致した最も苛酷な負荷の変動条件に対して非定常最適操作を行って得られた結果である。

#### 4. 結果の要約と結論

沈殿池流入水の時間的な濃度および流量の変動がある場合には、沈殿池の運転条件を適切に操作することによって、これら流入水条件の変動に対処する必要があるとの考えから、本研究は流入水条件の非定常な変動に対応して沈殿池の運転条件を変え、物質移動特性（沈殿および再浮上）を変化させて、沈殿除去効率を処理目的に応じて必要かつ十分な値に保つような操作を行ったものである。従来の水処理施設では沈殿池貯水部については固

定容量として運転が行われ、流入水量の増大はそのままいわゆる表面負荷率の増大につながり、理想沈殿論的といえば除去効率の減少を招き、流出水の水質の悪化を意味し、流入水濃度の増加もその影響はそのまま流出水濃度の増加となっていた。また逆に、低濃度の流入水については必ずしも高濃度の場合の表面負荷率をそのまま維持する必要はなく、可能なかぎり処理流量を大きくとるべきものと思われるが、この点からも従来の固定容量型の処理方法には問題があるものと思われる。本研究では沈殿池の操作変数として、流出水の流量をとり沈殿池の貯水槽としての機能をも活用して可変容量型の操作を行うことにより、沈殿池の貯水容積を流入水条件の時間的変動に対応して適切に変化させ所期の目標を達成しようとしている。

本研究で得られた結果を要約すると次のようになる。

1) 沈殿池の非定常最適操作流量は集中系モデル

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\hat{C}}{d\tau} &= -\frac{Q_{IN} + (1-k)p\hat{C}}{\hat{V}} + \frac{Q_{IN}\hat{C}_{IN}}{\hat{V}} \\ &\dots\dots\dots(2.16) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\hat{V}}{d\tau} &= Q_{IN} - Q \dots\dots\dots(2.17) \end{aligned} \right.$$

を用いれば、

$$\left\{ \begin{aligned} F_n(SQ) &= \min_{\Delta\tau \cdot Q_{n-2}} [g_{f,n-1}(\Delta\tau \cdot Q_{n-2}) \cdot \Delta\tau \\ &\quad + F_{n-1}(SQ - \Delta\tau \cdot Q_{n-2})] \dots\dots(2.33) \end{aligned} \right.$$

$$F_2(SQ) = g_{f,2}(\Delta\tau \cdot Q_1) \cdot \Delta\tau + F_1 \dots\dots\dots(2.34)$$

のような関数方程式で示される方策にしたがって求めることができる。

2) 式 (2.19) で示される評価関数に含まれる平均濃度の項にかかる重み係数  $a_1$  と平均貯水容積の項にかかる重み係数  $a_2$  の値のとり方によって、その流出水流量の非定常最適操作のパターンは相当変化することが確かめられた。

3) 濃度重視型の非定常操作では操作期間の後のほうの段階において流出水流量が大きくなり、沈殿池容積重視型の非定常操作では操作期間の初期の段階において流出水流量が大きくなる傾向がみられる。

4) 流出水流量  $Q$  による総処理水量  $SQ$  は必ずしも容積重視型の極限 ( $a_1=0, a_2=1$ ) で最大となるのではなく、この極限状態に至るまでの過程 ( $a_1 \neq 0, a_1 < a_2$ ) で生じる場合がある。

5) 流出水流量  $Q$  の値は上限  $Q_{max}$  および下限  $Q_{min}$  に設定されることが多く、Bang-Bang タイプの操作となる傾向がある。

6) 流入水条件の変動と沈殿池の可変容量型操作による物質移動特性の時間的変化は式 (2.18) に示されるいわゆる理想沈殿除去効率に相当する無次元数  $p = w_p S_B / Q_{IM}$  (対象期間においては一定値) の変化ではなく、再浮

上パラメータ  $k$  の変化としてとらえることができる。

7) 沈殿池の変容容量型の非定常最適操作の効果は数値実験によりはっきりと認められた。

本モデル中に用いられている浮遊物質に対する乱流拡散係数  $E_x$  や再浮上パラメータ  $k$  に含まれる係数の値は単なる一例にすぎないから、実際の沈殿池において、本論文で述べたような非定常最適操作を行うには対象とする沈殿池で浮遊物質濃度や流量を沈殿池の入口および出口において十分計測しておき、プロセスに含まれるこのようなパラメータの推定を行っておかねばならないことはいまでもない。しかし、たとえ操作の初期の段階においてパラメータの推定に誤差があっても、このような非定常最適操作を行っていく過程で、常時浮遊物質濃度および流量の計測を行い、プロセス中のパラメータの再評価を繰り返していくならば、この非定常操作はしだいに改善され信頼性の高いものとなっていくことが期待される。

なお、本研究を進めるに当り、沈殿池モデルの底面における境界条件について、大阪大学基礎工学部化学教室化学工学科の伊藤龍象教授より輸送現象論的な観点から熱心なご討議を賜った。

また、数値計算には京都大学大型計算機センターの FACOM 230-60 および大阪大学大型計算機センターの NEAC 2200-700 を使用した。

参 考 文 献

- 1) 田井慎吾：下水処理場流入水量・水質変化の調和解析，用水と廃水，Vol. 7, No. 4, pp. 28~33, 1965年4月。
- 2) 奥野長晴：下水処理場流入水量水質変動のスペクトル解析，下水道協会誌，Vol. 8, No. 88, pp. 32~40, 1971年9月。
- 3) 高松武一郎・内藤正明・芝 定孝：矩形沈殿池の過渡特性について，土木学会論文報告集，第193号，pp. 49~58, 1971年9月。
- 4) 高松武一郎・井上頼輝・芝 定孝・上田育世：矩形沈殿池の非定常特性に関する研究，土木学会論文報告集，第197号，pp. 43~55, 1972年1月。
- 5) 高松武一郎・井上頼輝・芝 定孝：沈殿池の操作変数に関する一理論的考察，土木学会論文報告集，第209号，pp. 85~94, 1973年1月。
- 6) 高松武一郎・内藤正明・芝 定孝：矩形沈殿槽における沈殿物の再浮上に関する一考察，土木学会論文報告集，第183号，pp. 43~54, 1970年11月。
- 7) 土木学会編：水理公式集（昭和46年改訂版），土木学会，pp. 415~418, 昭和46年11月。
- 8) Thomas R. Camp：Sedimentation and the Design of Settling Tanks, Trans. ASCE, Vol. 111, pp. 895~958, 1946.
- 9) Richard E. Bellman and Robert E. Kalaba：Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems, American Elsevier, N.Y., 1965.
- 10) Auton E. Sparr：Operation of Sedimentation Tanks, Journal WPCF, Vol. 36, No. 6, pp. 760~766, 1964.
- 11) B.Γ. ボルチャンスキー：最適制御の数学的方法（坂本実訳），総合図書，東京，1972年3月。
- 12) Davison, E.J. and D.M. Monro：A Computational

Technique for Finding "Bang-Bang" Controls of Non-linear Time-Varying Systems, Automatica, Vol. 7, No. 2, pp. 255~260, 1971.

【付 録】 Maximum Principle による沈殿池の最適操作とその Hamiltonian について

非定常の沈殿池モデルを用いて最適操作の方法を Maximum Principle で定式化すると以下のようになる。まず、沈殿池モデルを構成する式(2.16),(2.17)がプロセス方程式となるから、プロセス方程式は

$$\begin{cases} \frac{dC}{d\tau} = -\frac{Q_{IN} + (1-k)p}{V}C + \frac{Q_{IN}C_{IN}}{V} \\ \dots\dots\dots (A.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dV}{d\tau} = Q_{IN} - Q \\ \dots\dots\dots (A.2) \end{cases}$$

である(ただし、 $\hat{C}$ ,  $\hat{V}$ ,  $\hat{Q}$ ,  $\hat{Q}_{IN}$ ,  $\hat{C}_{IN}$ 等は単に  $C$ ,  $V$ ,  $Q$ ,  $Q_{IN}$ ,  $C_{IN}$  と書く)。式(A.1),(A.2)に対する初期条件は、

$$C(0) = C_0, V(0) = V_0, \dots\dots\dots (A.3)$$

とする。また、沈殿池の非定常最適操作における目的関数は式(2.19)より

$$J[C, V, Q] = \frac{a_1}{\tau_f} \int_0^{\tau_f} C d\tau + \frac{a_2}{\tau_f} \int_0^{\tau_f} V d\tau \dots\dots (A.4)$$

である。ただし、 $C(\tau)$ ,  $V(\tau)$  は状態変数で、 $Q(\tau)$  は操作変数である。式(2.20)より  $Q(\tau)$  を操作して  $J[C, V, Q] \rightarrow \min$  を満足させるようにすればよい。ここで次のような新しい状態変数  $x(\tau)$  を導入する。

$$x = \int_0^{\tau_f} \left( \frac{a_1}{\tau_f} C + \frac{a_2}{\tau_f} V \right) d\tau \dots\dots\dots (A.5)$$

そうすると、目的関数式(A.4)は単に

$$J = x(\tau_f) \dots\dots\dots (A.6)$$

と表わせる。また、式(A.5)より次のような微分方程式とその初期条件が得られる。

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{a_1}{\tau_f} C + \frac{a_2}{\tau_f} V \dots\dots\dots (A.7)$$

$$x(0) = 0 \dots\dots\dots (A.8)$$

式(A.5)で定義する新しい状態変数  $x$  の導入により新しいプロセス方程式系は次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{dC}{d\tau} = -\frac{Q_{IN} + (1-k)p}{V}C + \frac{Q_{IN}C_{IN}}{V} \\ \dots\dots\dots (A.9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dV}{d\tau} = Q_{IN} - Q \\ \dots\dots\dots (A.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{a_1}{\tau_f} C + \frac{a_2}{\tau_f} V \\ \dots\dots\dots (A.11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(0) = C_0, V(0) = V_0, x(0) = 0 \\ \dots\dots\dots (A.12) \end{cases}$$

ここで、次のような方程式系で与えられる補助変数

$\psi_1(\tau)$ ,  $\psi_2(\tau)$ ,  $\psi_3(\tau)$  を導入する。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{d\tau} &= \psi_1 \frac{Q_{IN} + (1-k)p}{V} - \psi_3 \frac{a_1}{\tau_f} \dots (A \cdot 13) \\ \frac{d\psi_2}{d\tau} &= -\psi_1 C \frac{p \cdot \frac{\partial k}{\partial V} \cdot V + \{Q_{IN} + (1-k)p\}}{V} \\ &\quad + \psi_1 \frac{Q_{IN} C_{IN}}{V^2} - \psi_3 \frac{a_2}{\tau_f} \dots (A \cdot 14) \\ \frac{d\psi_3}{d\tau} &= 0 \dots \dots \dots (A \cdot 15) \\ \psi_1(\tau_f) &= 0, \psi_2(\tau_f) = 0, \psi_3(\tau_f) = -1 \\ &\dots \dots \dots (A \cdot 16) \end{aligned} \right.$$

このとき得られる Hamiltonian は

$$H = \psi_1 \left\{ -\frac{Q_{IN} + (1-k)p}{V} C + \frac{Q_{IN} C_{IN}}{V} \right\} + \psi_2 (Q_{IN} - Q) + \psi_3 \left( \frac{a_1}{\tau_f} C + \frac{a_2}{\tau_f} V \right) \dots \dots \dots (A \cdot 17)$$

である。上式の右辺第2項 ( $\psi_2$  の項) を見ると、明らかに操作変数  $Q$  が線形で入ってきている。このように Hamiltonian に操作変数が線形で入っている場合には操作変数とその制約条件の上限および下限の値をとるよう操作されるいわゆる Bang-Bang タイプの操作となることが予想される。式(2.20)の方策すなわち  $J \rightarrow \min$  の必要条件はこの Hamiltonian を用いて表現すれば

$H \rightarrow \max$  である。したがって、

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \dots \dots \dots (A \cdot 18)$$

でなければならない。上式と式 (A・17) とより式(2.20)の方策を表現する方程式として

$$\psi_1 p \frac{C}{V} \cdot \frac{\partial k}{\partial Q} - \psi_2 = 0 \dots \dots \dots (A \cdot 19)$$

が得られる。結局、式 (2.16), (2.17) で構成される非定常沈殿池モデルを用いて、Maximum Principle に基づく非定常最適操作を行うためには、プロセス方程式 (A・9), (A・10), (A・11) と補助変数に対する微分方程式 (A・13), (A・14), (A・15) および Hamiltonian に対する条件より得られる方程式 (A・19) の合計7個の方程式を用いて、3個の状態変数  $C, V, x$  と1個の操作変数  $Q$  および3個の補助変数  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  の合計7個の変数を求めればよい。その場合に式 (2.21), (2.22), (2.23) で示される制約条件を満足すべきことはいうまでもない。ただし、上記の方程式系は2点境界値問題となるうえに、操作変数のみならず状態変数に対しても制約条件があるために解くことは非常に困難である。

なお、この Maximum Principle による沈殿池の非定常最適操作の定式化に関しては、京都大学工学部化学工学教室の橋本伊織助教授のご助言を頂いた。

(1973.9.10・受付)