

片側補強リングの補強効果について

ON THE REINFORCING EFFECTS OF THE ONE-SIDED STIFFENING RING

秋山 成興*・奥村 敏恵**
By Narioki Akiyama and Toshie Okumura

1. ま え が き

板の開孔部を片側補強リングで補強する工法は、最もよく使われるものの一つである。この場合、構造の非対称性によって、面内荷重をうけた場合でも、補強リング接合線にそって、必ず面外曲げを生じ、この大きさは、板と補強リングの相対剛度やリングの形状によって無視できない値になる場合がある。

このような問題を取り扱った論文は、筆者らの知る限りでは文献1)があるが、一様引張りの場合のみであり、十分とはいえず、また、電子計算機による数値計算に対しては、必ずしも配慮されているとはいえない。

文献1)の所論を拡張、発展させて、電子計算機の使用を考慮して、(1) 一様引張り、(2) 純曲げ、の場合について述べることにし、特に、上述の板、補強リングの相対剛度、補強リングの形状によって応力状態がどのように影響をうけるかを論じ、このような構造の設計の際の問題点を指摘したい。すなわち、補強リングとしての慣用寸法の範囲内で、本理論が適用できるものと考え、リングと板の寸法パラメータを変化させた場合の応力集中の傾向を数値計算して求め、この結果より片側補強リングの補強効果は必ずしも満足すべきものではないことを指摘したい。

ウェブに開孔をもつI形はりの載荷実験を行ったが、その結果より、この理論のはりへの適用の可能性もあわせて触れたい。

2. 解析方法

解析方法としては、

(1) 構造の非対称性を考慮せずに、補強リングつき

の開孔板の面内問題を解く。

(2) 面内問題より、板と補強リングの接触面に等分布すると仮定した径方向、接線方向荷重 p^* 、 q^* を計算して、補強リングに単位角度当り、

$$\text{曲げモーメント } t_1/2 \cdot q^*$$

$$\text{ねじりモーメント } t_1/2 \cdot p^*$$

が作用した場合の面外問題を解く。

ここで、 t_1 : 板の厚さ。

(3) 最終的な応力状態は、両者の和として求める。最大応力は、補強リングと板の接合線上の板側で生ずるので、本論文では板の応力状態のみに注目した。

3. 一様引張りの場合 (対称荷重の場合)

(1) 面内問題

a) 応力およびモーメントのつり合い式

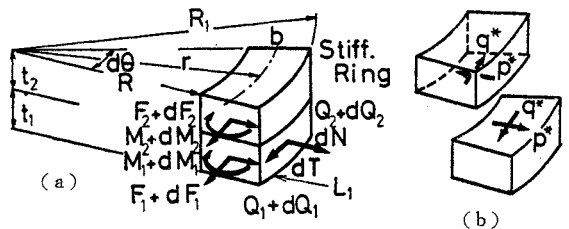
Fig. 1 に示す微小要素のつり合いを考える。 σ_n 、 τ_n を L_1 にそっての板からの作用応力とすると、

$$dN = \sigma_n t_1 R_1 d\theta; \quad dT = \tau_n t_1 R_1 d\theta \dots \dots \dots (3.1)$$

$$\therefore \sigma_n + i\tau_n = \frac{1}{R_1 t_1} \left(\frac{dN}{d\theta} + i \frac{dT}{d\theta} \right) \dots \dots \dots (3.2)$$

径方向のつり合いより

$$\frac{dN}{d\theta} = F_1 + F_2 - \frac{d}{d\theta} (Q_1 + Q_2) \dots \dots \dots (3.3)$$



(a) Stress Resultants
(b) Positive Directions of Indeterminate Stresses
 p^* and q^* between Ring and Plate

Fig. 1

* 正会員 工博 埼玉大学助教授 理工学部建設基礎工学科
** 正会員 工博 東京大学 教授 工学部土木工学科

周方向のつり合いより

$$\frac{dT}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta}(F_1 + F_2) - (Q_1 + Q_2) \dots \dots \dots (3.4)$$

$$\frac{dN}{d\theta} + i\frac{dT}{d\theta} = (F_1 + F_2) - i(Q_1 + Q_2) - i\frac{d}{d\theta}\{(F_1 + F_2) - i(Q_1 + Q_2)\} \dots \dots \dots (3.5)$$

いま、

$$\pi_k = (F_k - iQ_k) - i\frac{d}{d\theta}(F_k - iQ_k), \quad (k=1, 2) \dots \dots \dots (3.6)$$

とすると、

$$\sigma_n + i\tau_n = \frac{1}{R_1 t_1}(\pi_1 + \pi_2) \dots \dots \dots (3.7)$$

次に、モーメントのつり合いを考える。2次の微小量を省略すれば、

$$Q_1 + Q_2 = \frac{1}{R_1} \frac{d}{d\theta} \left\{ (M_1 + M_2) - \frac{b}{2}(F_1 + F_2) \right\} \dots \dots \dots (3.8)$$

また、補強リングの径方向、周方向の力のつり合いより、

$$p^* = \frac{1}{r} \left(\frac{dQ_2}{d\theta} - F_2 \right); \quad q^* = \frac{1}{r} \left(\frac{dF_2}{d\theta} + Q_2 \right) \dots \dots \dots (3.9)$$

対称荷重の場合、 F_1, M_1, F_2, M_2 を次のように表わす。

$$F_1 = \alpha_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)} (\sigma^k + \sigma^{-k});$$

$$F_2 = \alpha_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(2)} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \dots \dots \dots (3.10)$$

$$M_1 = r_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{(1)} (\sigma^k + \sigma^{-k});$$

$$M_2 = r_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{(2)} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \dots \dots \dots (3.11)$$

ここで、 $\sigma = e^{i\theta}$

これらを、式(3.6)~(3.9)に代入して、 $\alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(2)}, r_k^{(1)}, r_k^{(2)}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) で、 π_k, q^*, p^* を表わすと次のようになる。

$$\pi_1 = \alpha_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)} \left\{ (1+k) \left(1 - \frac{bk}{2R_1} \right) \sigma^k + (1-k) \left(1 + \frac{bk}{2R_1} \right) \sigma^{-k} \right\} + \frac{1}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{(1)} \{ (k+k^2)\sigma^k - (k-k^2)\sigma^{-k} \} \dots \dots \dots (3.12)$$

π_2 : π_1 の式で (1)→(2) とすればよい。

$$p^* = -\frac{\alpha_0^{(2)}}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{bk^2}{2R_1} \right) \frac{\alpha_k^{(2)}}{r} (\sigma^k + \sigma^{-k}) - \frac{1}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{r_k^{(2)}}{r} (\sigma^k + \sigma^{-k})$$

$$q^* = i \sum_{k=1}^{\infty} k \left(1 - \frac{b}{2R_1} \right) \frac{\alpha_k^{(2)}}{r} (\sigma^k - \sigma^{-k}) + \frac{i}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{r_k^{(2)}}{r} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \dots \dots \dots (3.13)$$

b) 補強リングの変形

F_2, M_2 が作用した場合の補強リングの外線における面内回転角 θ , 周方向ひずみ ϵ_θ を計算しよう。

フックの法則より、断面重心線より y の距離における周方向ひずみ ϵ_θ , 面内曲率変化 κ_θ はそれぞれ

$$\epsilon_\theta = \frac{F_2}{E_2 A_2} + \frac{M_2}{E_2 A_2 r} + \frac{M_2 r}{E_2 I_2} \frac{y}{r+y} \dots \dots \dots (3.14)$$

$$\kappa_\theta = \frac{F_2}{E_2 A_2 r} + \left(\frac{1}{E_2 A_2 r^2} + \frac{1}{E_2 I_2} \right) M_2 \dots \dots \dots (3.15)$$

ここで $I_2 = t_2 r^2 \left(r \ln \frac{2r+b}{2r-b} - b \right); A_2 = t_2 b$

と表わされる。

$\kappa_\theta = \frac{1}{r} \frac{d\theta}{d\theta}$ の関係より、積分して回転角 θ を求めると、補強リングと板の接合線上における ϵ_θ, θ は、 $y = b/2$ とおいて、次のように求められる。

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E_2 A_2} \left\{ \alpha_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(2)} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \right\} + \left(\frac{r}{E_2 I_2} \frac{b}{2R_1} + \frac{1}{E_2 A_2 r} \right) \cdot \left\{ r_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{(2)} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \right\} \dots \dots \dots (3.16)$$

$$i\theta = \frac{1}{E_2 A_2} \left\{ \alpha_0^{(2)} \ln \sigma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \alpha_k^{(2)} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \right\} + \left(\frac{1}{E_2 A_2 r} + \frac{r}{E_2 I_2} \right) \cdot \left\{ r_0^{(2)} \ln \sigma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} r_k^{(2)} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \right\} \dots \dots \dots (3.17)$$

しかるに、回転角の一価性より

$$\frac{1}{E_2 A_2} \alpha_0^{(2)} + \left(\frac{1}{E_2 A_2 r} + \frac{r}{E_2 I_2} \right) r_0^{(2)} = 0 \dots \dots \dots (3.18)$$

が成立しなければならない。

c) 板補強部の変形

補強リングの場合と全く同様にして求めることができる。すなわち、上指標“2”を“1”にすればよい。

d) 板の変形

板のある点における変位ベクトルを u とすれば²⁾,

$$\frac{du}{ds} = \epsilon_\theta t + [\vec{\partial}_i, t] \dots \dots \dots (3.19)$$

面内問題の場合、回転角ベ

クトル $\vec{\partial}_i, t$ は、
 $\vec{\partial}_i, t = \theta n$

となるので、

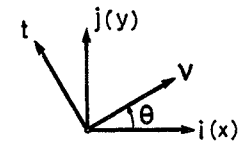


Fig. 2 Directions of Base Vectors (i, j) and (v, t)

$$[\vec{Q}, \mathbf{t}] = [\theta \mathbf{n}, \mathbf{t}] = -\theta \boldsymbol{\nu} \dots \dots \dots (3.20)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \varepsilon_\theta \mathbf{t} - \theta \boldsymbol{\nu} \dots \dots \dots (3.21)$$

デカルト座標系（基本ベクトルを i, j で表わす）に関する L_1 上の変位成分を u, v とすると、

$$\frac{d}{ds}(ui + vj) = \varepsilon_\theta t - \theta \boldsymbol{\nu} \dots \dots \dots (3.22)$$

これより、

$$\frac{du}{ds} = -\varepsilon_\theta \sin \theta - \theta \cos \theta;$$

$$\frac{dv}{ds} = \varepsilon_\theta \cos \theta - \theta \sin \theta \dots \dots \dots (3.23)$$

これを複素表示にすると、

$$\frac{d}{ds}(u - iv) = -ie^{-i\theta}(\varepsilon_\theta - i\theta) \dots \dots \dots (3.24)$$

また、 $2G(u - iv) = \kappa \overline{\phi_1(\sigma)} - \bar{\sigma} \phi_1'(\sigma) - \Psi_1(\sigma)$ より³⁾、

$$2G_1(\varepsilon_\theta + i\theta) = \kappa \overline{\phi_1(\sigma)} - \overline{\Psi_1(\sigma)} + \sigma^2 \{ \sigma \overline{\phi_1'(\sigma)} + \overline{\Psi_1(\sigma)} \} \dots (3.25)$$

ここで、 $\phi_1'(\sigma) = \overline{\phi_1(\sigma)}$; $\Psi_1'(\sigma) = \Psi_1(\sigma)$; $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ いま、複素応力関数 $\phi_1(\sigma)$, $\Psi_1(\sigma)$ をそれぞれ

$$\phi_1(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sigma^{-k}; \Psi_1(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sigma^{-k}$$

として、上式に代入すれば、

$$2G_1(\varepsilon_\theta + i\theta) = \kappa \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sigma^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \sigma^k - \left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} k \bar{a}_k \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k \sigma^{k-2} \right\} \dots \dots \dots (3.26)$$

一様引張りの場合、無限遠点における引張り応力値を σ_0 とすれば⁴⁾、

$$a_0 = \sigma_0/4; b_0 = -\sigma_0/2$$

また、

$$N - iT = t_1 \{ \phi_1(\sigma) + \overline{\phi_1(\sigma)} - \sigma^2 \{ \sigma^{-1} \phi_1'(\sigma) + \Psi_1(\sigma) \} \} \dots \dots \dots (3.27)$$

e) 接合条件

3個の構造要素、補強リング、板補強部、板、の接合線 L_1 における、応力のつり合い条件および変形の連続性が接合条件である。

これを具体的に書くと、

応力のつりあい条件

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_0}{2} + a_2(\sigma^{-2} + \sigma^2) + \frac{\sigma_0}{2} \sigma^{-2} - \bar{b}_2 - (-2\bar{a}_2 + \bar{b}_4)\sigma^2 \\ & = \frac{1}{R_1 t_1} \left[\alpha_0^{(1)} + \alpha_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{bk^2}{2R_1} \right) \right. \\ & \quad \cdot (\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)}) (\sigma^k + \sigma^{-k}) + \sum_{k=1}^{\infty} k \left(1 - \frac{b}{2R_1} \right) \\ & \quad \cdot (\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)}) (\sigma^k - \sigma^{-k}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{R_1} (\gamma_k^{(1)} \\ & \quad + \gamma_k^{(2)}) (\sigma^k + \sigma^{-k}) \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{R_1} (\gamma_k^{(1)} + \gamma_k^{(2)}) (\sigma^k - \sigma^{-k}) \right] \dots (3.28) \end{aligned}$$

補強リングと板の間の変形連続条件

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_0}{4}(\kappa - 1) + \left(\kappa a_2 - \frac{\sigma_0}{2} \right) \sigma^{-2} + \bar{b}_2 + (-3\bar{a}_2 + b_4)\sigma^2 \\ & = \frac{2G_1}{E_2} \left[\frac{1}{A_2} \left\{ \alpha_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(2)} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \right\} \right. \\ & \quad + \left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \frac{b}{2R_1} \right) \{ r_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{(2)} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \} \\ & \quad + \frac{1}{A_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(2)}}{k} (\sigma^k - \sigma^{-k}) + \left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \right) \\ & \quad \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k^{(2)}}{k} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \left. \right] \dots \dots \dots (3.29) \end{aligned}$$

板補強部と板の間の変形連続条件

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_0}{4}(\kappa - 1) + \left(\kappa a_2 - \frac{\sigma_0}{2} \right) \sigma^{-2} + \bar{b}_2 + (-3\bar{a}_2 + b_4)\sigma^2 \\ & = \frac{2G_1}{E_1} \left[\frac{1}{A_1} \left\{ \alpha_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \right\} \right. \\ & \quad + \left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \frac{b}{2R_1} \right) \{ r_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{(1)} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \} \\ & \quad + \frac{1}{A_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(1)}}{k} (\sigma^k - \sigma^{-k}) + \left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \right) \\ & \quad \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k^{(1)}}{k} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \left. \right] \dots \dots \dots (3.30) \end{aligned}$$

ただし、左辺は円孔の場合より類推して、0でない係数は a_2, b_2, b_4 だけと考えられるので⁵⁾ 簡単のために、これ以外は表示していない。 σ の同次項の係数を比較すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} -1 & A_{12} & 0 & A_{14} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & A_{24} & A_{25} \\ 1 & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ \alpha_0^{(1)} \\ r_0^{(1)} \\ \alpha_0^{(2)} \\ r_0^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{16} \\ A_{26} \\ A_{36} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.31)$$

$$A_{12} = -\frac{1}{R_1 t_1}, A_{14} = -\frac{1}{R_1 t_1}, A_{16} = \frac{\sigma_0}{2},$$

$$A_{24} = -\frac{2G_1}{E_2} \frac{1}{A_2},$$

$$A_{25} = -\frac{2G_1}{E_2} \left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \frac{b}{2R_1} \right),$$

$$A_{26} = \frac{\sigma_0}{4}(\kappa - 1), A_{32} = -\frac{2G_1}{E_1} \frac{1}{A_1},$$

$$A_{33} = -\frac{2G_1}{E_1} \left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \frac{b}{2R_1} \right),$$

$$A_{36} = \frac{\sigma_0}{4}(\kappa - 1), A_{42} = \frac{1}{A_1},$$

$$A_{43} = \frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1}, A_{54} = \frac{1}{A_2},$$

$$A_{55} = \frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2}$$

ここで、式(4)、(5)は、それぞれ、板補強部・補強リングの回転角の一個条件を表わす。

同様にして、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ 3 & -1 & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ \kappa & 0 & B_{33} & B_{34} & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & B_{45} & B_{46} \\ -3 & 1 & 0 & 0 & B_{55} & B_{56} \\ -3 & 1 & B_{63} & B_{64} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_4 \\ \alpha_2^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ r_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{17} \\ 0 \\ B_{37} \\ B_{47} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.32)$$

$$B_{13} = \frac{1}{R_1 t_1} \left(1 + \frac{b}{R_1} \right) = B_{15},$$

$$B_{14} = -\frac{1}{R_1 t_1} \cdot \frac{2}{R_1} = B_{16}, \quad B_{17} = \sigma_0/2,$$

$$B_{23} = -\frac{1}{R_1 t_1} \left(3 - \frac{3b}{R_1} \right) = B_{25},$$

$$B_{24} = -\frac{1}{R_1 t_1} \cdot \frac{6}{R_1} = B_{26}, \quad B_{33} = -\frac{2G_1}{E_1} \cdot \frac{1}{2A_1},$$

$$B_{34} = -\frac{2G_1}{E_1} \left\{ \left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \frac{b}{2R_1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \right) \right\},$$

$$B_{37} = -\sigma_0/2, \quad B_{45} = -\frac{2G_1}{E_2} \cdot \frac{1}{2A_2},$$

$$B_{46} = -\frac{2G_1}{E_2} \left\{ \left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \frac{b}{2R_1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \right) \right\},$$

$$B_{47} = -\sigma_0/2, \quad B_{55} = -\frac{2G_1}{E_2} \cdot \frac{3}{2A_2},$$

$$B_{56} = -\frac{2G_1}{E_2} \left\{ \left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \frac{b}{2R_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \right) \right\},$$

$$B_{63} = -\frac{2G_1}{E_1} \cdot \frac{3}{2A_1},$$

$$B_{64} = -\frac{2G_1}{E_1} \left\{ \left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \frac{b}{2R_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \right) \right\}$$

f) 板に生ずる応力

上記の2組の連立方程式を解けば、板に生ずる応力は次式で求められる。

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} - b_2 \rho^{-2} - \left(-\frac{\sigma_0}{2} - 4a_2 \rho^{-2} + b_4 \rho^{-4} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2} + b_2 \rho^{-2} + \left(-\frac{\sigma_0}{2} + b_4 \rho^{-4} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \left(-\frac{\sigma_0}{2} + 2a_2 \rho^{-2} - b_4 \rho^{-4} \right) \sin 2\theta \dots\dots(3.33)$$

ここで ρ は孔の中心からの距離を R_1 で割って無次元化した座標値である。

(2) 面外問題

a) 応力およびモーメントのつり合い式

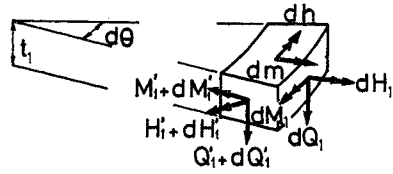


Fig. 3 Stress Resultants

板補強部と補強リングの接触面に生ずる応力は、板補強部に対しては、次の大きさをもつ、面外曲げモーメント dm 、面外ねじりモーメント dh として作用する。

$$dm = t_1/2 \cdot q^* d\theta; \quad dh = t_1/2 \cdot p^* d\theta \dots\dots(3.34)$$

いま、Fig. 3 に示すような板補強部の微小要素を切り出し、つり合い条件式を導く。

板補強部の中心軸に関する曲げモーメントのつり合い条件

$$\frac{dM_i'}{d\theta} + H_i' - Q_i' r - \frac{dm}{d\theta} = -\frac{dH'}{d\theta} \dots\dots(3.35)$$

ねじりモーメントのつり合い条件

$$\frac{dH_i'}{d\theta} - M_i' - \frac{dh}{d\theta} = -\frac{dM'}{d\theta} + \frac{b}{2} \frac{dQ'}{d\theta} \dots\dots(3.36)$$

面外せん断力のつり合い条件

$$\frac{dQ_i'}{d\theta} + \frac{dQ'}{d\theta} = 0 \dots\dots(3.37)$$

式(3.35)、(3.36)より

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta} (M_i' + iH_i') - i(M_i' + iH_i') - \frac{d}{d\theta} (m + ih) \\ & = -\frac{d}{d\theta} (H' + iM') + i \frac{b}{2} \frac{dQ'}{d\theta} + Q_i' r \end{aligned} \dots\dots(3.38)$$

接合線 L_1 にそっての単位長さ当りの板の曲げモーメント、ねじりモーメント、面外せん断力をそれぞれ M_r 、 $H_{r\theta}$ 、 N_r とすると、

$$dM' = M_r R_1 d\theta, \quad dH' = H_{r\theta} R_1 d\theta,$$

$$dQ' = N_r R_1 d\theta$$

したがって、

$$\begin{aligned} \pi_3 - \frac{d}{d\theta} (m + ih) = & -R_1 \left\{ (H_{r\theta} + iM_r) \right. \\ & \left. - \frac{ib}{2} N_r - \frac{r}{R_1} Q_i' \right\} \end{aligned} \dots\dots(3.39)$$

ここで、

$$\pi_3 = \frac{d}{d\theta} (M_i' + iH_i') - i(M_i' + iH_i') \dots(3.40)$$

$z = x + iy$ としてたわみ関数 $w(x, y) = R_e[\bar{z}\varphi_2(z) + z_2(z)]$ を使って、 M_r 、 $H_{r\theta}$ 、 N_r を表わそう。 D を板の曲げ剛性とする、

$$M_\theta - M_r + 2iH_{r\theta} = 2D(1-\nu)[\bar{z}\varphi_2''(z) + \psi_2'(z)]e^{2i\theta} \dots\dots(3.41)$$

$$M_r + M_\theta = -2D(1+\nu)[\varphi_2'(z) + \overline{\varphi_2'(\bar{z})}] \dots\dots\dots(3.42)$$

$$N_r = -2De^{i\theta}[\varphi_2''(z) + \overline{\varphi_2''(\bar{z})}e^{-2i\theta}] \dots(3.43)$$

$$N_\theta = 2iDe^{i\theta}[-\varphi_2''(z) + \overline{\varphi_2''(\bar{z})}e^{-2i\theta}] \dots(3.44)$$

ここで、 $\psi_2(z) = \frac{d\chi(z)}{dz}$, $\varphi_2'(z) = \frac{d}{dz}\varphi_2(z)$

式(3.37)より

$$Q_1' = -\int N_r R_1 d\theta = 2DR_1 \cdot \int e^{i\theta}[\varphi_2''(z) + \overline{\varphi_2''(\bar{z})}e^{-2i\theta}]d\theta = -2iD[\varphi_2'(z) - \overline{\varphi_2'(\bar{z})}] + C \dots\dots\dots(3.45)$$

ここで、 C は積分定数である。

$$H_{r\theta} + iM_r - \frac{ib}{2}N_r - \frac{r}{R_1}Q_1' = -De^{i\theta} \left[(1-\nu)\{\bar{z}\varphi_2'(z) + \psi_2'(z)\}\dot{z} - (1+\nu)\{\varphi_2'(z) + \overline{\varphi_2'(\bar{z})}\}\bar{z} - ib\{\varphi_2''(z) - \varphi_2''(z)\bar{z}^2\} + \frac{2r}{R_1}\{\varphi_2'(z) - \overline{\varphi_2'(\bar{z})}\}\bar{z} + i\frac{r\bar{z}}{R_1D}C \right] \dots\dots\dots(3.46)$$

ここで、 $\dot{z} = \frac{dz}{ds} = \frac{1}{r} \frac{dz}{d\theta}$

したがって、複素表示のモーメントのつり合い条件式は次のように整理される。

$$(1-\nu)[\bar{z}\varphi_2''(z) + \psi_2'(z)]\dot{z} + \left[\left(\frac{2r}{R_1} - 1 - \nu \right) \varphi_2'(z) - \left(\frac{2r}{R_1} + 1 + \nu \right) \overline{\varphi_2'(\bar{z})} \right] \cdot \bar{z} - ib[\varphi_2''(z) - \overline{\varphi_2''(\bar{z})}\bar{z}^2] = \frac{i\bar{z}}{DR_1} \left[\pi_3 - \frac{d}{d\theta}(m+ih) - rC \right] \dots\dots\dots(3.47)$$

また、

ϑ_1^* : リングの軸の曲げによる回転角
 β_1^* : リングの軸のねじれ角

とすると、Clebsch-Kirchhoff の微分関係より、

$$M_1' = EI_1 \left(\frac{d\vartheta_1^*}{ds} + \frac{1}{r}\beta_1^* \right) = \frac{EI_1}{r} \left(\frac{d\vartheta_1^*}{d\theta} + \beta_1^* \right)$$

$$H_1' = \frac{GI_T}{r} \left(\frac{d\beta_1^*}{d\theta} - \vartheta_1^* \right) \dots\dots\dots(3.48)$$

これより、

$$M_1' + iH_1' = \frac{GI_T}{2r} \left[(n_1+1) \left\{ \frac{d}{d\theta}(\vartheta_1^* + i\beta_1^*) - i(\vartheta_1^* + i\beta_1^*) \right\} + (n_1-1) \cdot \left\{ \frac{d}{d\theta}(\vartheta_1^* - i\beta_1^*) + i(\vartheta_1^* - i\beta_1^*) \right\} \right] \dots\dots\dots(3.49)$$

ここで、 $n_1 = EI_1/GI_T$

b) 板の変形

中央面より l の距離にある板の面内変位 u, v は、

$$u = -l \frac{\partial w}{\partial x}; v = -l \frac{\partial w}{\partial y}$$

と表わされるから、

$$u - iv = -t\{\overline{\varphi_2(z)} + \bar{z}\varphi_2'(z) + \psi_2(z)\} \dots(3.50)$$

曲線縁の接線方向、法線方向座標を s, n とすれば、

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial n} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial s} \sin \theta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial n} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial s} \cos \theta$$

となり、これを上式に代入すれば、

$$\overline{\varphi_2(z)} + \bar{z}\varphi_2'(z) + \psi_2(z) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial w}{\partial n} - i \frac{\partial w}{\partial s} \right) \dots\dots\dots(3.51)$$

また、リング軸より $b/2$ だけはなれたリングの点のたわみは、

$$w = w_0 - b/2 \cdot \beta_1^*$$

ここで、 w_0 : リングの軸のたわみ。

これを上式の右辺に代入すれば、

$$e^{-i\theta} \left(\frac{\partial w}{\partial n} - i \frac{\partial w}{\partial s} \right) = i\bar{z} \left\{ \frac{\partial w_0}{\partial n} - i \frac{\partial w_0}{\partial s} - \frac{b}{2} \left(\frac{\partial \beta_1^*}{\partial n} - i \frac{\partial \beta_1^*}{\partial s} \right) \right\} \dots\dots\dots(3.52)$$

となる。

c) 接合条件

いま、 β_1^* は n 方向では一定であるとすれば、

$$\frac{\partial \beta_1^*}{\partial n} = 0$$

となり、

$$\frac{\partial w_0}{\partial s} = \frac{\partial w_0}{\partial s_0} \cdot \frac{ds_0}{ds} = \left(1 - \frac{b}{2R_1} \right) \frac{\partial w_0}{\partial s_0}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial s_0} = -\vartheta_1^*; \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = -\beta_1^*$$

となるから、変形連続条件は次のようになる。

$$\frac{d}{ds_1} \{\overline{\varphi_2(z)} + \bar{z}\varphi_2'(z) + \psi_2(z)\} = \{\bar{z}\varphi_2''(z) + \psi_2'(z)\}\dot{z} + \{\overline{\varphi_2'(\bar{z})} + \varphi_2'(z)\}\bar{z} = \frac{d}{ds_1} \left[\bar{z} \left\{ -\vartheta_1^* \left(1 - \frac{b}{2R_1} \right) - i\beta_1^* - \frac{b}{2} \frac{d\beta_1^*}{ds_1} \right\} \right] \dots\dots\dots(3.53)$$

いま、 $\zeta = z/R_1$, $\sigma = e^{i\theta}$ として、

$$\varphi_2(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k}; \quad \psi_2(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} b'_k \zeta^{-k}$$

$$\vartheta_1^* = \vartheta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\vartheta_k \sigma^k + \bar{\vartheta}_k \sigma^{-k})$$

$$\beta_1^* = \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k \sigma^k + \bar{\beta}_k \sigma^{-k}) \dots\dots\dots(3.54)$$

この形の展開を用いると、モーメントのつり合い条件式は、

$$\begin{aligned}
 & -(1-\nu)(b'_1\sigma^{-1}+2b'_2\sigma^{-2})-\sum_{k=2}^{\infty}(k-1) \\
 & \cdot \left(3+\nu-\frac{b}{R_1}+\frac{kb}{R_1}\right)\bar{a}'_{k-1}\sigma^{k-1} \\
 & +\sum_{k=2}^{\infty}\left\{(k-1)(k+1)\left(1-\nu-\frac{b}{R_1}\right)a'_{k-1}\right. \\
 & \left.-(1-\nu)(k+1)b'_{k+1}\right\}\sigma^{-k-1} \\
 & =\frac{iGI_T}{Dr}[(\vartheta_0+in_1\beta_0)\sigma^{-1} \\
 & +\sum_{k=1}^{\infty}\{(k-1)[(n_1k-1)\vartheta_k+i(k-n_1)\beta_k]\}\sigma^{k-1} \\
 & +(k+1)\{(n_1k+1)\bar{\vartheta}_k+i(k+n_1)\bar{\beta}_k\}\sigma^{-k-1}] \\
 & -\frac{i\bar{z}}{DR_1}\left\{\frac{d}{d\theta}(m+ih)+rC\right\}\dots\dots(3.55)
 \end{aligned}$$

また、変形連続条件式は

$$\begin{aligned}
 & -b'_1\sigma^{-1}-2b'_2\sigma^{-2}+\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\bar{a}'_{k-1}\sigma^{k-1} \\
 & +\sum_{k=2}^{\infty}\{(k-1)(k+1)a'_{k-1}-(k+1)b'_{k+1}\}\sigma^{-k-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & =-i\left[\left\{i\beta_0+\left(1-\frac{b}{2R_1}\right)\vartheta_0\right\}\sigma^{-1}\right. \\
 & +\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\left\{-\left(1-\frac{b}{2R_1}\right)\vartheta_k\right. \\
 & \left.-i\left(1+\frac{bk}{2R_1}\right)\beta_k\right\}\sigma^{k-1} \\
 & \left.-\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\left\{-\left(1-\frac{b}{2R_1}\right)\bar{\vartheta}_k\right. \right. \\
 & \left. \left.-i\left(1-\frac{bk}{2R_1}\right)\bar{\beta}_k\right\}\sigma^{-k-1}\right]\dots\dots(3.56)
 \end{aligned}$$

上記の二式における σ の同次項の係数を等置すれば、未知数 $a'_k, b'_k, \vartheta_k, \beta_k$ 等が求まる。

また、たわみの一価条件より

$$\vartheta_0=0; C=0 \dots\dots(3.57)$$

が得られる。

$$\begin{bmatrix} -(1-\nu) & \frac{GI_T}{Dr}n_1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_1}{2D}a_1^* \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots(3.58)$$

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & \left(1+\frac{b}{R_1}\right) & \left(1-\frac{b}{2R_1}\right) \\ 1.0 & -1.0 & -\left(1-\frac{b}{R_1}\right) & \left(1-\frac{b}{2R_1}\right) \\ -\left(3+\nu+\frac{b}{R_1}\right) & 0 & \frac{GI_T}{Dr}(2-n_1) & \frac{GI_T}{Dr}(2n_1-1) \\ \left(1-\nu-\frac{b}{R_1}\right) & -(1-\nu) & \frac{GI_T}{Dr}(2+n_1) & -\frac{GI_T}{Dr}(2n_1+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ b'_3 \\ \bar{\beta}_2 \\ i\bar{\vartheta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{t_1}{2D}\bar{a}_2^* \\ \frac{t_1}{2D}\bar{a}_3^* \end{bmatrix} \dots\dots(3.59)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 a_1^* & =\omega_0^{(2)}; a_2^* =\left\{\left(1+\frac{b}{R_1}\right)\alpha_2^{(2)}-\frac{2}{R_1}\bar{\gamma}_2^{(2)}\right\} \\
 a_3^* & =\left\{\left(1-\frac{b}{R_1}\right)\bar{\alpha}_2^{(2)}+\frac{2}{R_1}\bar{\gamma}_2^{(2)}\right\}
 \end{aligned}$$

c) 板に生ずる面外曲げ応力

板に生ずる面外曲げ応力は次式で計算される。

$$\begin{aligned}
 \sigma_r & =\pm\frac{6D}{t_1^2R_1}[(1-\nu)b'_1\rho^{-2} \\
 & +\{4\nu a'_1\rho^{-2}+3(1-\nu)b'_3\rho^{-4}\}\cos 2\theta] \\
 \sigma_\theta & =\pm\frac{6D}{t_1^2R_1}[-(1-\nu)b'_1\rho^{-2} \\
 & +\{4 a'_1\rho^{-2}-3(1-\nu)b'_3\rho^{-4}\}\cos 2\theta] \\
 \tau_{r\theta} & =\pm\frac{6(1-\nu)D}{t_1^2R_1}(-2 a'_1\rho^{-2}-3 b'_3\rho^{-4})\sin 2\theta \\
 & \dots\dots(3.60)
 \end{aligned}$$

4. 純曲げの場合 (逆対称荷重の場合)

(1) 面内問題

a) 応力およびモーメント

F_1, M_1, F_2, M_2 を次のように表わす。

$$\begin{aligned}
 F_1 & =\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(1)}(\sigma^k-\sigma^{-k}); \\
 F_2 & =\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(2)}(\sigma^k-\sigma^{-k}) \dots\dots(4.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_1 & =\sum_{k=1}^{\infty}r_k^{(1)}(\sigma^k-\sigma^{-k}); \\
 M_2 & =\sum_{k=1}^{\infty}r_k^{(2)}(\sigma^k-\sigma^{-k}) \dots\dots(4.2)
 \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
 \pi_1+\pi_2 & =\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(1)}+\alpha_k^{(2)})(\sigma^k-\sigma^{-k}) \\
 & +\frac{1}{R_1}\sum_{k=1}^{\infty}k(r_k^{(1)}+r_k^{(2)})(\sigma^k+\sigma^{-k}) \\
 & -\frac{b}{2R_1}\sum_{k=1}^{\infty}k(\alpha_k^{(1)}+\alpha_k^{(2)})(\sigma^k+\sigma^{-k}) \\
 & +\frac{1}{R_1}\sum_{k=1}^{\infty}k^2(r_k^{(1)}+r_k^{(2)})(\sigma^k+\sigma^{-k}) \\
 & -\frac{b}{2R_1}\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\alpha_k^{(1)}+\alpha_k^{(2)})(\sigma^k-\sigma^{-k}) \\
 & +\sum_{k=1}^{\infty}k(\alpha_k^{(1)}+\alpha_k^{(2)})(\sigma^k+\sigma^{-k}) \\
 & \dots\dots(4.3)
 \end{aligned}$$

$$\rho^* =-\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{bk^2}{2R_1}\right)\frac{\alpha_k^{(2)}}{r}(\sigma^k-\sigma^{-k})$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\gamma_k^{(2)}}{r} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \\
 q^* = & i \sum_{k=1}^{\infty} k \left(1 - \frac{b}{2R_1}\right) \frac{\alpha_k^{(2)}}{r} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \\
 & + \frac{i}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\gamma_k^{(2)}}{r} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \dots \dots \dots (4.4)
 \end{aligned}$$

b) 補強リングの変形

一様引張りの場合と同様に、接合線 L_1 上における周方向ひずみ ϵ_θ と曲率変化 κ_θ は、

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\theta = & \frac{1}{E_2 A_2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(2)} (\alpha^k - \alpha^{-k}) \\
 & + \left(\frac{1}{E_2 A_2 r} + \frac{r}{E_2 I_2} \frac{b}{2R_1} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(2)} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \\
 & \dots \dots \dots (4.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_\theta = & \frac{1}{E_2 A_2 r} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(2)} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \\
 & + \left(\frac{1}{E_2 A_2 r^2} + \frac{1}{E_2 I_2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(2)} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \\
 & \dots \dots \dots (4.6)
 \end{aligned}$$

となるが、式(4.6)を前と同様にして一回積分すれば、回転角 θ が得られ

$$\begin{aligned}
 i\theta = & \frac{1}{E_2 A_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(2)}}{k} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \\
 & + \left(\frac{1}{E_2 A_2 r} + \frac{r}{E_2 I_2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^{(2)}}{k} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \\
 & \dots \dots \dots (4.7)
 \end{aligned}$$

となる。

c) 板の変形

面内曲げモーメント M をうける場合の板の面内問題に対する複素応力関数 $\phi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$ をそれぞれ、

$$\begin{aligned}
 \phi_1(\sigma) = & -i \frac{MR_1}{4I} \sigma + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma^{-k}; \\
 \psi_1(\sigma) = & i \frac{MR_1}{4I} \sigma + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sigma^{-k}
 \end{aligned}$$

とおく。

しかしながら、上記の $\phi_1(\sigma)$, $\psi_1(\sigma)$ は、

$$\begin{aligned}
 \phi_1(\sigma) = & -i \frac{MR_1}{4I} \sigma + a_3 \sigma^{-3}; \\
 \psi_1(\sigma) = & i \frac{MR_1}{4I} \sigma + b_3 \sigma^{-3} + b_5 \sigma^{-5}
 \end{aligned}$$

とすれば十分である⁶⁾。式(3.25)を用いて、板の変形を計算すれば、

$$\begin{aligned}
 2G_1(\epsilon_\theta + i\theta) = & \left(-i \kappa \frac{MR_1}{4I} + \bar{b}_3 \right) \sigma \\
 & + \left(-i \frac{MR_1}{4I} + \kappa a_3 \right) \sigma^{-3} \\
 & + (-4\bar{a}_3 + \bar{b}_5) \sigma^3 \dots \dots \dots (4.8)
 \end{aligned}$$

d) 接合条件

前と同様にして、3個の構造要素の接合線 L_1 上における応力のつり合い条件、変形連続条件を求めてみると、

$$\begin{aligned}
 N + iT = & t_1 \left\{ \left(-i \frac{MR_1}{4I} - \bar{b}_3 \right) \sigma \right. \\
 & \left. + \left(i \frac{MR_1}{4I} + a_3 \right) \sigma^{-3} + (4\bar{a}_3 - \bar{b}_5) \sigma^3 \right\}
 \end{aligned}$$

と表わされるから、

$$\begin{aligned}
 & \left(-i \frac{MR_1}{4I} - \bar{b}_3 \right) \sigma + \left(i \frac{MR_1}{4I} + a_3 \right) \sigma^{-3} \\
 & + (4\bar{a}_3 - \bar{b}_5) \sigma^3 \\
 = & \frac{1}{R_1 t_1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)}) (\sigma^k - \sigma^{-k}) \right. \\
 & + \frac{1}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} k (\gamma_k^{(1)} + \gamma_k^{(2)}) (\sigma^k + \sigma^{-k}) \\
 & - \frac{b}{2R_1} \sum_{k=1}^{\infty} k (\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)}) (\sigma^k + \sigma^{-k}) \\
 & + \frac{1}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\gamma_k^{(1)} + \gamma_k^{(2)}) (\sigma^k - \sigma^{-k}) \\
 & - \frac{b}{2R_1} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)}) (\sigma^k - \sigma^{-k}) \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} k (\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)}) (\sigma^k + \sigma^{-k}) \dots \dots \dots (4.9) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(-i \kappa \frac{MR_1}{4I} + \bar{b}_3 \right) \sigma + \left(-i \frac{MR_1}{4I} + \kappa a_3 \right) \sigma^{-3} \\
 & + (-4\bar{a}_3 + \bar{b}_5) \sigma^3 \\
 = & \frac{2G_1}{E_1} \left[\frac{1}{A_1} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \right. \\
 & + \left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \frac{b}{2R_1} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(1)} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \\
 & + \frac{1}{A_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(1)}}{k} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \\
 & \left. + \left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^{(1)}}{k} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \right] \\
 & \dots \dots \dots (4.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(-i \kappa \frac{MR_1}{4I} + \bar{b}_3 \right) \sigma + \left(-i \frac{MR_1}{4I} + \kappa a_3 \right) \sigma^{-3} \\
 & + (-4\bar{a}_3 + \bar{b}_5) \sigma^3 \\
 = & \frac{2G_1}{E_2} \left[\frac{1}{A_2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(2)} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \right. \\
 & + \left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \frac{b}{2R_1} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(2)} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \\
 & + \frac{1}{A_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(2)}}{k} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \\
 & \left. + \left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^{(2)}}{k} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \right] \\
 & \dots \dots \dots (4.11)
 \end{aligned}$$

これらの式の両辺における σ の同次項の係数比較を行えば、次のような連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1.0 & E_{12} & E_{13} \\ -1.0 & 0 & E_{23} \\ -1.0 & E_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_3 \\ \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{14} \\ E_{24} \\ E_{34} \end{bmatrix} \dots (4.12)$$

ここで、

$$E_{12} = -\frac{1}{R_1 t_1} \left(2 - \frac{b}{R_1} \right) = E_{13}, \quad E_{14} = i \frac{MR_1}{4I},$$

$$E_{23} = -\frac{2G_1}{E_2} \cdot \frac{1}{A_2} \cdot 2, \quad E_{24} = i\kappa \frac{MR_1}{4I} = E_{34},$$

$$E_{32} = -\frac{2G_1}{E_1} \cdot \frac{1}{A_1} \cdot 2$$

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ -4.0 & 1.0 & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & F_{35} & F_{36} \\ 4.0 & -1.0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{46} \\ \kappa & 0 & F_{53} & F_{54} & 0 & 0 \\ 4.0 & -1.0 & F_{63} & F_{64} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_5 \\ \alpha_3^{(1)} \\ \gamma_3^{(1)} \\ \alpha_3^{(2)} \\ \gamma_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{17} \\ 0 \\ F_{37} \\ 0 \\ F_{57} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(4.13)$$

ここで、

$$F_{13} = -\frac{1}{R_1 t_1} \left(2 + \frac{3b}{R_1} \right) = F_{15},$$

$$F_{14} = \frac{1}{R_1 t_1} \cdot \frac{6}{R_1} = F_{16}, \quad F_{17} = -i \frac{MR_1}{4I}$$

$$F_{23} = -\frac{1}{R_1 t_1} \left(4 - \frac{6b}{R_1} \right) = F_{25},$$

$$F_{24} = -\frac{1}{R_1 t_1} \frac{12}{R_1} = F_{26},$$

$$F_{35} = -\frac{2G_1}{E_2} \left(-\frac{1}{A_2} + \frac{1}{3} \frac{1}{A_2} \right),$$

$$F_{36} = -\frac{2G_1}{E_2} \left\{ -\left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \cdot \frac{b}{2R_1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \right) \right\}$$

$$F_{37} = i \frac{MR_1}{4I} = F_{57}$$

$$F_{45} = -\frac{2G_1}{E_2} \left(\frac{1}{A_2} + \frac{1}{3} \frac{1}{A_2} \right),$$

$$F_{46} = -\frac{2G_1}{E_2} \left\{ \left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \cdot \frac{b}{2R_1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{A_2 r} + \frac{r}{I_2} \right) \right\},$$

$$F_{53} = -\frac{2G_1}{E_1} \left(-\frac{1}{A_1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{A_1} \right),$$

$$F_{54} = -\frac{2G_1}{E_1} \left\{ -\left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \cdot \frac{b}{2R_1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \right) \right\}$$

$$F_{63} = -\frac{2G_1}{E_1} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{3} \frac{1}{A_1} \right),$$

$$F_{64} = -\frac{2G_1}{E_1} \left\{ \left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \cdot \frac{b}{2R_1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{A_1 r} + \frac{r}{I_1} \right) \right\}$$

d) 板に生ずる応力

板に生ずる面内応力は次式で計算できる。^{注1)}

$$\sigma_r = \frac{MR_1 \rho}{2I} \sin \theta - \frac{MR_1 \rho}{4I} (\sin \theta - \sin 3\theta) + 2a_3 \rho^{-3} \sin 3\theta - b_5 \rho^{-5} \sin \theta$$

注1) a_3, b_5 は純虚数となるので、ここでは $a_3 \rightarrow ia_3, b_5 \rightarrow ib_5$ として計算する。

$$\begin{aligned} & - (b_5 \rho^{-5} - 3a_3 \rho^{-3}) \sin 3\theta \\ & = \left(\frac{MR_1}{4I} \rho - b_5 \rho^{-3} \right) \sin \theta \\ & \quad + \left(\frac{MR_1}{4I} \rho + 5a_3 \rho^{-3} - b_5 \rho^{-5} \right) \sin 3\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta & = \left(\frac{3MR_1}{4I} \rho + b_5 \rho^{-3} \right) \sin \theta \\ & \quad + \left(-\frac{MR_1}{4I} \rho - a_3 \rho^{-3} + b_5 \rho^{-5} \right) \sin 3\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} & = \left(b_5 \rho^{-3} - \frac{MR_1}{4I} \rho \right) \cos \theta \\ & \quad + \left(\frac{M_1 R_1}{4I} \rho - 3a_3 \rho^{-3} + b_5 \rho^{-5} \right) \sin 3\theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4.14)$$

(2) 面外問題

前節の面内問題の応力、変形状態を基礎として、面外問題を解析しよう。

a) 応力およびモーメント

$$\begin{aligned} F_2 & = \alpha_1^{(2)} (\sigma - \sigma^{-1}) + \alpha_3^{(2)} (\sigma^3 - \sigma^{-3}); \\ M_2 & = r_3^{(2)} (\sigma^3 - \sigma^{-3}) \quad \dots\dots\dots(4.15) \end{aligned}$$

$$Q_2 = \frac{i\sigma}{r} \frac{dM_2}{d\sigma} = \frac{3i}{r} r_3^{(2)} (\sigma^3 + \sigma^{-3}) \quad \dots\dots\dots(4.16)$$

$$\begin{aligned} F_2 + iQ_2 & = \alpha_1^{(2)} (\sigma - \sigma^{-1}) + \alpha_3^{(2)} (\sigma^3 - \sigma^{-3}) \\ & \quad - \frac{3}{r} r_3^{(2)} (\sigma^3 + \sigma^{-3}) \\ & = \alpha_1^{(2)} (\sigma - \sigma^{-1}) + \left(\alpha_3^{(2)} - \frac{3}{r} r_3^{(2)} \right) \sigma^3 \\ & \quad - \left(\alpha_3^{(2)} + \frac{3}{r} r_3^{(2)} \right) \sigma^{-3} \quad \dots\dots\dots(4.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (F_2 + iQ_2) & = i\sigma \frac{d}{d\sigma} (F_2 + iQ_2) \\ & = i\sigma \left\{ \alpha_1^{(2)} (1 + \sigma^{-2}) + \left(\alpha_3^{(2)} - \frac{3}{r} r_3^{(2)} \right) \right. \\ & \quad \left. \cdot 3\sigma^2 + 3 \left(\alpha_3^{(2)} + \frac{3}{r} r_3^{(2)} \right) \sigma^{-4} \right\} \\ & = i \left\{ \alpha_1^{(2)} (\sigma + \sigma^{-1}) + 3 \left(\alpha_3^{(2)} - \frac{3}{r} r_3^{(2)} \right) \sigma^3 \right. \\ & \quad \left. + 3 \left(\alpha_3^{(2)} + \frac{3}{r} r_3^{(2)} \right) \sigma^{-3} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (m + ih) & = \frac{t_1}{2} \left\{ \frac{d}{d\theta} (F_2 + iQ_2) - i(F_2 + iQ_2) \right\} \\ & = it_1 \left\{ \alpha_1^{(2)} \sigma^{-1} + \left(\alpha_3^{(2)} - \frac{3}{r} r_3^{(2)} \right) \sigma^3 \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\alpha_3^{(2)} + \frac{3}{r} r_3^{(2)} \right) \sigma^{-3} \right\} \\ & = it_1 \{ a_4^* \sigma^{-1} + a_5^* \sigma^3 + 2a_6^* \sigma^{-3} \} \quad \dots\dots\dots(4.19) \end{aligned}$$

$$\text{ここで、} \quad a_4^* = \alpha_1^{(2)}, \quad a_5^* = \left(\alpha_3^{(2)} - \frac{3}{r} r_3^{(2)} \right),$$

$$a_6^* = \left(\alpha_3^{(2)} + \frac{3}{r} r_3^{(2)} \right)$$

b) 接合条件

式 (3.47) の右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{i\bar{z}}{DR_1} \left\{ \pi_3 - \frac{d}{d\theta} (m + ih) \right\} \\ &= \frac{i}{R_1} \cdot \frac{iGI_T}{Dr} [(\vartheta_0 + in_1\beta_0)\sigma^{-1} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \{(n_1k-1)\vartheta_k + i(k-n_1)\beta_k\}\sigma^{k-1} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \{(n_1k+1)\bar{\vartheta}_k + i(k+n_1)\bar{\beta}_k\}\sigma^{-k-1}] \\ & \quad - \frac{t_1}{D} (a_4^*\sigma^{-2} + a_5^*\sigma^2 + 2a_6^*\sigma^{-4}) \end{aligned}$$

となるから、

モーメントのつり合い条件式は

$$\begin{aligned} & -(1-\nu)(b_1'\sigma^{-1} + 2b_2'\sigma^{-2}) \\ & \quad + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ (k-1)(k+1) \left(1 - \nu - \frac{b}{R_1} \right) a'_{k-1} \right. \\ & \quad \left. - (1-\nu)(k+1)b'_{k+1} \right\} \sigma^{-k-1} \\ & \quad - \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \left(3 + \nu - \frac{b}{R_1} + \frac{kb}{R_1} \right) \bar{a}'_{k-1} \sigma^{k-1} \\ &= \frac{iGI_T}{Dr} [(\vartheta_0 + in_1\beta_0)\sigma^{-1} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \{(n_1k-1)\vartheta_k + i(k-n_1)\beta_k\}\sigma^{k-1} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \{(n_1k+1)\bar{\vartheta}_k + i(k+n_1)\bar{\beta}_k\}\sigma^{-k-1}] \\ & \quad - \frac{t_1}{D} (a_4^*\sigma^{-2} + a_5^*\sigma^2 + 2a_6^*\sigma^{-4}) \dots\dots (4.20) \end{aligned}$$

また、変形連続条件式 (3.53) は、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} (k+1) \{(k-1)a'_{k-1} - b'_{k+1}\}\sigma^{-k-1} \\ & \quad + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \bar{a}'_{k-1} \sigma^{k-1} - b_1'\sigma^{-1} - 2b_2'\sigma^{-2} \\ &= \left\{ \beta_0 - i \left(1 - \frac{b}{2R_1} \right) \vartheta_0 \right\} \sigma^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \\ & \quad \cdot \left\{ - \left(1 + \frac{kb}{2R_1} \right) \beta_k + i \left(1 - \frac{b}{2R_1} \right) \vartheta_k \right\} \sigma^{k-1} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \left\{ \left(1 - \frac{kb}{2R_1} \right) \bar{\beta}_k \right. \\ & \quad \left. - i \left(1 - \frac{b}{2R_1} \right) \bar{\vartheta}_k \right\} \sigma^{-k-1} \dots\dots (4.21) \end{aligned}$$

以上の二式において、 σ の同次項の係数比較を行えば次のような連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ -1.0 & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2' \\ -i\bar{\vartheta}_1 + \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{13} \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots (4.22)$$

ここで、

$$\begin{aligned} Q_{11} &= -2(1-\nu), \quad Q_{12} = \frac{2GI_T}{Dr} (n_1 + 1), \\ Q_{13} &= \frac{t_1}{D} a_4^*, \quad Q_{22} = - \left(1 - \frac{b}{2R_1} \right) \end{aligned}$$

$\bar{\vartheta}_1, \beta_1$ は板の剛体回転を表わす項で独立には定まらな
い。

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & 0 & R_{23} & R_{24} \\ 2 & -1.0 & R_{33} & R_{34} \\ 1.0 & 0 & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2' \\ b_4' \\ i\bar{\vartheta}_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{15} \\ R_{25} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots (4.23)$$

ここで、

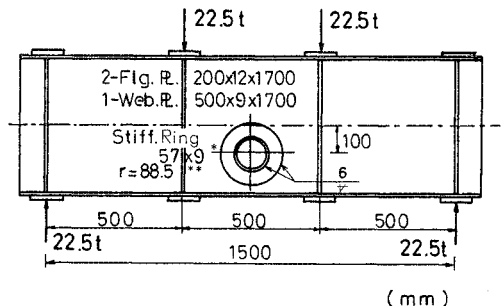
$$\begin{aligned} R_{11} &= 4 \left(1 - \nu - \frac{b}{R_1} \right), \quad R_{12} = -2(1-\nu), \\ R_{13} &= -\frac{2GI_T}{Dr} (3n_1 + 1), \quad R_{14} = \frac{2GI_T}{Dr} (3 + n_1) \\ R_{15} &= \frac{t_1}{D} a_6^*, \quad R_{21} = -2 \left(3 + \nu + \frac{2b}{R_1} \right), \\ R_{23} &= \frac{2GI_T}{Dr} (3n_1 - 1), \quad R_{24} = \frac{2GI_T}{Dr} (3 - n_1), \\ R_{25} &= -\frac{t_1}{D} \bar{a}_s^*, \quad R_{33} = \left(1 - \frac{b}{2R_1} \right), \\ R_{34} &= - \left(1 - \frac{3b}{2R_1} \right), \quad R_{43} = \left(1 - \frac{b}{2R_1} \right), \\ R_{44} &= \left(1 + \frac{3b}{2R_1} \right) \end{aligned}$$

これ以外の $a_k', b_k', \vartheta_k, \beta_k$ は 0 となる。

c) 板に生ずる面外曲げ応力

純曲げの場合における板に生ずる面外曲げ応力は次式
によって計算できる。^{注2)}

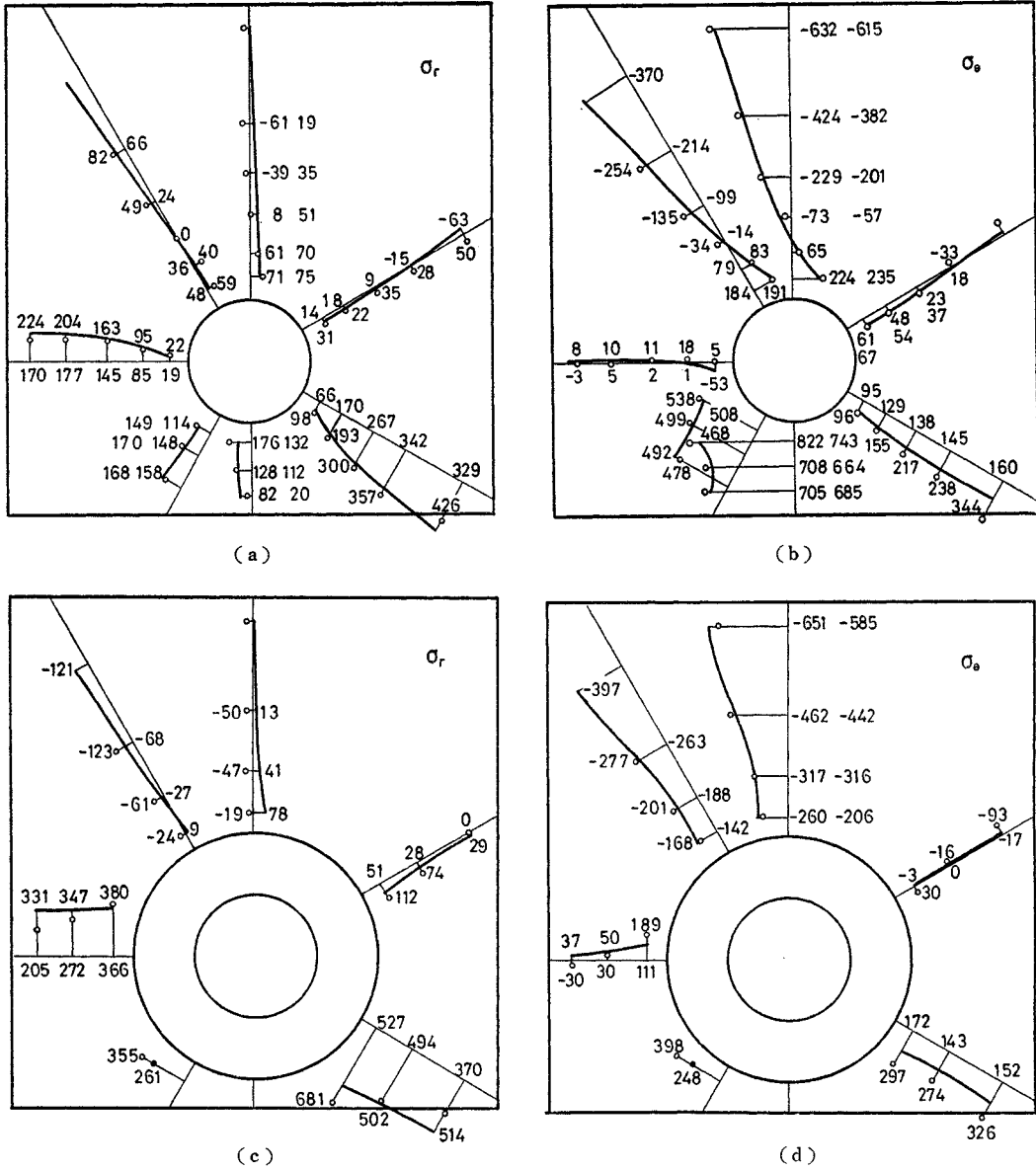
$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{12D}{t_1^2 R_1} [(1-\nu)b_2'\rho^{-3} \sin \theta \\ & \quad + \{(1+3\nu)a_2'\rho^{-3} + 2(1-\nu)b_4'\rho^{-3}\} \sin 3\theta] \\ \sigma_\theta &= \frac{12D}{t_1^2 R_1} [-(1-\nu)b_2'\rho^{-3} \sin \theta \\ & \quad + \{(3+\nu)a_2'\rho^{-3} - 2(1-\nu)b_4'\rho^{-3}\} \sin 3\theta] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{12(1-\nu)D}{t_1^2 R_1} \{b_2'\rho^{-3} \cos \theta \\ & \quad + (-3a_2'\rho^{-3} + 2b_4'\rho^{-3}) \cos 3\theta\} \dots\dots (4.24) \end{aligned}$$



- * b : Width of Ring 57 mm
- t_2 : Thickness of Ring 9 mm
- ** R : Inner Radius of Ring
- R_1 : Outer Radius of Ring $R_1 = R + b$
- $r = \frac{R + R_1}{2}$

Fig. 4 General View of Test Girder

注2) b_2', a_2', b_4' は純虚数となるので、ここでは $b_2' \rightarrow ib_2', a_2' \rightarrow ia_2', b_4' \rightarrow ib_4'$ とおいて計算する。



○ : Experimental Results
 — : Theoretical Prediction
 (a) Radial Stress Distribution (No Stiffening Ring) (b) Circumferential Stress Distribution (No Stiffening Ring)
 (c) Radial Stress Distribution (With Stiffening Ring) (d) Circumferential Stress Distribution (With Stiffening Ring)

Fig. 5 Comparison of Experimental Results and Theoretical Prediction (in kg/cm²)

5. 数値計算と実験結果

前記の理論は、無限板の場合について展開したが、Fig. 4 に示すような供試体を用いて、実際に生ずる応力の測定ならびに前述の理論による数値計算を行い、これらを比較して、理論の適用性を検討した。対比結果は Fig. 5 (a)~(d) に示す。

Fig. 5 (a), (b) は桁のウェブに円孔を設けた場合の

みで前述の理論は無限板を仮定して解いているが、この計算例では、はり理論の応力状態を基本応力状態として用いている。さらに、複雑な応力状態を精度よく計算するためには、この例でも、この上に、フランジ、鉛直スチフナー等の構造形態上の影響および集中荷重の影響を考慮した応力状態を基本応力状態として用いる必要がある。

この例では、はり理論は基本応力状態として実用上差し支えないことがわかる。

これを基礎として、補強リングをつけた場合の実験値および計算値が Fig. 5 (c), (d) に示されている。

補強リングの外縁が、桁フランジまたは鉛直スチフナーに接近すれば、当然のことながら、これらの影響をうけ、測定値と計算値とがずれてくる。もちろん、このずれの中には、溶接による初期変形、リングを隅肉溶接によってウェブに取りつけているので、板厚変化および p^* , q^* の分布状態が計算仮定と異なる等に起因するものも含まれる。今の場合、ずれは約 30% 程度であることがわかる。この程度のずれを考慮すれば、補強開孔をもつ桁部材の応力状態を評価することは可能であろう。

6. 片側補強リングの補強効果について

計算結果より、最大応力は $\theta = \pm 90^\circ$ のリング外縁の裏側で生ずる周方向応力 σ_θ である (補強リングのついている側を表側とする)。

今、この最大応力のみに着目し、これが補強リングおよび板の寸法によってどのように変化するか計算してみよう。補強効果に影響を及ぼす主要なパラメータとしては、 $E_1 t_1 / E_2 t_2$, b/t_2 が考えられる。

$E_1 = E_2$ とした場合の数値計算の結果を Table 1 (一様引張りの場合)、Table 2 (純曲げの場合) に示す。

また、比較のために、無補強の場合の値をあげておいた。

これらの結果より、次のことがいえる。

1) 補強リングの板厚を増加した場合、当然のことながら、面内応力は減少し面外応力は増加するが、後者の増加量は前者の減少量を上回り、応力集中を助長する傾向を示す。

2) 最大応力が発生する個所はリングと板の接合線上であるので、補強リングの幅 b を大きくしても、応力最大の位置は板の内部に向かって移動し、特に一様引張りの場合、補強効果はあまりないといえるだろう。

3) 一様引張りをうける主要部材に開孔を設ける場合は、面外応力を生じないようにするため、補強リングができるだけ対称になるように配慮するのが設計の面から望ましい。

7. あとがき

片側補強リングによって補強された円孔をもつ無限板の解析より出発して、同じタイプの開孔をウェブにもつ桁部材への本理論の適用の可能性を実験によって検討したが、最大応力値および応力分布の傾向について、だいたいの把握は可能であると思う。

さらに精密な計算を行うためには、フランジ、スチフ

Table 1 Stress Concentration Factor under Uniform Stretching

$t_2/t_1 \backslash b/t_2$		1	2	3	5	7	10
		1	In-Plane Stress	1.791	1.233	0.903	0.571
	Out-Of Plane Stress	0.897	1.038	1.053	1.009	0.956	0.894
	Sum	2.688	2.271	1.956	1.580	1.393	1.257
2	In-Plane Stress	1.511	0.951	0.649	0.376	0.284	0.244
	Out-Of Plane Stress	1.489	1.627	1.601	1.486	1.385	1.277
	Sum	3.000	2.578	2.250	1.862	1.669	1.521
3	In-Plane Stress	1.313	0.771	0.494	0.267	0.201	0.180
	Out-Of Plane Stress	1.912	2.008	1.935	1.759	1.625	1.487
	Sum	3.225	2.779	2.429	2.026	1.826	1.667
0*	In-Plane Stress	2.236	1.821	1.577	1.323	1.204	1.118

* No Stiffening Ring

Table 2 Stress Concentration Factor under Pure Bending

$t_2/t_1 \backslash b/t_2$		1	2	3	5	7	10
		1	In-Plane Stress	1.130	0.813	0.688	0.595
	Out-Of Plane Stress	0.489	0.476	0.427	0.353	0.308	0.267
	Sum	1.619	1.289	1.112	0.948	0.881	0.831
2	In-Plane Stress	0.965	0.672	0.556	0.489	0.473	0.467
	Out-Of Plane Stress	0.804	0.748	0.658	0.537	0.467	0.403
	Sum	1.769	1.420	1.214	1.026	0.940	0.870
3	In-Plane Stress	0.850	0.575	0.476	0.422	0.411	0.405
	Out-Of Plane Stress	1.030	0.929	0.807	0.654	0.564	0.488
	Sum	1.880	1.504	1.283	1.076	0.977	0.893
0*	In-Plane Stress	1.432	1.207	1.108	1.035	1.013	1.004

* No Stiffening Ring

ナー等の影響を表わす応力関数を重ね合わせる必要である。

また、一様せん断、2次放物線分布せん断、横方向せん断力による曲げ等の荷重条件についても、基本応力状態を適当に選べば、これらの場合の補強効果についても評価できるであろう。機会を見て、検討を加え発表したい。

最後に、本研究の機会を与えて下さった首都高速道路公団工務部および数値計算、実験に際し、助力を頂いた伊藤英夫(建設技術研究所)、藤附昇(西松建設)の両氏に厚く感謝したい。

参考文献

- 1) Tul'chii, V.I., Frolov, V.P. and Yakimovitsch, G. I.: Plate with a Circular Hole, Stiffened with a Elastic Ring, Hydro-Aeromechanics and Theory of Elasticity, Khari'kov University Rress, Vol. 9, 1968.
- 2) 秋山成興: 接合部における連続条件の一般的表現とその応用, 土木学会論文報告集 No. 202, p. 4, 1972.
- 3) Muskhel shvili, N.I.: Some Basic Problem of Mathematical Theory of Elasticity, p. 112, Noordhoff, 1953.
- 4) 3) p. 138.
- 5) Savin, G.N., : Stress Concentration Around Holes, p. 240, Pergamon Press, 1961.
- 6) 5) p. 264. (1974.1.23・受付)