土木学会論文報告集
第 226 号・1974 年 6 月

道路網における容量制約を考慮した確率最大化配分法とその解法

PROBABILITY MAXIMIZATION MODEL FOR TRAFFIC ASSIGNMENT WITH CAPACITY RESTRAINT AND ITS ANALYTICAL METHODS

松 井 寛*
By Hiroshi Matsui

1. まえがき

自動車が道路網上をいかに走行するかを推定しようとするいわゆる交通量配分の問題は，古くから研究され，現在までに多くの交通量配分モデルが提案されている。ところで，交通量配分の問題は，運転者の経路選択挙動にみられる複雑さに加えて，一般に道路網を対象とした場合，扱う変数の数が非常に膨大となるなどの計算技術上の問題もあって，計算の簡略化を重視するあまり，ともすれば配分理論としての論理性や数学的な厳密さに欠けるモデルが少なくない。しかしながら，最近のように交通量配分の目的が単に道路網上における交通流の記述にとどまらず，道路網の変化あるいは交通規制の実施に伴う交通流の変化の予測にまで適用されるようになると，単に現実の交通流との適合性のみを重視するだけでは不十分で，そこにはやはり現実にみられる配分現象に対して論理的な説明がなされていなければならないと考える。

ところで，著者がすでに提案している確率最大化配分法と名付けた新しい配分理論は，運転者の経路選択にみられる多様性を前提に，最も確からしい配分パターンを求めるもので，厳密な論理性に裏付けされたモデルの一つであるということができる。この配分モデルは道路網上の配分現象を数学的に記述することを目的としたものであるが，特にこの配分モデルにおいて交通容量制約を導入した場合は，問題が非線形計画法の問題となり，一般に求解が困難となる。

そこで本文では，特に容量制約を考慮した場合の確率最大化配分法を取り上げ，その具体的な解法についていくつかの提案を行い，その実用化に対し検討を加えることにした。

* 正会員 工修 名古屋工業大学講師 土木工学科

2. 確率最大化配分法の概要[1)]

道路網上において，ある目的地に向かう車がどの経路を選択するかを，車1台1台について考えてみれば，きわめて多様性に富んでいるということができる。これは運転者の経路選択に影響を及ぼす要因がきわめて広範囲にわたっており，さらに，運転者が何本かの経路の中から走行経路を選択するとき，通常はそれらの経路を正確に比較評価するに十分な情報を，運転者自身持ち合わせていないためであると考えられる。ところが，このような人間行動の複雑さにもかかわらず，個々の車の行動の集合体として道路網上の交通流を眺めてみると，一般には時間的ないし距離的に最短な経路を選ぶ確率が最も高くなり，ついで次適経路がそれに続くというような，ある種の統計的規則性を認めることができるであろう。

道路網上の交通流をこのような観点から眺めてみると，道路網上での運転者の経路選択を確率的現象としてとらえることに十分妥当性があると考えられる。確率最大化配分法においては，道路網上の交通量配分パターンが確率的な立場から論じられ，その結果与えられた道路条件および交通条件のもとで，最も起こりやすい配分パターンというものが導き出される。

すなわち，いま対象とする道路網上に r 個の OD ペアを考え，それぞれに OD 交通量を与えておく。また各 OD に対しあらかじめたかだか s 本までの配分対象経路を指定しておく。ただし，ここであらかじめ経路を指定したが，これはこの配分理論において本質的な問題ではない。後述するように，配分経路を指定せず，考えられるすべての経路を対象として取り上げることも同様に可能である。また，経路の評価値としてここでは所要時間を取り上げることにする。

さて，いま r 種の OD 交通量がこの道路網上の経路に配分されるわけであるが，このときこれらの交通量によ

る総走行時間がある任意の値をとるような配分パターンに注目してみる。いまこの配分状態を車1台1台区別して見たとき，区別できる配分状態の数は，全体の交通量が多いときは非常にたくさん存在する。このように車1台1台を区別して見た状態を微視的状態とよぶのであるが，いま車1台1台を区別しないである任意の配分状態を考えたときの，その配分状態に対応する微視的状態の数を数え上げてみよう。このときこれらの微視的状態がすべて等確率で生起すると仮定すれば，微視的状態の数が最も多くなる配分状態が最も起こりやすいということができる。

以上の考え方に基づく確率最大化配分理論の定式化については，すでに発表した著者の論文[2]の中で詳しく論じられているので，本文ではその結果だけを示すと，この配分理論による解は，次式を最小化することによって与えられることになる。

$$r\sum_i\sum_k y_i^k t_i^k-\left(-\sum_i\sum_k y_i^k \log y_i^k\right) \cdots\cdots\cdots(1)$$

ここに y_i^k は $i(i=1, 2, \cdots, r)$ なる OD 交通量 X_i のうち，経路 $k(k=1, 2, \cdots, s)$ を通る交通量，t_i^k は i という OD ペア間の経路 k 上の走行時間，また r は経験的に与えられる定数で $0\leq r<\infty$ の値をとる。y_i^k については次式で与えられる制約条件がある。

$$\sum_k y_i^k=X_i \cdots\cdots\cdots(2)$$

したがって，問題は条件式 (2) のもとで，式 (1) を最小化すればよいことになり，これは数学的にはラグランジュの未定乗数法によって解ける。いま，t_i^k が交通量に依存せず，各経路ごとに一定値を取ると仮定すれば，求める解は，

$$y_i^k=\frac{\exp(-r\, t_i^k)}{\sum_k \exp(-r\, t_i^k)}X_i \cdots\cdots\cdots(3)$$

で表わされることになる。上式から明らかなように，この配分モデルにおいては，OD 間のすべての指定経路に 0 でない OD 交通量が配分される。この点において確率最大化配分法は，経路選択の一義性を前提とした，いわゆる決定論的立場に立つ最短経路配分や等時間原則配分と本質的に異なっている。

ところで，確率最大化配分法においては，定数 r が重要な役割を果たしている。すなわち，式 (1) から明らかなように，$r=0$ のとき目的関数の第1項が消え，第2項（これをトリップ配分エントロピーとよぶ）だけを最大化（前の符号が負のため）することになり，このとき OD 交通量は各経路に均等に配分され，総走行時間は最大値をとる。一方，$r\to\infty$ のときは，第1項が第2項に比べて支配的となり，結局総走行時間を最小化する輸送計画的配分と一致する。すなわち，定数 r は対象とする交通量の総走行時間のサイズを決定する役割を果たしており，特に $r\to\infty$ のときは，総走行時間が最小値をとり，このときの配分パターンとしては総走行時間最小化配分しか起こりえないということである。なお，実際の配分問題に用いる r の値は，対象とする道路網において配分交通量の実績値が与えられておれば，その実績値との適合度が最大となるように最小二乗法によって決めるか，あるいは道路網上での総走行時間（または1台あたりの平均走行時間）の実績値が与えられる場合は，配分計算による走行時間が実績の走行時間の値に一致するような r を選べばよいであろう。

3. 走行時間関数を導入したとき

より実際に近い交通量配分を行おうとすれば，たとえば交通混雑による走行時間の増大（または走行速度の低下）の影響，あるいは道路容量に関する制約条件の導入が必要となる。ところで，交通量配分問題に容量制約の概念を導入する具体的方法として，本文では交通混雑による走行時間の増大の影響を，交通量—走行時間曲線（以下，走行時間関数とよぶ）の導入によって考慮する方法と，直接各道路区間の容量制限を不等式条件の形で与える方法の2つを考えてみることにした。前者の方法は，現実の交通現象にみられる交通量の増加による走行時間の増大の影響を，直接配分手法の中に組み入れたものであるから，現実の交通現象に近い配分を可能ならしめるといえ，したがって，リアルタイム的な交通現象を対象とした交通量配分に適した方法であるといえる。

さて，いま道路網の各道路区間（以下リンクとよぶ）ごとに走行時間関数を設定する。すなわち，対象とする道路網が l 本のリンクから構成されているとして，そのうちリンク $h(h=1, 2, \cdots, l)$ 上の走行時間を，そのリンク上の交通量の関数として，一般に次のように表わしておく。

$$T_h\left(\sum_i\sum_k {}_h\delta_i^k y_i^k\right) \cdots\cdots\cdots(4)$$

ここに ${}_h\delta_i^k$ は i なる OD をもつ経路 k が，リンク h を含むとき1，含まないとき0の値をとる定数である。このとき当該道路網全体での総走行時間は，各リンクの［交通量×走行時間］の和として

$$\sum_i\sum_k\sum_h {}_h\delta_i^k y_i^k T_h\left(\sum_i\sum_k {}_h\delta_i^k y_i^k\right) \cdots\cdots\cdots(5)$$

のように表わせる。

よって，走行時間関数を導入したときの確率最大化配分法は，

$$r\sum_i\sum_k\sum_h {}_h\delta_i^k y_i^k T_h\left(\sum_i\sum_k {}_h\delta_i^k y_i^k\right) + \sum_i\sum_k y_i^k \log y_i^k \cdots\cdots\cdots(6)$$

を先に示したOD交通量に関する制約条件式 (2) のもと

で最小化する問題として定式化される。この場合も先の場合と同様にラグランジュの未定乗数法によって解かれ，結局解として，

$$y_i^k=\frac{\exp\{-\gamma\sum_h {}_h\delta_i^k(T_h+\sum_i\sum_k {}_h\delta_i^k y_i^k T_h')\}}{\sum_k \exp\{-\gamma\sum_h {}_h\delta_i^k(T_h+\sum_i\sum_k {}_h\delta_i^k y_i^k T_h')\}}X_i \qquad \cdots\cdots(7)$$

を得る。ただし，上式において，T_h' は走行時間関数 T_h のリンク交通量に関する1階導関数である。しかしながら，走行時間関数を導入した確率最大化配分法においては，求める解 y_i^k を陽表的に求めることが困難となる。そこでリンク交通量を

$$\sum_i\sum_k {}_h\delta_i^k y_i^k=Q_h \qquad \cdots\cdots(8)$$

とおいたとき

$$F_h(Q_h)=T_h+Q_hT_h'=\frac{d}{dQ_h}\{Q_hT_h\} \qquad \cdots\cdots(9)$$

で表わされる仮想的な走行時間関数 $F_h(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ を導入すれば，先の式 (7) は

$$y_i^k=\frac{\exp(-\gamma\sum_h {}_h\delta_i^k F_h)}{\sum_k \exp(-\gamma\sum_h {}_h\delta_i^k F_h)}X_i \qquad \cdots\cdots(10)$$

となるので，上式を用い，次のような反復計算によって，走行時間を逐次修正しながら y_i^k を求める方法を提案する。

手順 1)　γ を仮定し，さらに式 (9) で与えられる仮想的な走行時間関数 F_h において，リンク交通量が0のときの値（これを $F_h^{(1)}$ とおく）を用いて，式 (10) より配分交通量 y_i^k を計算する。

手順 2)　各リンクごとに，所定のかりの走行時間関数によって新たなかりのリンク走行時間 $F_h^{*(1)}$ を求める。

手順 3)　2回目の反復計算に用いるかりのリンク走行時間 $F_h^{(2)}$ を次の修正式

$$F_h^{(2)}=\frac{mF_h^{(1)}+F_h^{*(1)}}{m+1} \qquad \cdots\cdots(11)$$

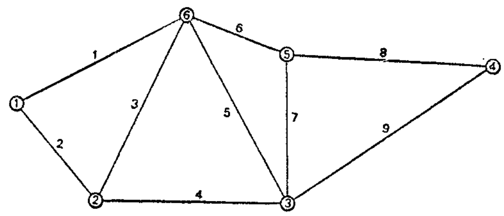
によって求める。ただし，上式の m はこの収束計算を安定させるために導入される定数で，問題により適当に選ばれる。なお，m の与え方については，後述の計算例の中であらためて検討する。

手順 4)　手順 1)に戻り，$F_h^{(1)}$ の代わりに $F_h^{(2)}$ を用いて計算が繰返される。一般に n 回目 $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ の反復計算に用いるかりのリンク走行時間 $F_h^{(n)}$ は，

$$F_h^{(n)}=\frac{mF_h^{(n-1)}+F_h^{*(n-1)}}{m+1} \qquad \cdots\cdots(12)$$

によって与えられ，この反復計算は $F_h^{(n)}$ と $F_h^{(n+1)}$ が一致するまで続けられる。

手順 5)　最終的に得られたかりのリンク走行時間を用いて，配分交通量が求められる。また，そのときの真のリンク走行時間 T_h は，式 (9) の関係から逆算すればよい。



図―1　配分対象道路網（数字はリンクおよびノード番号）

以上のように走行時間関数を導入した確率最大化配分法は，リンクの走行時間を逐次修正することによって，解が求められるが，このとき解の存在とその唯一性が保証されていなければならない。ところで，いま $0\leq y_i^k\leq X_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ の範囲において，走行時間関数 T_h が微分可能で，かつその1階導関数，2階導関数がいずれも非負のとき，すなわち，走行時間関数 T_h が単調増加でかつ広義の凸関数ならば，先の目的関数 (6) の2階導関数は非負となり，よって，目的関数が広義の凸関数となることが証明できる。よって，上述の条件を満足する走行時間関数を用いる限りにおいて，解がただ一つ存在することが保証される。

計　算　例

計算例として図―1に示すような道路網を対象とした配分問題を解いてみよう。道路網上のOD交通量は表―1のように与えられており，また，各ODごとに2本の経路を指定しておく。すなわち，$s=2$ である。これらの経路をパス行列によって表わすと，次のとおりである。

第1経路　　　　リンク

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{array}\\
\text{経路}\ \begin{array}{c}k_1^1\\k_2^1\\k_3^1\\k_4^1\\k_5^1\\k_6^1\\k_7^1\\k_8^1\\k_9^1\\k_{10}^1\end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0
\end{array}\right]
\end{array} \qquad \cdots\cdots(13)$$

表―1　配分対象 OD 交通量

（台/時）

①	②	③	④	⑤	⑥	
*	*	1 700	400	700	1 100	①
	*	*	800	1 500	1 300	②
		*	1 200	*	1 400	③
			*	*	900	④
				*	*	⑤
					*	⑥

表—2　非線形走行時間関数の係数

リンク番号	a_h	b_h	c_h
1	0.43×10^{-9}	1.03×10^{-3}	6.0
2	0.22	0.51	3.0
3	0.36	0.86	5.0
4	0.32	0.77	4.5
5	0.29	0.68	4.0
6	0.13	0.31	1.8
7	0.19	0.46	2.7
8	0.36	0.86	5.0
9	0.43	1.03	6.0

表—3　非線形走行時間関数を用いた確率最大化配分
$\gamma=0.5$　配分交通量計算値

OD	第 1 経 路		第 2 経 路	
	配分交通量	経路走行時間	配分交通量	経路走行時間
① — ③	1 244台/時	18.32分	456台/時	21.06分
① — ④	286	27.08	114	28.09
① — ⑤	617	19.15	83	21.88
① — ⑥	970	13.85	130	16.59
② — ④	599	23.44	201	25.16
② — ⑤	672	17.23	828	17.35
② — ⑥	1 300	11.94	0	20.87
③ — ④	849	9.77	351	11.61
③ — ⑥	1 309	7.20	91	8.98
④ — ⑥	785	13.22	115	16.97

第2経路　　　　リンク

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\text{経路}\begin{array}{c} k_1^2 \\ k_2^2 \\ k_3^2 \\ k_4^2 \\ k_5^2 \\ k_6^2 \\ k_7^2 \\ k_8^2 \\ k_9^2 \\ k_{10}^2 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad \cdots\cdots(14)
$$

ここに，パス行列とは，$i(i=1, 2, \cdots, 10)$ なる OD をもつ経路 $k(k=1, 2)$ がリンク $h(h=1, 2, \cdots, 9)$ を含むとき1，含まないとき0の値をとる要素 ${}_h\delta_i{}^k$ からなる行列である。

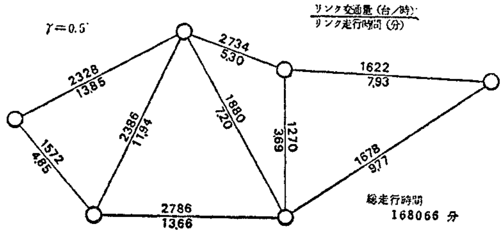
次に走行時間関数としては，次式で与えられる関数形を考えてみる。

$$T_h=a_hQ_h{}^3+b_hQ_h+c_h \quad \cdots\cdots(15)$$

ここに，

T_h：リンク $h(h=1, 2, \cdots, 9)$ の走行時間（分）
Q_h：リンク h の交通量（台/時）
a_h, b_h, c_h：リンクの道路条件（延長，幅員など）によって決まる定数

式 (15) で与えられる曲線は，リンク交通量の増加とともに，走行時間が急激に増加するように設定された非線形な曲線であり，この計算例では各リンクごとに係数 a_h, b_h, c_h を表—2のように仮定しておく。一方，γ はあらかじめ経験的に与えられるものであるが，この計算例においては $\gamma=0.5$ と仮定する。以上の前提のもとで確率最大化配分法によって計算したリンク交通量および配分交通量をそれぞれ図—2および表—3に示す。



図—2　非線形走行時間関数を用いた確率最大化配分-リンク交通量計算値

さて，走行時間関数を導入したときの解法において問題となるのは，逐次近似計算の中で用いられる定数mの与え方である。すなわち，リンク交通量の増加とともに走行時間が比較的緩やかに増大するような走行時間関数を用いた場合は，$m=1$ で十分収束し解が得られるが，リンク交通量の増加とともに走行時間が急激に増大するような非線形な走行時間関数を用いたとき，この反復計算が振動して収束しないことがある。しかし，このようなときは m の値をある程度大きくとって，走行時間の修正を徐々に行うようにすれば，計算は安定し解が得られる。ただし，反復回数は増加する。ただ，mの与え方は，問題とするOD交通量や道路網パターン，およびγの値や仮定した走行時間関数などに影響されるので，いまのところ問題ごとに試行錯誤的に決定せざるをえない。ただ，この計算例において，mの値と反復回数および計算時間の関係をみたところ，表—4に示すような結果が得られた。この結果によれば，反復回数の多い場合は1回当りの計算時間が比較的短く，一方，反復回数が少ない場合は逆に1回当りの計算時間が長くなる傾向がみられる。したがって，全体の計算時間としてみればそれほど大きな差がないようである。よって，問題は m の値をある値以下に小さくしたとき，反復計算が収束せず振動を繰返す恐れのある点である。したがって，これ

表—4　m と反復回数，計算時間との関係

m	反復回数（回）	CPU 計算時間（秒）	1回当りの計算時間（秒/回）
13	収束せず*	—	—
15	97	9.00	0.093
17	109	8.99	0.082
19	122	9.57	0.078
21	134	9.60	0.072

* 正確には反復回数が300回を越えるものをいう。

表—5 線形走行時間関数の係数

リンク番号	a_h	b_h
1	0.0030	6.0
2	0.0015	3.0
3	0.0025	5.0
4	0.00225	4.5
5	0.0020	4.0
6	0.0009	1.8
7	0.00135	2.7
8	0.0025	5.0
9	0.0030	6.0

表—6 線形走行時間関数を用いた確率最大化配分 配分交通量計算値

OD	$\gamma=0.5$				$\gamma=10.0$			
	第 1 経 路		第 2 経 路		第 1 経 路		第 2 経 路	
	配分交通量	経路走行時間	配分交通量	経路走行時間	配分交通量	経路走行時間	配分交通量	経路走行時間
① — ③	1 454台/時	16.62分	246台/時	19.64分	1 700台/時	17.02分	0台/時	19.40分
① — ④	311	26.16	89	27.77	400	25.71	0	28.48
① — ⑤	652	17.20	48	20.81	700	17.01	0	20.47
① — ⑥	1 024	12.70	76	16.31	1 100	12.60	0	16.06
② — ④	636	22.27	164	24.27	721	22.93	79	23.62
② — ⑤	741	15.31	759	15.48	824	14.92	676	15.21
② — ⑥	1 295	10.81	5	18.06	1 300	10.51	0	18.27
③ — ④	949	11.15	251	13.33	1 101	11.47	99	12.44
③ — ⑥	1 178	6.94	222	8.86	1 400	6.80	0	8.16
④ — ⑥	858	13.46	42	18.09	900	13.11	0	18.27

を防ぐには，ある程度mの値を大きくとって計算するほかない。ただし，計算プログラムをくふうすることによって，反復計算の途中でmの値を変えることにより，収束計算を加速し計算時間を短縮することは可能である。

次に，式 (15) で与えられる非線形走行時間関数の代わりに，

$$T_h=a_hQ_h+b_h \quad \cdots\cdots(16)$$

で表わされる線形走行時間関数（ただし，a_h, b_h の値は **表—5** に示すとおりである）を用いたときの配分交通量計算結果を **表—6** に示す。**表—6** の結果で注目されることは，$\gamma=10$ のときの配分結果がほぼ総走行時間最小化配分パターンに近くなっていることである。すなわち，ほとんどの OD ペアで交通量が最短経路にのみ配分され，②—④，②—⑤および③—④の３つのODペアだけ２本の経路に交通量が配分されている。しかも，この３つの OD 間では，第１経路と第２経路の走行時間が，$\gamma=0.5$ の場合に比べて非常に接近してきており，近似的に等時間原則配分パターンを示しているといえる。このように総走行時間最小化配分と等時間原則配分とは，総交通量がある程度多くなってくるとほぼ一致してくることは，すでに理論的に証明されている[3]。

4. 容量制限不等式を導入したとき

次に，容量制約を考慮するための方法として，直接道路網の各区間における容量制限を不等式条件として導入する場合について考えてみよう。この方法によれば，あらかじめ与えられた道路容量以上に交通量が配分されることはないが，この方法では容量一杯になるまでは，容量制約が交通の流れに全く影響をもたないことになり，交通量の増加とともに徐々にかつ連続的に容量制約の影響がみられる現実の交通現象を考えれば，いくらか非現実的であるといえる。

容量制限不等式を用いた確率最大化配分法は次のように定式化される。

制約条件

$$\sum_i\sum_k {}_h\delta_i^k y_i^k \leqq c_h \quad \cdots\cdots(17)$$

および

$$\sum_k y_i^k = X_i \quad \cdots\cdots(18)$$

のもとで

$$\gamma \sum_i\sum_k y_i^k t_i^k + \sum_i\sum_k y_i^k \log y_i^k \quad \cdots\cdots(19)$$

を最小化せよ。

ここに，${}_h\delta_i^k$, y_i^k, X_i, t_i^k は前に定義したとおりであり，また，c_h はリンク $h(h=1, 2, \cdots, l)$ の交通容量である。すなわち，式 (17) は各リンクにおける容量制限を示す不等式条件を与える。

上記のように容量制限不等式を用いた確率最大化配分法は，等式および不等式条件つきの最小化問題として定式化され，しかも目的関数 (19) が非線形となるため，いわゆる非線形計画法の問題となることがわかる。現在非線形計画法に関する解法がいろいろ開発されているが，ここでは制約条件つきの最適化問題を制約条件なしの最適化問題に変換して解く，いわゆるペナルティ関数法の一種の SUMT 法を適用し，この非線形な配分問題の実用的求解法を検討してみる。特に確率最大化配分法はその目的関数自身が凸関数であることが証明でき，したがって解の存在とその唯一性が保証されるので，非線形計画法を適用するにはまことに好都合な条件を備えているといえる。

SUMT を交通量配分の問題に適用した例はすでにいくつか存在するが[4),5),6)]，SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) とは[7)]，制約条件付最小化問題を制約条件なしの最小化問題として解く方法で，これを上に定式化した容量制限不等式付きの確率最大化配分法に適用すれば，目的関数式 (19) は次のような関数形に変換される。

$$f(\boldsymbol{y}, r_M) \equiv \gamma \sum_i\sum_k y_i^k t_i^k + \sum_i\sum_k y_i^k \log y_i^k + (r_M)^{-1/2} \sum_i\Big(\sum_k y_i^k - X_i\Big)^2$$

$$+r_M \sum_h 1/(c_h - \sum_i \sum_k {}_h\sigma_i^k y_i^k) \quad \cdots\cdots(20)$$

この変換を SUMT 変換とよび，元の制約条件付きの最小化問題の解を，制約条件のない最小化問題，すなわち，式 (20) の解の $r_M \to 0$ の極限値として求めるのが SUMT の基本的な考え方である。ここに $r_0 > r_1 > r_2 > \cdots r_M > r_{M+1} \cdots > 0$ である。

SUMT 変換の意味するところは次のとおりである。すなわち，OD 交通量に関する等式条件が満足されず $\sum_k y_i^k - X_i \neq 0$ の場合は，$r_M \to 0$ に対して $f(\boldsymbol{y}, r_M)$ が無限大となり，目的に反することになるので，このようなことは実際には起こらず，安定した最小化の手続きが実行できるときは，$r_M \to 0$ に対して等式条件がしだいに満足される。一方，容量制限に関する不等式条件についてみれば，解が制約集合の境界に近づくと，やはり $f(\boldsymbol{y}, r_M)$ が無限大となり，目的に反することになる。しかし，この場合においても，境界を侵すことなしに $f(\boldsymbol{y}, r_M)$ の最小化が実行される。その結果 r_M の値が 0 に近づくにしたがって，$f(\boldsymbol{y}, r_M)$ の解が式 (19) の最小値に収束することが期待できるのである。したがって，上記の性質を満足する関数形であれば一般には何でもよいのであって，SUMT 変換は式 (20) に限定して考える必要はない。

さて，問題は解の収束性であるが，SUMT の収束定理によれば，目的関数，等式条件式，不等式条件式のいずれもが連続的に 2 回微分可能であり，かつ凸関数であることなどの条件のもとで，$r_M \to 0$ のとき $f(\boldsymbol{y}, r_M)$ の解が真の目的関数式 (19) の最小値の解に近づくことが証明されるので，よって解が唯一つ存在し，かつ収束計算によっていくらでもその解に接近できることが保証されることになる。

なお，SUMT 変換された新しい目的関数式 (20) において，不等式条件については，反復計算の各段階で得られたリンク交通量が，容量制限不等式を越えそうなリンクについてだけ考慮すればよく，その危険性の全くないリンクについては，その容量制限不等式条件を省くことが可能で，その分だけ計算量を軽減できる。また，式 (20) において，等式条件にかかる摂動パラメーター r_M と不等式条件にかかる摂動パラメーター r_M は同一としたが，これは必ずしもその必要はなく，問題のスケールによって，異なる摂動パラメーターを用いても差しつかえない。実際異なる摂動パラメーターを用いたほうが計算量が少なくなることさえある。

SUMT の計算は，具体的には次の手順によって行われる。

手順 1) 容量制限に関する不等式条件式 (17) を満足する初期値 $\boldsymbol{y}^{(0)}$ を選ぶ。このとき等式条件式 (18) については考慮する必要がないので，初期値の選定は容易に行えるであろう。

手順 2) 最初の摂動パラメーター r_0 を選び，$f(\boldsymbol{y}, r_0)$ を最小にする $\boldsymbol{y}(r_0)$ を求める。$f(\boldsymbol{y}, r_0)$ の最小化手法としては，後述の Fletcher-Powell 法を採用することにする。さて，r_0 の選び方であるが，一般には目的関数の値に比べて条件式の項が過大となったり，あるいは逆に過小とならないよう適当に見当をつけて初期値を選べばよいが，r_0 があまり大きすぎると，制約条件の項が不当に大きくなって，解が可能域の中に入ってしまい，計算回数が増え，一方あまり小さすぎると，解が可能境界付近にあって，求解が困難となることがある。いずれにしても，r_0 の適当な選択法は問題のスケーリングに関係している。

手順 3) $0 < r_1 < r_0$ なる r_1 を定め，$\boldsymbol{y}(r_0)$ から始めて $f(\boldsymbol{y}, r_1)$ を最小にする $\boldsymbol{y}(r_1)$ を求める。

手順 4) 以上の計算を繰返す。なお，$r_M (M=0, 1, 2, \cdots)$ の減少には，一般に定率減少，すなわち $r_{M+1} = r_M/c \ (c>1)$ が用いられる。

さて，$f(\boldsymbol{y}, r_M)$ の最小化の方法であるが，これは制約条件なしの最小化問題となるから，一般には傾斜法が適用できる。たとえば，1 階導関数を用いた最大傾斜法，2 階導関数を用いた Newton-Raphson 法などがあるが本文では共役方向を用いた傾斜法の1つである Fletcher Powell 法[8] を用いることにする。Fletcher-Powell 法は常に収束することが証明されており，これを先の SUMT 法と組み合わせて用いれば，いま問題としている容量制限不等式のある確率最大化法の解法として強力な武器となるであろう。

計算例

計算例として，先に示した走行時間関数を導入したときの計算例を，ここで再び取り上げることにする。計算の前提となる OD 交通量，指定経路は前と全く同様である。ただし，今回の場合は走行時間を一定とし，その値は式 (15) でリンク交通量を 0 と置いたときの走行時間を採用する。その代わり各リンクに容量制限が課せられ，リンク容量をすべて 3 000 台/時 と仮定する。次に配分交通量 $\boldsymbol{y}$ の初期値であるが，これは不等式条件を満足する点を選ぶ必要がある。このとき，等式条件については考慮する必要がないので，初期値としてある程度小さめの値を取っておけば，おのずと不等式条件を満足することになる。ここではすべての y_i^k の初期値として 100 を仮定する。次に摂動パラメーターの初期値 r_0 の値としては，問題のスケールから判断し $r_0 = 10^4$ を仮定し，また r_M の減少ステップとして，$r_{M+1} = r_M/10$ なる定率減少を採用した。

以上の準備のもとで，$r=0.5$ と与えられた場合の配

分計算を行ってみた。その結果配分交通量については**表—7**に，またリンク交通量については**表—8**に示すような解を得た。この計算においては，収束判定のための基準を相対誤差 0.5% 以下と仮定したが，この計算例では $r_5=0.1$ の段階で解が収束しており，そのシーケンスの回数は 6 回である。また，この収束解では，2 本の経路への配分交通量の和が OD 交通量に一致しており，最終的には等式条件が満足されていることがわかる。また，**表—8** に得られたリンク交通量は，いずれも 3 000 台/時の容量制限以下に抑えられていることもわかる。

ところで，この配分計算では，最初不等式条件をすべてのリンクで省略して計算を始めたが，反復計算の途中でリンク 4 と 6 においてリンク交通量が容量を越えたので，結果的にはこの 2 つのリンクについてのみ容量制限不等式が導入されている。

表—7 容量制限不等式を用いた確率最大化配分—配分交通量計算値

$\gamma=0.5$ 摂動パラメーターの初期値 $r_0=10^4$ 減少ステップ=1/10

（単位：台/時）

関数呼出し回数	—	37回	12回	16回	14回	10回	9回
r_kの減少ステップ	初期値	$r_0=10^4$	$r_1=10^3$	$r_2=10^2$	$r_3=10$	$r_4=1$	$r_5=10^{-1}$
OD ①—③ y_1^1	100	1 012	1 111	1 213	1 241	1 247	1 247
y_1^2	100	668	583	485	459	452	453
①—④ y_2^1	100	157	185	198	204	203	203
y_2^2	100	221	209	200	195	197	197
①—⑤ y_3^1	100	493	508	510	511	511	512
y_3^2	100	187	186	188	188	188	188
①—⑥ y_4^1	100	796	800	803	804	804	804
y_4^2	100	287	294	295	296	296	296
②—④ y_5^1	100	617	582	582	576	579	576
y_5^2	100	162	212	216	223	221	221
②—⑤ y_6^1	100	537	648	692	702	701	701
y_6^2	100	944	846	806	798	799	799
②—⑥ y_7^1	100	1 188	1 180	1 156	1 132	1 129	1 129
y_7^2	100	95	115	142	168	171	171
③—④ y_8^1	100	830	837	839	840	840	840
y_8^2	100	353	358	359	359	359	360
③—⑥ y_9^1	100	1 190	1 060	983	955	952	953
y_9^2	100	194	335	416	445	448	447
④—⑥ y_{10}^1	100	460	599	655	682	683	682
y_{10}^2	100	421	295	244	218	217	218
容量チェック		リンク 6 4	リンク 4			リンク 6	リンク 6

容量制限不等式を用いた確率最大化配分法の解法として，SUMT 法を援用したときの問題点として，摂動パラメーター r_M およびその減少ステップ幅をいかに合理的に与えるかという点があげられる。**表—9** は摂動パラメーターの初期値 r_0 を変化させて計算したときの（他の条件は全く同じとして）解が収束するまでの r_M の減少シーケンス回数（N），SUMT 変換された目的関数をよぶ延回数（M），および計算時間（CPU time）を比較したものである。この表の結果によれば，r_0 と計算回数および計算時間との間には，それほど目立った傾向がみられない。ただ先に述べたように，r_0 をあまり小さくとると，等式条件が強くきいて最小化を実行することが困難となることがある。一方，r_0 を大きくとり過ぎると，逆に不等式条件の項が不当に重くなって，解が可能域の中に入ってしまうため，計算回数が非常に増えてしまうことになる。いずれにしても，r_0 の値は問題のスケーリングに関係しており，本来の目的関数の値に比べて，条件式の項が過大または過小にならないよう問題ごとに決定すべきであると判断される。また，r_0 の決定には y_i^k の初期値にも関係してこよう。また，すでに述べたように，等式条件にかかる摂動パラメーターと不等式条件にかかる摂動パラメーターは，必ずしも同じである必要はなく，計算プログラムの中でくふうすることにより，問題に応じて摂動パラメーターの値を変えてもよい。

次に，摂動パラメーター r_M を定率減少させた場合の減少ステップ幅 c についてみると，**表—10** は $c=2, 5, 10, 15$ としたときの計算回数と計算時間を比較したものである。この結果によれば，c を大きくとれば r_M の減

表—9 r_k の初期値と計算回数・計算時間の関係

	$\gamma=0.5$			$\gamma=0.1$		
	$r_0=10^4$	$r_0=10^5$	$r_0=10^6$	$r_0=10^2$	$r_0=10^3$	$r_0=10^4$
N (回)	6	7	7	7	9	9
M (回)	98	118	100	132	151	170
CPU Time (sec)	48.74	54.33	49.24	55.30	63.80	67.35

N：r_k のシーケンス回数　M：関数呼出し回数

表—10 r_k の減少ステップ幅と計算回数・計算時間の関係

	$c=2$	$c=5$	$c=10$	$c=15$
N (回)	11	6	6	5
M (回)	104	80	88	81
M/N	9.5	13.3	14.7	16.2
CPU Time (sec)	45.74	37.41	40.25	39.54

N：r_k のシーケンス回数　M：関数呼出し回数

表—8 容量制限不等式を用いた確率最大化配分-リンク交通量計算値

$\gamma=0.5$ 摂動パラメーターの初期値 $r_0=10^4$ 減少ステップ $^1/_{10}$ （単位：台/時）

r_k の減少ステップ	関数呼出し回数	リンク 1	リンク 2	リンク 3	リンク 4	リンク 5	リンク 6	リンク 7	リンク 8	リンク 9	容量チェック
$r_0=10^4$	37 回	2 114	1 702	2 361	2 889	2 374	2 190	1 492	1 132	2 088	{リンク 6
$r_1=10^3$	12	2 076	1 800	2 520	2 862	2 052	2 673	1 540	1 354	1 922	リンク 4
$r_2=10^2$	16	1 996	1 896	2 548	2 943	1 853	2 875	1 581	1 428	1 864	リンク 4
$r_3=10$	14	1 978	1 920	2 540	2 978	1 799	2 955	1 602	1 469	1 829	
$r_4=1$	10	1 971	1 929	2 535	2 993	1 792	2 956	1 606	1 467	1 833	リンク 6
$r_5=10^{-1}$	9	1 971	1 929	2 535	2 993	1 794	2 953	1 606	1 466	1 834	リンク 6

少シーケンス回数（N）は減少するが，1回のシーケンス当りの関数呼び出し回数（M/N）が増えるので，結局計算時間としてみればそれほど大きな差がみられない。したがって，この計算例だけでは断定することはもちろんできないが，求解のための労力は c の選定とあまり関係がないように思われる。

容量制限不等式を用いた確率最大化配分法の解法としては，上記の SUMT のほか，目的関数の線形近似によって，線形計画法として解く方法も考えられる。特に確率最大化配分法の場合目的関数が変数分離型で与えられているので，線形近似するには好都合である。しかも目的関数が各変数について凸関数であることが証明されているので，最小解が唯一つ存在することが保証される。しかしながら，線形近似による方法は，変数の数が増えるため，特に大規模な配分問題には適用が困難となる。

5. リンクフローによる確率最大化配分法の定式化

前節まで取り扱われてきた確率最大化配分法は，いわゆるパスフローとして定式化されている。したがって，道路網上であらかじめ各ODごとに配分対象経路を何本か指定し，それぞれの経路に配分される交通量が変量として取り扱われる。このようにパスフローによる定式化によれば，OD 間の配分対象経路が限定できるため，扱う変数の数を少なくできる利点をもっているが，その反面配分計算に先立って各OD間に何本かの経路を指定するための経路探索という面倒な作業を必要とするし，さらに，指定する経路およびその本数によって，配分解が変化するという基本的な問題点を含んでいる。

ところで，パスフローによる確率最大化配分法においては，あらかじめ指定された経路に配分される交通量をもとに微視的状態というものが考えられたが，このときの経路に代わるものとして道路区間（リンク）を取り，リンク上の車の分布状態をベースにした微視的状態というものを考えたとしても，配分理論自体としては本質的な違いはない。これはいわゆるリンクフローとしての確率最大化配分法ということであり，この場合は道路網に配分される各OD交通量がリンクごとに変量として取り扱われる。

表―11　容量制約の導入方法と計算時間

容量制約の導入方法		CPU 計算時間	備　考
走行時間関数を導入したとき	線形関数	6.50 秒	$m=3$
	非線形関数	9.00	$m=15$
容量制限不等式を導入したとき		37.41	y_i^k の初期＝all 400 $r_0=10\,000$, 減少ステップ＝1/5
容量制約を考慮しないとき		0.64	

このとき問題は次のように定式化される。すなわち，いま道路網の各ノード（分岐点）に番号をつけ，リンクはその両端のノード番号によって表わすことにして，リンク i, j 上の走行時間を t_{ij}，リンク ij の容量を c_{ij}，k なる OD のリンク ij に配分される交通量を y_{ij}^k，k なる OD の OD 交通量を X_k とする。このとき目的関数は，

$$r\sum_i\sum_j\sum_k t_{ij}y_{ij}^k+\sum_i\sum_j\sum_k y_{ij}^k\log y_{ij}^k \cdots\cdots(21)$$

となり，これを次の連続条件

$$\sum_j(y_{ij}^k-y_{ji}^k)=\begin{cases} X_k : i\text{ が交通発生ノードのとき} \\ -X_k : i\text{ が交通集中ノードのとき} \\ 0 : 0 \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

容量制限条件

$$\sum_k y_{ij}^k \leqq c_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

および非負条件

$$y_{ij}^k \geqq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

のもとで最小化する問題となる。

特に容量制限不等式の代わりに，リンク走行時間を走行時間関数で与えてもよい。いずれにしても問題は非線形計画法の問題となり，一般的解法としては，先に提案した SUMT 法と Fletcher-Powell 法がやはり有効であろう。

6. あとがき

本文で議論してきた容量制約のある確率最大化配分法は，あくまでも現実の交通量配分現象の正確な記述をめざしたものであるが，微視的状態というものに基礎を置いた最確配分パターンが，果たして現実に実現しているのかどうかは全く別の問題であって，これはやはり実際の配分問題への適用を通して，その適合性を検討していかねばならず，この点に関しては今後の課題である。

ところで，本文では容量制約の考え方として，走行時間関数を導入する方法と容量制限不等式条件を導入する方法を提案したが，この両者を比較すれば，配分パターンの記述的モデルとしては前者のほうが現実的であり，また計算の労力からみても実用的であるといえる。表―11は同一の配分問題に対して，走行時間関数を導入した場合と容量制限不等式条件を導入した場合の CPU 計算時間を比較したものである。

なお，交通量配分問題に共通した問題点として，走行時間関数の設定方法，交通容量の考え方，配分経路の指定，街路網を対象とするときのターンペナルティの与え方などがあげられ，これらの問題は本文で提案した確率最大化配分法の実用性と適合性に大きくかかわりをもつきわめて重要な要素である。しかし，これら交通量配分

に付随した諸問題については本文では検討されておらず，したがって今後の研究課題としたい。

最後に，本論文の計算には名古屋大学大型計算機センターの FACOM 230-60 を使用したことを付記しておく。

参考文献

1) 松井 寛：確率最大化による交通量配分理論，交通工学 Vol. 6, No. 5, pp. 3～11, 1971年9月.
2) 前掲 1) に同じ
3) 井上博司：輸送計画的配分および等時間原則による配分に関する研究，土木学会第25回年次学術講演会講演概要集，第4部，pp. 113～114, 1970 年 11 月.
4) 森口繁一・伊理正夫・長谷 彰：多種流輸送問題の一つの逐次近似解法，1970年度日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集 pp. 21～22, 1970 年 11 月.
5) 松井 寛：非線形な走行時間関数を用いた輸送計画的配分，第 10 回日本道路会議一般論文集，pp. 15～16, 1971 年 10 月.
6) 新手法による高速道路交通流の推計（第2章），日本 OR 学会報文シリーズ T-73-2, 1973.
7) Fiacco A.V. and McCormick G.P. : Nonlinear Programming-The Sequential Unconstrained Minimization Technique, Wiley, New York, 1968.
8) 志水清孝：システム制御と数理計画法，コロナ社，1971.

（1973.12.1 受付）