

暗きよからの淡水注入による淡塩境界面の解析*

FRESH-SALT WATER INTERFACE FORMED BY FRESH WATER INJECTION CONDUIT IN COASTAL AQUIFERS

上田年比古**・杉尾 哲***
By Toshihiko Ueda and Satoru Sugio

1. ま え が き

海水飽和地盤中に、ある圧力をもって淡水を注入すると、注入された淡水と海水との間に淡塩境界面ができ、その境界面は徐々に大きくなって、ついに定常状態に達し、境界面の内部では淡水の定常流が生ずる。このような淡水注入により海水飽和地盤中に生成されるウォーターカーテンは海岸付近の塩害防止、あるいは河口湖の地盤中を浸透侵入する海水の遮断の一工法として検討されているが¹⁾、ここでは実用的と考えられる暗きよからの淡水注入を、上面が水平で均一な透水性の海水飽和地盤中に行った場合について種々検討した。

本報ではまず定常状態の淡塩境界面の形状および淡水注入量などの水理諸量について、厳密解を Zhukovsky 関数を用いた解析により求め、その算定結果を検討した。次にその近似解法を求めた。すなわち、ポテンシャル分布の類似性に着目して、海水領域を淡水の平行等速上向流におきかえ、この流れと暗きよからの淡水の流出流れとの重ね合わせとして解析する近似的手法を示し、この結果を前述の厳密解と比較検討した。次に非定常状態の淡塩境界面を、定常状態の解析結果を用いて近似的に算定する方法を示した。次いで以上の定常、非定常状態の淡塩境界面の算定結果について、Hele-Shaw モデルによる実験結果と比較検討を行った。

2. 基 礎 式

いま浸透流の流れの場において、鉛直上向きを y 方向とし、流体の密度を ρ 、領域内の任意点の圧力を p 、透

水係数を k 、水頭を H とすれば、速度ポテンシャル ϕ は次式で表わされる。

$$\phi = kH = k \left\{ \frac{p + \rho g y}{\rho g} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで図-1 の、円形暗きよから海水飽和地盤中に淡水を注入して定常状態に達した場合の、淡塩境界面について考えてみよう。淡水と海水の密度を ρ_f, ρ_s とし、淡塩境界面における淡水のポテンシャルを考えると、境界面上の任意点 N では、圧力のエネルギーはその点の海水圧に等しいから、

$$p_N = \rho_f g h - \rho_s g y$$

位置のエネルギーは淡水を考えているから $\rho_f g y$ であり、これらを式 (1) に代入すると、

$$\begin{aligned} (\phi_f)_N &= k \left\{ \frac{\rho_f g h - \rho_s g y + \rho_f g y}{\rho_f g} \right\} \\ &= kh - k \epsilon y \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\epsilon = (\rho_s - \rho_f) / \rho_f$$

となる。

したがって

$$\theta_1 = \phi + k \epsilon y \dots\dots\dots (3)$$

で表わされる Zhukovsky 関数²⁾を用いると、 x 平面で

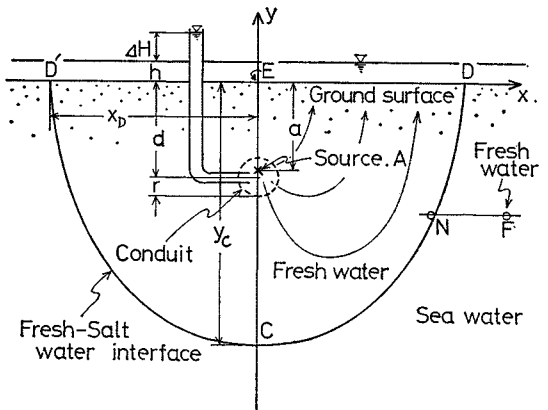


図-1 流れの場

* 土木学会第 17 回水理講演会、土木学会第 18 回年次学術講演会 II-175 にて発表

** 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学科

*** 正会員 九州産業大学講師 工学部土木工学科

曲線をなす淡塩境界面が、 θ 平面では $\theta_1 = kh$ の直線で表わされることになる。また、 θ_1 の共役関数として、 ϕ の共役関数 ψ を用いて

$$\theta_2 = \psi - k\epsilon x \dots\dots\dots(4)$$

を定義すると、式 (3), (4) から

$$\begin{aligned} \theta = \theta_1 + i\theta_2 &= \phi + i\psi - ik\epsilon(x + iy) \\ &= W - ik\epsilon z \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

が得られる。

3. 定常状態の厳密解

(1) 複素ポテンシャルの解析

a) 複素ポテンシャル式

いま暗きょ内に流出点を仮想して、暗きょからの流れを流出点からの流れにおきかえ、このポテンシャル流の解を用いて解析することにしよう。

まず、流出点 A からの流出量を Q とおいて、式 (5) より淡水領域上の θ の値を求めると表-1 のようになる。

表-1 各平面の対応

区間	地表面	淡塩境界面	暗きょ中心線	
平面	ED	DC	EA	AC
Z 平面	x $y=0$	x y	$x=0$ y	$x=0$ y
W 平面	$\phi = kh$ ψ	ϕ $\psi = Q/2$	ϕ $\psi = 0$	ϕ $\psi = Q/2$
θ 平面	$\theta_1 = kh$ θ_2	$\theta_1 = kh$ $\theta_2 = Q/2 - k\epsilon x$	θ_1 $\theta_2 = 0$	θ_1 $\theta_2 = Q/2$

この表の値にしたがって、 θ 平面の図形を描くと、図-1 の右半分領域に対して図-2 が得られる。

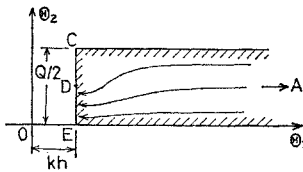


図-2 θ 平面

次に図-2の長方形 ACE の内部(ハッチの部分)を図-3の半平面上に写像するとき、E 点を $\lambda=0$ に、A 点を $\lambda=1$ に、D 点を無限遠点を選び、C 点の位置を $\lambda=r$ 、係数を M_0 とおくと、写像関数は Schwarz-Christoffel の変換式³⁾より

$$\theta = M_0 \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda-r} (\lambda-1)} \dots\dots\dots(6)$$

で示される。ここで

$$\sqrt{\lambda} = \zeta \dots\dots\dots(7)$$

の変数変換を行って積分すると

$$\theta = \frac{iM_0}{\sqrt{r-1}} \cdot \ln \frac{\zeta \sqrt{r-1} - i\sqrt{\zeta^2-r}}{\zeta \sqrt{r-1} + i\sqrt{\zeta^2-r}} + C_0 \dots\dots(8)$$

が得られる。このとき式 (7) によって図-3 の上半面は図-4 の四半平面に写像される。

同様にして図-1 の左半分領域は図-4 のハッチの部分の下側に写像される。したがって、図-1 の淡塩境界面の内部が図-4 の

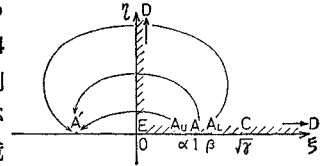


図-4 ζ 平面

半無限領域に写像されたことになる。図-4 の流れは、流出点 A ($\xi=1, \eta=0$) と η 軸に関して対称な位置に流入点 A' を仮想すると、無限領域に一对の流入流出点がある場合の流れと同じであり、流出点からの流出量を Q とおくと、複素ポテンシャルは次式で与えられる⁴⁾。

$$W = \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \frac{\zeta+1}{\zeta-1} + \mu \dots\dots\dots(9)$$

したがって、式 (9) を式 (5), (8) と連立させれば、 ζ 平面および θ 平面を媒介として、 z 平面と W 平面の対応がつくから、図-1 の淡塩境界内部の流れを解くことができる。

b) ϕ および ψ の式

式 (8) に $M_0 = M_1 + iM_2$, $\zeta = \xi + i\eta$, $C_0 = C_1 + iC_2$ を代入して、実数部と虚数部にわける。

$$\text{まず、} \sqrt{\zeta^2-r} = R_e + iI_m$$

$$\text{ただし、} R_e, I_m \geq 0$$

とおくと、

$$\begin{aligned} R_e &= \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2 - r + \sqrt{(\xi^2 - \eta^2 - r)^2 + 4\xi^2\eta^2}}{2}} \\ I_m &= \sqrt{\frac{-(\xi^2 - \eta^2 - r) + \sqrt{(\xi^2 - \eta^2 - r)^2 + 4\xi^2\eta^2}}{2}} \end{aligned} \dots\dots\dots(10)$$

が得られる。さらに

$$\ln \frac{\zeta \sqrt{r-1} - i\sqrt{\zeta^2-r}}{\zeta \sqrt{r-1} + i\sqrt{\zeta^2-r}} = L_r + iL_i$$

とおくと

$$\begin{aligned} L_r &= \frac{1}{2} \ln \frac{(R_e - \sqrt{r-1}\cdot\eta)^2 + (I_m + \sqrt{r-1}\cdot\xi)^2}{(R_e + \sqrt{r-1}\cdot\eta)^2 + (I_m - \sqrt{r-1}\cdot\xi)^2} \\ L_i &= \tan^{-1} \frac{2\sqrt{r-1}(R_e\cdot\xi + I_m\cdot\eta)}{R_e^2 + I_m^2 - (r-1)(\xi^2 + \eta^2)} \end{aligned} \dots\dots\dots(11)$$

となる。したがって、式 (11) を式 (8) に代入すると、

$$\theta_1 = -(M_2/\sqrt{r-1}) \cdot L_r - (M_1/\sqrt{r-1}) \cdot L_i + C_1 \dots\dots\dots(12)$$

$$\theta_2 = (M_1/\sqrt{r-1}) \cdot L_r - (M_2/\sqrt{r-1}) \cdot L_i + C_2 \dots\dots\dots(13)$$

を得る。ここで A 点 ($\xi=1, \eta=0$) の θ_2 の値を考える

と、図-2 のように $(\theta_2)_A=0$ または $Q/2$ であるのに対し、式 (10) から $(R_e)_A=0$, $(I_m)_A=\sqrt{r-1}$, したがって、式 (11) より $(L_r)_A=+\infty$ となるから、式 (13) より $M_1=0$ でなければならない。次に E 点 ($\xi=\eta=0$) の θ_1 の値を考えると、 $(\theta_1)_E=kh$ であるから、式 (12) より $C_1=kh$ となる。また、E 点と C 点 ($\xi=\sqrt{r}$, $\eta=0$) の θ_2 の値を考えると $(\theta_2)_E=0$, $(\theta_2)_C=Q/2$ であり、式 (11) の L_i が $0\sim\pi$ の値をとるように選ぶと、値の増減から $(L_i)_E=0$, $(L_i)_C=\pi$ となる。したがって、式 (13) より $C_2=0$, $M_2=-\sqrt{r-1}\cdot Q/(2\pi)$ が得られる。これらの値を式 (12), (13) に代入すると、

$$\phi + k\varepsilon y = \frac{Q}{4\pi} \cdot \ln \frac{(R_e - \sqrt{r-1}\cdot\eta)^2 + (I_m + \sqrt{r-1}\cdot\xi)^2}{(R_e + \sqrt{r-1}\cdot\eta)^2 - (I_m - \sqrt{r-1}\cdot\xi)^2} + kh \quad (14)$$

$$\psi - k\varepsilon x = \frac{Q}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \frac{2\sqrt{r-1}\cdot(R_e\cdot\xi + I_m\cdot\eta)}{R_e^2 + I_m^2 - (r-1)\cdot(\xi^2 + \eta^2)} \quad (15)$$

を得る。

次に式 (9) を実数部と虚数部にわけると、

$$\phi = \frac{Q}{4\pi} \cdot \ln \frac{(\xi+1)^2 + \eta^2}{(\xi-1)^2 + \eta^2} + \mu \quad (16)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \frac{-2\eta}{\xi^2 + \eta^2 - 1} \quad (17)$$

ここに、地表面 ($\xi=0$) においては $\phi=kh$ であるから、式 (16) より $\mu=kh$ が得られる。

(2) 淡水注入量および境界面形状の算定式

a) 淡水注入量

まず、暗きょ周壁の上端と下端の境界条件を、式 (14)~(17) に与えて、流出点からの流出量の算定式を求めよう。

○暗きょ周壁の上端 A_U 点においては、

$$x=0, y=-(d-r), \phi=k(dH+h), \psi=0$$

であるから、 $\xi=\alpha$ とおくと式 (14), (16) より

$$k d H - k \varepsilon (d-r) = \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \frac{\sqrt{r-\alpha^2} + \sqrt{r-1}\cdot\alpha}{\sqrt{r-\alpha^2} - \sqrt{r-1}\cdot\alpha} \quad (18)$$

$$\frac{Q}{k \cdot d H} = \frac{2\pi}{\ln(1+\alpha)/(1-\alpha)} \quad (19)$$

○暗きょ周壁の下端 A_L 点においては、

$$x=0, y=-(d+r), \phi=k(dH+h), \psi=Q/2$$

であるから、 $\xi=\beta$ とおくと、式 (14) より

$$k d H - k \varepsilon (d+r) = \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \frac{\sqrt{r-1}\cdot\beta + \sqrt{r-\beta^2}}{\sqrt{r-1}\cdot\beta - \sqrt{r-\beta^2}} \quad (20)$$

また式 (6) より

$$\frac{Q}{k d H} = \frac{2\pi}{\ln(\beta+1)/(\beta-1)}$$

ここに $\alpha < 1 < \beta$ を考慮して式 (19) と連立させると

$$\alpha = 1/\beta \quad (21)$$

が得られる。したがって、流出点からの流出量 Q は式 (18)~(21) を連立させて、与えられた境界条件 $d, r, \Delta H$ について解いて得られる。この流出量 Q を、求める暗きょからの淡水注入量と考える。

b) 淡塩境界面および浸透流線網

淡塩境界面で囲まれた浸透領域内の速度ポテンシャル ϕ および流れ関数 ψ は、式 (18)~(21) の算定で得られた α, β, r および Q の値を用いて、式 (14)~(17) から ξ, η を媒介として求められる。次に淡塩境界面は $\psi=Q/2$ の流線の一部であり、 ζ 平面では

$$\xi \geq \sqrt{r}, \eta = 0$$

で示される。したがって、淡塩境界面形状の算定式は式 (14)~(17) から

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{Q}{2k\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \cdot \tan^{-1} \frac{2\sqrt{r-1}\cdot\sqrt{\xi^2-r}\cdot\xi}{(\xi^2-r) - (r-1)\cdot\xi^2} \right\} \\ y &= \frac{Q}{2\pi k\varepsilon} \cdot \ln \frac{\xi-1}{\xi+1} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

特に淡塩境界面の横方向の大きさ x_D および縦方向の大きさ y_C は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x_D &= \frac{Q}{2k\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \cdot \tan^{-1} \frac{2\sqrt{r-1}}{2-r} \right\} \\ y_C &= \frac{Q}{2\pi k\varepsilon} \cdot \ln \frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

なお、前述したように、式 (22), (23) の逆正接は $0\sim\pi$ の値をとる。

(3) 境界面形状と境界条件との関係

以上の解析結果を用いて、境界条件の変化に伴う淡水注入量および淡塩境界面の大きさの変化を調べてみよう。

まず、暗きょの埋設深さ d を一定として、地表湛水面と暗きょ内水圧との水頭差 ΔH と暗きょ径 r を変えた場合の算定結果を 図-5, 6 に示している。これによる

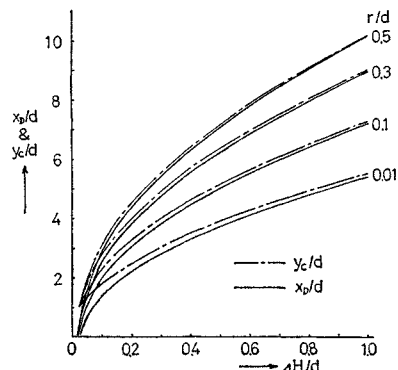


図-5 淡塩境界面の大きさ

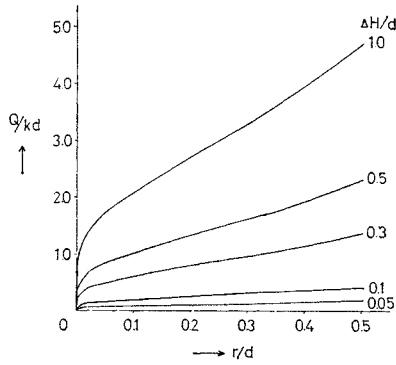


図-6 淡水注入量

と、 ΔH および r を大きくするほど淡塩境界面の押し下げ深さ y_c 、横幅 x_D および淡水注入量 Q はともに大きくなっている。 y_c 、 x_D については、 r が大きいほど ΔH を大きくした時の増加が大きく、また $y_c > x_D$ である。 ΔH を小さくすると $x_D/d=0$ 、 $y_c/d=1$ に近づき、 ΔH を大きくすると、 r が大きいほど $y_c=x_D$ に近づく。次に Q については ΔH が大きいほど r による変化が大きい。

次に ΔH を一定として d を変化させた場合の算定結果を 図-7、8 に示している。これから、 d を大きくすると x_D 、 y_c は増加するが、 d が大きいほど $y_c > x_D$

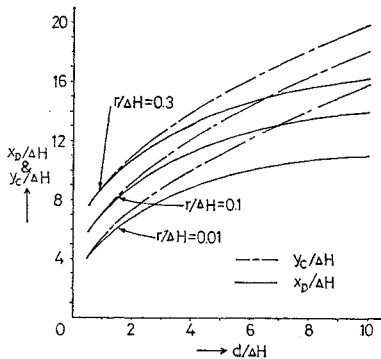


図-7 淡塩境界面の大きさ

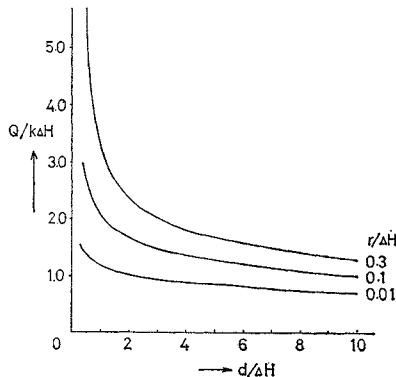


図-8 淡水注入量

となって y_c と x_D との相違が大きくなるのがわかる。また、 Q は d を大きくすると減少し、減少の割合は d が大きいほどあるいは r が小さいほど小さくなるのがわかる。

以上の算定結果から、淡水注入量をあまり増加させずに淡塩境界面の押し下げ深さを増大させるには、埋設深さ d を大きくとることが有効であるといえよう。

なお、暗きよ下端から押し下げ先端までの距離 ($y_c - d - r$) については、暗きよ下端の位置 ($y = -d - r$) が $y = -\Delta H/\epsilon$ の位置に達すると、暗きよ下端の圧力と海水圧とが等しくなるため、 $y_c - d - r$ は 0 となる。

4. 定常状態の近似解

(1) 基本的考え方

次に定常状態の淡塩境界面の解析の近似解法について考えてみよう。図-1 に示した海水飽和地盤中の任意点 $F(x, y)$ に淡水が存在するとして、この淡水のポテンシャルを考えると、圧力のエネルギーはその点の海水圧に等しいから $p_F = \rho_f g h - \rho_s g y$ 、また位置のエネルギーは地表面を基準にして $\rho_f g y$ である。したがって、この場合にも式 (2) が成り立つ。すなわち、海水飽和地盤中の海水を、これと同じ圧力分布をもつ淡水でおきかえると、この淡水は垂直下方に $k\epsilon$ の割合で増加する 図-9 に示すようなポテンシャル分布をもつことになる。すなわち、海水飽和地盤中の海水は、 $k\epsilon$ のポテンシャル勾配をもつ淡水の垂直上方への平行等速流におきかえることになる。したがって、淡水注入暗きよから流出する淡水の流れと、垂直上方に向う淡水の平行等速流れ（以下垂直上向流とよぶ）を重ね合わせれば、この結果得られる 2つの流れの領域境界面（以下において、2つの流れの重ね合わせで生ずる境界を領域境界とよぶことにし、淡塩境界と区別する）は、淡塩境界面に近似するの

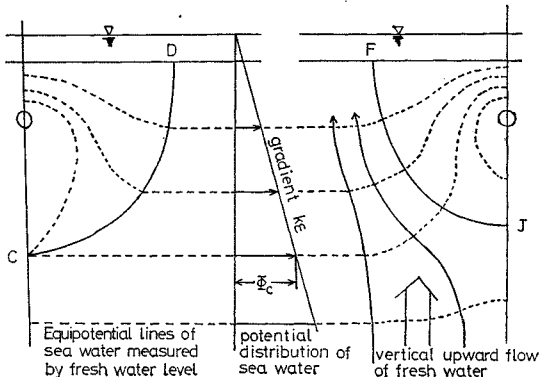


図-9 淡塩境界面

図-10 領域境界面

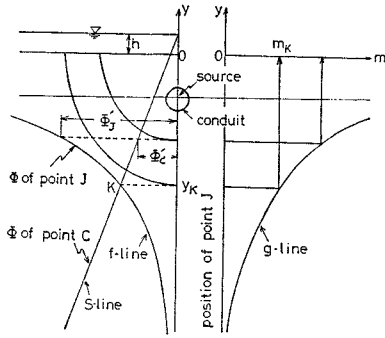


図-11 算定説明図

ではないかと考えた。しかし、この2つの流れを重ね合わせると、図-10のように垂直上向流の流れが領域境界面に変向するため、そのポテンシャル分布は図-9とは異なってくる。したがって、海水領域のポテンシャル勾配 $k\varepsilon$ と同じポテンシャル勾配をもつ垂直上向流を与えても、領域境界面の大きさは図-9の淡塩境界面とはかなり異なってくるものと考えられる。したがって、ここでは一応、垂直上向流のポテンシャル勾配を $mk\varepsilon$ とおき、領域境界面下端のポテンシャルと求める淡塩境界面下端のポテンシャルとが一致する m の値を求めて、この m の値をもつ垂直上向流に対して算定される領域境界面と淡塩境界面とを比較してみよう。

m の値を大きくすると垂直上向流のポテンシャル勾配は大きくなるから、領域境界面下端の点 J の位置は流出点の方へ上昇し、 m の値を小さくすれば J 点の位置は下がる。この m の値と J 点の位置の関係を g 線で表わし、 J 点のポテンシャル ϕ_J を f 線で、海水領域のポテンシャルを s 線で表わすと図-11のようになる。この f 線と s 線の交点 K に対する y_K が $\phi_J = \phi_C$ の条件を満足するので、交点 K に対する m_K の値をもつ垂直上向流を、暗きょからの流出流れに重ね合わせれば、得られる領域境界面の下端は、淡塩境界面の下端と一致する。

以上で垂直上向流のポテンシャル勾配を適当に選べば、両境界面の縦方向の大きさは一致させることができることを述べた。なお、横方向の大きさ、あるいは曲線形状については次節で検討する。

(2) 流れの重ね合わせによる解

前述にしたがって、垂直上向流の複素ポテンシャルを $i(mk\varepsilon)z$ とする。また、暗きょからの淡水流出流れの流出点の位置を $z = -ai$ 、領域境界内の浸透流量を Q とすれば、2つの流れの重ね合わせとして、その複素ポテンシャルは

$$W = \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \frac{z-ai}{z+ai} + C_0 + i(mk\varepsilon)z \dots\dots\dots(24)$$

で表わされる。上式に $W = \phi + i\psi$, $z = x + iy$ を代入して実数部と虚数部に分けると、次のようになる。

$$\phi = \frac{Q}{4\pi} \cdot \ln \frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2} + C_0 - (mk\varepsilon)y \dots\dots(25)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \frac{2ax}{a^2 - x^2 - y^2} + (mk\varepsilon)x \dots\dots(26)$$

まず、定数 C_0 の値は式(2)、(25)において $y=0$ とおくと

$$C_0 = kh \dots\dots\dots(27)$$

を得る。次に暗きょ内が被圧状態であるから、暗きょ周壁の上端 ($x=0, y=-d+r$) と下端 ($x=0, y=-d-r$) とが等ポテンシャルであることを考慮すると、流出点の位置 a は式(25)から

$$a = \frac{(1-e^A) \cdot r + \sqrt{d^2(e^A+1)^2 - 4e^A r^2}}{e^A + 1} \dots\dots\dots(28)$$

ここに、 $A = 4\pi r m k \varepsilon / Q$

暗きょからの淡水注入量は、式(25)に $x=0, y=-d+r$, $\phi = k(\Delta H + h)$ を代入して

$$Q = \frac{2\pi \{k\Delta H - mk\varepsilon(d-r)\}}{\ln(a+d-r)/(a-d+r)} \dots\dots\dots(29)$$

また領域境界面の形状は、式(26)に $\psi = Q/2$ を代入して

$$-\tan\left(\frac{2\pi mk\varepsilon}{Q}x\right) = \frac{2ax}{a^2 - x^2 - y^2} \dots\dots\dots(30)$$

ここに、領域境界面下端 J の位置は、 J 点が淀み点であることを考慮すると $v = -(\partial\phi/\partial y)_{x=0} = 0$ より

$$y_J = -\sqrt{\frac{Qa}{\pi mk\varepsilon} + a^2} \dots\dots\dots(31)$$

で与えられる。

次に図-11の m_K の値を決定する。領域境界面下端 J のポテンシャルは式(25)に $x=0, y=y_J$ を代入した値で与えられ、これが海水領域のポテンシャル(式(2))に等しくなければならない。この等式を整理すると m_K として次式を得る。

$$m_K = 1 + \frac{Q}{2\pi k\varepsilon y_J} \cdot \ln \frac{y_J - a}{y_J + a} \dots\dots\dots(32)$$

式(32)に式(28)、(29)、(31)を代入して、与えられた境界条件 $d, r, \Delta H$ について解くと m_K が求められる。また、この m_K を式(29)、(30)の m に用いれば、暗きょからの淡水注入量、領域境界面の形状などの水理諸量が求められる。

ここで領域境界面上のポテンシャル分布を式(25)から調べてみよう。まず、式(30)より境界面上の x と y の関係式を求めよう。 $2\pi mk\varepsilon/Q = M$ とおいて式(30)の左辺を Maclaurin 級数に展開し、その級数の逆数を求めると、

$$x^2 + y^2 - a^2 =$$

$$\frac{2a}{M} \left\{ 1 - \frac{1}{3}(Mx)^2 - \frac{1}{45}(Mx)^4 - \frac{2}{945}(Mx)^6 - \dots \right\}$$

となり、 $x^2 = f(y^2)$ の形に整理すると

$$\begin{aligned} x^2 = & -\frac{1}{2aM+3} \left(y^2 - a^2 - \frac{2a}{M} \right) - \left(\frac{3}{2aM+3} \right)^3 \\ & \cdot \frac{2aM^3}{45} \left(y^2 - a^2 - \frac{2a}{M} \right)^2 - \left(\frac{3}{2aM+3} \right)^5 \\ & \cdot \left(\frac{8a^2M^5}{2025} - \frac{2aM+3}{3} \cdot \frac{4aM^5}{945} \right) \\ & \cdot \left(y^2 - a^2 - \frac{2a}{M} \right)^3 - \dots \dots \dots (33) \end{aligned}$$

を得る⁵⁾。したがって、この式を式 (25) の右辺第 1 項の対数部分に代入し、再び級数に展開すると

$$\begin{aligned} \ln \frac{f(y^2) + (y-a)^2}{f(y^2) + (y+a)^2} = & \frac{-4a}{f(0) + a^2} y \\ + & \frac{\{f(0) + a^2\} \{12af''(0) + 8a\} + 16a\{f(0) - a^2\}}{\{f(0) + a^2\}^3} \cdot \frac{y^3}{6} \\ + & \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} f(0) = & \frac{3a}{2aM+3} \left(a + \frac{2}{M} \right) - \frac{2a^3M^3}{45} \\ & \cdot \left(a + \frac{2}{M} \right)^2 \left(\frac{3}{2aM+3} \right)^3 + \dots \\ f''(0) = & \frac{-6}{2aM+3} + \frac{8a^2M^3}{45} \left(a + \frac{2}{M} \right) \\ & \cdot \left(\frac{3}{2aM+3} \right)^3 + \dots \end{aligned}$$

が得られる。いま式 (34) 右辺の第 1 項と第 2 項の値を比較してみよう。第 1 項の y の係数および第 2 項の y^3 の係数は与えられた境界条件に対して一定値で、 y に無関係であるので、(第 2 項/第 1 項) の値は y^2 に比例する。したがって、(第 2 項/第 1 項) の値は y のとりうる最大値である $y=y_J$ で最大となる。いま $y=y_J$ で求めた数種の境界条件のもとでの (第 2 項/第 1 項) の値を表-2 に示している。これによると、 r/d および $\Delta H/d$ が極端に小さい場合を除けば第 2 項は第 1 項に対して十分無視できると考えられる。したがって、近似的に式 (34) の右辺は y の 1 次関数とみなされ、その勾配は $-\{Q/\pi \cdot a/(f(0) + a^2) + mk\epsilon\}$ の負の値であるから、領域境界面上のポテンシャルは下方に直線的に増加していることになる。すなわち、式 (27) と式 (32) を用い

表-2 r および ΔH の変化による $y=y_J$ での式 (34) 右辺の (第 2 項/第 1 項) の値 ($1/\epsilon=40$)

r/d	$\Delta H/d$	0.05	0.1	0.5
0.01		1/8.8	1/33.8	1/1087.2
0.1		1/20.4	1/102.8	1/3587.8
0.3		1/56.4	1/305.2	1/10302.9
0.5		1/157.1	1/824.5	1/25988.4

表-3 厳密解との比較 ($1/\epsilon=40$)

r/d	$\Delta H/d$	重ね合わせの解			厳密解		
		x_F/d	y_J/d	$Q/k\Delta H$	x_D/d	y_C/d	$Q/k\Delta H$
0.01	0.05	0.7528	1.3464	0.8100	0.7302	1.3513	0.8027
	0.1	1.4211	1.8213	1.0198	1.4138	1.8234	1.0190
	0.5	3.7500	3.9230	1.1556	3.7494	3.9231	1.1556
0.1	0.05	1.1540	1.6043	1.4877	1.1421	1.6062	1.4827
	0.1	1.9953	2.2956	1.8180	1.9920	2.2964	1.8175
	0.5	5.0249	5.1540	2.0460	5.0246	5.1541	2.0460
0.3	0.05	1.5030	1.8168	2.4066	1.4978	1.8173	2.4038
	0.1	2.5175	2.7347	2.9110	2.5160	2.7350	2.9108
	0.5	6.2387	6.3342	3.2685	6.2386	6.3342	3.2685
0.5	0.05	1.7136	1.9205	3.4243	1.7114	1.9206	3.4229
	0.1	2.8642	3.0155	4.1422	2.8635	3.0156	4.1421
	0.5	7.0917	7.1604	4.6505	7.0916	7.1604	4.6505

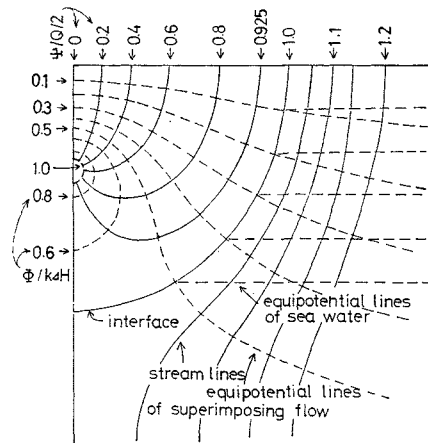


図-12 密度流および重ね流の流線と等ポテンシャル線

て、地表面と境界面下端の 2 点のポテンシャルを一致させれば、領域境界面上のポテンシャル分布は淡塩境界面上のポテンシャル分布と一致する。したがって、ここで述べた 2 つの流れの重ね合わせで得られた領域境界面の横幅および曲線形状は厳密解の淡塩境界面のそれらとほぼ一致するものと考えられる。

(3) 厳密解との比較

ここで、さきに求めた厳密解からの計算結果と、重ね合わせによる近似解の計算結果とを比較すれば表-3 となる。これによると、重ね合わせで求めた近似解は厳密解と非常によい一致を示しているといえる。図-12 はこの一例を示したもので、境界面内部の流線網は表-3 から明らかのようにほとんど一致し、図の上からは区別できなかった。なお、表-3 で r/d , $\Delta H/d$ が小さい値に対して、わずかな誤差が生じているが、これは前述した式 (34) 右辺の (第 2 項/第 1 項) の値の検討の結果からも肯定できるであろう。

5. 非定常の淡塩境界面の近似的算定

次に図-1の暗きょから海水飽和地盤中に淡水を注入してゆく場合の非定常状態の淡塩境界面について考えてみよう。

ここでは Muskat⁹⁾ による、地下水帯中の2本の井戸で揚水と注水を同時に行った場合の注入水の境界面の2次元非定常状態の算定、および Bear and Jacobs⁷⁾ による平行地下水流に注入井から淡水を注入した場合の境界面の2次元非定常状態の算定に用いられた近似算定法を、この場合に適用して、実験値と比較検討してみよう。

いま静止している海水飽和地盤中に暗きょから淡水の注入を開始したときの淡水と海水の移動の状況は、この場合の非定常状態の地下密度流の方程式が解かれていないので不明であるが、ここでは次のような仮定をする。すなわち、淡水と海水との密度および粘性の相違が小さいため、これらがその境界部の流れに及ぼす影響が小さいことも考え合わせて、進行する非定常状態の淡塩境界面付近とその内部の流れは、定常に達した後の淡塩境界面の内部の同位置の流れに近似しているとする。すなわち、非定常状態の淡塩境界面の移動は定常状態の流線に沿い、その速度は定常状態のその位置の浸透速度に等しいとする。このようにすれば、定常状態における淡塩境界面内部の各流線に沿う各粒子の同時刻の到達位置を求めて結べば、その時刻の非定常状態の淡塩境界面が求められる。ここに、定常状態の解として厳密解を用いると、領域内の ϕ, Ψ が ξ, η を媒介して表わされているために、取り扱いが非常に複雑になるから、重ね合わせの解を用いて解析する。この場合、領域内の速度ポテンシャルと流れ関数は式 (25), (26) で示されている。いま、地盤の空げき率を n とすれば、浸透層内の実流速は、

$$u = -\frac{1}{n} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{n} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{n} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

であるから、時間を t とすると、式 (25) より

$$u = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{n} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{Q}{n\pi} \cdot \frac{2axy}{\{x^2+(y-a)^2\}\{x^2+(y+a)^2\}} \dots (35)$$

また、流線の方程式は式 (26) より

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2 - 2ax \cdot \cot \left\{ \frac{2\pi}{Q} (\Psi - mk\epsilon x) \right\}} \dots (36)$$

で表わされる。したがって、淡水がある流線 ($\Psi = \text{const}$, 定常状態の流線) に沿って、ある位置 (x_0, y_0) からある位置 (x_1, y_1) に到達するまでの時間は、式 (35) に式

(36) を代入して、 x_0 より x_1 まで積分した値で表わされる。いま、 d で無次元化して、 $x/d = X, a/d = A_D, Q/kd = Q_D$ とおけば

$$T = \frac{tk}{nd} = \frac{\pi}{Q_D} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \frac{2A_D X \cdot \text{cosec}^2 \left\{ \frac{2\pi}{Q_D} \left(\frac{\Psi}{kd} - m\epsilon X \right) \right\}}{\sqrt{A_D^2 - X^2 - 2A_D X \cdot \cot \left\{ \frac{2\pi}{Q_D} \left(\frac{\Psi}{kd} - m\epsilon X \right) \right\}}} dX \dots (37)$$

となる。なお、この式からは $x=0$ の流線上の時間は求められないので、式 (35) と同様に y 方向の流速を求め、暗きょ下端の位置で $t=0$ とおいて積分すれば次式を得る。

$$T = \frac{tk}{nd} = \frac{1}{m\epsilon} \left[Y+1+R - \frac{Q_D \cdot A_D}{2\sqrt{m\epsilon\pi(Q_D \cdot A_D + m\epsilon\pi A_D^2)}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{Q_D \cdot A_D + m\epsilon\pi A_D^2} + \sqrt{m\epsilon\pi} Y}{\sqrt{Q_D \cdot A_D + m\epsilon\pi A_D^2} - \sqrt{m\epsilon\pi} Y} \right| \cdot \frac{\sqrt{Q_D \cdot A_D + m\epsilon\pi A_D^2} + \sqrt{m\epsilon\pi}(1+R)}{\sqrt{Q_D \cdot A_D + m\epsilon\pi A_D^2} - \sqrt{m\epsilon\pi}(1+R)} \right]$$

ここに $Y=y/d, R=r/d$

上式に式 (31), (32) を代入すると

$$T = \frac{1}{m\epsilon} \left[Y+1+R + \left(1 - \frac{1}{m} \right) \cdot \ln \left| \frac{Y_J - Y}{Y_J + Y} \cdot \frac{Y_J - (1+R)}{Y_J + (1+R)} \right| \Big/ \ln \left| \frac{Y_J - A_D}{Y_J + A_D} \right| \right] \dots (38)$$

この式は淡塩境界面の下端 (y 軸上の点) の進行時間を示していて、 $y=y_J$ のとき $T=\infty$ となる。

したがって、あらかじめ式 (36) によって流線を描いておき、式 (37), (38) で求めた各流線上の各点の到達

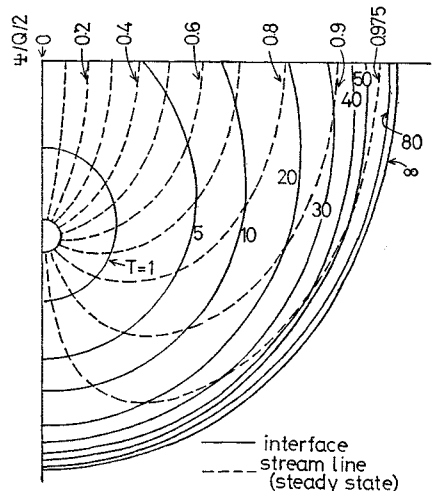


図-13 算定非定常淡塩境界面

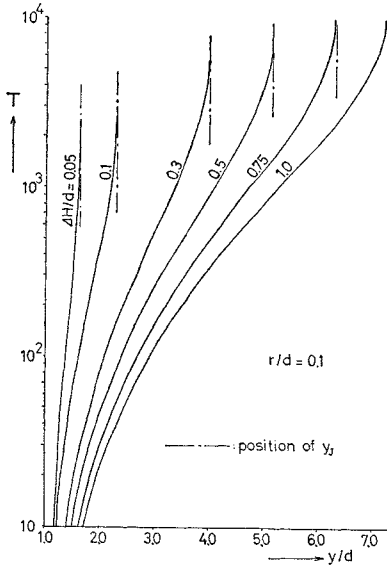


図-14 淡塩境界面の押し下げ時間

時間をもとに等時到達位置を互いに結べば、その時刻における淡塩境界面を描くことができる。このようにして求めたものが 図-13 である。

次に式 (38) から、 y 軸上における淡塩境界面の押し下げに要する時間を検討してみよう。この時間経過の一例を 図-14 に示す。境界面先端が y_j の位置に近づくにつれ、無限大の時間となっている。次に境界面先端がある深さ y に達する時間を、普通考えられる境界条件の範囲について算定し、その結果を 図-15 に示す。

これによればウォーターカーテンがある深さの位置に到達する時間を概略求めることができるであろう。

6. モデル実験による検証

淡水注入のモデル実験を行い、前述の定常状態および非定常状態の淡塩境界面形状の計算結果を実験結果と比較してみよう。

式 (37) からわかるように、非定常状態の場合には空げき率と透水係数の値が境界面形状に直接関係する。したがって、検証実験装置としては、砂モデルよりも、モデルの浸透領域内の空げき率と透水係数の均一化およびそれらの値の決定が比較的容易な Hele-Shaw モデルを用いることにした。図-16 に透明なアクリル板(厚さ 5 mm)を用いた実験装置の概略を示している。ここに平板の間隔は $D=2.5$ mm であり、粘性流体には、暗きよより注入する淡水として 15°C で密度 $\rho_1=0.881$ g/cm³、動粘性係数 $\nu_1=2.10$ cm²/sec の油を用い、地盤側の海水として $\rho_2=0.910$ g/cm³、 $\nu_2=2.70$ cm²/sec の油を使用した。この場合

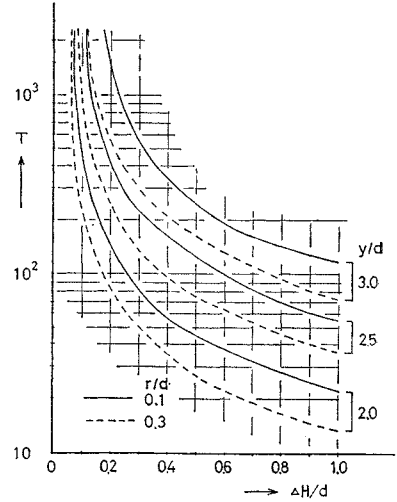


図-15 境界面下端がある深さ (y) に到達する時間

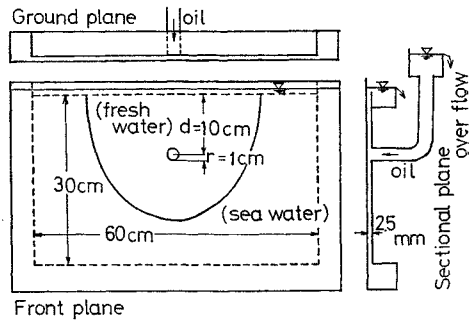


図-16 実験装置

$$\epsilon = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_1 = 1/29.97$$

空げき率は $n=1$ 、透水係数は Hagen-Poiseuille の法則により

$$k = \frac{gD^2}{12\nu_1} = 2.43 \text{ cm/sec}$$

となる。また粘性係数がほとんど同じであることから、粘性のちがいが境界面の移動速度におよぼす影響はほとんど無視できると考えられる。非定常時の境界面の実験曲線は、実験時に写真撮影したものを、あとで実物大に拡大して描く方法をとった。また定常状態の境界面は、うしろ側のアクリル板の裏側に張りつけた方眼紙によっても読みとった。

図-17, 18 に実験結果と計算結果を比較して示している。図-17 は $\Delta H/d=0.2$, $r/d=0.1$, $h/d=0.005$ の境界条件で、淡塩境界面の初期位置を暗きよ周壁の位置とした場合について行ったものである。なお、この場合は注入油が海水側の油より軽いので、暗きよの全周壁から同時に注入油が流入せず、暗きよ周壁上端からの流入開始時刻が、暗きよ周壁下端のそれより、どうしても 15 秒程度早くなった。したがって、実験結果を整理する際

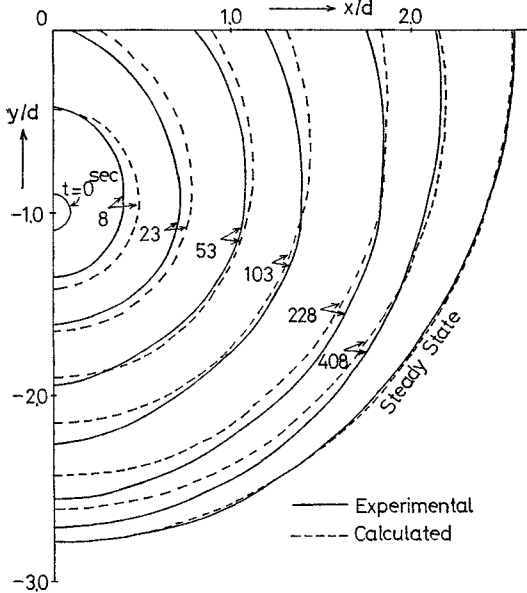


図-17 実験結果との比較

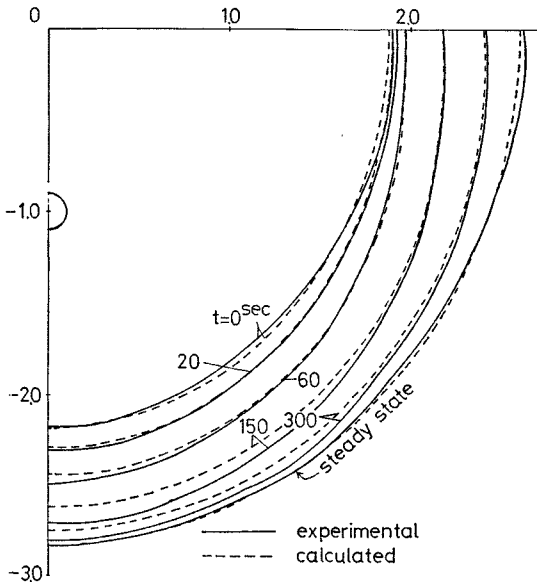


図-18 実験結果との比較

に、暗きょ中心から放射線を描き、各放射線上の各点における境界面の到達時間は、近似的にその放射線上の暗きょ周壁の位置を注入油が流入し始める時刻からの経過時間に等しいものと考えた。このようにして求めたものが図-17の実験曲線(実線)であり、この曲線形状は予備実験として行った砂モデル実験による境界面形状と相似な形であった。

図-17により実験結果と計算結果(点線)とを比較すると、定常状態の形状はよく一致している。次に非定常状態については、計算結果は初期に実験結果よりやや早

く移動し、横方向の拡がりは定常状態に近づくにつれ実験結果と一致してくるが、縦方向は定常状態に近づくにつれ実験結果より遅くなっていく。次に図-18は $\Delta H/d=0.122$, $r/d=0.1$, $h/d=0.005$ の定常状態の境界面を初期条件として、暗きょ内水頭を $\Delta H/d=0.122$ から 0.203 に急変させた場合について求めたものである。この場合の計算結果を実験結果と比較すると、定常状態の曲線形状は $\Delta H/d=0.122$, 0.203 の両者ともほぼ一致している。また非定常状態については、初期にはよく一致しており、定常状態に近づくにつれて図-17と同様に縦方向が実験結果より遅くなっている。この理由については明らかでないが、前述したように非定常流を定常流とにおいて算定したことなども考えられよう。

以上のように、非定常状態の境界面の近似算定結果は実験値に比べて、注入初期にやや早く、定常状態に近づくにつれて縦方向がやや遅くなるようであるが、全体的にはほぼ一致している。したがって、ここで述べる方法で定常状態の解を用いて近似的に非定常境界面形状を求めることができるといえる。

7. むすび

以上によって、海水で飽和された地盤中に淡水を暗きょから注入する場合の淡塩境界面について、定常状態の厳密解と近似解および非定常状態の近似的算定法を検討できたものとする。

特に、淡塩境界面の定常状態の近似解として用いた手法、すなわち淡塩境界面が海水から受ける密度差による圧力効果を、垂直上方へ向う淡水の平行等速流による圧力効果におきかえ、2つの流れの重ね合わせから解析する手法は、解析が容易であること、精度も十分であることから、地下密度流の解析に有効に用いられる一手法と考えられる。次に定常状態の解を用いて非定常状態の淡塩境界面の形状を算定したが、ここで述べた方法は近似的算定法として十分用いうるものであった。なお、2次元の淡塩境界面についてはすでに種々の場合の解析が行われているから、ここで検討した定常解を非定常解に利用する近似的手法により、それらの非定常状態の境界面形状を求めようものとする。

終りに、本研究にご援助いただいた助手神野健二氏および卒業研究として実験装置の作成および実験にご協力いただいた浅野幸男君(住友建設勤務)に感謝します。なお、本研究は昭和47年度文部省科学研究費の援助のもとに行われた。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) 上田・崎山：海水飽和地盤における淡水注入溝の浸透，土木学会論文報告集 第135号，昭和41年11月。
- 2) Polubarinova-Kochina：Theory of Ground Water

- Movement, p. 120, Princeton Univ. Press, 1962.
- 3) 佐々木：完全流体の流体力学， p. 51, 金原出版（株），昭和29年1月。
 - 4) 前出 3), P. 33.
 - 5) Dwight : Tables of Integrals and Other Mathematical Data, 4th ed., p. 15, The Macmillan Company, 1961.
 - 6) Muskat : The flow of homogeneous fluids through porous media, p. 466, McGraw-Hill, 1946.
 - 7) Bear and Jacobs : On the movement of water bodies injected into aquifers, Journal of Hydrology, Vol. 3, No. 1, p. 37, 1965.

(1974.11.24・受付)
