

## 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材

THIN-WALLED MEMBERS UNDER AXIAL FORCE, BENDING AND TORSION

西野文雄\*・倉方慶夫\*\*・長谷川彰夫\*\*\*・奥村敏恵\*\*\*\*

By Fumio Nishino, Yoshio Kurakata, Akio Hasegawa and Toshie Okumura

### 1. ま え が き

薄肉直線棒部材の有限変位理論に基づく研究は、主として座屈問題に関連して、多くの研究者の注目を集めてきた。これらの研究のうち、軸方向力、二主軸回りの曲げモーメント、ねじりモーメントの作用する、もっとも一般的な荷重状態についてのつり合い式を求めた結果が Vlasov<sup>1)</sup>, Roik, Carl, Lindner<sup>2)</sup>, 坂井<sup>3)</sup> によって報告されている。Vlasov および Roik, Carl, Lindner の両者とも、棒部材に生じている応力場、変位場を、ともに線形化し、その応力場に対して変位時の幾何学的考察を加えてつり合いの微分方程式を求めている。坂井は初期応力<sup>4)</sup> の概念を用いて、エネルギー原理からつり合い式を求めている。このとき、初期応力場、および変位場として、前者と同じく線形化したものが用いられている。これら 3 つの報告に示されている結果にはそれぞれ多少の差がみられるが、いずれもいわゆる線形化有限変位理論に属するものである。しかしながら、応力場、変位場を、はじめから線形化して与えているために、線形化有限変位理論としても、必ずしも十分なものではなく、固有値問題に限っても適用範囲に制約が生じる。その一つの例をばり、あるいは柱-はりの横座屈の問題にみることができる。二主軸に関して対称な断面の、いわゆる弱軸回りに曲げモーメントが作用しているはりに横座屈現象が生じることは考え難く、事実横座屈現象が生じないという研究成果も報告されている<sup>5), 6)</sup>。これに反し、前記の理論に基づくと、弱軸まわりに作用している曲げモーメントがある値になると、つり合い系が唯一でなくなり、横方向に座屈した状態でもつり合い状態が存在す

る結果が得られる。

薄肉直線棒部材のより一般的な有限変位理論に基づく支配方程式を、仮想仕事の原理より求めたものに Nishino, Kasemset, Lee<sup>6)</sup> の研究がある。幾何学的な考察からつり合い式を求めるとき、力の大きさ、向き、方向に十分な注意を払わなければならないのに対し、仮想仕事の原理に基づくと、変位場を仮定すれば、すべての支配式が数学的な演算のみで求まる。このことから、後者によって求められた支配方程式の精度は、すべて変位場の仮定によって決まり、したがって、理論展開にあたって変位場に対する検討がもっとも重要となる。ここでは、Nishino, Kasemset, Lee による研究の変位場に対する検討に、さらに吟味を加え、発展させた薄肉直線棒部材の支配方程式について報告する。

棒部材に適用される一次元の変位場を求めるために、三次元問題に対して得られているひずみ-変位の関係を、従来から棒理論で用いられているのと同じ仮定を用いて、一次元の関係に変換する。このために、次の 4 つを仮定する。

(i) 断面寸法に比べ、部材長は十分に長く、部材軸方向の変位の微係数は比較的小さい。

(ii) 断面は変形しない。

(iii) 薄板要素の板厚中心面に垂直で、部材軸線に平行な面内でのせん断ひずみは小さく、無視し得る。

(iv) 板厚中心面内のせん断ひずみのうち、直応力や分布外力とつり合い状態にあるせん断応力によるせん断ひずみは小さく、無視し得る。これはオイラー・ベルヌーイの平面保持の仮定を拡張したものである。

棒理論では、部材軸方向の直応力に比べて、これに直交する方向の直応力は小さく、したがって、部材軸方向の直応力と直ひずみは弾性係数を定数とする比例関係にある、とする仮定が一般に用いられている。この報告でも一次元直応力-直ひずみ関係として、この関係を仮定する。

\* 正会員 Ph. D. 東京大学助教授 工学部総合試験所

\*\* 学生会員 工修 東京大学大学院博士課程在学

\*\*\* 正会員 工博 名古屋工業大学講師 土木工学科

\*\*\*\* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

2. ひずみと変位の関係

薄肉断面の一例を Fig. 1 に示す。この報告では部材上の点を表わすのに 2 組の物体固定座標系を用い、ラグランジュの方法を採用する。その一つは任意点 C を原点とする (x, y, z) 座標であり、基準状態 (変形前) では、デカルト座標を構成する。他の一つは (s, n, z) 座標であり、基準状態では直交曲線座標である。ここに s は断面の板厚中心線に沿ってとった座標であり、その中心線上の任意点 0 に原点をもつ。また n は板厚中心線を原点とし、これに垂直な座標である。両座標系に共通な z 座標を、部材軸に平行に選ぶ。両座標系ともに右手系の座標とする。

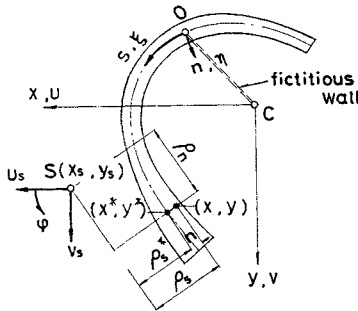


Fig. 1 Coordinates and Reference Points

有限変位理論によるひずみ-変位の関係は、ラグランジュの方法を用い、基準状態がデカルト座標を構成するとき、次式で表わされる<sup>4)</sup>。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \dots\dots(2.1 a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \dots\dots(2.1 b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \dots\dots(2.1 c)$$

$$2\tau_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \dots\dots(2.1 d)$$

$$2\tau_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \dots\dots(2.1 e)$$

$$2\tau_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \dots\dots(2.1 f)$$

ここに、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  はひずみテンソルの成分であり、 $u, v, w$  はそれぞれ基準状態での  $x, y, z$  方

向への変位である。

仮定 (i) から、式 (2.1) 中の  $w$  の微係数は他に比べ小さいものとし、 $w$  の微係数の 2 次項を無視する。これより式 (2.1) は

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \dots\dots(2.2 a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \dots\dots(2.2 b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \dots\dots(2.2 c)$$

$$2\tau_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \dots\dots(2.2 d)$$

$$2\tau_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \dots\dots(2.2 e)$$

$$2\tau_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \dots\dots(2.2 f)$$

仮定 (ii) を数式で表わすと、ひずみに関して

$$\epsilon_x = 0, \epsilon_y = 0, \tau_{xy} = 0 \dots\dots(2.3)$$

と書くことができる。断面の剛体変位に対する幾何学的条件を考えると変位  $u, v$  は次のように表わされ、その変位は式 (2.2 a, b, d) を式 (2.3) に代入した微分方程式を満足し、したがってこの式の解となっている。

$$u = u_s - (y - y_s) \sin \varphi - (x - x_s)(1 - \cos \varphi) \dots\dots(2.4 a)$$

$$v = v_s + (x - x_s) \sin \varphi - (y - y_s)(1 - \cos \varphi) \dots\dots(2.4 b)$$

ここに、 $u_s, v_s, \varphi$  は積分定数であり、 $u_s, v_s$  はそれぞれ任意点  $S(x_s, y_s)$  の  $x, y$  方向の変位を、 $\varphi$  は同じ点での回転変位を表わす。

方向余弦  $l, m$  を

$$l = \cos(s, x), m = \cos(s, y) \dots\dots(2.5 a, b)$$

と定義すると、基準状態での  $s, n$  方向への変位  $\xi, \eta$  はこれらを用いて次のように表わされる。

$$\xi = lu + mv = lu_s + mv_s + \rho_s \sin \varphi - \rho_n(1 - \cos \varphi) \dots\dots(2.6 a)$$

$$\eta = -mu + lv = -mu_s + lv_s + \rho_n \sin \varphi + \rho_s(1 - \cos \varphi) \dots\dots(2.6 b)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \rho_s &= m(x - x_s) - l(y - y_s) \\ \rho_n &= l(x - x_s) + m(y - y_s) \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.7 a, b)$$

薄肉中心線上 ( $n=0$ ) での諸量を ( ) \* で表わすと、断面上の一般の点の  $x, y$  座標は中心線上の  $x, y$  座標、すなわち、 $(x^*, y^*)$  と  $n$  座標を用いて

$$x = x^* - mn, y = y^* + ln \dots\dots(2.8 a, b)$$

と表わしうる。 $\rho_s, \rho_n$  については

$$\rho_s = \rho_s^* - n, \rho_n = \rho_n^* \dots\dots(2.9 a, b)$$

の関係がある。

せん断ひずみに関する仮定を用いるために、式 (2.2) の  $r_{xz}, r_{yz}$  を  $(s, n, z)$  座標に関するせん断ひずみ  $r_{sz}, r_{nz}$  に変換する。直交座標間での座標変換を行うことによって、

$$2r_{sz} = 2(mr_{yz} + lr_{xz}) = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \left( \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{1}{1-n/r^*} \dots\dots\dots (2.10 a)$$

$$2r_{nz} = 2(lr_{yz} - mr_{xz}) = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \dots\dots\dots (2.10 b)$$

を得る注1)。ここに  $r^*$  は板厚中心線の曲率半径であり、 $n$  座標の方向に曲率の中心がある場合  $r^* > 0$  とする。仮定 (iii) は

$$r_{nz} = 0 \dots\dots\dots (2.11)$$

と書ける。式 (2.4), (2.6 b) を式 (2.10 b) に代入し、式 (2.11) の関係を用いて  $n$  について積分すると、

$$w = w^* + \{m(u_s' \cos \varphi + v_s' \sin \varphi) - l(v_s' \cos \varphi - u_s' \sin \varphi) - \rho_n \varphi'\} n \dots (2.12)$$

ここに、 $w^*$  は積分定数であり、 $(s, n=0, z)$  での  $z$  方向への変位を表わす。( )' は  $z$  に関する微分を表わす。

仮定 (iv) のオイラー・ベルヌイの仮定から、開断面あるいは断面の分岐部のうち開いた部分 (以下開区間とよぶ) に対しては、薄肉の前提により板厚中心面のせん断ひずみ  $r_{sz}^*$  は

$$r_{sz}^* = 0 \dots\dots\dots (2.13)$$

と表わせる。閉断面あるいは閉断面部 (以下閉区間とよぶ) に対しては、 $r_{sz}^*$  を 0 とおくと、一般には断面の  $z$  方向の変位にくい違いを生ずる。仮定 (iv) を閉区間に適用するために、微少要素  $t ds dz$  のつり合いを考え

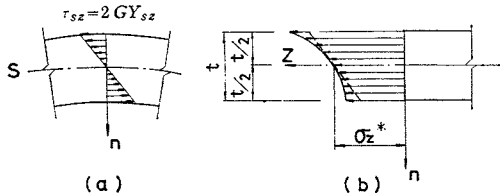


Fig. 2 Stress Distribution across Thin Wall : (a) Shear Stress; (b) Normal Stress

注 1) 式 (2.5) の方向余弦  $l, m$  は板厚中心線上で  $l^* = \frac{\partial x^*}{\partial s} = -\frac{\partial y}{\partial n}, m^* = \frac{\partial y^*}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial n} \dots (a)$  と表わすことができる。板厚中心線の曲率半径  $r^*$  を用いると、一般点では  $l = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{1}{1-n/r^*}, m = \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{1}{1-n/r^*} \dots (b)$  となる。式 (2.10) では上記 (a), (b) の関係を用いている。

る。式 (2.4), (2.6 a), (2.12) および (2.10 a) からせん断ひずみ  $r_{sz}$  は、Fig. 2 (a) に示すように、薄肉を前提とすると  $n$  の一次関数であることがわかる注2)。したがって、板厚中心面上のせん断ひずみ  $r_{sz}^*$  は  $r_{sz}$  の板厚方向の平均値となっており、せん断応力  $\tau_{sz}$  についても同様である。このことを考慮すると、 $z$  方向線素の変形後の方向のつり合い式は、直応力  $\sigma_z$  と変形後の部材軸方向の単位体積あたりの分布外力  $\tilde{p}_{zd}$  および  $\tau_{sz}^*$  を用いて

$$\frac{\partial(\tau_{sz}^* t)}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z dn \right\} + \int_{-t/2}^{t/2} \tilde{p}_{zd} dn = 0 \dots\dots\dots (2.14)$$

となる。ここに  $t$  は板厚である。式 (2.14) を  $s$  について積分し、せん断弾性係数  $G$  でわると

$$2\tau_{sz}^* = \frac{q_1}{Gt} - \frac{1}{Gt} \int_{s_1}^s \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z dn \right\} + \int_{-t/2}^{t/2} \tilde{p}_{zd} dn \right] ds \dots\dots\dots (2.15)$$

ここに、 $q_1 = (\tau_{sz}^* t)_{s=s_1}$  は積分定数であり、 $s_1$  は板厚中心線上の任意点の  $s$  座標である。仮定 (iv) から式 (2.15) の右辺第 2 項を小さいものとして無視し、次のように表わす。

$$2\tau_{sz}^* = \frac{q_1}{Gt} \dots\dots\dots (2.16)$$

開区間に対して式 (2.16) を適用すると、自由縁での条件から、 $q_1$  は 0 となる。したがって、式 (2.13) は式 (2.16) の特殊な場合に相当する。この報告では、式 (2.16) をオイラー・ベルヌイの仮定を数式化したものとする。

式 (2.10 a) に式 (2.4), (2.6 a) および (2.16) を代入すると

$$\frac{\partial w^*}{\partial s} = \frac{q_1}{Gt} - l(u_s' \cos \varphi + v_s' \sin \varphi) - m(v_s' \cos \varphi - u_s' \sin \varphi) - \rho_s^* \varphi' \dots\dots\dots (2.17)$$

閉区間の場合、 $q_1$  はこの区間での変位  $w$  の連続条件

$$\oint \frac{\partial w^*}{\partial s} ds = 0 \dots\dots\dots (2.18)$$

から定まる。ここに  $\oint ds$  は閉区間について一周積分す

注 2) 一般の場合厳密には、 $r_{sz}$  は  $n$  の一次関数とはならず、式 (2.10 a) に式 (2.4), (2.6) および (2.12) を代入すると

$$2r_{sz} = \frac{1}{1-n/r^*} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial s} + l(u_s' \cos \varphi + v_s' \sin \varphi) + m(v_s' \cos \varphi - u_s' \sin \varphi) + \rho_s^* \varphi' - n \left( 2 - \frac{n}{r^*} \right) \varphi' \right] \dots\dots\dots (c)$$

となる。薄肉の前提を式で表わすと、 $|t/r^*| \ll 1 \dots\dots\dots (d)$  であるから、薄肉の場合には式 (c) の  $n/r^*$  の項が無視でき  $r_{sz}$  は  $n$  の一次関数と見なせる。

ることを表わす。以上から、 $q_1$  は開区間と閉区間に対し、それぞれ次のように定まる。

$$q_1 = \begin{cases} 0 & \text{(開区間)} \\ G \frac{\int \rho_s^* ds}{\int \frac{1}{t} ds} \varphi' & \text{(閉区間)} \end{cases} \dots\dots\dots (2.19)$$

式 (2.17) を  $s$  について積分すると

$$w^* = c(x) - x^*(u_s' \cos \varphi + v_s' \sin \varphi) - y^*(v_s' \cos \varphi - u_s' \sin \varphi) - Q^* \varphi' \dots (2.20)$$

ここに  $c(x)$  は積分定数であり、 $Q^*(s)$  は次式で表わされる。

$$Q^* = \begin{cases} \int_0^s \rho_s^* ds & \text{(開区間)} \\ \int_0^s \left( \rho_s^* - \frac{\int \rho_s^* ds}{\int \frac{1}{t} ds} \cdot \frac{1}{t} \right) ds & \text{(閉区間)} \end{cases} \dots\dots\dots (2.21)$$

$xy$  座標の原点  $C$  を一般の点に選ぶとすると、点  $C$  は必ずしも板厚中心線上にない。したがって、変位  $w$  を原点  $C$  で定義できなくなる。ここでは便宜上、式 (2.17) の積分定数  $c(x)$  を原点  $C$  の変位を用いて表わすために、原点  $C$  と  $s$  座標の原点  $0$  の間を Fig. 1 に示すように、仮定の板厚  $t=0$  の薄板で結ぶ。このようにしても  $t=0$  であるため、この薄板は棒部材の力学的性質に影響を与えることはない。この結果、原点  $C$  の  $z$  軸方向の変位が定義できるようになり、それを  $w_c = w(x=0, y=0, z)$  と表わすと、式 (2.20) より積分定数  $c(x)$  は  $w_c$  を用いて次のように表わされる。

$$c(x) = w_c + Q_c^* \varphi' \dots\dots\dots (2.22)$$

ここに、 $Q_c^*$  は原点  $C$  での  $Q^*$  であり、次のように表わされる。

$$Q_c^* = \int_0^{s_c} \rho_s^* ds \dots\dots\dots (2.23)$$

$s_c$  は原点  $C$  の仮想薄板に沿ってはかられる  $s$  座標である。式 (2.12), (2.20) および (2.22) から (i)~(iv) の仮定を満たす  $w$  として次式を得る。

$$w = w_c - x(u_s' \cos \varphi + v_s' \sin \varphi) - y(v_s' \cos \varphi - u_s' \sin \varphi) - \omega \varphi' \dots\dots (2.24)$$

ここに、

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} [N' + p_z] \delta w_c dz - \left[ (N - \bar{N}) \delta w_c \right]_{z_1}^{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} \left[ (M_x \cos \varphi - M_y \sin \varphi)'' + [N \{u_s' + (y_s \cos \varphi + x_s \sin \varphi) \varphi'\}]' \right. \\ & + p_x + (m_x \cos \varphi - m_y \sin \varphi)' \left. \right] \delta u_s dz + \left[ \bar{V}_x - (M_x \cos \varphi - M_y \sin \varphi)' - N \{u_s' + (y_s \cos \varphi + x_s \sin \varphi) \varphi'\} \right. \\ & \left. - (m_x \cos \varphi - m_y \sin \varphi) \right] \delta u_s \Big|_{z_1}^{z_2} + \left[ [(M_x \cos \varphi - M_y \sin \varphi) - (\bar{M}_x \cos \varphi - \bar{M}_y \sin \varphi)] \delta u_s' \right]_{z_1}^{z_2} \end{aligned}$$

注 3) これは St. Venant のねじりにおけるせん断ひずみを表わしている。式 (2.10 a) から計算を進めると、

$$2 \tau_{sz} = \frac{\theta + n^2/r^*}{1 - n/r^*} \varphi' \dots\dots\dots (e)$$

となる。脚注 2) の式 (d) の薄肉の前提条件式を用いると式 (e) は、式 (2.26 b) となる。式 (2.10 a) の段階で薄肉の条件を用いると St. Venant のねじれを表わす式 (2.26 b) 式を得ることができないことに注意しなければならない。

$$\omega = Q^* + \rho_{nn} - Q_c^* \dots\dots\dots (2.25)$$

式 (2.2 c) に式 (2.4) および (2.24) を代入し、また式 (2.10 a) に式 (2.4), (2.6 a) および (2.24) を代入すると、仮定 (i)~(iv) を満たす直ひずみ  $\epsilon_z$ , せん断ひずみ  $\tau_{sz}$  と変位の関係として次式を得る。

$$\begin{aligned} \epsilon_z = & w_c' + \frac{1}{2} (u_s'^2 + v_s'^2) + \{ (y_s u_s' - x_s v_s') \cos \varphi \\ & + (x_s u_s' + y_s v_s') \sin \varphi \}' \varphi' - x (u_s'' \cos \varphi \\ & + v_s'' \sin \varphi) - y (v_s'' \cos \varphi - u_s'' \sin \varphi) \\ & - \omega \varphi'' + \frac{1}{2} \{ (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 \} \varphi'^2 \\ & \dots\dots\dots (2.26 a) \end{aligned}$$

$$\tau_{sz} = \frac{1}{2} \theta \varphi' \text{注 3)} \dots\dots\dots (2.26 b)$$

ここに、

$$\theta = \begin{cases} -2n & \text{(開区間)} \\ \frac{\int \rho_s^* ds}{\int \frac{1}{t} ds} \cdot \frac{1}{t} - 2n & \text{(閉区間)} \end{cases} \dots\dots (2.27)$$

( $s, n, z$ ) 座標でのひずみの 6 成分のうち、 $\epsilon_s, \epsilon_n, \tau_{sn}$  は式 (2.3) によって、 $\tau_{nz}$  は式 (2.11) によってすべて 0 である。

### 3. つり合い方程式と境界条件

部材に分布して作用する外力 (体積力) と両端に外的に作用する表面力を受け、空間でつり合っている直線材を考えると、仮想仕事の原理は次式で表わされる<sup>4)</sup>。

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \int_A [\sigma_z \delta \epsilon_z + 2 \tau_{sz} \delta \tau_{sz}] dA \cdot dz \\ & = \int_{z_1}^{z_2} \int_A [p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w] dA \cdot dz \\ & + \left[ \int_A (\bar{\sigma}_z \delta w + \bar{\tau}_{sz} \delta \xi + \bar{\tau}_{nz} \delta \eta) dA \right]_{z_1}^{z_2} \dots (3.1) \end{aligned}$$

ここに、 $p_{xd}, p_{yd}, p_{zd}$  はそれぞれ基準状態での  $x, y, z$  方向への単位体積あたりの分布外力であり、 $\bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{sz}, \bar{\tau}_{nz}$  は両端断面の基準状態での  $z, s, n$  方向への表面力である。

式 (3.1) に (2.4), (2.6), (2.24) および (2.26) を代入し、部分積分すると

$$\begin{aligned}
& + \int_{z_1}^{z_2} \left[ (M_y \cos \varphi + M_x \sin \varphi)'' + [N\{v_s' - (x_s \cos \varphi - y_s \sin \varphi)\varphi'\}]' + p_y + (m_y \cos \varphi + m_x \sin \varphi)' \right] \delta v_s dz \\
& + \left[ \bar{V}_y - (M_y \cos \varphi + M_x \sin \varphi)' - N\{v_s' - (x_s \cos \varphi - y_s \sin \varphi)\varphi'\} - (m_y \cos \varphi + m_x \sin \varphi) \right] \delta v_s \Big|_{z_1}^{z_2} \\
& + \left\{ (M_y \cos \varphi + M_x \sin \varphi) - (\bar{M}_y \cos \varphi + \bar{M}_x \sin \varphi) \right\} \delta v_s' \Big|_{z_1}^{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} \left[ M_\omega'' - M_y(u_s'' \cos \varphi + v_s'' \sin \varphi) \right. \\
& + M_x(v_s'' \cos \varphi - u_s'' \sin \varphi) + [N\{(y_s u_s' - x_s v_s') \cos \varphi + (x_s u_s' + y_s v_s') \sin \varphi\} + K \varphi']' \\
& - N\{(x_s u_s' + y_s v_s') \cos \varphi - (y_s u_s' - x_s v_s') \sin \varphi\} \varphi' + T_s' + m_t \cos \varphi + m_{tn} \sin \varphi + m_y(u_s' \cos \varphi \\
& - v_s' \sin \varphi) - m_x(v_s' \cos \varphi - u_s' \sin \varphi) + m_\omega' \Big] \delta \varphi dz + \left[ [-M_\omega' - T_s - N\{(u_s' y_s - v_s' x_s) \cos \varphi \right. \\
& + (u_s' x_s + v_s' y_s) \sin \varphi\} - K \varphi' - m_\omega + \bar{M}_x(u_s' \sin \varphi - v_s' \cos \varphi) + \bar{M}_y(u_s' \cos \varphi + v_s' \sin \varphi) \\
& \left. + \bar{T} \cos \varphi - \bar{T}_n \sin \varphi] \delta \varphi \right]_{z_1}^{z_2} + \left[ [M_\omega - \bar{M}_\omega] \delta \varphi' \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \dots \dots \dots (3.2)
\end{aligned}$$

ここに,

$$N = \int_A \sigma_z dA, \quad M_x = \int_A \sigma_z x dA, \quad M_y = \int_A \sigma_z y dA \dots \dots \dots (3.3 \text{ a-c})$$

$$M_\omega = \int_A \sigma_z \omega dA,$$

$$K = \int_A \sigma_z \{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2\} dA \dots (3.3 \text{ d, e})$$

$$T_s = \int_A \tau_{sz} \theta dA, \quad V_x = \int_A (\tau_{sz} l - \tau_{nz} m) dA,$$

$$V_y = \int_A (\tau_{sz} m + \tau_{nz} l) dA \dots \dots \dots (3.3 \text{ f-h})$$

$$T = \int_A (\tau_{sz} \rho_s + \tau_{nz} \rho_n) dA,$$

$$T_n = \int_A (\tau_{sz} \rho_n - \tau_{nz} \rho_s) dA \dots \dots \dots (3.3 \text{ i, j})$$

$$p_x = \int_A p_{zd} dA, \quad p_y = \int_A p_{yd} dA, \quad p_z = \int_A p_{zd} dA \dots \dots \dots (3.3 \text{ k-m})$$

$$m_x = \int_A p_{zd} x dA, \quad m_y = \int_A p_{zd} y dA,$$

$$m_\omega = \int_A p_{zd} \omega dA \dots \dots \dots (3.3 \text{ n-p})$$

$$m_t = \int_A \{p_{yd}(x - x_s) - p_{xd}(y - y_s)\} dA \dots \dots \dots (3.3 \text{ q})$$

$$m_{tn} = - \int_A \{p_{zd}(x - x_s) + p_{yd}(y - y_s)\} dA \dots \dots \dots (3.3 \text{ r})$$

上付の棒は両端断面での表面力に起因する端部外力を表わす。任意の仮想変位に対して式(3.2)が成立するための必要十分条件として、つり合い方程式と変位および力学的境界条件を得る。すなわち、 $z_1 < z < z_2$  において次のつり合いの微分方程式を得る。

$$N' + p_z = 0 \dots \dots \dots (3.4 \text{ a})$$

$$\begin{aligned}
& (M_x \cos \varphi - M_y \sin \varphi)'' \\
& + [N\{u_s' + (y \cos \varphi + x \sin \varphi)\varphi'\}]' + p_x \\
& + (m_x \cos \varphi - m_y \sin \varphi)' = 0 \dots \dots \dots (3.4 \text{ b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (M_y \cos \varphi + M_x \sin \varphi)'' \\
& + [N\{v_s' - (x \cos \varphi - y \sin \varphi)\varphi'\}]' + p_y
\end{aligned}$$

$$+ (m_y \cos \varphi + m_x \sin \varphi)' = 0 \dots \dots \dots (3.4 \text{ c})$$

$$\begin{aligned}
& M_\omega'' - M_y(u_s'' \cos \varphi + v_s'' \sin \varphi) + M_x(v_s'' \cos \varphi \\
& - u_s'' \sin \varphi) + [N\{(y_s u_s' - x_s v_s') \cos \varphi \\
& + (x_s u_s' + y_s v_s') \sin \varphi\} + K \varphi']' - N\{(x_s u_s' \\
& + y_s v_s') \cos \varphi - (y_s u_s' - x_s v_s') \sin \varphi\} \varphi' \\
& + T_s' + m_t \cos \varphi + m_{tn} \sin \varphi + m_y(u_s' \cos \varphi \\
& + v_s' \sin \varphi) - m_x(v_s' \cos \varphi - u_s' \sin \varphi) \\
& + m_\omega' = 0 \dots \dots \dots (3.4 \text{ d})
\end{aligned}$$

また、端部  $z = z_1, z_2$  における条件から、両端での境界条件が次のように求まる。

$$w_c = C_1 \text{ または } \bar{N} = N \dots \dots \dots (3.5 \text{ a})$$

$$\begin{aligned}
& u_s = C_2 \text{ または} \\
& \bar{V}_x = (M_x \cos \varphi - M_y \sin \varphi)' \\
& + N\{u_s' + (y \cos \varphi + x \sin \varphi)\varphi'\} \\
& + (m_x \cos \varphi - m_y \sin \varphi) \dots \dots \dots (3.5 \text{ b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_s' = C_3 \text{ または} \\
& \bar{M}_x \cos \varphi - \bar{M}_y \sin \varphi = M_x \cos \varphi - M_y \sin \varphi \\
& \dots \dots \dots (3.5 \text{ c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_s = C_4 \text{ または} \\
& \bar{V}_y = (M_y \cos \varphi + M_x \sin \varphi)' \\
& + N\{v_s' - (x \cos \varphi - y \sin \varphi)\varphi'\} \\
& + (m_y \cos \varphi + m_x \sin \varphi) \dots \dots \dots (3.5 \text{ d})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_s' = C_5 \text{ または} \\
& \bar{M}_y \cos \varphi + \bar{M}_x \sin \varphi = M_y \cos \varphi + M_x \sin \varphi \\
& \dots \dots \dots (3.5 \text{ e})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi = C_6 \text{ または} \\
& \bar{T} \cos \varphi - \bar{T}_n \sin \varphi + \bar{M}_y(u_s' \cos \varphi + v_s' \sin \varphi) \\
& - \bar{M}_x(v_s' \cos \varphi - u_s' \sin \varphi) \\
& = T_s + M_\omega' + N\{(y_s u_s' - x_s v_s') \cos \varphi \\
& + (x_s u_s' + y_s v_s') \sin \varphi\} + K \varphi' + m_\omega \\
& \dots \dots \dots (3.5 \text{ f})
\end{aligned}$$

$$\varphi' = C_7 \text{ または } \bar{M}_\omega = M_\omega \dots \dots \dots (3.5 \text{ g})$$

ここに、 $C_1 \sim C_7$  は定数である。

#### 4. 断面力と変位の関係

一次元の棒理論に表われる直応力と直ひずみに関する

応力-ひずみ関係の仮定から

$$\sigma_z = E \epsilon_z \dots\dots\dots(4.1 a)$$

ここに  $E$  は弾性係数である。せん断応力とせん断ひずみの間には次の関係がある。

$$\tau_{sz} = 2G \gamma_{sz} \dots\dots\dots(4.1 b)$$

式 (3.3) に式 (2.26) および (4.1) を代入すると、断面力-変位の関係が得られる。一般に  $xy$  座標の原点  $C$ 、 $s$  座標の原点  $0$  および変位  $u_s, v_s$  が定義されている点  $S$  は任意に選ぶ。しかしながら、これらの点を次の条件を満足するように選ぶと、断面力-変位の関係を簡単化することができる。

$$\int_A x dA = 0, \int_A y dA = 0, \int_A xy dA = 0 \dots\dots\dots(4.2 a-c)$$

$$\int_A \omega dA = 0, \int_A \omega x dA = 0, \int_A \omega y dA = 0 \dots\dots\dots(4.2 d-f)$$

式 (4.2 a-c) から  $C$  の位置と座標の方向が決まり、このとき  $xy$  座標は断面主軸と一致する。式 (2.25) を (4.2 d) に代入すると任意に選んだ点  $0$ 、および  $0$  と  $C$  の任意の結び方について

$$\omega_c^* = \int_A \omega^* dA / A \dots\dots\dots(4.3)$$

を得る。ここに  $A$  は断面積である。式 (4.2 e, f) によって、点  $S$  の  $x, y$  座標が定まり、せん断中心と一般によばれる点と一致する。

式 (4.2) の関係を用いると、断面力-変位の関係は次のようになる。

$$N = EA \tilde{w}_c' + \frac{1}{2} EI_{p0} \varphi'^2 \dots\dots\dots(4.4 a)$$

$$M_y = -EI_{yy} \tilde{v}_s'' + \frac{1}{2} EI_{py} \varphi'^2 \dots\dots\dots(4.4 b)$$

$$M_x = -EI_{xx} \tilde{u}_s'' + \frac{1}{2} EI_{px} \varphi'^2 \dots\dots\dots(4.4 c)$$

$$M_\omega = -EI_{\omega\omega} \varphi'' + \frac{1}{2} EI_{p\omega} \varphi'^2 \dots\dots\dots(4.4 d)$$

$$K = EI_{p0} \tilde{w}_c' - EI_{px} \tilde{u}_s'' - EI_{py} \tilde{v}_s'' - EI_{p\omega} \varphi'' + \frac{1}{2} EI_{pp} \varphi'^2 \dots\dots\dots(4.4 e)$$

$$- \left\{ E \left( I_{xx} \tilde{u}_s'' - \frac{1}{2} I_{px} \varphi'^2 \right) \cos \varphi - E \left( I_{yy} \tilde{v}_s'' - \frac{1}{2} I_{py} \varphi'^2 \right) \sin \varphi \right\}'' + \left[ E \left( A \tilde{w}_c' + \frac{1}{2} I_{p0} \varphi'^2 \right) \cdot \{ u_s' + (y_s \cos \varphi + x_s \sin \varphi) \varphi' \} \right]' + p_x + (m_x \cos \varphi - m_y \sin \varphi)' = 0 \dots\dots\dots(5.1 b)$$

$$- \left\{ E \left( I_{yy} \tilde{v}_s'' - \frac{1}{2} I_{py} \varphi'^2 \right) \cos \varphi + \left( I_{xx} \tilde{u}_s'' - \frac{1}{2} I_{px} \varphi'^2 \right) \sin \varphi \right\}'' + \left[ E \left( A \tilde{w}_c' + \frac{1}{2} I_{p0} \varphi'^2 \right) \cdot \{ v_s' - (x_s \cos \varphi - y_s \sin \varphi) \varphi' \} \right]' + p_y + (m_y \cos \varphi + m_x \sin \varphi)' = 0 \dots\dots\dots(5.1 c)$$

$$- E \left( I_{\omega\omega} \varphi'' - \frac{1}{2} I_{p\omega} \varphi'^2 \right)'' - E \left( I_{xx} \tilde{u}_s'' - \frac{1}{2} I_{px} \varphi'^2 \right) \tilde{v}_s'' + E \left( I_{yy} \tilde{v}_s'' - \frac{1}{2} I_{py} \varphi'^2 \right) \tilde{u}_s'' + \left[ E \left( A \tilde{w}_c' + \frac{1}{2} I_{p0} \varphi'^2 \right) \cdot \{ (y_s u_s' - x_s v_s') \cos \varphi + (x_s u_s' + y_s v_s') \sin \varphi \} + \left( I_{p0} \tilde{w}_c' - I_{px} \tilde{u}_s'' - I_{py} \tilde{v}_s'' - I_{p\omega} \varphi'' + \frac{1}{2} I_{pp} \varphi'^2 \right) \varphi' \right]'$$

$$T_s = G J_s \varphi' \dots\dots\dots(4.4 f)$$

ここに、

$$\tilde{w}_c' = w_c' + \frac{1}{2} (u_s'^2 + v_s'^2) + \{ (y_s u_s' - x_s v_s') \cdot \cos \varphi + (x_s u_s' + y_s v_s') \sin \varphi \} \varphi' \dots\dots\dots(4.5 a)$$

$$\tilde{u}_s'' = u_s'' \cos \varphi + v_s'' \sin \varphi \dots\dots\dots(4.5 b)$$

$$\tilde{v}_s'' = v_s'' \cos \varphi - u_s'' \sin \varphi \dots\dots\dots(4.5 c)$$

$$A = \int_A dA, I_{xx} = \int_A x^2 dA, I_{yy} = \int_A y^2 dA \dots\dots\dots(4.6 a-c)$$

$$I_{\omega\omega} = \int_A \omega^2 dA, J_s = \int_A \Theta^2 dA \dots\dots\dots(4.6 d, e)$$

$$I_{p0} = \int_A \rho_{sn}^2 dA, I_{px} = \int_A x \rho_{sn}^2 dA,$$

$$I_{py} = \int_A y \rho_{sn}^2 dA \dots\dots\dots(4.6 f-h)$$

$$I_{p\omega} = \int_A \omega \rho_{sn}^2 dA, I_{pp} = \int_A (\rho_{sn}^2)^2 dA \dots\dots\dots(4.6 i, j)$$

ただし、

$$\rho_{sn}^2 = \rho_s^2 + \rho_n^2 = (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 \dots\dots(4.7)$$

式 (4.4 a-d) を用いると式 (4.4 e) は次のように表わせる。

$$K = i_{p0}^2 N + i_{px} M_x + i_{py} M_y + k_{p\omega} M_\omega + \tilde{K} \dots\dots\dots(4.8)$$

ここに、

$$i_{p0} = \sqrt{\frac{I_{p0}}{A}}, i_{px} = \frac{I_{px}}{I_{xx}}, i_{py} = \frac{I_{py}}{I_{yy}}, k_{p\omega} = \frac{I_{p\omega}}{I_{\omega\omega}} \dots\dots\dots(4.9 a-d)$$

$$\tilde{K} = \frac{1}{2} E \tilde{I}_{pp} (\varphi')^2 \dots\dots\dots(4.10)$$

$$\tilde{I}_{pp} = I_{pp} - i_{p0}^2 I_{p0} - i_{px} I_{px} - i_{py} I_{py} - k_{p\omega} I_{p\omega} \dots\dots\dots(4.11)$$

## 5. つり合いの微分方程式の変位表示

式 (3.4) に式 (4.4) を代入すると、変位表示のつり合いの微分方程式が次のように求められる。

$$\left( EA \tilde{w}_c' + \frac{1}{2} EI_{p0} \varphi'^2 \right)' + p_x = 0 \dots\dots\dots(5.1 a)$$

$$-E \left( A \bar{w}'_c + \frac{1}{2} I_{\rho\rho} \varphi'^2 \right) \{ (x_s u'_s + y_s v'_s) \cos \varphi - (y_s u'_s - x_s v'_s) \sin \varphi \} \varphi' + (GJ \varphi')' + m_t \cos \varphi \\ - m_{tn} \sin \varphi + m_y (u'_s \cos \varphi - v'_s \sin \varphi) - m_x (v'_s \cos \varphi - u'_s \sin \varphi) + m'_\omega = 0 \dots\dots\dots (5.1d)$$

## 6. 断面内の応力分布

式 (4.4a~d), (4.10) および (4.4f) を式 (2.26) に代入し, 式 (4.1) の関係を用いると, 仮定した変位場に対応した断面内の応力分布を表わす式として次のものを得る。

$$\sigma_z = \frac{1}{A} \left( N - \frac{I_{\rho\rho}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K} \right) + \frac{x}{I_{xx}} \left( M_x - \frac{I_{\rho x}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K} \right) \\ + \frac{y}{I_{yy}} \left( M_y - \frac{I_{\rho y}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K} \right) + \frac{\omega}{I_{\omega\omega}} \left( M_\omega - \frac{I_{\rho\omega}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K} \right) \\ + \rho_{sn}^2 \frac{1}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K} \dots\dots\dots (6.1a)$$

$$\tau_{sz} = \frac{T_s}{J_s} \theta \dots\dots\dots (6.1b)$$

$$\tau_{nz} = 0 \dots\dots\dots (6.1c)$$

しかしながら, オイラー・ベルヌイの仮定から, 式 (2.15) 右辺第2項のせん断ひずみを無視したため, 式 (6.1) で表わされる応力場は, 一般に微小要素についてのつり合いを満足しない。微小要素についてもつり合い状態にある応力場を求めるために, 一次元の棒理論ではオイラー・ベルヌイの仮定に基づいて得られた直応力とつり合うようにせん断応力を修正することが一般に行われている。ひずみは微小であるとする, 薄肉であることにより微小要素  $t ds dz$  は変形後もほぼ直方体であると見なせるから, 変形後の  $z$  方向の力のつり合い式は次のように表わせる。

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{sz} dn \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z dn \right] \\ + \int_{-t/2}^{t/2} \bar{p}_{zd} dn = 0 \dots\dots\dots (6.2)$$

ここに,

$$\bar{p}_{zd} = p_{xd} \frac{\partial u}{\partial z} + p_{yd} \frac{\partial v}{\partial z} + p_{zd} \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (6.3)$$

$\tau_{sz}$  は薄肉の前提から  $n$  の一次関数であることに注目すると, 式 (6.1a) を式 (6.2) に代入して,

$$\frac{\partial}{\partial s} (\tau_{sz}^* t) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ t \left\{ \frac{1}{A} \left( N - \frac{I_{\rho\rho}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x^*}{I_{xx}} \left( M_x - \frac{I_{\rho x}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K} \right) + \frac{y^*}{I_{yy}} \left( M_y - \frac{I_{\rho y}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega^*}{I_{\omega\omega}} \left( M_\omega - \frac{I_{\rho\omega}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K} \right) \right\} + \left( \rho_{sn}^2 t + \frac{t^3}{12} \right) \frac{\bar{K}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \right] \\ + \int_{-t/2}^{t/2} \bar{p}_{zd} dn = 0 \dots\dots\dots (6.4)$$

を得る。式 (6.4) を  $s$  について積分すると,

$$\tau_{sz}^* = \frac{q_1}{t} + \tau_\sigma^* \dots\dots\dots (6.5)$$

となる。ここに,  $q_1 = (\tau_{sz}^* t)_{s=s_1}$  は積分定数であり,

$$\tau_\sigma^* = -\frac{1}{t} \left[ \frac{A_s}{A} \left( N' - \frac{I_{\rho\rho}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K}' \right) + \frac{Q_x}{I_{xx}} \left( M_x' - \frac{I_{\rho x}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K}' \right) \right. \\ \left. + \frac{Q_y}{I_{yy}} \left( M_y' - \frac{I_{\rho y}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K}' \right) + \frac{Q_\omega}{I_{\omega\omega}} \left( M_\omega' - \frac{I_{\rho\omega}}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K}' \right) \right. \\ \left. + \frac{Q_p}{\bar{I}_{\rho\rho}} \bar{K} \right] - \frac{q_p}{t} \dots\dots\dots (6.6)$$

$$A_s = \int_{s_1}^s t ds, \quad Q_x = \int_{s_1}^s x^* t ds, \quad Q_y = \int_{s_1}^s y^* t ds \\ \dots\dots\dots (6.7a \sim c)$$

$$Q_\omega = \int_{s_1}^s \omega^* t ds, \quad Q_p = \int_{s_1}^s \left( \rho_{sn}^2 t + \frac{1}{12} t^3 \right) ds \\ \dots\dots\dots (6.7d, e)$$

$$q_p = \int_{s_1}^s \int_{-t/2}^{t/2} \bar{p}_{zd} dn ds \dots\dots\dots (6.7f)$$

である。開区間では自由縁でのせん断流,  $q = \tau_{sz}^* t$ , に関する境界条件から  $q_1$  を決めることができ, 自由縁に  $s_1$  をとると  $q_1 = 0$  となる。閉区間では  $q_1$  は一般に不静定せん断流といわれるものであり, 閉区間での変位  $w$  の連続条件, 式 (2.18) から決まる。式 (6.5) をせん断弾性係数  $G$  でわってせん断ひずみで表わしたものを, 式 (2.10a) に代入すると

$$\frac{\partial w^*}{\partial s} = \frac{1}{G} \left( \frac{q_1}{t} + \tau_\sigma^* \right) - l (u'_s \cos \varphi + v'_s \sin \varphi) \\ - m (v'_s \cos \varphi - u'_s \sin \varphi) - \rho_{s\varphi}^* \varphi' \dots\dots\dots (6.8)$$

を得る。この式を式 (2.18) に代入すると,  $q_1$  は次のように求まる。

$$q_1 = G \cdot \frac{\oint \rho_s^* ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \varphi' - \frac{\oint \tau_\sigma ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \dots\dots\dots (6.9)$$

上式の右辺第一項は Bredt のせん断流といわれるものであり, 式 (2.19) で示されるものと同じである。第二項は付加せん断流 (二次せん断流) に対する不静定せん断流である。

式 (2.12) を  $s$  で微分し, それに式 (6.8) を代入する。この  $\partial w^* / \partial s$  と式 (2.4) と (2.6a) の  $u, v, \varepsilon$  を用いて式 (2.10a) から  $\tau_{sz}$  が計算でき, これと式 (4.1b) から  $\tau_{sz}$  が求まる。式 (2.27) と (4.4f) を用いて  $\tau_{sz}$  を表わすと, 開断面または開区間に対し,

$$\tau_{sz} = \frac{T_s}{J_s} \theta + \tau_\sigma \dots\dots\dots (6.10a)$$

開断面または閉区間に対し

$$\tau_{sz} = \frac{T_s}{J_s} \theta + \tau_\sigma - \frac{\oint \tau_\sigma ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \cdot \frac{1}{t} \dots\dots\dots (6.10b)$$

となる注4)。ただし、開断面または開区間に対しては、式(6.7)の積分の始点を自由縁にとるものとする。

## 7. 座 屈

有限変位の問題として、最も古くから取扱われてきた、いわゆる分岐形の安定問題(座屈)に対する基本式を求める。安定限界は一定の荷重条件、境界条件のもとで、ごく微少な差を有する2つの独立な解が存在する条件から求まる。今、独立な2つの解を上付きの(0)、(1)で表わし、その差を $\Delta$ を付して表わすと、その条件は一般に次のように表わせる。

$$\Delta u = u^{(1)} - u^{(0)} \ll u^{(0)} \dots\dots\dots (7.1 a)$$

$$\Delta v = v^{(1)} - v^{(0)} \ll v^{(0)} \dots\dots\dots (7.1 b)$$

$$\Delta w = w^{(1)} - w^{(0)} \ll w^{(0)} \dots\dots\dots (7.1 c)$$

ひずみ、応力の成分も変位に依存する量であるから、当然同様の関係が成り立つ。

(0)系、(1)系ともにつり合い状態を満足しているので、どちらの系に対しても式(3.1)の仮想仕事の原理が成り立つ。荷重条件は両系において、同一であるので、これを明らかにするために両系に対し荷重項には(0)を付して表わすと、式(3.1)は次のように表わせる。

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \int_A [\sigma_z^{(1)} \delta \epsilon_z^{(1)} + \tau_{sz}^{(1)} \delta \gamma_{sz}^{(1)}] dA dz \\ & = \int_{z_1}^{z_2} \int_A [\dot{p}_{zd}^{(0)} \delta u^{(1)} + \dot{p}_{yd}^{(0)} \delta v^{(1)} \\ & \quad + \dot{p}_{zd}^{(0)} \delta w^{(1)}] dA dz \\ & \quad + \left[ \int_A (\bar{\sigma}_x^{(0)} \delta w^{(1)} + \bar{\tau}_{sz}^{(0)} \delta \zeta^{(1)} + \bar{\tau}_{yz}^{(0)} \delta \eta^{(1)}) dA \right]_{z_1}^{z_2} \\ & \dots\dots\dots (7.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \int_A [\sigma_z^{(0)} \delta \epsilon_z^{(0)} + \tau_{sz}^{(0)} \delta \gamma_{sz}^{(0)}] dA dz \\ & = \int_{z_1}^{z_2} \int_A [\dot{p}_{zd}^{(0)} \delta u^{(0)} + \dot{p}_{yd}^{(0)} \delta v^{(0)} \\ & \quad + \dot{p}_{zd}^{(0)} \delta w^{(0)}] dA dz \\ & \quad + \left[ \int_A (\bar{\sigma}_x^{(0)} \delta w^{(0)} + \bar{\tau}_{sz}^{(0)} \delta \zeta^{(0)} + \bar{\tau}_{yz}^{(0)} \delta \eta^{(0)}) dA \right]_{z_1}^{z_2} \\ & \dots\dots\dots (7.3) \end{aligned}$$

式(7.2)と(7.3)から得られるつり合い式の差をとり、式(7.1)の関係から $\Delta$ を付した微小な項の2次項を省略すると、式(3.4a~d)のつり合い式に対応する、

注4) このせん断応力と式(6.1a)の $\sigma_z$ とは、微小要素 $tdsdz$ についてのつり合いを満足する。仮定した変位場からは $\tau_{nz}=0$ となるが、微小要素として板厚方向にも分割した $dndsdx$ を考えると、この $\tau_{sz}$ 、 $\sigma_z$ のみでは $z$ 方向の力のつり合い条件を満たさず、一般には $\tau_{nz}$ の存在も必要となる。式(6.1a)、(6.10)の $\sigma_z$ 、 $\tau_{sz}$ が作用するものとする、 $dndsdx$ についての力のつり合いを満たすように $\tau_{nz}$ を補正することができる。しかし、薄肉の前提から $\tau_{nz}$ の値そのものは小さいと考えられるので、ここでは計算を省略する。

安定限界状態に対するつり合い式として次式を得る。ただし、微小差を表わす記号 $\Delta$ は表式を簡単にするため省略した。以後この章では、これ以前の章で一般的な変位や応力を表わしていた記号を、安定限界での変位や応力の変化分を表わすものとして用いる。

$$N' = 0 \dots\dots\dots (7.4 a)$$

$$\begin{aligned} & \{ \cos \varphi^{(0)} (M_x - M_y^{(0)} \varphi) - \sin \varphi^{(0)} (M_y + M_x^{(0)} \varphi) \}' \\ & \quad + [N^{(0)} \{ u_s' + (x_s \cos \varphi^{(0)} - y_s \sin \varphi^{(0)}) \varphi^{(0)'} \varphi \\ & \quad + (y_s \cos \varphi^{(0)} + x_s \sin \varphi^{(0)}) \varphi' \}]' \\ & \quad + \{ u_s^{(0)'} + (y_s \cos \varphi^{(0)} + x_s \sin \varphi^{(0)}) \varphi^{(0)'} \}' N \\ & \quad - \{ (m_x^{(0)} \sin \varphi^{(0)} + m_y^{(0)} \cos \varphi^{(0)}) \varphi \}' = 0 \\ & \dots\dots\dots (7.4 b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ \cos \varphi^{(0)} (M_y + M_x^{(0)} \varphi) + \sin \varphi^{(0)} (M_x + M_y^{(0)} \varphi) \}' \\ & \quad + [N^{(0)} \{ v_s' + (y_s \cos \varphi^{(0)} + x_s \sin \varphi^{(0)}) \varphi^{(0)'} \varphi \\ & \quad - (x_s \cos \varphi^{(0)} - y_s \sin \varphi^{(0)}) \varphi' \}]' \\ & \quad + \{ v_s^{(0)'} - (x_s \cos \varphi^{(0)} - y_s \sin \varphi^{(0)}) \varphi^{(0)'} \}' N \\ & \quad + \{ (m_x^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - m_y^{(0)} \sin \varphi^{(0)}) \varphi \}' = 0 \\ & \dots\dots\dots (7.4 c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M_w'' + T_s' + (v_s^{(0)''} \cos \varphi^{(0)} - u_s^{(0)''} \sin \varphi^{(0)}) M_x \\ & \quad - (u_s^{(0)''} \cos \varphi^{(0)} + v_s^{(0)''} \sin \varphi^{(0)}) M_y \\ & \quad - (M_y^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + M_x^{(0)} \sin \varphi^{(0)}) u_s'' \\ & \quad + (M_x^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - M_y^{(0)} \sin \varphi^{(0)}) v_s'' \\ & \quad - \{ \cos \varphi^{(0)} (M_x^{(0)} u_s^{(0)''} + M_y^{(0)} v_s^{(0)''}) \\ & \quad + \sin \varphi^{(0)} (M_x^{(0)} v_s^{(0)''} - M_y^{(0)} u_s^{(0)''}) \}' \varphi \\ & \quad + [N^{(0)} \{ (y_s \cos \varphi^{(0)} + x_s \sin \varphi^{(0)}) u_s' \\ & \quad - (x_s \cos \varphi^{(0)} - y_s \sin \varphi^{(0)}) v_s' \\ & \quad + \{ \cos \varphi^{(0)} (x_s u_s^{(0)'} + y_s v_s^{(0)'} \}' \\ & \quad + \sin \varphi^{(0)} (x_s v_s^{(0)'} - y_s u_s^{(0)'} \}' \varphi \\ & \quad + (\varphi^{(0)'} K + K^{(0)} \varphi)']' + \{ \cos \varphi^{(0)} (y_s u_s^{(0)''} \\ & \quad - x_s v_s^{(0)''}) + \sin \varphi^{(0)} (x_s u_s^{(0)''} + y_s v_s^{(0)''}) \}' N \\ & \quad - N^{(0)} [\varphi^{(0)'} \{ (x_s \cos \varphi^{(0)} - y_s \sin \varphi^{(0)}) u_s' \\ & \quad + (y_s \cos \varphi^{(0)} + x_s \sin \varphi^{(0)}) v_s' \\ & \quad + \{ \cos \varphi^{(0)} (x_s v_s^{(0)'} - y_s u_s^{(0)'} \}' \\ & \quad - \sin \varphi^{(0)} (x_s u_s^{(0)'} + y_s v_s^{(0)'} \}' \varphi \\ & \quad + \{ \cos \varphi^{(0)} (x_s u_s^{(0)'} + y_s v_s^{(0)'} \}' \\ & \quad + \sin \varphi^{(0)} (x_s v_s^{(0)'} - y_s u_s^{(0)'} \}' \varphi'] \\ & \quad - (m_x^{(0)} \sin \varphi^{(0)} - m_{yn}^{(0)} \cos \varphi^{(0)}) \varphi \\ & \quad - m_x^{(0)} \{ \sin \varphi^{(0)} u_s' - \cos \varphi^{(0)} v_s' \\ & \quad + (u_s^{(0)'} \cos \varphi^{(0)} + v_s^{(0)'} \sin \varphi^{(0)}) \varphi \}' \\ & \quad + m_y^{(0)} \{ \cos \varphi^{(0)} u_s' + \sin \varphi^{(0)} v_s' \\ & \quad + (v_s^{(0)'} \cos \varphi^{(0)} - u_s^{(0)'} \sin \varphi^{(0)}) \varphi \}' = 0 \dots\dots (7.4 d) \end{aligned}$$

安定問題に対する部材両端での境界条件は式(3.5)に対応し次のように求まる。

$$w_c = 0 \text{ または } N = 0 \dots\dots\dots (7.5 a)$$

$$u_s = 0 \text{ または}$$

$$\begin{aligned} & \{ M_x \cos \varphi^{(0)} - M_y \sin \varphi^{(0)} - (M_y^{(0)} \cos \varphi^{(0)} \\ & \quad + M_x^{(0)} \sin \varphi^{(0)}) \varphi \}' + N^{(0)} \{ u_s' - (y_s \sin \varphi^{(0)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -x_s \cos \varphi^{(0)} \varphi^{(0)'} + (y_s \cos \varphi^{(0)} \\
 & + x_s \sin \varphi^{(0)}) \varphi' + N \{u_s^{(0)'} + (y_s \cos \varphi^{(0)} \\
 & + x_s \sin \varphi^{(0)}) \varphi^{(0)'} - (m_x^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + \\
 & m_x^{(0)} \sin \varphi^{(0)}) \varphi = 0 \dots \dots \dots (7.5 b)
 \end{aligned}$$

$u_s' = 0$  または

$$\begin{aligned}
 & M_x \cos \varphi^{(0)} - M_y \sin \varphi^{(0)} \\
 & - (M_y^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + M_x^{(0)} \sin \varphi^{(0)}) \varphi \\
 & = -(\bar{M}_y^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + \bar{M}_x^{(0)} \sin \varphi^{(0)}) \varphi \\
 & \dots \dots \dots (7.5 c)
 \end{aligned}$$

$v_s = 0$  または

$$\begin{aligned}
 & \{M_y \cos \varphi^{(0)} + M_x \sin \varphi^{(0)} + (M_x^{(0)} \cos \varphi^{(0)} \\
 & - M_y^{(0)} \sin \varphi^{(0)}) \varphi' + N \{v_s' + (y_s \cos \varphi^{(0)} \\
 & + x_s \sin \varphi^{(0)}) \varphi^{(0)'} - (x_s \cos \varphi^{(0)} \\
 & - y_s \sin \varphi^{(0)}) \varphi' + N \{v_s^{(0)'} - (x_s \cos \varphi^{(0)} \\
 & - y_s \sin \varphi^{(0)}) \varphi^{(0)'} + (m_x^{(0)} \cos \varphi^{(0)} \\
 & - m_y^{(0)} \sin \varphi^{(0)}) \varphi = 0 \dots \dots \dots (7.5 d)
 \end{aligned}$$

$v_s' = 0$  または

$$\begin{aligned}
 & M_y \cos \varphi^{(0)} + M_x \sin \varphi^{(0)} \\
 & + (M_x^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - M_y^{(0)} \sin \varphi^{(0)}) \varphi \\
 & = (\bar{M}_x^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - \bar{M}_y^{(0)} \sin \varphi^{(0)}) \dots (7.5 e)
 \end{aligned}$$

$\varphi = 0$  または

$$\begin{aligned}
 & M_\omega' + T_s + N^{(0)} [(y_s \cos \varphi^{(0)} + x_s \sin \varphi^{(0)}) u_s' \\
 & - (x_s \cos \varphi^{(0)} - y_s \sin \varphi^{(0)}) v_s' \\
 & + \{(x_s u_s^{(0)'} + y_s v_s^{(0)'}) \cos \varphi^{(0)} \\
 & - (y_s u_s^{(0)'} - x_s v_s^{(0)'}) \sin \varphi^{(0)} \} \varphi] \\
 & + N \{(y_s u_s^{(0)'} - x_s v_s^{(0)'}) \cos \varphi^{(0)} \\
 & + (x_s u_s^{(0)'} + y_s v_s^{(0)'}) \sin \varphi^{(0)} \} + K^{(0)} \varphi' \\
 & + K \varphi^{(0)'} \\
 & = -(\bar{T}_n^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + \bar{T}'^{(0)} \sin \varphi^{(0)}) \varphi \\
 & - \bar{M}_x^{(0)} \{v_s' \cos \varphi^{(0)} - u_s' \sin \varphi^{(0)}\} \\
 & - (u_s^{(0)'} \cos \varphi^{(0)} + v_s^{(0)'} \sin \varphi^{(0)}) \varphi \\
 & + \bar{M}_y^{(0)} \{u_s' \cos \varphi^{(0)} + v_s' \sin \varphi^{(0)}\} \\
 & + (v_s^{(0)'} \cos \varphi^{(0)} - u_s^{(0)'} \sin \varphi^{(0)}) \varphi \\
 & \dots \dots \dots (7.5 f)
 \end{aligned}$$

$$\varphi' = 0 \text{ または } M_\omega = 0 \dots \dots \dots (7.5 g)$$

安定限界での断面力の変化分と変位の関係は、式 (4.4), (4.5) に対応し次に示すものとなる。

$$\left. \begin{aligned}
 & N = EA \tilde{w}_c' + EI_{p_0} \varphi^{(0)'} \varphi' \\
 & M_x = -EI_{xx} \tilde{u}_s'' + EI_{px} \varphi^{(0)'} \varphi' \\
 & M_y = -EI_{yy} \tilde{v}_s'' + EI_{py} \varphi^{(0)'} \varphi' \\
 & M_\omega = -EI_{\omega\omega} \varphi'' + EI_{p\omega} \varphi^{(0)'} \varphi' \\
 & K = EI_{p_0} \tilde{w}_c' - EI_{px} \tilde{u}_s'' - EI_{py} \tilde{v}_s'' \\
 & \quad - EI_{p\omega} \varphi'' + EI_{pp} \varphi^{(0)'} \varphi' \\
 & T_s = GJ_s \varphi'
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7.6 a \sim f)$$

ここに、

$$\tilde{w}_c' = w_c' + \{u_s^{(0)'} + \varphi^{(0)'} (y_s \cos \varphi^{(0)} + x_s$$

$$\begin{aligned}
 & \sin \varphi^{(0)}) \} u_s' \\
 & + \{v_s^{(0)'} - \varphi^{(0)'} (x_s \cos \varphi^{(0)} - y_s \sin \varphi^{(0)}) \} v_s' \\
 & + \varphi^{(0)'} \{(x_s u_s^{(0)'} + y_s v_s^{(0)'}) \cos \varphi^{(0)} \\
 & - (y_s u_s^{(0)'} - x_s v_s^{(0)'}) \sin \varphi^{(0)} \} \varphi \\
 & + \{(y_s u_s^{(0)'} - x_s v_s^{(0)'}) \cos \varphi^{(0)} \\
 & + (x_s u_s^{(0)'} + y_s v_s^{(0)'}) \sin \varphi^{(0)} \} \varphi' \dots (7.7 a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_s'' & = \cos \varphi^{(0)} u_s'' + \sin \varphi^{(0)} v_s'' \\
 & + (v_s^{(0)'} \cos \varphi^{(0)} - u_s^{(0)'} \sin \varphi^{(0)}) \varphi \\
 & \dots \dots \dots (7.7 b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_s'' & = \cos \varphi^{(0)} v_s'' - \sin \varphi^{(0)} u_s'' \\
 & - (u_s^{(0)'} \cos \varphi^{(0)} + v_s^{(0)'} \sin \varphi^{(0)}) \varphi \\
 & \dots \dots \dots (7.7 c)
 \end{aligned}$$

式 (7.6) を式 (7.4) に代入すると、変位表示した、安定限界を求めるための支配方程式を得る。以下、特定の荷重条件、境界条件の場合についてこれを求める。ただし、一般に行われている安定問題と異なり、本報告中では軸力  $N$  は引張力のとき正となっている。

(1) 中心圧縮材の座屈

荷重としては、部材の両端に  $\bar{N}^{(0)}, \bar{T}_n^{(0)}$  (部材端力は一般に両端で異なった値をとる) と部材軸に沿って分布する  $p_x^{(0)}, m_{in}^{(0)}$  が作用しているとする、式 (5.1) より、式 (3.5) の境界条件を満足する解として

$$u_s^{(0)} = v_s^{(0)} = \varphi^{(0)} = 0 \dots \dots \dots (7.8)$$

を得る。したがって、式 (4.4), (4.8) から

$$M_x^{(0)} = M_y^{(0)} = M_\omega^{(0)} = T_s^{(0)} = 0 \dots \dots \dots (7.9 a)$$

$$N^{(0)} = EA w_c^{(0)'}, K^{(0)} = i_{p_0}^2 N^{(0)} \dots \dots (7.9 b, c)$$

となる。これらを式 (7.4) に代入すると

$$M_x'' + \{N^{(0)} (u_s' + y_s \varphi')\}' = 0 \dots \dots \dots (7.10 a)$$

$$M_y'' + \{N^{(0)} (v_s' - x_s \varphi')\}' = 0 \dots \dots \dots (7.10 b)$$

$$\begin{aligned}
 & M_\omega'' + T_s' + \{N^{(0)} (y_s u_s' - x_s v_s') + K^{(0)} \varphi'\}' \\
 & + m_{in}^{(0)} \varphi = 0 \dots \dots \dots (7.10 c)
 \end{aligned}$$

このときの境界条件は、式 (7.5) から

$$\left. \begin{aligned}
 & u_s = 0 \text{ または } M_x' + N^{(0)} (u_s' + y_s \varphi') = 0 \\
 & v_s = 0 \text{ または } M_x = 0 \\
 & v_s = 0 \text{ または } M_y' + N^{(0)} (v_s' - x_s \varphi') = 0 \\
 & v_s' = 0 \text{ または } M_y = 0
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7.11 a \sim d)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \varphi = 0 \text{ または } \\
 & \quad M_\omega' + T_s + N^{(0)} (y_s u_s' - x_s v_s') \\
 & \quad + K^{(0)} \varphi' = -\bar{T}_n^{(0)} \varphi \\
 & \varphi' = 0 \text{ または } M_\omega = 0
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7.11 e, f)$$

を得る。座屈時の断面力の変化分は、式 (7.6) より

$$\begin{aligned}
 & M_x = -EI_{xx} u_s'', M_y = -EI_{yy} v_s'' \\
 & \dots \dots \dots (7.12 a, b)
 \end{aligned}$$

$$M_\omega = -EI_{\omega\omega} \varphi'', T_s = GJ_s \varphi' \dots \dots (7.12 c, d)$$

式 (7.12) を (7.10) に代入すると、変位表示した座屈の支配方程式として次式を得る。

$$-(EI_{xx}u_s'')'' + \{N^{(0)}(u_s' + y_s\phi')\}' = 0 \quad \dots\dots\dots(7.13 a)$$

$$-(EI_{yy}v_s'')'' + \{N^{(0)}(v_s' - x_s\phi')\}' = 0 \quad \dots\dots\dots(7.13 b)$$

$$-(EI_{\omega\omega}\phi'')'' + (GJ_s\phi')' + \{N^{(0)}(y_s u_s' - x_s v_s' + i_{p_0}{}^2\phi')\}' + m_{tn}^{(0)}\phi = 0 \quad \dots\dots\dots(7.13 c)$$

(2) 横座屈

$yz$  面内の荷重を受け、その面内でだけ変位する部材を考える。すなわち、部材軸に沿って分布する荷重として  $p_y^{(0)}$ ,  $p_z^{(0)}$ ,  $m_y^{(0)}$ ,  $m_{tn}^{(0)}$  を受け、部材の両端で  $\bar{N}^{(0)}$ ,  $\bar{V}_y^{(0)}$ ,  $\bar{M}_y^{(0)}$ ,  $\bar{T}_n^{(0)}$  (部材端力は一般に両端で異なった値をとる) を受け、変位  $w_c^{(0)}$ ,  $v_s^{(0)}$  だけが生ずる場合について考える。有限変位のときには、式 (4.2) が成立するように点  $C, S$  を断面上の特定点に選んだとしても、式 (5.1) でわかるように一般にはすべての変位が連成する。したがって、ここで考えている荷重条件のもとで

$$v_s^{(0)} \neq 0, w_c^{(0)} \neq 0, u_s^{(0)} = \phi^{(0)} = 0 \quad \dots\dots\dots(7.14)$$

の解が存在するためには、断面に条件が付加され

$$x_s = 0 \quad \dots\dots\dots(7.15)$$

でなければならない。また、式 (7.14) の解が存在するときには、式 (4.4) より

$$M_x^{(0)} = M_\omega^{(0)} = T_s^{(0)} = 0 \quad \dots\dots\dots(7.16)$$

となる。事実、式 (7.15) の条件が存在すると、ここで考えている荷重条件のもとでは、式 (7.14), (7.16) は恒等的に式 (5.1 b, d) のつり合い式および (3.5 b, c, f, g) の境界条件を満足し、この問題の解になっていることがわかる。

式 (7.14), (7.15), (7.16) を式 (7.4) に代入すると座屈の支配方程式として次式を得る。

$$(M_x - M_y^{(0)}\phi)'' + \{N^{(0)}(u_s' + y_s\phi')\}' - (m_y^{(0)}\phi)' = 0 \quad \dots\dots\dots(7.17 a)$$

$$M_\omega'' + T_s' + v_s^{(0)'}M_x - M_y^{(0)}u_s'' - M_y^{(0)}v_s^{(0)'}\phi'' + \{N^{(0)}y_s(u_s' + v_s^{(0)'}\phi) + K^{(0)}\phi'\}' - N^{(0)}y_s v_s^{(0)'}\phi' + m_{tn}^{(0)}\phi + m_y^{(0)}(u_s' + v_s^{(0)'}\phi) = 0 \quad \dots\dots\dots(7.17 b)$$

境界条件は、式 (7.5) から

$$u_s = 0 \text{ または } (M_x - M_y^{(0)}\phi)' + N^{(0)}(u_s' + y_s\phi') = 0 \quad \dots\dots\dots(7.18 a)$$

$$u_s' = 0 \text{ または } M_x - M_y^{(0)}\phi = -\bar{M}_y^{(0)}\phi \quad \dots\dots\dots(7.18 b)$$

$$\phi = 0 \text{ または}$$

$$M_\omega' + T_s + N^{(0)}y_s(u_s' + v_s^{(0)'}\phi) + K^{(0)}\phi' = -\bar{T}_n^{(0)}\phi + \bar{M}_y^{(0)}(u_s' + v_s^{(0)'}\phi) \quad \dots\dots\dots(7.18 c)$$

$$\phi' = 0 \text{ または } M_\omega = 0 \quad \dots\dots\dots(7.18 d)$$

次に、断面力の変化分を求めると

$$M_x = -EI_{xx}(u_s'' + v_s^{(0)'}\phi) \quad \dots\dots\dots(7.19 a)$$

$$M_\omega = -EI_{\omega\omega}\phi'' \quad \dots\dots\dots(7.19 b)$$

$$T_s = GJ_s\phi' \quad \dots\dots\dots(7.19 c)$$

式 (7.19) を式 (7.17) に代入すると、変位表示した座屈の支配方程式として次式を得る。

$$- \left[ EI_{xx} \left\{ u_s'' + \left( v_s^{(0)'} + \frac{M_y^{(0)}}{EI_{xx}} \right) \phi \right\} \right]'' + \{N^{(0)}(u_s' + y_s\phi')\}' - (m_y^{(0)}\phi)' = 0 \quad \dots\dots\dots(7.20 a)$$

$$-(EI_{\omega\omega}\phi'')'' + (GJ_s\phi')' - \left( v_s^{(0)'} + \frac{M_y^{(0)}}{EI_{xx}} \right) \cdot EI_{xx}(u_s'' + v_s^{(0)'}\phi) + \{N^{(0)}y_s(u_s' + v_s^{(0)'}\phi) + (i_{p_0}{}^2 N^{(0)} + i_{p_y} M_y^{(0)})\phi'\}' - N^{(0)}y_s v_s^{(0)'}\phi' + m_{tn}^{(0)}\phi + m_y^{(0)}(u_s' + v_s^{(0)'}\phi) = 0 \quad \dots\dots\dots(7.20 b)$$

ただし、式 (4.8) より

$$K^{(0)} = i_{p_0}{}^2 N^{(0)} + i_{p_y} M_y^{(0)} \quad \dots\dots\dots(7.21)$$

8. 変位の小さい場合の基本式

実際構造物への適用を考えると、変位に対する構造物の供用限界があり、大きな変位を扱うことはまれである。変位  $\phi$  が小さいとき、 $\cos \phi$ ,  $\sin \phi$  を級数展開すると

$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{24}\phi^4 - \dots \quad \dots\dots\dots(8.1 a)$$

$$\sin \phi = \phi - \frac{1}{6}\phi^3 + \frac{1}{120}\phi^5 - \dots \quad \dots\dots\dots(8.1 b)$$

式 (8.1) を 2.~6. 章の基本式に代入し、必要とする精度に応じて高次項を省略することによって変位の小さい場合の支配方程式が求まる。変位が微小であるとして、変位の二次以上の項を無視すると、式 (2.4), (2.24) は

$$u = u_s - (y - y_s)\phi \quad \dots\dots\dots(8.2 a)$$

$$v = v_s + (x - x_s)\phi \quad \dots\dots\dots(8.2 b)$$

$$w = w_c - xu_s' - yv_s' - \omega\phi' \quad \dots\dots\dots(8.2 c)$$

となる。断面力-変位の関係は式 (4.4) から

$$N = EA w_c', M_x = -EI_{xx}u_s'', M_y = -EI_{yy}v_s'' \quad \dots\dots\dots(8.3 a \sim c)$$

$$M_\omega = -EI_{\omega\omega}\phi'', T_s = GJ_s\phi' \quad \dots\dots\dots(8.3 d, e)$$

となる。式 (5.1) からつり合い式は

$$(EA w_c)' = 0 \quad \dots\dots\dots(8.4 a)$$

$$-(EI_{xx}u_s'')'' + p_x + m_x' = 0 \quad \dots\dots\dots(8.4 b)$$

$$-(EI_{yy}v_s'')'' + P_y + m_y' = 0 \quad \dots\dots\dots(8.4 c)$$

$$-(EI_{\omega\omega}\varphi'')' + (GJ_s\varphi')' + m_t + m_{\omega}' = 0 \quad \dots\dots\dots(8.4d)$$

となる。式(8.4)は従来の微小変位の一般式と一致する。有限変位式の最低次のもとして三次以上の高次項を無視すると、式(2.4)より

$$u = u_s - (y - y_s)\varphi - \frac{1}{2}(x - x_s)\varphi^2 \quad \dots\dots\dots(8.5a)$$

$$v = v_s + (x - x_s)\varphi - \frac{1}{2}(y - y_s)\varphi^2 \quad \dots\dots\dots(8.5b)$$

を得る。変位  $\xi$ ,  $\eta$  および  $w$  は式(2.6), (2.24)から

$$\xi = lu_s + mv_s + \rho_s\varphi - \frac{1}{2}\rho_n\varphi^2 \quad \dots\dots\dots(8.6a)$$

$$\eta = -mu_s + lv_s + \rho_n\varphi + \frac{1}{2}\rho_s\varphi^2 \quad \dots\dots\dots(8.6b)$$

$$w = w_c - x(u_s' + v_s'\varphi) - y(v_s' - u_s'\varphi) - \omega\varphi' \quad \dots\dots\dots(8.7)$$

となる。直ひずみ  $\epsilon_x$  とせん断ひずみ  $r_{sz}$  については、式(2.26)から次式を得る。

$$\begin{aligned} \epsilon_x = & w_c' + \frac{1}{2}(u_s'^2 + v_s'^2) + (y_s u_s' - x_s v_s')\varphi' \\ & - x(u_s'' + v_s''\varphi) - y(v_s'' - u_s''\varphi) - \omega\varphi'' \\ & + \frac{1}{2}\{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2\}\varphi'^2 \quad \dots\dots\dots(8.8a) \end{aligned}$$

$$r_{sz} = \theta\varphi' \quad \dots\dots\dots(8.8b)$$

断面力は式(4.4)から明らかなように、変位の一次以上の項からなる。また、荷重と断面力は等価な量と考えられるので、荷重項も断面力と同様に変位の一次の項に相当するとして取扱うと式(3.4)のつり合い方程式は次のようになる。

$$N' + q_z = 0 \quad \dots\dots\dots(8.9a)$$

$$(M_x - M_y\varphi)'' + \{N(u_s' + y_s\varphi')\}' + p_x + (m_x - m_y\varphi)' = 0 \quad \dots\dots\dots(8.9b)$$

$$(M_y + M_x\varphi)'' + \{N(v_s' - x_s\varphi')\}' + p_y + (m_y + m_x\varphi)' = 0 \quad \dots\dots\dots(8.9c)$$

$$\begin{aligned} M_{\omega}'' - M_y u_s'' + M_x v_s'' + \{N(y_s u_s' - x_s v_s') \\ + K\varphi'\}' + T_s' + m_t + m_{tn}\varphi + m_y(u_s' + v_s'\varphi) \\ - m_x(v_s' - u_s'\varphi) + m_{\omega}' = 0 \quad \dots\dots\dots(8.9d) \end{aligned}$$

式(3.5)の境界条件は、次のように表わされる。

$$w_c = C_1 \text{ または } \bar{N} = N \quad \dots\dots\dots(8.10a)$$

$$\begin{aligned} u_s = C_2 \text{ または } \\ \bar{V}_x = (M_x - M_y\varphi)' + N(u_s' + y_s\varphi') + (m_x \\ - m_y\varphi) \quad \dots\dots\dots(8.10b) \end{aligned}$$

$$u_s' = C_3 \text{ または } \bar{M}_x - \bar{M}_y\varphi = M_x - M_y\varphi \quad \dots\dots\dots(8.10c)$$

$$\begin{aligned} v_s = C_4 \text{ または } \\ \bar{V}_y = (M_y + M_x\varphi)' + N(v_s' - x_s\varphi') \\ + (m_y + m_x\varphi) \quad \dots\dots\dots(8.10d) \end{aligned}$$

$$v_s' = C_5 \text{ または } \bar{M}_y + \bar{M}_x\varphi = M_y + M_x\varphi \quad \dots\dots\dots(8.10e)$$

$\varphi = C_6$  または

$$\begin{aligned} \bar{T} - \bar{T}_n\varphi + \bar{M}_x(u_s' - v_s'\varphi) = M_{\omega}' + T_s + N \\ (y_s u_s' - x_s v_s') + K\varphi' + m_{\omega} \quad \dots\dots\dots(8.10f) \end{aligned}$$

$$\varphi' = C_7 \text{ または } \bar{M}_{\omega} = M_{\omega} \quad \dots\dots\dots(8.10g)$$

式(4.5)は

$$\begin{aligned} \bar{w}_c' = w_c' + \frac{1}{2}(u_s'^2 + v_s'^2) + (y_s u_s' - x_s v_s')\varphi' \\ \dots\dots\dots(8.11a) \end{aligned}$$

$$\bar{u}_s'' = u_s'' + v_s''\varphi, \quad \bar{v}_s'' = v_s'' - u_s''\varphi \quad \dots\dots\dots(8.11b, c)$$

となる。式(8.11)を用いると式(4.4)の断面力と変位の関係はそのまま成り立つ。この断面力-変位の関係を式(8.9)に代入し、三次以上の高次項を無視すると、次の変位表示のつり合い式を得る。

$$\left(EA\bar{w}_c' + \frac{1}{2}EI_{p\omega}\varphi'^2\right)' = 0 \quad \dots\dots\dots(8.12a)$$

$$\begin{aligned} -\left(EI_{xx}\bar{u}_s'' - \frac{1}{2}EI_{px}\varphi'^2 - EI_{yy}v_s''\varphi\right)'' \\ + \{EAw_c'(u_s' + y_s\varphi')\}' \\ + p_x + (m_x - m_y\varphi)' = 0 \quad \dots\dots\dots(8.12b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\left(EI_{yy}\bar{v}_s'' - \frac{1}{2}EI_{py}\varphi'^2 + EI_{xx}u_s''\varphi\right)'' \\ + \{EAw_c'(v_s' - x_s\varphi')\}' + p_y + (m_y + m_x\varphi)' = 0 \\ \dots\dots\dots(8.12c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\left(EI_{\omega\omega}\varphi'' - \frac{1}{2}EI_{p\omega}\varphi'^2\right)'' - E(I_{xx} - I_{yy})u_s''v_s'' \\ + \{EAw_c(y_s u_s' - x_s v_s') + (EI_{p\omega}w_c' \\ - EI_{px}u_s'' - EI_{py}v_s'' - EI_{p\omega}\varphi'')\varphi'\}' \\ + (GJ_s\varphi')' + m_t + m_{tn}\varphi + m_y(u_s' + v_s'\varphi) \\ - m_x(v_s' - u_s'\varphi) + m_{\omega}' = 0 \quad \dots\dots\dots(8.12d) \end{aligned}$$

## 9. 考 察

### (1) 棒理論におけるひずみと応力

三次元の変位場を一次元の棒理論の場に置き換えるために、式(2.3)で一般の棒理論で用いられていると同じように、 $\epsilon_x = \epsilon_y = r_{xy} = 0$ を仮定した。しかし、このことは必ずしも  $\epsilon_x$  や  $\epsilon_y$  が  $\epsilon_z$  に比べ無視しうるほど小さいことを意味しない。実際には多くの棒部材は一軸応力状態にあるとみなせ、 $\epsilon_x, \epsilon_y$  は  $-\nu\epsilon_z$  に近い値になっていると考えられる。従来から棒理論では一軸応力を仮定しながら、同時にこれと矛盾する式(2.3)の仮定が用いられている。直応力-直ひずみの関係として Kollbrunner, Hajdin<sup>9)</sup> は、 $s$  方向のひずみ  $\epsilon_s = 0$ ,  $n$  方向のひずみ  $\epsilon_n \neq 0$ ,  $n$  方向の応力  $\sigma_n = 0$  を仮定し

$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \nu^2}\epsilon_z \quad \dots\dots\dots(9.1)$$

を用いている。Vlasov は式(9.1)において、 $\nu^2$  は 1 に比べて小さいとしてこの項を無視し、式(4.1a)を用い

ている。しかし、ここでは棒理論そのものは数多くの実験的検証を受けてきていることを考えて、従来から棒理論で暗黙のうちに仮定されてきた式 (2.3), (4.1 a) の関係式をそのまま仮定として用いることにした。

式 (3.1) の仮想仕事の原理において、式 (2.3) を理由に  $sn$  面内の直応力による仮想仕事をおとしたが、実際には断面内の直応力は、棒軸方向の直応力に比べ十分無視できるような一軸応力状態に近いためである、と考えたほうが実情に近い。いずれにしても、結果に影響しないので理論上の仮定の統一をはかるため、式 (2.3) を理由とした。

(2) 変位場

仮想仕事の原理によってつり合い式を求めるときには、変位場の仮定に十分注意を払う必要のあることは、はじめに述べた。ここでは、従来から棒理論で用いられてきた仮定のみを用いて、式 (2.4), (2.24) の変位場を求めた。Roik, Carl, Lindner<sup>9)</sup> は幾何学的考察によって式 (8.5), (8.7) の変位場にほぼ一致する結果を得ている。ただ、式 (8.7) のそりを表わす項に本報告との差がみられる。すなわち、本報告では、式 (2.24) でそりは  $\omega\varphi'$  であるのに対して、Roik, Carl, Lindner の結果を本報告の記号で記すと、 $\omega(\varphi' + u_s'v_s'' - u_s''v_s')$  となっている。

坂井<sup>9)</sup> は、微小変位理論で用いられている変位、式 (8.2) を仮定し、この変位をもとに有限変位のひずみ-変位関係からひずみを求めている。このように微小変位理論による変位場を用いた上で、有限変位のひずみ-変位関係を用いているため、一般の棒理論で仮定されている、断面の剛体変位とせん断ひずみに対するオイラー・ベルヌイの仮定を表わす式 (2.3), (2.13) が満足されなくなっている。坂井の結果が Vlasov<sup>1)</sup> や Roik, Carl, Lindner<sup>9)</sup> および本報告の結果と差の生じたのは用いた変位場の差に起因する。その差については後に示す。

(3) 有限変位の応力解析

a) 大きなねじりを受ける棒

微小変位の問題では、式 (4.2) を満たすように点  $C$ ,  $S$  を断面上の特定点を選び  $\omega_c^*$  を決定すると、式 (8.4) から軸方向、曲げおよびねじりの変位成分を独立に扱えることがわかる。これに対して有限変位の問題では、式 (5.1) あるいは式 (8.12) からわかるように一般にはすべての変位成分が連成する。これが有限変位の問題を困難にしている一因でもあるが、断面形状や荷重条件を限定すると問題を比較的簡単に扱える場合があり、その一例としてねじり荷重が作用し棒部材にねじり変位のみが生じている場合を取り上げる。すなわち、変位は次式で

与えられるとする。

$$u_s = v_s = 0, \varphi \neq 0 \dots\dots\dots (9.2)$$

式 (9.2) が式 (5.1 b, c) のつり合い式および式 (3.5 b ~ e) の境界条件を満たす解であるためには、

$$x_s = y_s = 0, I_{px} = I_{py} = 0 \dots\dots\dots (9.3)$$

でなければならない。式 (9.3) は二軸対称断面や点対称の断面であれば成立する。式 (9.3) を満たす断面の場合には、式 (5.1 d) からつり合い式として

$$\begin{aligned} & - \left( EI_{\omega\omega}\varphi'' - \frac{1}{2} EI_{p\omega}\varphi'^2 \right) \\ & + \left\{ \left( EI_{p\omega}w_c' - EI_{p\omega}\varphi'' + \frac{1}{2} EI_{pp}\varphi'^2 \right) \varphi' \right\}' \\ & + GJ_s\varphi'' = m_t \cos \varphi + m_{tn} \sin \varphi \dots\dots\dots (9.4) \end{aligned}$$

を得る。式 (4.4 a) および (4.5 a) から軸力と変位の関係は、

$$N = EA\omega_c' + \frac{1}{2} EI_{p\omega}\varphi'^2 \dots\dots\dots (9.5)$$

となる。式 (9.4), (9.5) から  $w_c'$  を消去すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left\{ -EI_{\omega\omega}\varphi''' + \frac{1}{2} E \left( I_{pp} - \frac{I_{p\omega}^2}{A} \right) \varphi'^3 \right. \\ & \left. + \left( GJ_s + N \frac{I_{p\omega}}{A} \right) \varphi' \right\}' = m_t \cos \varphi + m_{tn} \sin \varphi \dots\dots\dots (9.6) \end{aligned}$$

Kappus<sup>6)</sup> は、円断面や薄い平板が大きい単純ねじり ( $\varphi' = \text{一定}$ ) を受ける場合について、つり合い式を求めている。Timoshenko<sup>9)</sup> はさらに軸方向力を考慮し、薄い平板に対し具体的に適用している。式 (9.6) で  $\varphi' = \text{一定}$  とすると Kappus, Timoshenko の結果と一致する。島田<sup>10)</sup> は、そり抵抗も含めたさらに一般的な場合への拡張を試みている。その中で、大きなねじりによって生ずる  $\sigma_z$  を、

$$\sigma_z = E\varphi'^2 \dots\dots\dots (9.7)$$

と表わしている。これに対して Kappus, Timoshenko および本報告では、

$$\sigma_z = \frac{1}{2} E\varphi'^2 \dots\dots\dots (9.8)$$

であり、島田の求めたつり合い式は、式 (9.6) の左辺第二項の係数  $1/2$  を  $1$  で置き換えたものとなっている。島田はそのつり合い式を H ビーム、さらに溝形鋼部材にも適用し、実験も行っているが、溝形鋼では式 (9.3) が成立せず、したがって、式 (9.6) に相当する式を溝形鋼部材に適用することには疑問が残る。

大きなねじれを受ける場合には、式 (4.4 e) で示される断面力  $K$  が生ずる。これは有限変位を考えたときのみ現われる断面力である。これによる断面上での  $\sigma_z$  の分布は  $\rho_{sn}^2$  に比例する成分をもつ。そのため 図-2 (b) に示すように、 $\sigma_z$  は板厚方向に放物線形の分布をする。これはねじりに伴って回転の中心から遠い線素は

ど大きいスパイラル状の曲線を描くため、線素間に長さの差を生ずることによるものである。

**b)** 一般のつり合いの微分方程式

式 (3.4) は断面力で表わしたつり合い方程式を示す。この式で三次以上の高次項を無視した結果が式 (8.9) である。この式において変位と積の形で表われる断面力を既知として扱い、残りの断面力を微小変位のもとで得られる線形な断面力と変位の関係、式 (8.3) を用いて変位で表現すれば、つり合い式は線形化され荷重条件の違いを除いて Vlasov<sup>1)</sup>, Roik, Carl, Lindner<sup>2)</sup> らの求めたつり合い式と一致する。しかしながら、この線形化が妥当である保証は一般には存在しない。後に座屈の項で述べるが、Vlasov の求めた座屈支配方程式と本報告の基本式に差が生ずるが、この差は、ここに指摘した線形化によるものである。

坂井<sup>3)</sup> は、Vlasov や Roik, Carl, Lindner と同様の線形化有限変位理論を報告しているが、断面内の点  $S(x_s, y_s)$  に関するねじりのつり合い式の荷重項で、それら二つの報告および本報告の結果と違いがみられる。このことは坂井自身、Vlasov との比較で指摘している。坂井の結果を本報告の記号を用いて表わすと、分布荷重  $p_{xd}, p_{yd}$  が、断面が  $\varphi$  回転したことによってつくりだす付加的なねじりモーメント  $\Delta m_t$  は

$$\Delta m_t = \int_A [\{p_{xd}(x-x_s) + p_{yd}(y-y_s)\} - (p_{xd}i_{px} + p_{yd}i_{py})] \sin \varphi dA \dots (9.9)$$

となる。ただし、坂井は、 $\sin \varphi = \varphi$  としている。これに対し、本報告、Vlasov および Roik, Carl, Lindner の結果は、

$$\Delta m_t = \int_A \{p_{xd}(x-x_s) + p_{yd}(y-y_s)\} \sin \varphi dA = -m_{tn} \sin \varphi \dots (9.10)$$

である。式 (9.10) は  $p_{xd}, p_{yd}$  が点  $S$  のまわりにつくる分布ねじりモーメントを表わすのに対し式 (9.9) はそれ以外の点で分布ねじり荷重の増分  $\Delta m_t$  を求めたことを表わしており、明らかに不都合である。

**(4) 座 屈**

式 (7.2), (7.3) から安定限界状態での支配方程式として、式 (7.4)~(7.7) を得た。この計算過程は第二変分を 0 とおいたのと等価である。他者の結果との比較のため、座屈前にはねじり変形を受けず、 $\varphi^{(0)} = 0$ 、さらに境界条件から座屈後の軸力の変化分は 0 である場合を考えると、式 (7.4) は次のようになる。

$$(M_x - M_y^{(0)}\varphi)'' + \{N^{(0)}(u_s' + y_s\varphi')\}' - (m_y^{(0)}\varphi)' = 0 \dots (9.11 a)$$

$$(M_y + M_x^{(0)}\varphi)'' + \{N^{(0)}(v_s' - x_s\varphi')\}' + (m_x^{(0)}\varphi)' = 0 \dots (9.11 b)$$

$$M_\omega'' + T_s' + v_s^{(0)'} M_x - u_s^{(0)'} M_y - M_y^{(0)} u_s'' + M_x^{(0)} v_s'' - (M_x^{(0)} u_s^{(0)'} + M_y^{(0)} v_s^{(0)'})\varphi + [N^{(0)}\{y_s u_s' - x_s v_s' + (x_s u_s^{(0)'} + y_s v_s^{(0)'})\varphi\} + K^{(0)}\varphi']'' - N^{(0)}(x_s u_s^{(0)'} + y_s v_s^{(0)'})\varphi' + m_{tn}^{(0)}\varphi + m_x^{(0)}(v_s' - u_s^{(0)'}\varphi) + m_y^{(0)}(u_s' + v_s^{(0)'}\varphi) = 0 \dots (9.11 c)$$

このとき断面力は、式 (7.6), (7.7) から、

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -EI_{xx}(u_s'' + v_s^{(0)'}\varphi) \\ M_y &= -EI_{yy}(v_s'' - u_s^{(0)'}\varphi) \\ M_\omega &= -EI_{\omega\omega}\varphi'', T_s = GJ_s\varphi' \end{aligned} \right\} \dots (9.12 a \sim d)$$

断面力  $K^{(0)}$  は、式 (4.8) から、

$$K^{(0)} = i_{p_0}^2 N^{(0)} + i_{px} M_x^{(0)} + i_{py} M_y^{(0)} \dots (9.13)$$

となる。

式 (9.11) において、右肩に ( )<sup>(0)</sup> を付した座屈前の変位をすべて 0 とすれば、その結果の式は Vlasov, Roik, Carl, Lindner の結果と一致する。それゆえ、座屈前に軸方向変位以外の変位を伴わない中心圧縮材の座屈の支配方程式は、Vlasov や Roik, Carl, Lindner および坂井の結果と本報告の結果とは一致するが、はりや柱-はりの横座屈のように一軸面内に曲げと圧縮を受けたのち、横方向へ座屈する場合の支配方程式では、本報告の結果には、座屈前の変位項が含まれているのに対し、他の結果では含まれていない。このように後者で座屈前の変位項が失われているのは、応力場や変位場をはじめに線形化したうえでつり合い式を求めたことによる。前記 (3) の **b)** 項で述べたように坂井のねじりのつり合い式では、この変位項のほかに荷重項にも差がある。式 (9.11 c) 中の  $(M_x^{(0)} u_s^{(0)'} + M_y^{(0)} v_s^{(0)'})\varphi$  のように (0) 系の二次項を係数として含む項は、Nishino, Kasemset, Lee<sup>9)</sup> の結果には含まれていない。Nishino, Kasemset, Lee の報告では、 $\sin \varphi, \cos \varphi$  を展開し変位の二次項までを考慮した式 (8.5), (8.6), (8.7) を用いたためにこの項が落ちている。 $\sin \varphi, \cos \varphi$  を展開した変位場を用いるときにこの項が含まれるためには、変位の三次項までとる必要がある。

座屈前の応力状態での変位項の影響をみるため、二軸対称な断面をもつ両端単純支持の直線ばりが荷重として、部材両端で等曲げ  $\bar{M}_y^{(0)}$  のみを受ける場合を考える。この条件のもとで式 (5.1) のつり合い式および式 (3.5) の境界条件を満足する解は次のように求まる。

$$u_s^{(0)} = 0, \varphi^{(0)} = 0, v_s^{(0)'} = -\frac{\bar{M}_y^{(0)}}{EI_{yy}}, w_c^{(0)'} = -\frac{1}{2}(v_s^{(0)'})^2 \dots (9.14 a \sim d)$$

式 (9.14) を式 (4.4 a) に代入すると

$$N^{(0)} = 0 \dots (9.15)$$

式 (9.14 c), (9.15) を式 (7.20) に代入し、 $u_s$  を消去すると、横座屈の支配方程式として

$$EI_{\omega\omega}\varphi'''' - GJ_s\varphi'' + \frac{\bar{M}_y^{(0)2}}{E} \left( \frac{1}{I_{xx}} - \frac{1}{I_{yy}} \right) \varphi = 0 \tag{9.16}$$

を得る。この式の固有値から、次の座屈モーメントが求まる。

$$\bar{M}_y^{(0)} = \frac{\pi}{L} \sqrt{E \left( \frac{I_{xx}I_{yy}}{I_{yy}-I_{xx}} \right) GJ_s \left( 1 + \frac{\pi^2 EI_{\omega\omega}}{GJ_s L^2} \right)} \tag{9.17}$$

ここに、 $L$  ははりの支間長である。この解は Nishino, Kasemset, Lee<sup>6)</sup> の結果と一致する。これに対して Vlasov, Roik, Carl, Lindner あるいは坂井の支配方程式から求まる結果は、上式で  $(I_{xx}I_{yy})/(I_{yy}-I_{xx})$  を  $I_{xx}$  に置き換えたものとなり、これまで一般に用いられてきた解<sup>1)</sup> と一致する。式 (7.20) において  $v_s^{(0)'}=0$  とすると後者の解が求まることから、この差は座屈前の変位を考慮するかどうか起因することがわかる。

式 (9.17) によれば、 $I_{xx} < I_{yy}$  のとき、すなわち、弱軸まわりに曲げをかけた場合には座屈は起こり得ないことになり、たとえばIビームを考えれば直感的にも合理的な解であることがわかる。これに対して座屈前の変形を考えないときの解<sup>1)</sup> では、 $I_{xx}, I_{yy}$  の大きさにかかわらず、端部での曲げモーメントが特定の値になると横座屈することになる。Trahair, Woolcock<sup>9)</sup> が求めた解と式 (9.17) の間には差がみられるが、前者の解にも  $(I_{xx}I_{yy})/(I_{yy}-I_{xx})$  の項が含まれており、弱軸まわりに曲げ荷重が作用する場合に座屈しないという点では一致する。

### 10. 結 語

一次元、あるいは二次元場での変形する物体のつり合い式を仮想仕事の原理から求めるとき、変位場を仮定することが重要であり、得られたつり合い式の精度はこの変位場の仮定によって決まる。有限変位のひずみ成分に棒理論で広く用いられている仮定、すなわち、断面は変形しないという仮定と、せん断ひずみに関するオイラー・ベルヌイの仮定を適用し、薄肉断面部材の一次元の有限変位理論に対して妥当と思われる変位場を求めた。この変位場を用いて仮想仕事の原理から、軸力、曲げモーメント、ねじりモーメントを受ける場合のつり合い式、境界条件および断面力と変位の関係を求めた。

ここで得られた支配方程式は一般にエラスティカとよばれている大变形の問題を扱うものではないが、従来、薄肉断面部材に関する有限変位理論として文献で報告されているよりも大きな変位を扱うことができるものである。変位が微小なとき、この支配方程式は薄肉断面部材に対する微小変位理論と一致する。変位が少し大きく、

変位の二次の項までを考慮したとき、本報告で得た支配方程式には Vlasov, Roik, Carl, Lindner や坂井らによって得られた基本式に含まれていない項が含まれており、変位の二次の微小項までを考えた有限変位理論として、より精度の高いものとなっていると考えられる。

謝 辞：本研究は昭和 48 年度の文部省科学研究費による研究の一部として行われたものである。

### 記 号

#### i) 座 標

- $(x, y, z)$  : 右手系直交直線座標
- $x_s, y_s$  : 点  $S$  の  $x, y$  座標
- $(s, n, z)$  : 板厚中心線に沿って  $s$ 、それと直交する方向に  $n$  を選んだ右手系直交曲線座標
- $s_c$  : 仮想の薄板に沿ってとられる点  $C$  の  $s$  座標
- $s_i$  : 板厚中心線上のある任意点の  $s$  座標
- $C$  :  $(x, y, z)$  座標の原点
- $O$  :  $s$  座標の原点
- $S$  :  $u_s, v_s$  の定義される点
- $l, m$  : 式 (2.5) で定義される方向余弦

#### ii) 変位とひずみ

- $u, v, w$  : 基準状態 (変形前) での  $x, y, z$  方向への変位
- $u_s, v_s$  : 点  $S$  の基準状態の  $x, y$  方向への変位
- $\bar{w}_c', \bar{u}_s'', \bar{v}_s''$  : 式 (4.5) で定義される量
- $\xi, \eta$  : 基準状態の  $s, n$  方向への変位
- $\left. \begin{matrix} \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z \\ \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx} \end{matrix} \right\}$  :  $(x, y, z)$  座標におけるひずみ成分
- $\left. \begin{matrix} \epsilon_s, \epsilon_n, \epsilon_z \\ \gamma_{sn}, \gamma_{nz}, \gamma_{sz} \end{matrix} \right\}$  :  $(s, n, z)$  座標におけるひずみ成分

#### iii) 断面上の長さ

- $r^*$  : 板厚中心線の曲率半径
- $t$  : 板厚
- $\rho_s^*, \rho_n$  : 点  $S$  から板厚中心線の接線および法線に下した垂線の長さ
- $\rho_s : \rho_s^* - n$
- $\rho_{sn} : \sqrt{\rho_s^2 + \rho_n^2}$

#### iv) 変位、ひずみ、応力などの断面上での分布形状を表わす関数

- $\theta$  : 式 (2.27) で定義される関数
- $\omega$  : 式 (2.25) で定義される関数
- $\mathcal{Q}^*$  : 式 (2.21) で定義される関数
- $\mathcal{Q}_c^*$  : 式 (2.23) で定義される関数

$A_s, Q_x, Q_y, Q_\omega, Q_p$  : 式 (6.7) で定義される関数

v) 断面量

$i_{p0}, i_{px}, i_{py}, k_{p\omega}$  : 式 (4.9) で定義される量

$\left. \begin{array}{l} A \\ I_{xx}, I_{yy}, I_{\omega\omega} \\ I_{p0}, I_{px}, I_{py}, I_{p\omega}, I_{pp} \end{array} \right\}$  : 式 (4.6) で定義される量

$\tilde{I}_{pp}$  : 式 (4.11) で定義される量

$J_s$  : 式 (4.6 e) で定義される量

vi) 材料定数

$E$  : 弾性係数

$G$  : せん断弾性係数

$\nu$  : ポアソン比

vii) 応力と断面力

$q_1 : (\tau_{sz} * t)_{s=s_1}, s=s_1$  点のせん断流

$\sigma_z, \tau_{sz}, \tau_{nz}$  : 直応力とせん断応力

$\left. \begin{array}{l} K \\ M_x, M_y, M_\omega \\ N \\ T_s, T, T_n \\ V_x, V_y \end{array} \right\}$  : 式 (3.3) で定義される断面力

$\tilde{K}$  : 式 (4.10) で定義される量

viii) 部材軸に沿って分布する外力

$p_{xd}, p_{yd}, p_{zd}$  :  $x, y, z$  方向に向く単位体積あたりの分布外力

$\tilde{p}_{zd}$  : 式 (6.3) で定義される変形後の部材軸方向に向く単位体積あたりの分布外力

$p_x, p_y, p_z$  : 式 (3.3 k~m) で定義される外力

$q_p$  : 式 (6.7 f) で定義される量

$\left. \begin{array}{l} m_x, m_y, m_\omega \\ m_t, m_{tn} \end{array} \right\}$  : 式 (3.3 n~r) で定義される外力

ix) その他

上付 \* : 板厚中心線上の値を示す。

上付 - : 部材端断面に作用する表面力を表わす。

上付 (0) : 安定限界状態での諸量を表わす。

$( )'$  :  $\frac{d( )}{dz}$

$C_1 \sim C_7$  : 定数

$C(Z)$  : 積分定数

参考文献

- 1) Vlasov, V.Z. : 薄肉弾性ばりの理論, 奥村他共訳, 技報堂, 1967
- 2) Roik, K., J. Carl und J. Lindner : Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe, Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, 1972.
- 3) 坂井藤一 : 薄肉開断面部材の弾性安定基礎方程式の統一的誘導, 土木学会論文報告集, No. 221, pp. 1~15, 1974-1.
- 4) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968.
- 5) Trahair, N.S. and S.T. Woolcock : Effect of major axis curvature on I-beam stability, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, No. EM1, Proc. Paper 9548, pp. 85~98, Feb. 1973.
- 6) Nishino, F., C. Kasemset and S.L. Lee : Variational formulation of stability problems for thin-walled members, Ingenieur-Archiv, Band 43, Heft 1 pp. 58~68, 1973.
- 7) Kollbrunner, C.F. und N. Hajdin : Dünnwandige Stäbe, Band 1, Springer-Verlag, 1972.
- 8) Kappus, R. : Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen, II Teil, Z.A.M.M., Band. 19, 1939.
- 9) Timoshenko, S.P. : Strength of Materials, Part 2, D. van Nostrand, 1956.
- 10) 島田静雄 : 薄肉部材の大きなねじれ, 土木学会論文集, No. 94, pp. 1~5, 1963-6.
- 11) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd Ed. McGraw-Hill, 1961.

(1973.11.21・受付)