

## カルマン・フィルターによる大気汚染の予測

### PREDICTION OF ATMOSPHERIC POLLUTION BY KALMAN FILTER

日野 幹雄\*・森 義一\*\*・吉川信二郎\*\*\*  
By Mikio Hino, Yoshikazu Mori and Shinjiro Yoshikawa

**要 旨** 環境汚染の予測と制御は現在われわれが直面している最大の課題の一つであり、関連する諸学問分野の緊密な協力・種々の方法の活用が望まれる。

本論文は、大気汚染を対象として制御理論のカルマン・フィルターの理論により、汚染監視システムとしての予測法を研究したものである。大気汚染現象は、それを記述する方程式中のパラメーター（風速・風向・拡散係数）の不確定性が大きい。そのため現象を偏微分方程式で表わされる分布定数系として取扱ったのでは、観測情報が十分でないか、あるいは計算処理時間が極端に多くなる。本論文では、大気汚染系を集中定数系（常微分方程式系あるいは定差方程式系）と割り切って、少数個の系のパラメーターをカルマン・フィルターにより推定し、それを基にして数時間先までの大気汚染濃度の予測を行う方法について論じた。

本論文の方法は従来の予測法と異なり、予測すべき将来の気象情報を必要としないし、また排煙データの全く得られない場合にも適用が可能である。

最後に、実汚染地域の観測資料を用い、本方法による予測の妥当性を検討し、かなり満足すべき結果を得ることができた。

## 1. 序 論

大気汚染は、人間社会活動と自然現象との複雑な相関作用の中に発生する。かつては、大気の大きな拡散作用が人間の生産・社会活動に伴う汚染物を拡散希釈してくれたが、現在ではこの大気の拡散能も及ばぬほど人間の社会活動が巨大化してしまった。環境の汚染は人類の未来にかかわる問題である。したがって、環境問題の研究と対策には、従来の専門分野や方法に捉われることな

く、広くすべての分野の考え方や方法を導入し、協力的にことをすすめる必要がある。この論文では、“大気汚染は大気拡散という自然現象によるものであり、自然現象は物理法則をもとにして解明されるべきである”という立場に必ずしもとらわれずに、最近進歩の目覚ましい制御理論の立場から大気汚染の予測理論を研究したものである。本論に入る前に、これまでの大気汚染の予測の方法について簡単に述べる。

### (1) 大気汚染の予測モデル

大気汚染の予測モデルは、大別すれば①物理モデルと②非物理モデルとに分けられる<sup>1)</sup>。物理モデルは、大気汚染は大気拡散という物理現象に他ならないという立場に立つもので、いずれのモデルも拡散方程式の解として大気汚染濃度を予測しようとするものである。他方、非物理モデルは大気汚染の確率的特性を重視するものである。物理現象としての大気拡散が確率現象であるのみならず（つまり、全く同一の外的条件のもとにあっても汚染濃度は確率的に定まる——平均濃度からのある程度の変動は常にある）、それを支配する気象変化も、また入力の一つである汚染源からの汚染物の排出も確率的要素が強い。

物理モデルは、さらに精密物理モデル（流体運動の基礎方程式と拡散方程式をできるだけ正確に解こうとするもの）と簡略物理モデル（空間的な平均化や時間的な平均化を行うもの）とに分類することができる。複雑な地形を考慮した三次元的な煙の拡散の解析は、日野<sup>2)</sup>によりはじめて試みられ、最近では大西<sup>3)</sup>の研究を挙げることができる。精密物理モデルでは、地形や温度場の影響をも理論的に考慮しうるし、経験的実験的係数や実測データはほとんど不要であるが、計算機の使用時間が長く、この点大気汚染のオンライン予測には不適當である。簡略物理モデルとしては、逆転層や海陸風の影響を上下二層の大気層内の拡散と考えて取扱う方法や、有限時間内

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

\*\* 日本電子開発(株)

\*\*\* (株)数値解析研究所

の煙雲の拡散を順次追跡する plume あるいは puff モデルが提案されている<sup>4)</sup>。これらの方法は、計算時間も比較的短く、しかも非物理モデルと異なり煙雲の行動をはっきりと捉えるという利点がある。しかし、流れの場の計算は理論的単純化が困難であるから、これについては実測データによる内挿法などが用いられている。

拡散については物理モデルを用い、その中の確率的な係数である拡散係数の推定を制御理論により行いつつ、オンラインによる大都市の汚染予測を行う方法が、高松ら<sup>5),6)</sup>により提案されている。一方、物理モデルにより予測を行い、実測値との比較から予測値の補正を制御理論により行おうとしたのが船橋<sup>7)</sup>である。この2つの方法は、いずれも物理モデルを主体とし、その中に制御理論を応用しようとしたものである。

これらに対して非物理モデルの研究は比較的少なく、気象予測法の延長として要因分析法<sup>8)</sup>による方法が用いられている程度である。この方法は予測としては現象の時間的変化を考慮しない静的予測法といえるであろう。

これに反して、ここで展開しようとするカルマン・フィルターによる予測法は、汚染場の状態変数（濃度・風向・風速・大気安定度・排煙量）の時間変化を記述する高階常微分方程式をもとにするもので、動的予測法といえるであろう。この微分方程式系は現時点では直接物理系との対応はなされてない。しかし、水文流出系の流出核（単位流出図法を非線型にまで拡張したもの）と物理系（流体の連動方程式および連続式）との関係が理論的に導出された<sup>9)</sup>ように、大気汚染のシステム状態方程式を物理系と関連させることは可能であろう。

**(2) 予測モデルの評価基準**

大気汚染の予測モデルは、大気汚染制御のトータル・システムの主要サブ・システムとして、現実に日常的に運用されるものであるから、単に計算法としてではなく種々の点を考慮して、その良否や適合を評価しなければならない。評価基準としては、次の事項をあげることができる<sup>1)</sup>。

**a) 予測精度**

予測モデルが満たすべき第一の点は、予測精度が高いことである。大気汚染状態が危険域に入るのをいち早く予知し、必要な対策（工場の操業短縮・自動車の都心乗入れ制限）を採らなければならないし、また安全を見越しての過剰規制は望ましくはない。予測の当りはずれのおよぼす影響は、天気予報のそれよりも重大である。もっとも、大気汚染の予測や制御を行わなければならないほど、大気環境を悪化させる人間社会そのものが問題であるという議論も当然ありうるであろう。しかし、光化学スモッグの被害が起り、地方公共自治体から工場の

排煙量通減の要請が出される事態が現実には生じているのである。

**b) 予測計算の速度**

大気環境は気象や社会活動の変化につれて、時々刻々変化している。したがって、大気汚染予測もモニターリング・システムとオン・ラインで最新の計測情報に基づいて行うことが必要である。そのためには予測計算は短時間で完了する必要がある。1時間ごとの予報をしようとするときに、予測計算に数十分もかかるようではその予測モデルは役に立たないであろう。というのは中央計算センターでは、刻々の計測データのファイリングと統計処理および大気汚染規制時には、その程度と効果についての作業も同時に行わなければならないからである。

**c) 必要情報量**

汚染予測を行うには、拡散場の風向風速が細かく測定されているほど、また汚染物の排出源とその量を正確に知らされているほど楽である。といっても、実際に余り多数の計測器を配置することは、経済的にもまた保守管理の上からも望ましいものではない。予測に必要な情報量は少ないほど良い。

**d) 合理性**

汚染予測は客観的方法に基づいた合理的なものでなければならない。観天望気式の予測では、特定の個人の経験による特定地域での予測であり、どこの地点にも適用しうる一般的なものとはなり得ない。

**e) システム化への適合性**

大気汚染状況は時々刻々不確定的に変化する。したがって、大気汚染予測システムは、汚染度・気象・汚染源等のモニターリング・システムとオン・ラインで運用される。また、実際に公共自治体などに採用・運用されることを目指している以上、トータル・システムはあまり高価なものでは実用性に乏しい。主要サブ・システムとしての大気汚染予測モデルも、価格・保守・運転の各面で中程度の規模におさめることが望ましい。

**(3) カルマン・フィルター**

予測理論は、Wiener による統計的相関を用いる方法や、周波数応答関数の方法が中心となって発展してきたが、1960年 Kalman<sup>10),11),12)</sup> は状態空間における逐次予測の方法を発表した。Kalman の論じた問題は、システムの状態  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  が、方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t) + G(t)w(t) \dots \dots \dots (1)$$

で表わされ、状態  $x$  が観測系

$$z(t) = M(t)x(t) + v(t) \dots \dots \dots (2)$$

を通して、変数  $z = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$  ( $m \leq n$ ) として観測されるとき、 $x$  の最適推定値  $\hat{x}$  をいかに決定するか

ということである（上式中、 $w \cdot v$  はガウス白色雑音、 $F \cdot G \cdot M$  は非確率的行列時間関数）。

Kalman は関数空間における直交射影の概念を用いて、今日 Kalman filter と呼ばれる最適フィルタを次のように決定した。

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + K(t)[z(t) - M(t)\hat{x}(t)] \dots (3)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} K(t) &= P(t)M^T(t)R^{-1}(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= F(t)P(t) + P(t)F^T(t) \\ &\quad - P(t)M^T(t)R^{-1}(t)M(t)P(t) \\ &\quad + G(t)Q(t)G^T(t) \\ &\dots\dots\dots (4) \end{aligned} \right\}$$

ここに、 $Q \cdot R$  はそれぞれ  $w \cdot v$  の分散行列、 $P$  は推定誤差  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  の共分散行列。

## 2. カルマン・フィルタによるシステム・パラメータの同定（最適推定）

本来カルマン理論は、状態方程式 (1) で記述されるシステムを、観測系 (式 (2)) を通して観測する際の状態ベクトル  $x$  の最適推定という形で提出されており、これまでのカルマン・フィルタの応用も、このような形で行われてきた。それは、推定や制御の対象であるシステムが、工場のプラントであるとかロケット・人工衛星船といった人間の造り上げた系で、システム方程式が確実にわかっているからであった。

ところが、今われわれの対象としている大気汚染系は、そのシステム方程式が、たとえば拡散方程式あるいは本論文で考えているような全く未知の系であって、濃度・風速・風向・排煙量などのシステム状態量の観測誤差の影響（本来のカルマン理論はこの点を問題としている）よりも、むしろ系の方程式の係数の不確実性が問題である。図-1 に従来の修正形予測法（上）と本論文の方法（下）との考え方の比較を示す。

先にも述べたように、Fick の拡散方程式を直接的に定差方程式化する方法では、各格子点での濃度と拡散係数とを問題とするゆえ、行列の次元は巨大化する一方、それほど多くの観測点が配置され得るわけではないから、情報量の不足をきたすことになる。

本論文では、大気汚染系を一つの常微分方程式系で表わされるシステムであるとみなし、カルマン・フィルタ理論を適用して、そのシステム・パラメータの最適推定を行う。カルマン・フィルタを同定問題に応用する試みは、すでに深尾<sup>12)</sup>により行われているが、本論文ではその一般化を行い、次に実際の大気汚染予測への応

用の妥当性を検討する。

### (1) 定差形システム方程式

拡散現象は、本来偏微分方程式で記述される自然現象であるが、ここでは先に述べた理由により、単にシステムと考える。このシステムは、 $n$  次元の変数ベクトル  $x(t)$  に関する一階の常微分方程式系で記述されるとする。任意階の常微分方程式は、 $x_{i+1} = dx_i/dt$  などと置くことにより、すべて一階のベクトル微分方程式に帰着しうる。

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t) + F(t)u(t) + G(t)w(t) \dots (5)$$

ここに、

- $x(t)$ : システムの状態を表わす  $n$  次元ベクトル
- $F(t)$ : 非確率的行列時間関数 ( $n \times n$  行列)
- $u(t)$ : 入力ベクトル
- $F(t)$ : 非確率的行列時間関数
- $w(t)$ : ノイズ・ベクトル
- $G(t)$ : 非確率的行列時間関数

あるいは、離散表示をして

$$x(k+1) = \Phi(k+1|k)x(k) + \Psi(k+1|k)u(k) + \Gamma(k+1|k)w(k) \dots (6)$$

と書ける。ここに、 $k$  は時間ステップ  $t = k \Delta t$ 、 $\Phi \cdot \Psi \cdot \Gamma$  は変換行列、 $x(k)$  は  $x$  が離散表示であることを示す。

式 (5) あるいは式 (6) の状態ベクトル  $x$  は、システムの変数およびその時間に関する変化率である。しかし、変化率は観測しないのが普通であるから、変数  $x_i$  のみに関する定差方程式にシステム方程式を書き改める（式 (5) の定差化にあたっては、 $Z$  変換の手法により、いわゆる差分安定性の問題からのがれることができる）。変数  $x_i$  の時間ステップ  $k$  の値を  $x_{i,k}$  と表わして、 $x \cdot u \cdot \Phi^{(j)} \cdot \Psi^{(j)}$  を次のように定義する\*)。

$$x(k) = [x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{m,k}]^T \dots (7)$$

$$\Phi^{(1)}(k+1|k) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} \dots \mu_{11} \\ \alpha_{21}\beta_{21} \dots \mu_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1}\beta_{m1} \dots \mu_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(1)} \\ \phi_2^{(1)} \\ \vdots \\ \phi_m^{(1)} \end{bmatrix} \dots (8)$$

$$\Phi^{(j)}(k+1|k) = \begin{bmatrix} \alpha_{1j}\beta_{1j} \dots \mu_{1j} \\ \alpha_{2j}\beta_{2j} \dots \mu_{2j} \\ \dots \\ \alpha_{mj}\beta_{mj} \dots \mu_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(j)} \\ \phi_2^{(j)} \\ \vdots \\ \phi_m^{(j)} \end{bmatrix} \dots (8a)$$

$$u(k) = [u_{1,k}, u_{2,k}, \dots, u_{n,k}]^T \dots (9)$$

ここに、 $x$  の最初の添字  $m$  は  $x$  の成分数、 $u$  の最

\*) 式(7)以後の  $x$  は観測しうる変量のみから成り、それらの微分は含まないものとする。

初の添字  $n$  はその成分数を示す。

$$\Phi^{(1)}(k+1|k) = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} \cdots \\ a_{21}b_{21} \cdots \\ \vdots \\ a_{m1}b_{m1} \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1^{(1)} \\ \psi_2^{(1)} \\ \vdots \\ \psi_m^{(1)} \end{bmatrix} \quad \dots(10)$$

$$\Phi^{(j)}(k+1|k) = \begin{bmatrix} a_{1j}b_{1j} \cdots \\ a_{2j}b_{2j} \cdots \\ \vdots \\ a_{mj}b_{mj} \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1^{(j)} \\ \psi_2^{(j)} \\ \vdots \\ \psi_m^{(j)} \end{bmatrix} \quad \dots(10a)$$

結局、式 (5) の定差分方程式は次式となる<sup>13)</sup>。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) = & \phi^{(1)}\mathbf{x}(k-1) + \phi^{(2)}\mathbf{x}(k-2) + \cdots \\ & + \phi^{(j)}\mathbf{x}(k-j) + \psi^{(1)}\mathbf{u}(k-1) \\ & + \psi^{(2)}\mathbf{u}(k-2) + \cdots + \mathbf{w}(k) \quad \dots\dots(11) \end{aligned}$$

と書ける。

**a) 大気汚染予測における状態ベクトル**

いま大気汚染予測を行おうとしている地域に、汚染濃度の観測点が  $m$  点あり、 $\Delta t$  時間ごとの連続記録を行っている。 $i$  観測点での時間ステップ  $k$  の濃度を  $C_{i,k}$  とすれば、濃度ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & [\mathbf{C}(k), \mathbf{C}(k-1), \dots, \mathbf{C}(k-j+1)]^T \\ = & [C_{1,k}, C_{2,k}, \dots, C_{m,k}, C_{1,k-1}, \dots, C_{m,k-1}, \\ & \dots, C_{1,k-j+1}, C_{2,k-j+1}, \dots, C_{m,k-j+1}]^T \quad \dots\dots(12) \end{aligned}$$

は、式 (11) のベクトル  $\mathbf{x}$  の成分である。また、風速成分ベクトル

$$\mathbf{U} = [u_{1,k}, v_{1,k}, u_{2,k}, v_{2,k}, \dots]^T \quad \dots\dots(13)$$

( $u, v$  は東西と南北あるいは適当な直角方向の二成分、最初の添字は地点、2番目の添字は時間ステップ) も重要な状態量であり、必要に応じてベクトル  $\mathbf{x}$  あるいは制御ベクトル  $\mathbf{u}$  の成分のいずれかに含まれる。本論文の場合には、拡散偏微分方程式を解く物理モデルとは異なり、風速・風向を各格子点や濃度観測点で細かくとる必要はない。それは、単に行列の次元を増大させるにすぎない。むしろ、その地域を代表する1点あるいはたかだか数点での風速成分のデータで十分である。

排煙量・汚染質排出量ベクトル  $\mathbf{Q} = [Q_{1,k}, Q_{1,k-1}, \dots, Q_{s,k}, Q_{s,k-1}, \dots, Q_{s,k-q+1}]^T$  は、排出源からの情報が得られ、しかもそれが信頼度の高いものであれば、システム方程式の強制入力項としてよい。しかし、全工場に排出量メーターを設置することはできないから、工場の操業が比較的安定している場合には、汚染予測システム方程式から除外してもよい。

**b) 行列次元の圧縮**

一般に大気汚染の問題となっている大都市や大工業地帯には、10 個以上所によっては数十個の汚染濃度観測計が設置されている。それゆえ、以上のように単純にす

べての濃度データをベクトル  $\mathbf{x}$  と考えてしまうと、システム方程式の行列やベクトルの次元が急増して、計算時間が増加し、オンライン・システムとしての適性が下がってくる。

この難点をさけるには、適当に離れた数点ずつの濃度観測点を組にして、いくつかの観測点グループとし、各グループごとに以下に述べる予測計算を行えばよい。あるいは、因子分析法により共通因子について予測をする方法も考えられる。

**(2) システム方程式の書き替えと読み替え**

汚染変化の状態方程式 (式 (11)) を、システム・パラメーター  $[\alpha_{mn}, \beta_{mn}, \dots]$  を主にして書き換えると次式のようなになる。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}(k)\mathbf{h}(k) + \mathbf{w}(k) \quad \dots\dots(14)$$

ここに、

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{m,k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y} & & 0 \\ & \mathbf{y} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = & [\mathbf{x}(k)^T, \mathbf{x}(k-1)^T, \dots, \mathbf{x}(k-j+1)^T, \\ & \mathbf{u}(k)^T, \mathbf{u}(k-1)^T, \dots, \mathbf{u}(k-l+1)^T] \quad \dots\dots(16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h} = & [\phi_1^{(1)}, \phi_1^{(2)}, \dots, \phi_1^{(j)}, \phi_2^{(1)}, \phi_2^{(2)}, \dots, \phi_2^{(j)}, \\ & \dots, \phi_m^{(1)}, \dots, \phi_m^{(j)} \\ & \psi_1^{(1)}, \psi_1^{(2)}, \dots, \psi_1^{(j)}, \psi_2^{(1)}, \psi_2^{(2)}, \dots, \\ & \psi_2^{(j)}, \dots, \psi_m^{(1)}, \dots, \psi_m^{(j)}]^T \quad \dots\dots(17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & [\alpha_{11}, \beta_{11}, \dots, \mu_{11}; \alpha_{12}, \beta_{12}, \dots, \mu_{12}; \\ & \alpha_{1j}, \beta_{1j}, \dots, \mu_{1j}; \\ & \alpha_{21}, \beta_{21}, \dots, \mu_{21}; \alpha_{22}, \beta_{22}, \dots, \mu_{22}; \\ & \alpha_{2j}, \beta_{2j}, \dots, \mu_{2j}; \\ & \dots\dots\dots \\ & \alpha_{m1}, \beta_{m1}, \mu_{m1}; \alpha_{m2}, \beta_{m2}, \dots, \mu_{m2}; \\ & \alpha_{mj}, \beta_{mj}, \dots, \mu_{mj}; \\ & a_{11}, b_{11}, \dots; a_{12}, b_{12}, \dots; a_{1l}, b_{1l}, \dots; \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{m1}, b_{m1}, \dots; a_{ml}, b_{ml}, \dots]^T \quad \dots\dots(18) \end{aligned}$$

(( $j \times m + l \times m$ )  $\times m$  次元ベクトル)

式 (11) を書き替えた式 (14) の右辺のベクトル  $\mathbf{h}$  は、システム状態方程式の係数を成分とするベクトルであるが、それらはいま同定しようとしている未知量である。これに反し、上式の左辺のベクトル  $\mathbf{x}$  や右辺の行列  $\mathbf{M}$  は観測量より成り立っている。したがって、式 (14) はある仮想のシステムよりの出力  $\mathbf{h}$  の観測系方程式であると解釈することができる。

係数ベクトル  $\mathbf{h}$  に対する仮想システムの状態方程式



となる。ステップ入力に対する出力のデータから、パラメーター同定を行った結果が、図-3 であるが、この場合には第3ステップで真値に収束している。

次に、12 ステップ周期の2つの正弦波  $x_1$  と  $x_2$  についてパラメーター推定とそれに基づく予測を行った。 $x_1 \cdot x_2$  は

$$\left. \begin{aligned} x_{1,k} &= \sum_{j=1}^6 \alpha_{1,j} x_{1,k-j} + \sum_{j=1}^6 \beta_{1,j} x_{2,k-j} \\ x_{2,k} &= \sum_{j=1}^6 \alpha_{2,j} x_{1,k-j} + \sum_{j=1}^6 \beta_{2,j} x_{2,k-j} \end{aligned} \right\} \dots\dots (25)$$

で表わされるとし、第  $k$  ステップまでのデータから、上記の方法で逐次パラメーター推定を行い、その結果の  $\alpha_{i,j} \cdot \beta_{i,j}$  を用いて  $(k+1)$  ステップ以後の  $x$  の変化を予測した。この予測曲線は、図-4 に点線で画かれている。図より過去の情報が蓄積されるにつれて予測性が向上し、第 25 ステップ以後は、予測と真値は全く一致することがわかる。

次節で示す実データに近いテスト・データとして、煙の拡散に関する Bosanquet-Pearson 式により、煙の濃

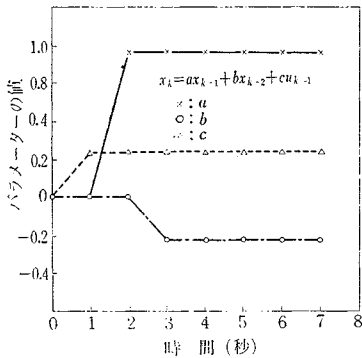


図-3

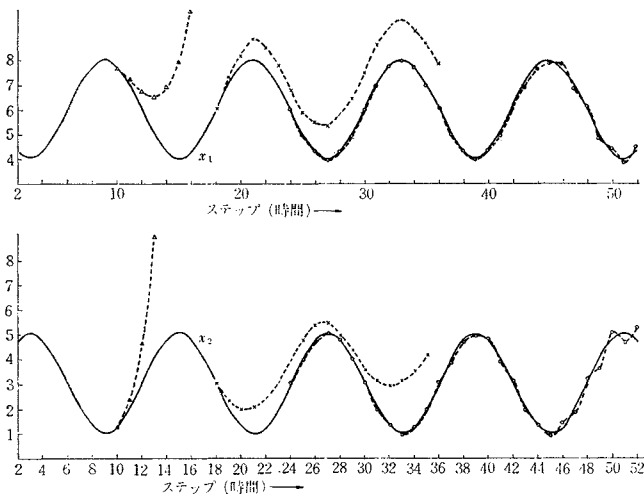


図-4

度のシミュレーション・データを発生させた。すなわち、高さ  $H$  の排出源から単位時間あたり  $Q$  の排煙があるとき、地表の煙の濃度  $C_B$  は、

$$C_B = \frac{Q}{\sqrt{2\pi p q U} \cdot x^2} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2q^2 x^2}\right) \exp\left(-\frac{H}{px}\right) \dots\dots (26)$$

で与えられる。ここに、 $U$  : 風速、 $p \cdot q$  : 鉛直および水平方向の拡散パラメーター ( $k_y = q^2 U x$  (水平拡散係数)、 $k_z = p U x$  (鉛直拡散係数))。そこで、風速  $U$  および排煙量  $Q$  を一次のマルコフ過程として、時間ステップ  $i$  での値をそれぞれ次式で与えた。

$$\left. \begin{aligned} U_i &= \bar{U} + \alpha \delta U_{i-1} + r_i \\ Q_i &= \bar{Q} + \beta \delta Q_{i-1} + r_i' \end{aligned} \right\} \dots\dots (27)$$

ここに、 $\delta U_i \cdot \delta Q_i$  は風速・排煙量の変化分、

$$\delta U_i = U_i - U_{i-1}$$

$$\delta Q_i = Q_i - Q_{i-1}$$

$r_i \cdot r_i'$  は互いに無関係な乱数、 $\alpha \cdot \beta$  はある定数。

これらの  $U_i \cdot Q_i$  の値を式 (26) に代入すれば、煙の濃度変動のシミュレーション・データが得られる。

式中のパラメーターを

$$p = 0.038, \quad q = 0.060$$

$$x = 657.895, \quad y = 0, \quad H = 50$$

$$\bar{U} = 1.0, \quad \bar{Q} = 10.0, \quad \delta U_0 = 0.05, \quad \delta Q_0 = 1.0$$

$$\alpha = 0.7, \quad \beta = 0.7, \quad |r| \leq 2.0 \text{ (一様乱数)}$$

$$|r'| \leq 2.0 \text{ (一様乱数)}$$

として、発生させた  $U$  と煙の濃度変動のデータを図-5 に示す。なお、実際には風向変動の影響も重要であるが、あまりに複雑にしてはテスト・データとして適当でないので、ここでは  $U$  と  $Q$  のみ変化させた。

シミュレーション・データの自己相関係数と相互相関係数を図-6(a), (b) (c) に示す。

さて、 $C$  および  $U$  の予測式を次のようにする。

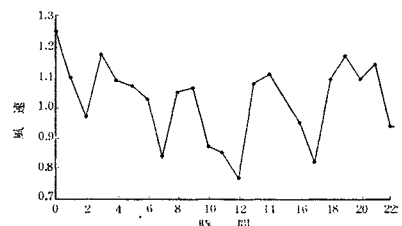
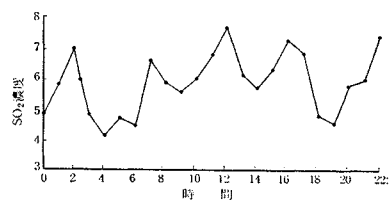


図-5

$$\left. \begin{aligned} C_k &= a_{1,1}C_{k-1} + a_{1,2}C_{k-2} + \dots + a_{1,n}C_{k-n} \\ &\quad + b_{1,1}U_{k-1} + b_{1,2}U_{k-2} + \dots + b_{1,n}U_{k-n} \\ U_k &= a_{2,1}C_{k-1} + a_{2,2}C_{k-2} + \dots + a_{2,n}C_{k-n} \\ &\quad + b_{2,1}U_{k-1} + b_{2,2}U_{k-2} + \dots + b_{2,n}U_{k-n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

時間ステップ 18 までシミュレーション・データによるパラメーター同定を行い、その時点から新たなデータを与えることなしに 17 ステップ先までの予測を行い、実際のシミュレーション・データと比較した結果が、図-7, 8 である (図中、実線：実データ、破線：予測)。この例では、与えられた観測 (シミュレーション) データは煙の濃度と風速のみで、汚染物の排出量は未知としているにもかかわらず、10 ステップ先位までかなりの予測を行っていることがわかる。

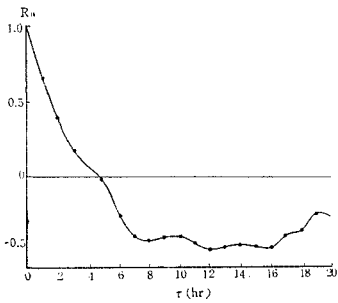


図-6(a) 風速の自己相関 (シミュレーション・データ)

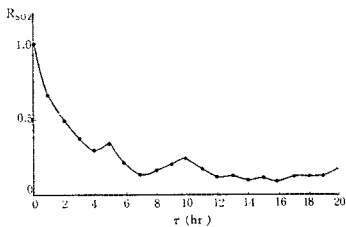


図-6(b) SO<sub>2</sub>濃度の自己相関 (シミュレーション・データ)

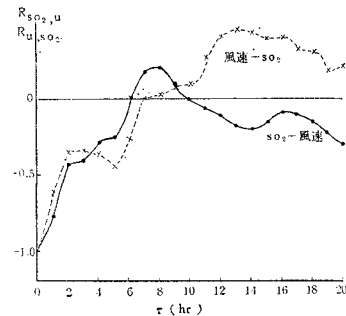


図-6(c) 風速・SO<sub>2</sub>濃度の相互相関 (シミュレーション)

### 3. 実地域での大気汚染予測へのカルマン・フィルタの適用

自然現象としての気象も人間の社会活動も 24 時間を周期として変化しており、それらがまた 1 年を周期とする変化や長期トレンドの上になっている。わが国のような経済成長率の高い国では、社会活動の年周期は急激な上昇トレンドに埋没しているかもしれない。いずれにしても、時間単位の予測を行おうとするときには、そのオーダーの変化を中心に考える必要がある。乱流理論における、いわゆる“観測のスケール”の概念である。

一方、制御理論も本来平均的挙動からのズレの補正や制御を中心に組立てられているともいえるから、大気汚染予測に制御理論を応用する際には、生の観測データよりも、平均の日変化よりのずれを問題にしたほうがよい。

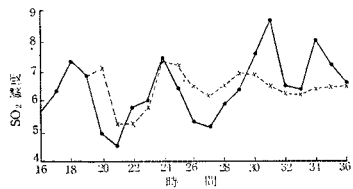


図-7

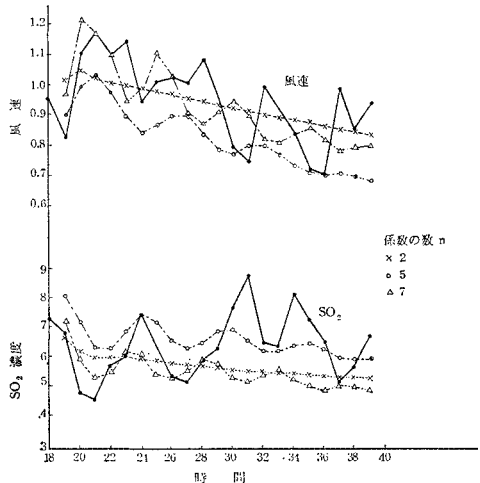
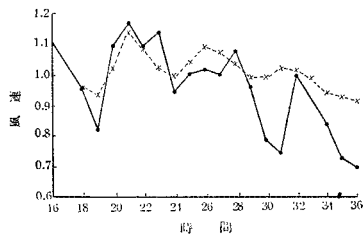


図-8

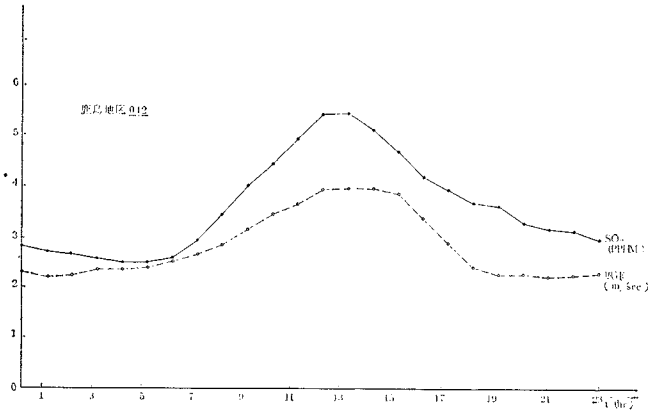


図-9(a) 月平均の日変化 (鹿島 042)

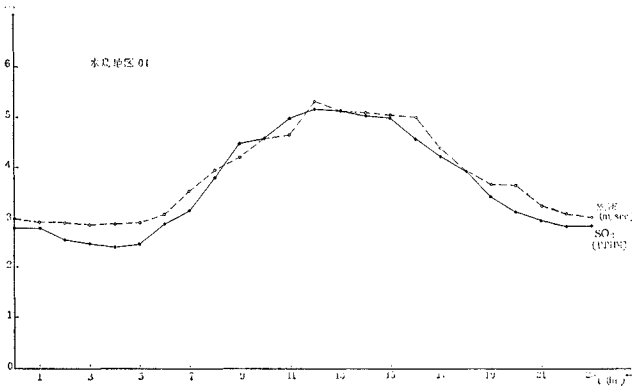


図-9(b) 月平均の日変化 (水島 04)

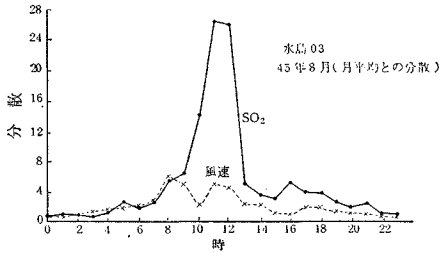


図-11(a) 月平均からの分散

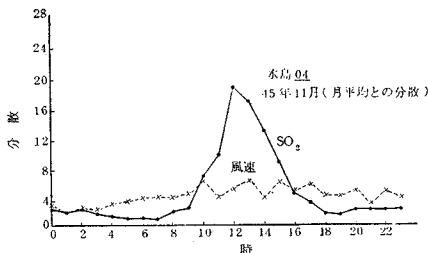


図-11(b) 月平均からの分散

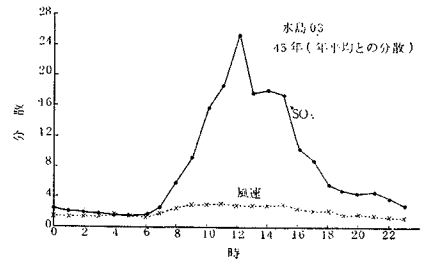


図-10 年平均からの分散

したがって、状態量  $x$  の日変化のアンサンブル平均

$$\bar{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(n) \dots\dots\dots (29)$$

(ここに、 $x_i(n)$ : 第  $i$  日の時間フェイブ  $n$  の  $x$ ) を求め、この値との差

$$x(k) = x_i(n) - \bar{x}(n) \dots\dots\dots (30)$$

$$(k = (i-1) \times 24 + n) \dots\dots\dots$$

について、カルマン・フィルタ理論を適用するのが妥当である。

(1) SO<sub>2</sub>・風速の日変化および分散

茨城県鹿島地区および岡山県水島地区の資料から、風速および SO<sub>2</sub> 濃度の平均日変化を求めたのが、図-9 (a), (b) である。一般に、風速と SO<sub>2</sub> 濃度は逆比例の関係にあるといわれるが、これらの図では両者は比例関係にある。その原因としては、① 風速が大きくなると、煙の浮力・運動量上昇が減って、有効煙突高が小さくなる。② SO<sub>2</sub> の最大濃度は工場活動が盛んで排煙量も実際に増加している日中に生じる。③ 日中は海風で、工場からの煙は内陸に流れて SO<sub>2</sub> 濃度が高くなる。すなわち、SO<sub>2</sub> 濃度は風速よりも風向の影響を受ける、などの点をあげることができる。

次に、各時刻における平均風速・平均 SO<sub>2</sub> 濃度と各測定値との差の分散を計算した結果が、図-10, 11 である。風速の分散は小さく、したがって、予測も比較的楽なことが予想される。これに反し、SO<sub>2</sub> 濃度はその値が高くなる日中に分散が大きく、予測はかなり困難なものと思われる。

(2) 風速・SO<sub>2</sub> の自己相関および相互相関

風速・SO<sub>2</sub> の自己相関  $C_{xx}$  および相互相関  $C_{xy}$

$$\left. \begin{aligned} C_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \\ C_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau) dt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

の計算した結果が、図-12, 13 である。



(3) 予測式

鹿島地区と水島地区の日常観測の資料より、汚染濃度の予測を行う。特定期間を限ってのトレーサー実験の場合と異なり、最も重要な汚染要因である工場からの排煙

量データが不明であるので、 $SO_2$  濃度  $C_{i,k}$ ・風速  $U_k$ ・風向  $D_k$  の資料のみで汚染濃度予測を行う。ここに、添字  $i$  は観測点番号、添字  $k$  は時間ステップを意味する。風速は、成分  $U \cdot V$  としてではなく、風速絶対値  $U$  と 16 方位風向  $D$  を用いた。したがって、

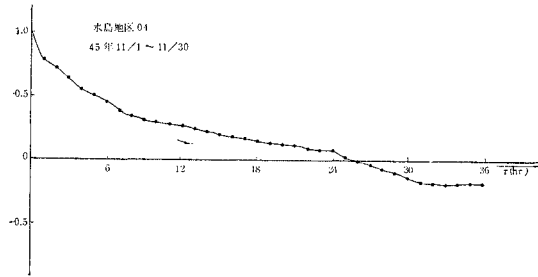


図-12(a) 風速の自己相関

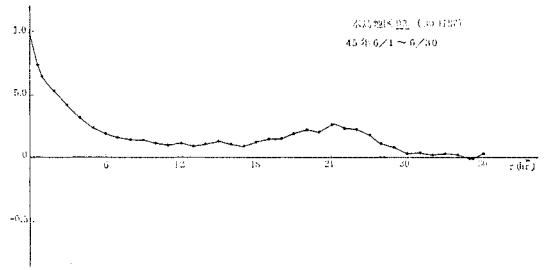


図-13(a) 風速の自己相関

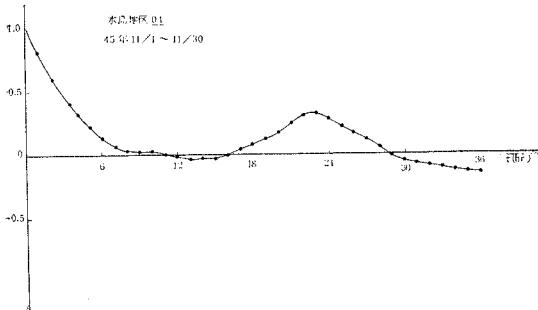


図-12(b) SO<sub>2</sub> の自己相関

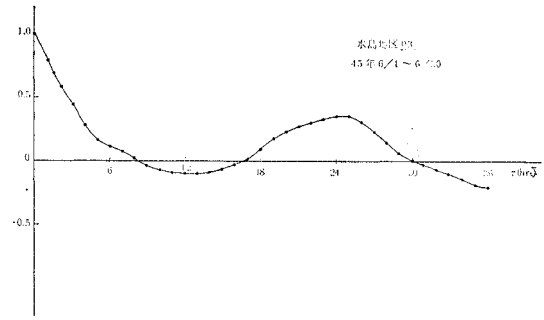


図-13(b) SO<sub>2</sub> の自己相関

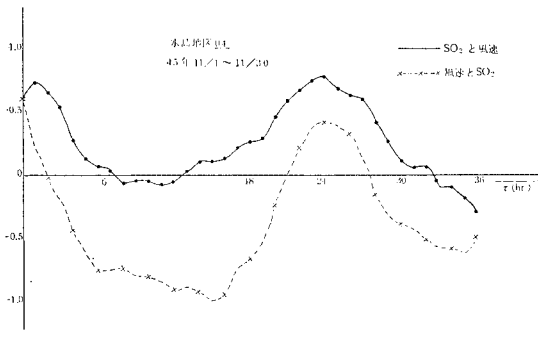


図-12(c)

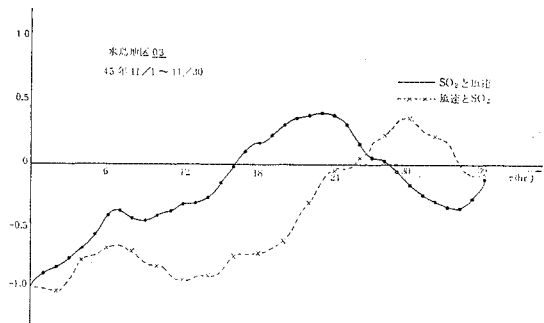


図-13(c)

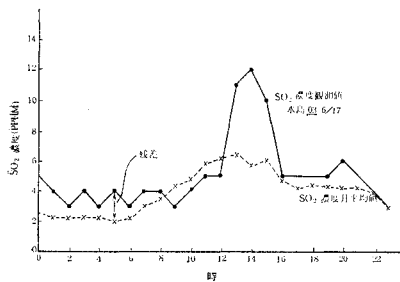


図-14(a)

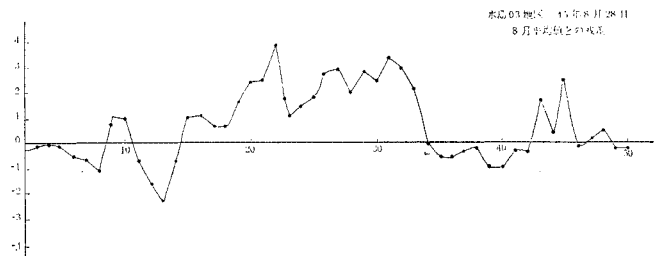


図-14(b)

$$x(k)=[C_{1,k}, C_{2,k}, \dots, C_{M,k}, U_k, D_k]^T$$

として、式(21)、(11) (あるいは(14)) によりパラメータの同定と濃度等の予測を行った。

式(11)等の中の添字  $j$ , すなわち、何ステップ前までの情報を考慮すべきかは、実際上の大きな問題点である。計算機メモリーや計算時間の上からは、 $j$  はできるだけ少ないことが望ましい。水島地区のデータについて、 $j$  の値を 1~3 の範囲に変えて予測の予備計算を行った結果、 $j$  を大きくしてもそれほど効果はみられず、むしろ  $j=1$  とした場合がよかった(表-1)。これは、残差をとることにより、SO<sub>2</sub> 濃度の変化が一次のマル

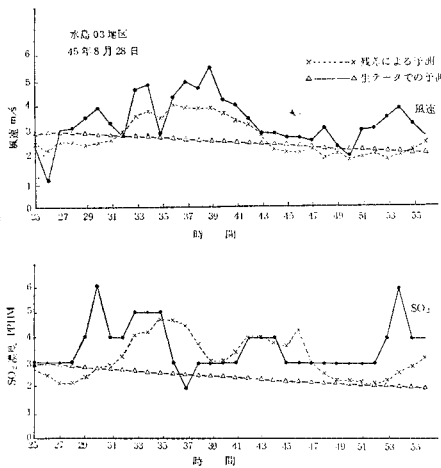


図-15

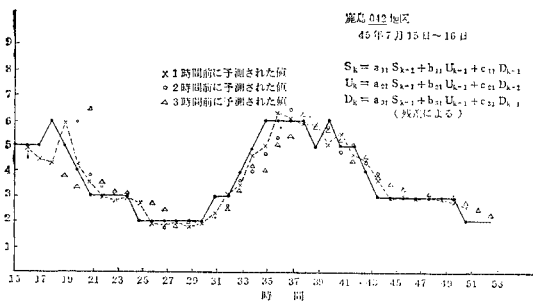


図-16(a)

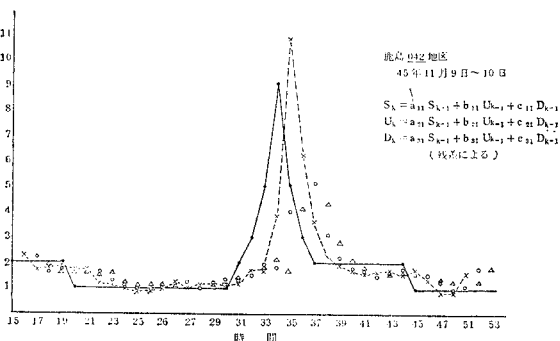


図-16(b)

表-1 過去のデータの有効度

データ形式	予測式	絶対誤差			相対誤差		
		1H先	2H先	3H先	1H先	2H先	3H先
生データ	1	0.314	0.284	0.477	0.105	0.151	0.199
	2	0.620	0.829	1.157	0.122	0.179	0.226
	3	1.154	1.400	2.252	0.154	0.175	0.180
残差データ	1	0.247	0.315	0.396	0.101	0.114	0.110
	2	0.615	0.972	0.491	0.107	0.126	0.129
	3	1.860	2.170	8.932	0.153	0.159	0.144

コフ過程に近いものとなったためと考えられる。

(4) 残差予測と生予測の比較

大気汚染予測には、月ごとの平均日変化よりの残差を予測状態量としたほうがよいと先に述べたが、残差分の時間変化を示したのが、図-14(b) である。

さらに、実際に残差予測と、生データによる予測とを比較したのが、図-15 である。この例は、24 時までのデータを得て、それから 30 時間先までを新たな観測値なしにその時点で予測したものである。生データによる予測よりは、残差による予測値が真値に近いことは、この図から明らかである。

(5) 多地点の同時予測

ただ1点の観測点の汚染濃度データでは、風向変化による濃度変動を見落すことになる。といっても、全観測点のデータを一度に処理するのは、計算機のメモリーの使用や計算時間の上から、決して好ましい方法ではない。そこで、先に 2.(1)(b) で述べたように、適当に離れた数地点の SO<sub>2</sub> 濃度を  $x$  と考えるのが有効と思われる。ここでは、データの入手の関係から 図-17 に示す 4 地点 (04, 05, 07, 13 地点) を一組とした。

1 地点のみのデータ ( $C_{1,k}, U_k, D_k$ ) からの予測と 4

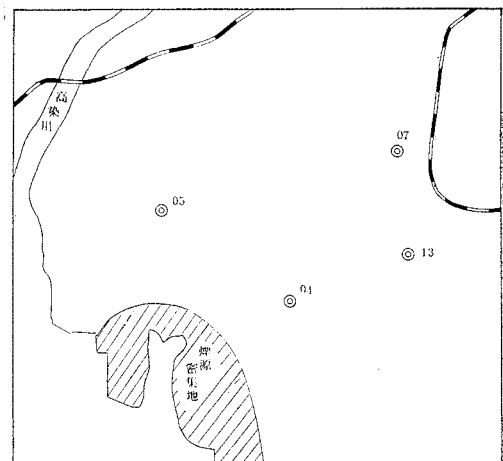


図-17

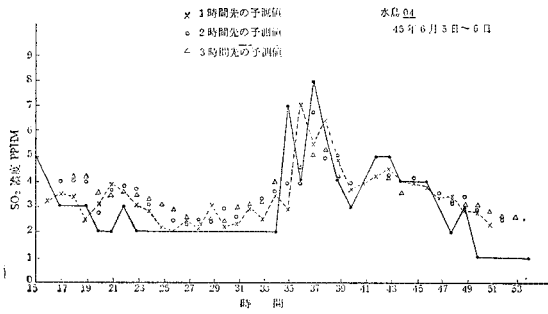


図-18(a) 1地点予測

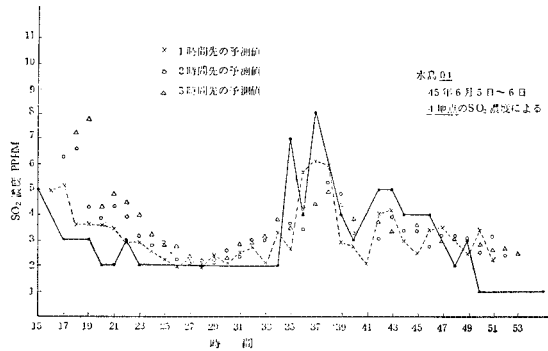


図-18(b) 4地点予測

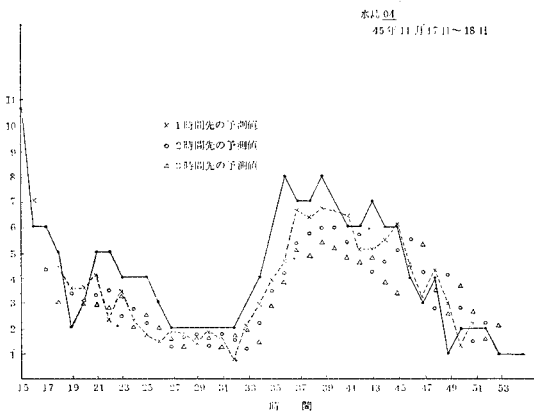


図-19(a) 1地点予測

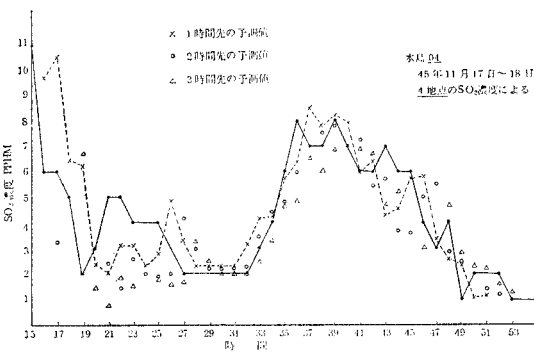


図-19(b) 4地点予測

地点のデータ ( $C_{i,k}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ),  $U_k, D_k$ ) による予測の結果を比較したのが、図-18(a), (b) および図-19(a), (b) である。これらの例では、最も重要な要素である排煙量データが不明で、予測には考慮されていないが、図-18(a), (b) では1点予測・4点予測とも実測との同程度的一致を示している。図-19(a), (b) の場合、1点予測は全体的に実測より遅れぎみであるのに反し、4点予測は実測とかなりよい一致を示している。

4. 結果の評価と今後の課題

本論文の方法による大気汚染予測の誤差を、次の三つの式で評価した。

$$\epsilon_1 = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \{(\hat{x}_i - x_i) / x_i\}^2} \quad (\text{相対誤差})$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (\hat{x}_i - x_i)^2} \quad (\text{絶対誤差})$$

$$\epsilon_3 = \frac{\sum (x_{i-j} - x_i)^2}{\sum (\hat{x}_i - x_i)^2}$$

相対誤差をとる方法は、信頼性の検討のためによく行われるけれども、大気汚染予測の場合には濃度の高い時の予測と実測のずれが問題であるから、むしろ絶対誤差で評価さるべきであろう。 $\epsilon_3$  は  $j$  時間ステップ前と現在  $i$  時間ステップとの状態変化の大小に関して重みも付けた評価である。予測が一番楽でしかもそれほどはずれないやり方は、将来も現在と同じという方法である。 $\epsilon_3$  の式で  $\hat{x}_i = x_{i-j}$  とすれば、 $\epsilon_3 = 1$  である。 $\epsilon_3$  が 1 より小

表-2 予測の相対誤差 ( $\epsilon_1$ )

	生データ	残差データ
1 時間先の予測	0.072	0.058
2 時間先の予測	0.082	0.061
3 時間先の予測	0.095	0.068

表-3 予測の絶対誤差 ( $\epsilon_2$ )

	生データ	残差データ
1 時間先の予測	0.314	0.247
2 時間先の予測	0.284	0.315
3 時間先の予測	0.477	0.396

表-4 予測の絶対誤差 (単点予測と多点予測) (残差による)

	単点予測	4点グループ予測
1 時間先の予測	0.247	0.227
2 時間先の予測	0.315	0.263
3 時間先の予測	0.396	0.685

表-5 予測の効果度 ( $\epsilon_3$ : 残差予測による)

1 時間先の予測	1.35
2 時間先の予測	1.90
3 時間先の予測	2.13

さくなるようでは、下手な予測などしないほうがよいことになる。これらの予測誤差判定式による予測の結果は、表—2~5に示すとおりで、①生データよりも残差分について予測したほうがよいこと、②グルーピングによる予測のほうが単点予測よりも効果的であること（ただし、3時間先の予測では逆になるので、今後の改良が必要）、③将来も現在と同じとするよりも、やはり予測計算をすべきであり、予測時間が先になるほど表—5にみられるように予測の効果が増すことが結論される。

ただし、本報告の実地域への適用例では、排煙データがなく、SO<sub>2</sub>濃度・風速・風向のみで予測を行ったものであり、排煙量データを加えることにより予測精度がさらに向上することが期待される。

また、本論文の方法では汚染濃度測定点以外の汚染予測が直接できない。そこで、2次元 Spline 関数法により、汚染全域の等濃度図を画く方法を開発中である。さらに、全地域の最大濃度点およびその濃度の予測については、濃度測定値より仮想的煙源を推定する virtual index source の考えを提案したい。

最後に、直接的に汚染データを扱うかわりに、汚染データに因子分析を行い、因子負荷行列・因子評点を求め、因子評点に対してカルマン・フィルターリングを行う方法が考えられる。この方法により、多測定点のデータを、行列の次元を増すことなく取扱える可能性がある。

## 5. 結 論

本論文は、大気汚染予測に制御理論におけるカルマン・フィルター理論の適用を試みたものである。ここで、基本となった著者らの考え方は、次のようである。

(1) 大気汚染系はシステムのパラメーターの不確定性が高い（もし、Fick の拡散方程式を採るならば、拡散場の各点での風速成分と拡散係数がこれに当る）。

(2) 精度の高い汚染予測を行うには、時々刻々変化する汚染と気象と排煙量の情報を、ただちにオン・ライン処理により利用する必要がある。しかし、それらの観測点は、Fick の拡散方程式の解を求めるためにはあまりにも少ない。

(3) したがって、大気汚染系を常微分方程式（あるいはその定差化方程式）で記述される単なる集中定数系であると割切って、これに含まれるパラメーターの同定を行う（適当に離れて配置された数個の濃度観測点を一組として取扱う）。

(4) システム方程式の配列を書き替え、これをある仮定の係数変化系の観測方程式と読み替える。これにカルマンの理論を適用して、大気汚染系のシステム・パラメーターの最適推定とシステムの状態（汚染）予測を行う。

(5) 本論文の方法は、予測すべき将来の気象情報は必要としないし、また、排煙データが全く無い場合にも適用が可能である。

こうした考え方に基づき、汚染予測の方法を具体的に論じ、次に実際の大气汚染地域の観測資料によりこの方法の妥当性を検討した。結果は、3.の各図表に示されるように、かなり満足すべきものであった。最後に、4.において、今後の改良発展について論じた。

謝 辞：本研究は、昭和 46 年より始まった財団法人 機械振興協会・新機械システムセンターの APMS (Atmospheric Pollution Monitoring System) プロジェクトの一部として行ったものである。APMS の拡散研究グループ（代表者 坂上治郎 お茶の水大学教授）のメンバーの方々、(財)機械振興協会の方々、通産省・重工業課および公害防止指導課の諸氏によるご討議に深く謝意を表したい。

## 参 考 文 献

- 1) 日野幹雄：大気汚染のモデリング，昭和 47 年度電気学会全国大会シンポジウム予稿，電気学会，pp.10~14，Mar. (1972)
- 2) Hino, M.: Computer experiment on smoke diffusion over a complicated topography, Atmospheric Environment, Vol. 2, pp. 541-558 (1968)
- 3) 大西外史：APMS 報告書，機械振興協会 (1973)
- 4) 船橋・塩谷・春名・坂西：大気汚染予測法，日立評論，Vol. 54, No. 6, Jun. (1972)
- 5) 高松・内藤：大気汚染の計算機制御，計測と制御，8 巻 12 号 (1969)
- 6) 平岡正勝・池田有光：大都市域内の局地大気汚染濃度予測に関する研究，土木学会論文報告集，No. 209, pp.63-71, Jan. (1973)
- 7) 船橋誠寿：多重ボックス・モデルとモデル修正型予測のための予備的考察，日立中央研究所 研究資料，Nov. (1972)
- 8) 藤田威雄：公害監視網データによる大気汚染パターンの解析，「環境汚染制御」文部省科学研究費特定研究 (1) 昭和 47 年度経過報告 p. 244 (1973)
- 9) Hino, M.: Stochastic approach to linear and non-linear runoff analysis, Proc. of Int. Symp. on River Mechanics, Bangkok, Jan. (1973); also included in Tech. Report. No. 12, Dept. of Civil Eng., Tokyo Inst. of Tech., July (1972)
- 10) Kalman, R.E.: A new approach to linear filtering and prediction problems, J. Basic Eng., Trans. ASCE, Ser. D, Vol. 82, pp. 35~45, Mar. (1960)
- 11) Jazwinski, A.H.: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press (1970)
- 12) 相良節夫：同定問題，計測と制御，第 8 巻第 4 号 (1969)
- 13) Hino, M.: On-line prediction of hydrologic system, Proc. IXth IAHR, Istanbul (1973)
- 14) 日野幹雄・森 義一・吉川信二郎・板坂昭光：大気汚染予測モデル（線型モデル）報告書，(財)機械振興協会，新機械システムセンター，2 月 (1973)
- 15) 日野幹雄：カルマンの予測推定理論の平易な誘導について，東京工業大学土木工学科研究報告，No. 15, 12 月 (1973) (1973.8.16・受付)