

伝達マトリックス法によるアーチの面内弾性座屈 および2次の応力問題の解析

IN-PLANE ELASTIC BUCKLING AND SECOND ORDER ELASTIC ANALYSIS OF ARCHES BY TRANSFER MATRIX METHOD

波田 凱 夫*・新家 徹**・頭井 洋***
By Yoshio Namita, Tohru Shinke and Hiroshi Zui

1. 緒 言

本研究は、伝達マトリックス法を用いてアーチの面内弾性座屈および2次の応力問題の汎用解析を行ったものである。本文の手法によれば、任意の境界条件および荷重条件のもとで、任意の断面と任意の軸線形状を有するアーチの面内弾性座屈の解析を容易に行うことができる。また、この手法を用いて、非対称荷重を受けるアーチの2次の応力問題の解析 (Second order elastic analysis) を行うことも可能である。

アーチの面内弾性座屈の問題については、古くから数多くの研究が行われてきており、代表的な荷重条件のもとで解が与えられ (たとえば文献3), 4) 実用設計の資料に供されている。古典的な問題として、放射状等分布荷重を受ける円弧アーチや鉛直等分布荷重をうける放物線アーチ等の座屈問題では、アーチが座屈する直前まで近似的に軸圧縮状態にあるとみなせることから比較的容易に解析的な解が得られているが、近年、座屈前にすでにかなり大きな曲げモーメントおよび変形を生じている、中央単一集中荷重による円弧アーチの座屈問題等も解かれるに至っている⁵⁾。また、Austin は文献4) でこの方面の研究成果をまとめているが、その中で、満載等分布荷重を受けるアーチと中央単一集中荷重を受けるアーチの面内座屈特性を比較し、両者のスパン1/4点における軸圧縮力が、同一断面および同じライズ・スパン比の2ヒンジアーチの場合にはほとんど相等しいことに注目して、他の任意の対称荷重による座屈荷重もスパン1/4点における軸圧縮力の値から推定できると結論しているのは興味深い。

アーチの面内弾性座屈の汎用解析手法としては、従来マトリックス変形法によるものが多く見受けられるよう

である^{6), 7)}。すなわち、骨組構造の弾性座屈に対する変形法による解析をアーチの座屈問題に適用したもので、行列の固有値問題として扱うものである。しかし、それらは座屈前の部材要素には軸方向の変形のみが生じ曲げ変形は生じていないとの仮定に基づくものや、座屈直前の変形が、基準荷重時の変形の荷重比倍であることを仮定したものがほとんどであり、このような仮定に基づく手法をそのまま任意荷重を受けるアーチの面内座屈の解析に適用するにはかなり問題があると考えられる。また、マトリックス変形法を用いる場合、より高次の非線形項を考慮し、上記の仮定を捨てた解析を行うことも可能ではあるが、その場合には当然線形化された行列の固有値問題として扱えなくなりそれだけ数値計算が複雑になる。

伝達マトリックス法を座屈解析に応用したものとしては、はりの横倒れ座屈を論じた文献8) および12) が見られ、また著者の一人は、文献2) で横構で連結された2本アーチの面外弾性座屈の問題を取扱っている。文献13) は薄肉開断面曲線ばりの2次の応力問題を伝達マトリックス法によって論じたもので、その解析手法の展開の面で参考になることが多い。

さて、アーチの面内座屈の解析に伝達マトリックス法を応用すること自体は目新しい発想ではないが、アーチの座屈特性の多様さに注目するとき、その汎用解析を試みるのに伝達マトリックス法は一つの有用な武器になるものと考えられる。著者の一人は、すでに文献1) において曲線材の3次元問題に関する基礎方程式を、部材軸の変形の影響をつり合い方程式の中で考慮したいわゆる2次弾性解析 (Theorie II ordnung, Second order elastic theory) の立場から誘導しているが、本文の解析法はこの基礎方程式を出発点としてアーチの面内座屈問題に伝達マトリックス法の手法を応用したものである。従来ほとんど解かれたことのない部分分布荷重を受けるアーチや、複雑な変断面アーチの座屈荷重も本文の解法によって比較的容易に計算することができる。若

* 正会員 工博 (株)神戸製鋼所 構造研究所 主任研究員
** 正会員 (株)神戸製鋼所 構造研究所 主任研究員
*** 正会員 (株)神戸製鋼所 構造研究所

干の計算例により、アーチの面内座屈特性の一端を論じた。また、本文の解法は、いわゆる「安定問題」のみならず、「応力問題」にも適用することができる。周知のように、アーチ橋などの設計に際しては、非対称の分布荷重に対する安全性を十分に検討しておかねばならない。非対称荷重を受けるアーチの耐荷力を厳密に知るには、たとえば、Harries⁹⁾ や倉西・Lu¹⁰⁾ らが行ったように、変形の影響および材料の非弾性挙動を考慮した解析が必要となるが、実用的には2次の応力問題としての解を耐荷力の概算値とすることも許されると考えられる。すなわち、非対称荷重を受けるアーチを、2次弾性解析理論によって解き、アーチ断面に生ずる最大縁応力度が材料の降伏応力度に等しくなるときの荷重をもってアーチの限界荷重と考える。もちろん、このようにして計算された荷重はアーチの真の耐荷力より小さく、設計上安全側の値を与えることになる。本文の計算例では、非対称分布荷重を受けるアーチについて応力問題としての限界荷重を求めた結果を示し、また、文献9)の計算結果と比較して応力問題としての解が、塑性崩壊荷重のどの程度の近似値になるかを示している。

2. 理論解析

(1) 仮定と記号

理論解析に用いた主な仮定は次のとおりである。

- 1) 材料の応力とひずみは弾性関係にある。
- 2) 断面の図心を連ねた線をもってアーチの軸線を代表させる。
- 3) アーチの軸線は連続な曲線をなす。ただし、軸線を適当な長さの要素に分割するとき、二つの軸線要素の隣接点で接線の傾斜角の不連続があってもさしつかえはない(後出の図-4参照)。
- 4) アーチ軸の伸縮はない。
- 5) 座屈を生ずる前の変形は微小である。
- 6) 適当に分割された軸線要素内では、変形前の曲率 K_0 と曲げ剛性 EJ は一定である。また、この要素に変形前のアーチ軸に関して法線方向および接線方向に作用する荷重 p および q は要素内軸線上で等

分布する(図-1参照)。

- 7) せん断変形の影響を無視する。

図-1 a) に任意の形状をなすアーチ軸線を示す。図において S は軸線に沿う座標、 v および w はそれぞれ軸線上任意点の法線および接線方向の変位成分、 q_n および q_t は変形後の軸線に関してそれぞれ法線および接線方向に作用する分布荷重である。図において、矢印はすべて正方向を示す。図-1 b) は分割された軸線の第 i 要素(曲率半径 R_i の円弧)と、これに作用する荷重を表わす。

(2) 基礎方程式と荷重条件

本文で取扱う問題の基礎方程式は2次の弾性解析理論により次のように与えられる注1)。

$$\left[\frac{1}{K_0} \left\{ EJ \left(\frac{w'}{K_0} \right)'' \right\}' \right]' + \left[\frac{1}{K_0} \{ EJ(K_0 w)' \}' \right]' + K_0 \left\{ EJ \left(\frac{w'}{K_0} \right)'' \right\}' + K_0 \{ EJ(K_0 w)' \}' = - \left(\frac{q_n}{K_0} \right)' - q_t \dots (1)$$

ここに ()' は座標 S に関する微分を表わす。また、 K_0 は軸線の変形前の曲率で次式で与えられる注2)。

$$K_0 = K_0 - v'' + w' K_0 \dots (2)$$

なお、アーチ軸線不伸縮の仮定より軸線の伸びひずみ ϵ を0とおくと、 v と w の間には

$$v = -Rw' \dots (3)$$

の関係がある。ここに R は軸線の変形前の曲率半径で $R=1/K_0$ である。さらに、円弧状の第 i 軸線要素については、そのたわみ角 ψ 、曲げモーメント M 、せん断力 Q および軸力 N はそれぞれ次のように与えられる注3)。

$$\psi = \frac{1}{R} \left(\frac{dv}{d\theta} - w \right) \dots (4.a)$$

$$M = \frac{EJ}{R^2} \left(\frac{dw}{d\theta} - \frac{d^2v}{d\theta^2} \right) \dots (4.b)$$

$$Q = \frac{1}{R} \frac{dM}{d\theta} \dots (4.c)$$

$$N = \frac{1}{R} \frac{d^2M}{d\theta^2} + q_t \left(R - \frac{dw}{d\theta} + \frac{d^2v}{d\theta^2} \right) \dots (4.d)$$

(R, EJ の添字 i を省略)

以下の解析においては、荷重条件として次の2種のもの考える。

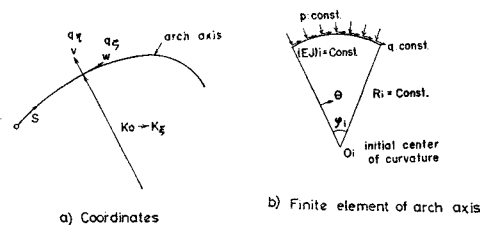


図-1 座標系と荷重

注1) 文献1)の式(31)参照、ただしこの式の右辺には印刷の誤りがある。上記の式(1)が正しい。なおより一般的にはこの式の右辺に $-K_0 m_\xi - (m'_\xi / K_0)'$ がつけ加わる。ただし、 m_ξ は軸線に作用する分布モーメント荷重である。

注2) 文献1)の式(14)参照。

注3) 文献1)の式(11), (22) および(26)参照。

荷重条件 I (図-2 a) : 変形前の軸線上の任意点 A において曲率中心方向の荷重 p と接線方向の荷重 q が作用するものとする。軸線が変形し, A が A' へ移った後には p および q はそれぞれ変形後の軸線の曲率中心および接線方向に作用する。

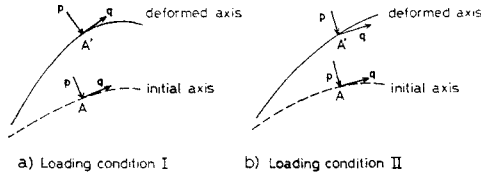


図-2 荷重条件

荷重条件 II (図-2 b) : 変形前の軸線において上と同様に p と q が作用するが, 軸線が変形して, A が A' へ移った後も p および q の作用方向はもとの方向と一致している。

これらの荷重条件に対応して円弧状軸線要素について式(1)の右辺に含まれる荷重 q_n, q_t を計算すると, それぞれ次のように与えられる。

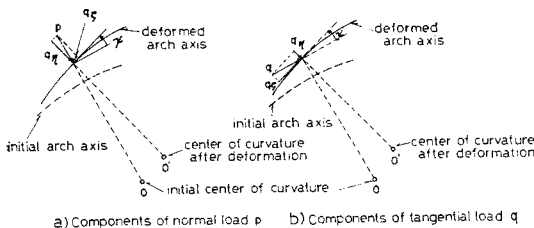


図-3 変形後のアーチ軸線に作用する荷重成分 (荷重条件II)

荷重条件 I : $q_n = -p, q_t = q$ (5)

荷重条件 II : 図-3 a) および b) の状態を重ね合せて次のように得られる。↗

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \theta & \cos \theta & \sin \theta & \cos k\theta & \sin k\theta & -\mu R\theta^2/2k^2 \\ 0 & -1 & \sin \theta & -\cos \theta & k \sin k\theta & -k \cos k\theta & \mu R\theta/k^2 \\ -1/R & -\theta/R & 0 & 0 & -\frac{1}{R}(1-k^2)\cos k\theta & -\frac{1}{R}(1-k^2)\sin k\theta & \mu(1+\theta^2/2)/k^2 \\ 0 & EJ/R^2 & 0 & 0 & -\frac{EJ}{R^2}k(1-k^2)\sin k\theta & \frac{EJ}{R^2}k(1-k^2)\cos k\theta & -\frac{EJ}{R} \frac{\mu\theta}{k^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EJ}{R^3}k^2(1-k^2)\cos k\theta & -\frac{EJ}{R^3}k^2(1-k^2)\sin k\theta & -\frac{EJ}{R^2} \frac{\mu}{k^2} \\ 0 & \frac{EJ}{R^3}\lambda & 0 & 0 & \frac{EJ}{R^3}k(1-k^2)\sin k\theta & -\frac{EJ}{R^3}k(1-k^2)\cos k\theta & -\frac{EJ}{R^2}\lambda(1+\mu\theta/k^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。これより格間伝達マトリックス

$$U_i = B(\varphi) B(0)^{-1} \dots\dots\dots(12)$$

を作ると軸線要素の右端および左端の状態量ベクトル, $Z_i^L = Z(\varphi)$ と $Z_{i-1}^R = Z(0)$ の間の関係が次のように

$$q_n = -p \cos \psi - q \sin \psi \cong -p - q \psi = -p - q(v' - w/R) \dots\dots\dots(6. a)$$

$$q_t = -p \sin \psi + q \cos \psi \cong -p \psi + q = -p(v' - w/R) + q \dots\dots\dots(6. b)$$

式(1)と式(5)あるいは式(6)を用いて, 軸線要素に関する基礎方程式が次のように得られる。

荷重条件 I :

$$\frac{d^6 w}{d\theta^6} + (2+\lambda) \frac{d^4 w}{d\theta^4} + (1+\lambda) \frac{d^2 w}{d\theta^2} = -\mu R \dots\dots\dots(7)$$

荷重条件 II :

$$\frac{d^6 w}{d\theta^6} + (2+\lambda) \frac{d^4 w}{d\theta^4} + \mu \frac{d^3 w}{d\theta^3} + (1+2\lambda) \frac{d^2 w}{d\theta^2} + \mu \frac{dw}{d\theta} + \lambda w = -\mu R \dots\dots\dots(8)$$

ここに, λ, μ は無次元量で

$$\lambda = pR^3/EJ, \mu = qR^3/EJ \dots\dots\dots(9)$$

である。

(3) 基礎方程式の解と伝達マトリックスの誘導

a) 荷重条件 I の場合

式(7)の一般解は,

$$w = C_1 + C_2 \theta + C_3 \cos \theta + C_4 \sin \theta + C_5 \cos k\theta + C_6 \sin k\theta - \mu R \theta^2/2k^2 \dots\dots\dots(10)$$

となる。ここに, $C_1 \sim C_6$ は積分定数でまた $k^2 = 1 + \lambda$ である。式(10)を式(3)および式(4)に代入し, その結果を行列表示すると,

$$Z(\theta) = B(\theta) a \dots\dots\dots(11)$$

となる。ここに,

$$Z(\theta) = \{w, v, \psi, M, Q, N, 1\}^T$$

(T は転置を表わす)

$$a = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, 1\}^T$$

得られる。

$$Z_i^L = U_i Z_{i-1}^R \dots\dots\dots(13)$$

(添字 L と R はそれぞれの節点の左側および右側の量を表わす)

b) 荷重条件IIの場合

この場合は式(8)をそのまま解析的に解くことが困難であるので、式(3)、(4)および式(8)を1階の常微分方程式群に変換し、それらを行列表示した上で、その係数マトリックスをべき級数展開するという手法を用いた(文献5)参照。

変位および断面力に関する連立1階常微分方程式群は

$$\frac{dZ_i}{d\theta} = AZ_i + L_i \dots\dots\dots(14)$$

と書き表わせる。ここに、

$$Z_i = \{w, v, \psi, M, Q, N\}^T$$

$$L_i = \{0, 0, 0, 0, pR, -qR\}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R/EJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & qR & -pR^2/EJ & 0 & 1 \\ 0 & 0 & pR & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

である。式(14)の解は

$$Z_i(\theta) = S_i(\theta)Z(0) + S_i(\theta) \int_0^\theta S_i^{-1}(\sigma)L_i d\sigma \dots\dots\dots(15)$$

で与えられる。ここに、 $S_i(\theta)$ は式(14)の同次方程式の解の係数マトリックスで $S_i(\theta) = e^{A\theta}$ である。また、 $Z(0)$ は要素左端の状態量ベクトルである。ゆえに、式(15)により要素の両端の状態量ベクトルを関係づける格間伝達方程式が次のように得られる。

$$Z_i^L = U_i Z_{i-1}^R \dots\dots\dots(16)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} Z_i^L &= \begin{bmatrix} Z_i(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Z_{i-1}^R = \begin{bmatrix} Z_i(0) \\ 1 \end{bmatrix} \\ U_i &= \begin{bmatrix} S_i & S_i \int_0^\varphi S_i^{-1}(\varphi)L_i d\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ S_i &= e^{A\varphi} = I + A\varphi + \frac{1}{2!}(A\varphi)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(A\varphi)^n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

(I は A と同次の単位行列である)

である。

c) 格点伝達マトリックス

任意の形状をなすアーチ軸線を円弧状の要素群で近似するとき、隣接する2要素の結合点では、一般に図-4のように軸線の接線の傾斜角が不連続になる。このような節点 j では、図のように曲率半径が0、中心角が φ であるような仮想の要素が存在すると考えられる。よって、節点 j の左

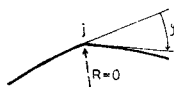


図-4 節点におけるアーチ軸線の不連続角

側と右側の状態量ベクトル Z_j^L と Z_j^R を関係づける格点伝達マトリックス P_j を求めるには、式(12)で与えられる格間伝達マトリックスにおいて $R=0$ とおけばよい。すなわち、

$$Z_j^R = P_j Z_j^L \dots\dots\dots(18)$$

であり、ここに、

$$P_j = (B(\varphi)B(0)^{-1})_{R=0} \dots\dots\dots(19)$$

である。なお、この格点伝達マトリックスは荷重条件IおよびIIの場合につき共通のものであることはいうまでもない。

(4) 境界条件と状態量ベクトルの解

各要素の格間および格点伝達マトリックスを用いて、アーチの左端および右端の状態量ベクトル Z_0^R と Z_n^L の関係が次のように表わされる。

$$Z_n^L = TZ_0^R \dots\dots\dots(20)$$

ここに、

$$T = U_n P_{n-1} U_{n-1} \dots U_i P_{i-1} U_{i-1} \dots P_1 U_1 \dots\dots(21)$$

である。 T は7行7列のマトリックスで、第7列目は荷重項に対応する要素であり、またその他の要素にも荷重の影響をあらわす無次元量 λ あるいは μ を含んでいる。

式(20)にアーチの両端の境界条件を代入すれば、通常の伝達マトリックス法の手法によりすべての節点における状態量ベクトルが決定される。ここでは一例として、2ヒンジアーチの場合について考える。境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \text{左端で } w_0 = v_0 = M_0 = 0 \\ \text{右端で } w_n = v_n = M_n = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

式(22)を式(20)に代入すると左端の未知量 ψ_0, Q_0, N_0 を決定するための連立方程式

$$BX = Y \dots\dots\dots(23)$$

が得られる。ここに、

$$X = \{\psi_0, Q_0, N_0\}^T$$

$$Y = -\{t_{17}, t_{27}, t_{47}\}^T$$

$$B = \begin{bmatrix} t_{13} & t_{15} & t_{16} \\ t_{23} & t_{25} & t_{26} \\ t_{43} & t_{45} & t_{46} \end{bmatrix}$$

であり、また t_{ij} は式(21)のマトリックス T の i 行 j 列の要素である。式(23)によって X が一義的に計算され、したがって、左端の状態量ベクトル Z_0^R が決定される。以下、任意の節点における状態量ベクトルは、

$$Z_i^R = P_i U_i Z_{i-1}^R \dots\dots\dots(24)$$

で与えられる。

式(23)および式(24)は、2次弾性解析による応力問題(Second order elastic theory)の解を与えるもので、つり合い条件式に変形の影響を考慮した、いわゆるアーチの変形理論に相当するものである。

なお、境界条件としては種々のものが考えられる(固定支点, 弾性固定支点, 支点沈下等)が, いずれも同様にして解くことができる。また, 両端支点の条件以外に, 中間の格点で種々の条件(たとえば, 3ヒンジアーチの中間ヒンジ, 連続アーチの中間支点等)が課せられるときも, 通常の伝達マトリックス法の手法を適用して解を得ることができる(たとえば, 文献11)参照)。

(5) 座屈条件式

式(20)において荷重項に対応する要素を除き, 境界条件を用いることによって座屈条件式が得られる。2ヒンジアーチの場合を例にとると, 未知量 $X = \{\psi_0, Q_0, N_0\}^T$ を決定する方程式は, 式(23)の同次式

$$BX = 0 \dots\dots\dots(25)$$

となる。これより座屈条件式は

$$\det.|B| = 0 \dots\dots\dots(26)$$

となり, これを満足する正の最小荷重が座屈荷重となる。式(26)から座屈荷重を決定するには, 適当な試行錯誤の方法をとればよい。また座屈モードは, 式(25)より決定される左端の状態量ベクトルを式(24)により右方へ伝達していくことにより得ることができる。なお, 実際に数値計算を行うにあたっては, 解に一般性をもたせるため, 任意の一要素の曲率半径および曲げ剛性を基準値 R_0 と $(EJ)_0$ ととり, 変位および断面力を次のように無次元化した。

$$\left. \begin{aligned} w^* &= \frac{w}{R_0}, & v^* &= \frac{v}{R_0}, & \psi^* &= \psi \\ M^* &= \frac{R_0 M}{(EJ)_0}, & Q^* &= \frac{R_0^2 Q}{(EJ)_0}, & N^* &= \frac{R_0^2 N}{(EJ)_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

このように無次元化することによってマトリックス内の数値要素の大きさをそろえ, 数値計算途中のけた落ちによる計算精度の低下を防ぐことができる。

(6) 2次の応力問題の解法

2次弾性解析理論に基づく前節までの手法を応用して, いわゆる応力問題としてアーチの耐荷挙動を概略推定することができる。すなわち, アーチ部材に生じる最大縁応度を計算し, それが材料の降伏応度に達するときの荷重をもって限界荷重とし, そのときのアーチの軸力を断面積で除した値 $\sigma_{cr} = N/A$ を限界応力と呼ぶ。式(23), (24)によりすべての節点における軸力 N と曲げモーメント M が決定されたならば断面の縁応度は,

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \sigma_0 \left(1 + a \frac{r}{k} \frac{M^*}{N^*} \right) \dots\dots\dots(29)$$

で与えられる。ここに,

$$\sigma_0 = N/A = (EJ)_0 N^* / (R_0^2 A) = EN^* / a^2 \dots(30)$$

- A = アーチ部材の断面積
- W = アーチ部材の断面係数
- $k = W/A$ = アーチ部材の核半径
- $r = \sqrt{J_0/A}$ = アーチ部材断面の回転半径
- $a = \sqrt{AR_0^2/J_0}$ = アーチの細長比

である。

荷重の漸増に対して式(29)で与えられる最大縁応度 σ を追跡し, σ が材料の降伏応度 σ_F と等しくなるときの荷重を求め, このときの平均応力 σ_0 を計算すれば, これが限界応力 σ_{cr} となる。

3. 数値計算例

(1) 解の精度の照査

a) 放射状等分布荷重を受ける2ヒンジ円弧アーチの座屈

最も簡単な応用例として, 放射状等分布荷重を受ける一定断面の2ヒンジ円弧アーチをとりあげる。アーチ軸の伸縮がないと仮定すると, アーチは軸圧縮状態にあり座屈前では曲げモーメントは生じない。座屈後も荷重 p の作用方向とアーチ軸は直交する(荷重条件I)と仮定すると, 座屈荷重の理論解は, $p_{cr} = EJ(\pi^2/\varphi^2 - 1)/R^3$ で与えられる。また, 座屈の前後で荷重の作用方向は変化しない(荷重条件II)とした場合については, Bürgermeisterにより解析的に解が与えられている¹⁵⁾。これらの理論解を示したものが, 図-5の実線および点線である。これら二つの荷重条件について, 伝達マトリックス法によって求めた計算値を同じく図-5にそれぞれ○および●印で示した。計算においては軸線の分割数を10とした。図よりわかるように, 伝達マトリックス法によ

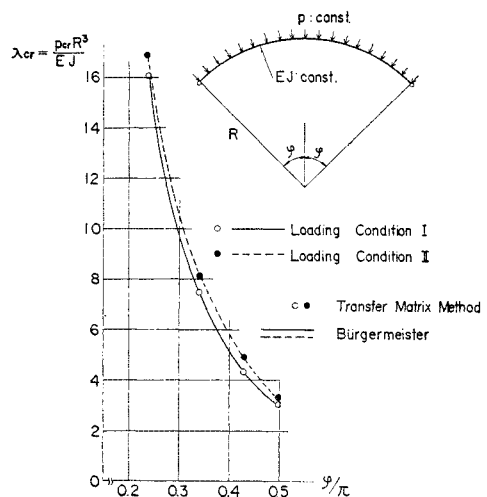


図-5 2ヒンジ円弧アーチの座屈係数

って求めた計算値は解析的に得られた値と完全に一致している。

b) 鉛直等分布荷重をうける放物線アーチ(一定断面)
鉛直等分布荷重が満載された放物線アーチの座屈問題は、断面が一定の場合につき Stüssi, Lockschin らによって解析的に解かれている³⁾。これらの解は、いずれも荷重条件 I を用いている。荷重条件 I, 荷重条件 II のそれぞれの場合について伝達マトリックス法によって求めた解を Transfer-I, Transfer-II として表-1 および図-6 に示した。この計算では軸線の分割数を 20 としている。これらの計算結果は、すべて限界水平反力 H_{cr} に関する座屈係数 $\alpha_{cr} = H_{cr} l^2 / EJ$ によって示されている。なお座屈荷重 p_{cr} に関する座屈係数 $\lambda_{cr} (= p_{cr} l^3 / EJ)$ と α_{cr} との間には $\alpha_{cr} = (l/8 f) \lambda_{cr}$ の関係がある。

表-1 等分布荷重をうける一定断面放物線アーチの座屈係数 $\alpha_{cr} = H_{cr} l^2 / EJ$

a) 2-HINGED ARCH

f/l	0.1	0.2	0.3	0.4
Stüssi	36.0	28.0	20.0	13.5
Lockschin	35.6	28.4	19.4	13.7
Transfer-I	36.1	28.1	19.8	13.3
Transfer-II	36.4	28.8	20.6	14.1

b) FIXED ARCH

f/l	0.1	0.2	0.3	0.4
Stüssi	76.0	63.0	48.0	35.0
Transfer-I	75.8	63.4	48.7	35.5
Transfer-II	76.6	64.5	50.0	36.8

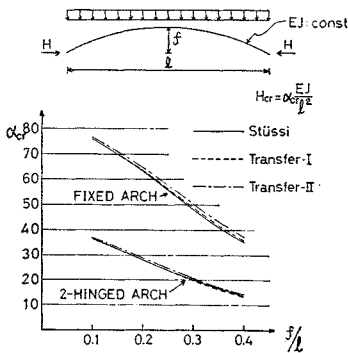


図-6 等分布荷重を受ける放物線アーチ(一定断面)の座屈係数

Transfer-I の計算値と Stüssi の解とは良く一致している(いずれも荷重条件 I)。また、Transfer-I および Transfer-II の計算値を比較して荷重条件が座屈荷重に及ぼす影響を調べてみると、いずれの場合も荷重条件 II, すなわち座屈後も荷重の作用方向は変化しないとした場合のほうが、座屈係数は 1~6% 大きくなっている。また、両者の差は、ライズ・スパン比 f/l が大になるにつれて大きくなる。しかし、実際に構造物として使われ

ることの多いライズ・スパン比 0.1~0.2 の間では、その差はわずかであり、かつ設計上安全側の解を与えるので、実用的には荷重条件 I の解を用いてさしつかえないと思われる。したがって、以下の計算例では、すべて荷重条件 I のみを対象とした。

c) 鉛直等分布荷重を受ける変断面放物線アーチ

Hilman および Dischinger³⁾ は、断面 2 次モーメントが $J = J_c / \cos \varphi$ (表-2 の付図参照) のように変化する放物線アーチに鉛直等分布荷重が作用するときの座屈問題を解いている。これらの解析値および伝達マトリックス法により求めた計算値を表-2 に示す。この計算では、変断面アーチであることから分割数を 50~100 と多くした。この場合も伝達マトリックス法による計算値は、解析的な解と良く一致しているといえる。

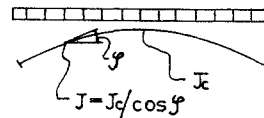
表-2 等分布荷重をうける変断面放物線アーチの座屈係数 $\alpha_{cr} = H_{cr} l^2 / EJ$

a) 2-HINGED ARCH

f/l	0.1	0.2	0.3	0.4
Dischinger	37.2	31.6	25.1	19.4
Hilman				
Transfer-I	36.9	30.8	24.0	18.3

b) FIXED ARCH

f/l	0.1	0.2	0.3	0.4
Dischinger	78.4	70.8	61.1	51.1
Hilman	78.2	71.0	61.3	51.1
Transfer-I	77.7	69.6	59.1	48.6



(2) 変断面 2 ヒンジ放物線アーチの座屈 (Deutsch の実験との対比)

Deutsch は、図-7 に示すような 2 種の 2 ヒンジ放物線アーチ、すなわち、断面 2 次モーメントが直線的に変化し、それぞれスパン中央およびスパン 1/4 点で最大値をとるようなものについて実験を行い³⁾、その結果を整理して限界水平反力を $H_{cr} = r \alpha_{cr} EJ_s / l^2$ で与えている。ここに EJ_s はアーチクラウンの曲げ剛性、 α_{cr} は一定断面アーチの座屈係数で表-1 に示された値である。 r は断面変化に関する係数で、曲げ剛性が全径間を通じて一定の場合は $r=1$ となる。Deutsch は、実験結果の考察から、 r の値は両端の境界条件あるいはライズ・スパン比にはそれほど影響されず、断面変化率 n のみに支配されるとしている。図-7 に Deutsch が求めた r の値を実線で示す。ライズ・スパン比 f/l が 1/10 および 1/3 の場合につき本文の手法で求めた結果を図-7 にそれぞれ一点鎖線および点線を示す。図-7 より、 f/l が 1/10 および 1/3 の場合ともに Deutsch の実験結果と良く一

致しており、特に断面変化率がそれほど大きくない $n=0.6\sim 2.0$ の間では、実験値と計算値の差はほとんどないことがわかる。

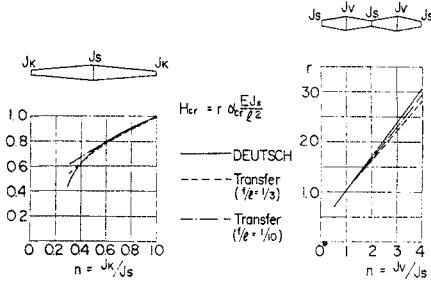
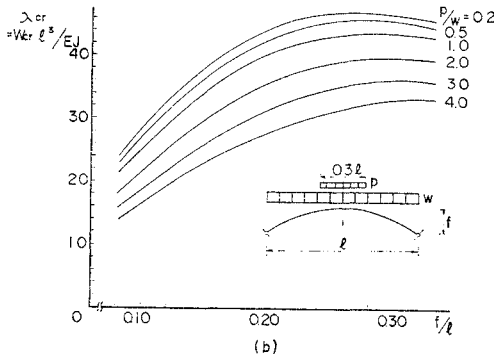
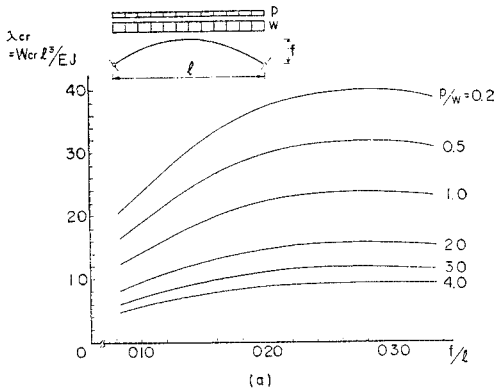


図-7 変断面2ヒンジ放物線アーチの断面変化に関する係数

前節および本節の計算例から明らかなように、本文の計算法による解は実用上十分の精度を有し、また、特に本節で示されたような、従来解析的には解が得られていなかった問題についても、明確な解を与えるものである。これらによって本文の計算手法の汎用性がかなり明らかにされたものと思われる。

(3) 部分分布荷重による2ヒンジ放物線アーチの座屈

ここでは、本文の計算方法の汎用性を示す意味と、ア



ーチの面内座屈特性を知るための一つの資料を提供する意味から、種々の部分分布荷重をうける2ヒンジ放物線アーチの座屈荷重の計算値を示した。図-8に種々の載荷形式に対する座屈係数を示す。ここで、 w は死荷重に相当する全径間等分布荷重、 p は活荷重に相当する部分分布荷重である。 p の載荷長および載荷位置を種々に変化させて、座屈係数に及ぼす影響を調べてみた。断面

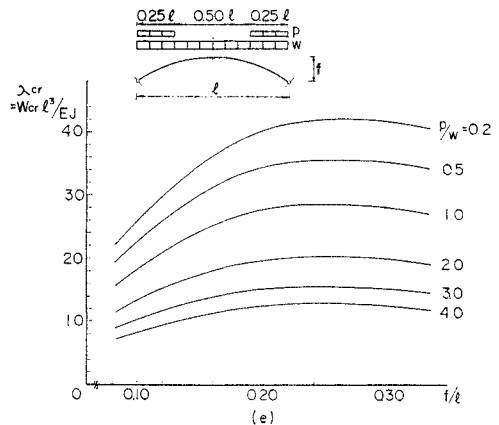
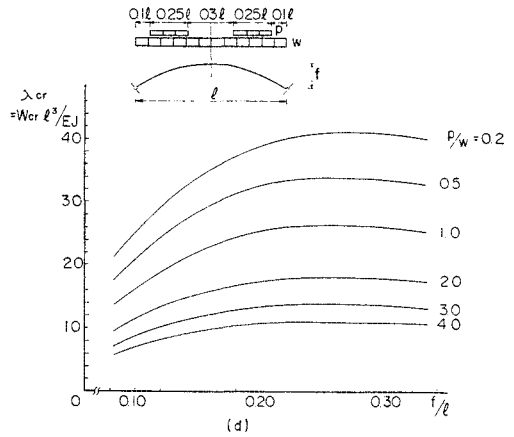
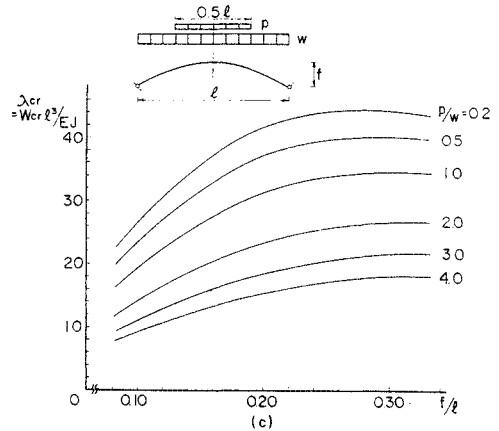


図-8 部分分布荷重をうける2ヒンジ放物線アーチの座屈係数

はすべて一定としている。なお、図において座屈係数はすべて死荷重 w に対する値として表わされ、 $\lambda_{cr} = w_{cr} l^2 / EJ$ である。これら対称荷重を受けるアーチの座屈モードは、すべて法線方向変位 v について逆対称型である。座屈係数 λ_{cr} は、当然予想されることではあるが、荷重形式 (a)、すなわち活荷重全載のときに、 f/l あるいは p/w に関係なく最小となる。

活荷重の荷重長を一定とすると、荷重位置の相違によって座屈係数がどのように変化するかを、荷重長がスパンの半分である荷重形式 (c)、(d) および (e) により調べてみると (d) の場合に λ_{cr} が最も小さくなることがわかる。このことから、活荷重の荷重長がスパン全長よりも小さい場合、スパンの 1/4 点付近に活荷重が部分分布すると、最も座屈を生じやすいと推論できよう。また (d) の座屈係数は、活荷重全載の場合の座屈係数よりわずかに大きいだけであり、特に $p/w=0.2$ のときは、わずか 3~4% 上まわっているにすぎない。このことから、長大スパンのアーチでは活荷重が満載する可能性は少なくなり、部分荷重状態では座屈値は安全側になるだろう、という推論が危険であるといえよう。

活荷重の荷重長がスパン全長の 1/3 である荷重形式 (b) の場合には、他の荷重形式に比べ最も大きい座屈係数が得られており、また、 p/w の値が大きくなっても、座屈係数は他の荷重形式の場合ほど減少していない。しかし、このように荷重長が小さくなり、また、 p/w が大きくなるほど、すなわち、集中荷重に近づくほど座屈直前の変形は大きくなり、本文の計算法の前提となっている「座屈直前の変形は微小である」との仮定を満足しなくなるものと考えられる。より正確には、この仮定を捨てた解析を行わねばならないが、この点に関する詳細な検討は本文の所論の範囲外であるので、他の機会にゆずりたい。また、実際に集中荷重に近い荷重状態にあるアーチの座屈計算を行う場合、次の点に十分留意しないと、アーチの座屈耐荷力を過大評価するおそれがある。すなわち、このような場合には座屈直前の変形が大きく、また部材断面の曲げモーメントもかなり大きくなるから、実際の材料では縁応力度がかなり早期に降伏点に達することも予想される。したがって、2次弾性解析理論に基づく座屈係数の計算のみで座屈耐荷力を判断することは危険であり、荷重漸増に伴う応力および変形を逐次追跡し、非弾性挙動を考慮した解析を行う必要がある。この問題についても機会をあらためて論ずるつもりである。

(4) 非対称荷重を受ける放物線アーチの応力問題

前節までに扱った問題では、アーチの座屈荷重は、いわゆる弾性安定の分岐点として得られるものである。実

際にアーチを設計する場合には、このような対称荷重による分岐座屈の検討をすると同時に、図-9 に示したような非対称荷重に対する

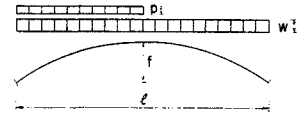


図-9 非対称分布荷重を受けるアーチ

安全性を検討することが必要である。図において w は全径間にわたり一様に分布した死荷重、 p は半径間に分布する活荷重である。このような問題では弾性安定の分岐点となる座屈荷重は存在せず、外力に応じて変形と応力が一意的に定まるから、いわゆる応力問題としての取扱いによって外力の漸増に対応する変形と応力を追跡して構造の安全性を検討せねばならない。

2次の弾性解析理論による応力問題の解法は2.(6)に述べたとおりであるが、その出発点となる基礎方程式(1)は、変形の影響をつり合い方程式の中では考慮しているが、変形の幾何学量(曲率、たわみ角等)については、微小変位を仮定して得られたものである。したがって、応力や変形の追跡を行うのに、このような仮定がどの程度まで妥当なものであるかをあらかじめ知っておく必要がある。このため、別途マトリクス変形法による大変形解析を行い、その結果を本文の手法によるものと比較した。この大変形解析は、反復法と荷重漸増法とを併用した混合法を用いており、極度の大変形をする場合(たとえば、柱の座屈後の大変形 *elastica* の問題)でも十分信頼できる解を与える厳密なものである¹⁴⁾。図-10は計算の一例で、2ヒンジ放物線アーチ ($f/l=0.126$) について、 p/w を 0.2 および 1.0 として計算したものである。縦軸に死荷重 w に関する無次元量 $\lambda = w l^2 / EJ$ 、横軸に無次元化した軸力 $N^* = l^2 N / EJ$ および曲げモーメント $M^* = l M / EJ$ (ともに曲げモーメントが最大とな

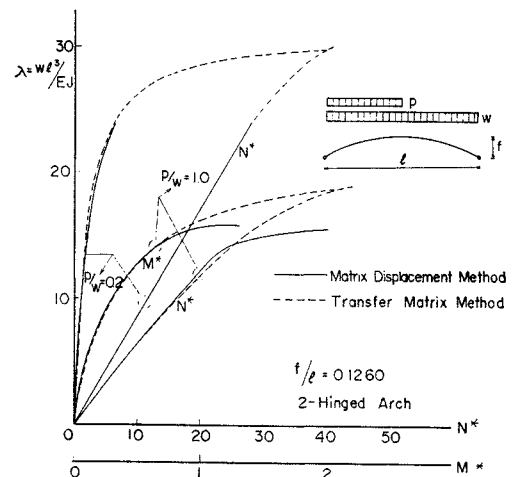


図-10 伝達マトリクス法およびマトリクス変形法による断面力の比較

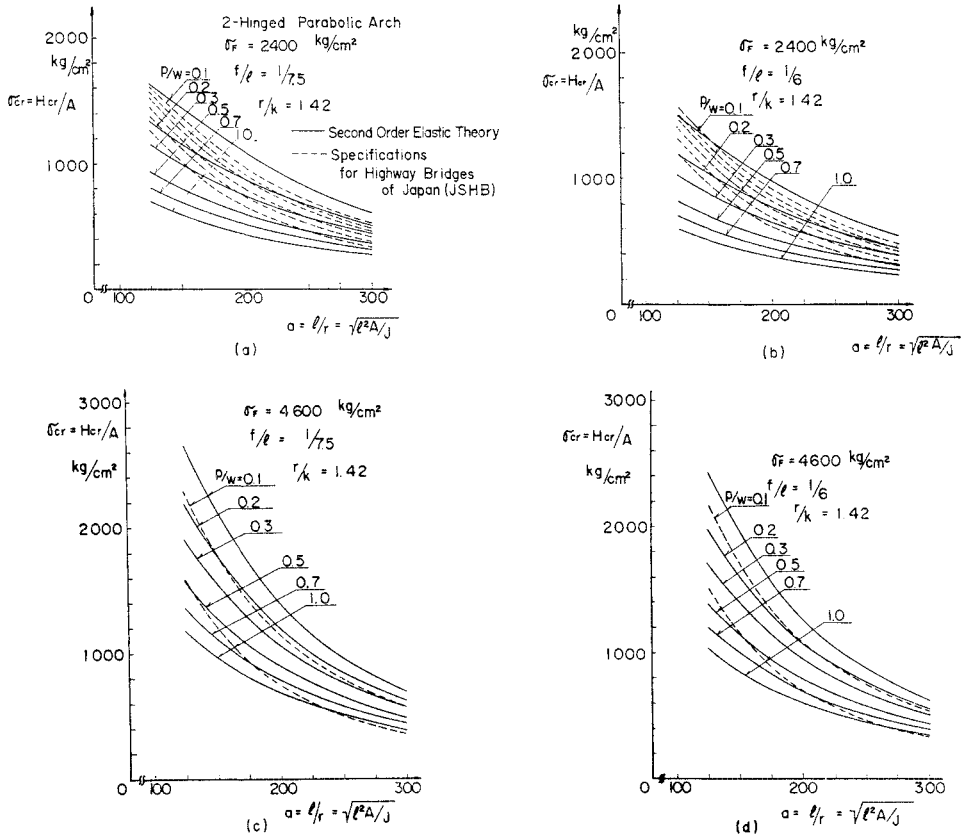


図-11 限界応力と細長比の関係

るスパン1/4点での断面力)をとった。実在のアーチでは M^* が 0.5 にもなると、曲げモーメントのみによる応力度でもかなり大きいものとなり、ほとんどの場合縁応力度は降伏点に達していると考えられる。したがって、本文で対称としている弾性解析では $M^* < 0.5$ としてよく、この範囲では本文の手法によって計算した断面力は、マトリックス変形法による厳密解と良く一致している。したがって、本解析法により応力問題としての取扱いを行っても実用上十分妥当な結果が得られるものと考えられる。

図-11 a)~d) および図-12 a), b) に応力問題の計算例を示す。計算に用いたパラメータは次のとおりである。

σ_F (材料の降伏点応力度): 2400 kg/cm², 4600 kg/cm²

f/l (ライズ・スパン比): 1/6, 1/7.5

p/w (死・活荷重比): 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0

$a=l/r$ (アーチの細長比): 125, 150, 175, 200, 225, 250, 275, 300

アーチは、2ヒンジ放物線アーチとし断面は一定とした。

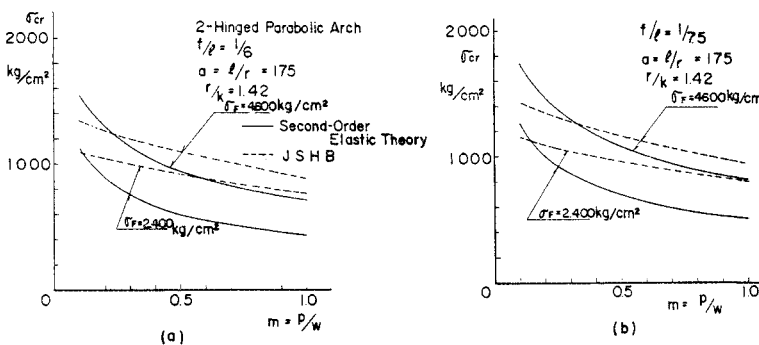


図-12 限界応力と荷重比の関係

また、アーチ部材の断面を円管とすると、たいていのアーチでは、 $l/D=50\sim 100$, $D/t=100\sim 150$ の範囲 (D は管径, t は管厚) となるので、断面の回転半径 $r=\sqrt{J/A}$ と核半径 $k=W/A$ の比 r/k は、1.41~1.43 となる。したがって、図-11, 図-12 の計算例ではすべて $r/k=1.42$ と仮定した。計算の手順は以下のとおりである。

p/w を一定に保ち、無次元化された死荷重 $\lambda(=w l^3/EJ)$ を漸増させ、2.(6) に述べた方法により最大縁応力度を追跡して、これが降伏点応力度に達するときの λ を限界荷重 $\lambda_{cr}(=w_{cr} l^3/EJ)$ とする。ここで現行の道路橋示方書におけるアーチの座屈規定と対比するため、この限界荷重のときの水平反力 H_{cr} を、

$$H_{cr} = \lambda_{cr} (1 + 0.5 p/w) EJ / (8 fl) \dots\dots\dots(31)$$

によって計算する。式 (31) は通常の微小変位理論による荷重と水平反力の関係式である。この H_{cr} を平均断面面積 A で除した値

$$\sigma_{cr} = H_{cr} / A = E \lambda_{cr} (1 + 0.5 p/w) / (8 a^2 \cdot fl) \dots\dots\dots(32)$$

を限界応力とした。図-11 および 図-12 の実線はこのようにして得られた σ_{cr} の値を示す。

一方、道路橋示方書では、図-9 の載荷状態について次式により面内座屈に対する照査を行うよう定めている。

$$H/A < \sigma_{ca}$$

ここに、

H : アーチの水平反力 (t)

A : アーチ部材の平均断面面積

σ_{ca} : スパン 1/4 点の鋼種に対して示方書 2.2.1 の規定 (軸方向圧縮力を受ける直線部材に対する規定) に従って求めた許容軸方向圧縮応力度である。ただし、 σ_{ca} を計算する場合、回転半径は $r = \sqrt{J/A}$ 、また有効座屈長は $L = \beta_y S / \sqrt{1 - 0.5 \sqrt{p/w}}$ により求められる (S はアーチ軸線長の半分で、 β_y は示方書の表 11.4.2 により与えられる)。この規定は、アーチの面内座屈問題を直線圧縮材の曲げ座屈問題におきかえて限界応力の許容値を定めたものであるが、そこに含まれる安全率は、降伏点応力度に対して 1.7 である。したがって、以上のようにして求めた σ_{ca} に安全率 1.7 を乗じた値がさきに式 (32) で計算した σ_{cr} と対比されるべき限界応力度である。この値を図-11 および 図-12 に破線で示した。なお、図-11 は横軸にアーチの細長比をとっているの、いわゆる Secant Formula による偏心圧縮柱の座屈曲線と類似の表示とみることができる。また、図-12 は限界応力度と荷重比 p/w の関係を示すが、実在の 2 ヒンジアーチでは細長比 a がほぼ 175~200 の間にあるので、ここでは $a=175$ としている。図-11, 12 より、示方書におけるアーチの座屈規定に基づいて計算した限界応力は、 $p/w < 0.2$ の場合のみ、本文の計算法による 2 次の応力問題の解より小さくなるが、 $p/w > 0.2$ においては p/w が大きくなるにつれ前者は後者を大きく上まわるように

なる。すなわち、これらの図のみから判断すれば、 $p/w > 0.2$ においては示方書におけるアーチの座屈規定のみによって設計すると、降伏点応力度に対する最大縁応力度の安全率が、所要の値 (1.7) を下回る可能性が大きくなることになる。その傾向は、 l/r が小さいほど顕著になっていることが図-11 よりわかる。しかし、示方書の規定は、安全性の照査についてこのような座屈照査だけでなく応力度照査も併用した二段構えの規定になっていて、上記の問題、特に l/r の小さな領域での問題は応力度照査によって補えるものと考えられる。これに対し本文の手法によれば、 l/r の値のいかにかわからず降伏点応力度に対する最大縁応力度の安全率が常に所要の値を確保していることになる。

アーチ部材に生じる最大縁応力度が降伏点応力度に達した後は、アーチはいわゆる塑性域の残余耐荷力を発揮するから、アーチの崩壊につながるという意味での限界応力は、応力問題の解としての限界応力よりも大きくなるのは明らかである。Harries⁹⁾ は、長方形断面および円管断面を有する 2 ヒンジアーチに対し、塑性域の広がりやを考慮した耐荷力の解析を行っている。図-13 は、本文の計算法による応力問題の解が、このような非弾性解析による耐荷力のどの程度の近似値になるかを検討するための一つの資料を与えるものである。図の縦軸は、著者による応力問題の解 (σ_{cr}^S) と Harries による耐荷力問題の解 (σ_{cr}^H) の比を表わし、横軸は活荷重と死荷重の強度比 m を表わす。

図より明らかなように、 $\sigma_{cr}^S / \sigma_{cr}^H$ の値は、荷重比 m および ライズ・スパン比 f/l が小さいほど 1 に近くなる。一般にスパンが大となるほど、 m は小さくなり、 $l=200\sim300$ m のアーチでは、 m の値は 0.1~0.2 の間にあるようであるが、このとき $\sigma_{cr}^S / \sigma_{cr}^H$ の値は、図-13 (b) のパイプ断面で 0.9 以上になる。したがって、このようなアーチでは、2 次の応力問題の解をもって耐荷力の良好な近似値とすることができると考えられる。もちろんこの傾向は、断面の形状係数 (全塑性モーメン

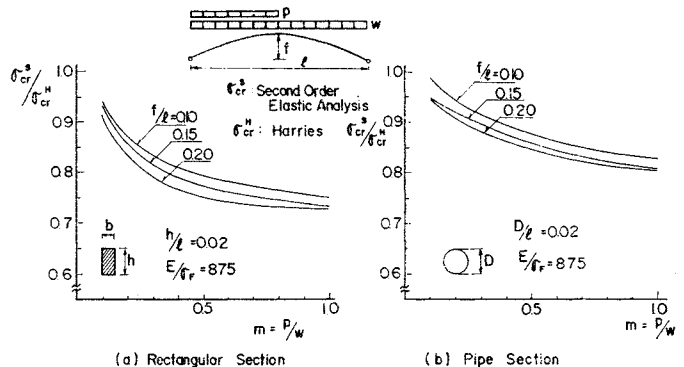


図-13 応力問題の解と非弾性解析による耐荷力 (Harries) の比較

トと降伏モーメントの比)が1に近いほど、また、アーチに作用する曲げが小さいほど顕著になる。

4. 結 語

本研究においては、伝達マトリックス法によりアーチの面内弾性座屈問題および2次の応力問題の汎用解析を行い、種々の対称荷重による座屈荷重および活荷重半載時の限界応力に関する若干の資料を示した。解析に際しては、アーチ軸線の不伸縮および座屈直前の変形は微小であるとの仮定を用いているが、これらの仮定を捨てた解析も文献 1) に与えられている基礎式を本文の解析手法に適用して論ずることができる。また対称荷重を受けるアーチの非弾性分岐座屈の問題や、非弾性挙動を考慮した耐荷力の算定等が今後の問題として残されているが、本研究で用いた解析手法をこのような問題に適用できるよう発展させることも可能であると考えられる。これらについては、また機会をあらためて報告したい。

数値計算は、(株)神戸製鋼所情報センターの IBM S/370-155 I によった。

参 考 文 献

- 1) Namita, Y.: Die Theorie II. Ordnung von Krümmen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers, Proc. of JSCE, No. 155, pp. 32-41, 1968
- 2) Sakimoto, T. and Y. Namita: Out-of-plane buckling of solid rib arches braced with transverse bars, Proc. of JSCE, No. 191, pp. 109-116, 1971
- 3) Handbook of Structural Stability, edited by Column Research Committee of Japan, Corona Publishing Co., Tokyo, pp. 2-72~2-124, 1971
- 4) Austin, W.J.: In-plane bending and buckling of arches, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. ST 5, pp. 1575-1592, 1971
- 5) DaDeppo, D.A. and R. Schmidt: Sidesway buckling of deep circular arches under a concentrated load, Jour. of Appl. Mech., pp. 325-327, June, 1969
- 6) 堀井健一郎・斎藤 進 他: 骨組構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, No. 191, pp. 15-30, 1971-7
- 7) 山田嘉昭編: マトリックス法の 応用, 東京大学出版会, pp. 181-206, 1972
- 8) Unger, B.: Elastisches Kippen von beliebig gelagerten und aufgehängten Durchlaufträgern mit einfach-symmetrischem, in Trägerachse veränderlichem Querschnitt unter Verwendung einer Abwanclung des Rekluktionsverfahrens als Lösungsmethode, Der Stahlbau H. 5, 1970
- 9) Harries, H.: Traglasten stählerner Zweigelenkbögen mit ausgebreiteten Fliesszonen, Der Stahlbau H. 6 S. 170-177 und H. 8 S. 248-252, 1970
- 10) Kuranishi, S. and Le-Wu Lu: Load carrying capacity of two hinged steel arches, Proc. of JSCE, No. 204, pp. 129-140, 1972
- 11) Pestel and Leckie: Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, 1963
- 12) 吉田 博・井木芳宏: 拘束をうける はりの弾性および非弾性横倒れ座屈解析, 土木学会論文報告集, No. 208, pp. 1-12, 1972-12
- 13) 遠田良喜: 伝達マトリックス法による 薄肉開断面曲線ばりの2次の応力問題の解析, 土木学会論文報告集, No. 210, pp. 1-11, 1973-2
- 14) 新家 徹・頭井 洋他: 長大橋の 架設中の変形, 土木学会年次学術講演会概要集, 1972-10
- 15) Bürgermeister: Stabilitätstheorie Bd II, Akademie Berlin, 1963

(1973.6.25・受付)