

一般的に支持された柱の弾塑性二軸曲げ

COMPOTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE DES POUTRES-COLONNES SOUIMISES À LA FLEXION BIAXIALE ET PRÉSENTANT DES CONDITIONS AUX EXTRÉMITÉS QUELCONQUES

青島 泰之*・S. ヴィナコタ**・J.-C. バドゥー***
par Yasuyuki Aoshima, Sriramulu Vinnakota et J.-Claude Badoux

1. 序 論

二軸曲げと軸力を受ける薄肉開断面から成る柱は、トラスの圧縮材、ラーメンの柱等に見られる。トラスの圧縮材は、偏心圧縮荷重を受ける両端ヒンジの柱と見ることができ、これらについては近年多くの報告^{1)~13)}が成されている。これらの二軸曲げの論文で共通していえるのは柱を両端ヒンジに仮定し、両端で等偏心もしくは少し大ききの違う偏心に軸力をかけていき最終耐力を計算していることである。しかしながら、ラーメンの一部材としての柱では両端に連結されるはりの影響が大きく、はりの剛性を考慮に入れない柱だけの両端ヒンジの解析は意味を持たない。Fig. 1 のカーブ M_c は両端ヒンジの柱の耐力カーブ、カーブ M_b ははりの負担する耐力カーブ、点線で示されたカーブは M_c と M_b の和で柱とはりの複合体としての耐力カーブを示す。両端で他の部材と剛に連結されているような構造物(ラーメン)では Fig. 1 の点線に示される耐力を求めることの方が重要である。この種の問題では文献 14), 15) が、実験と理

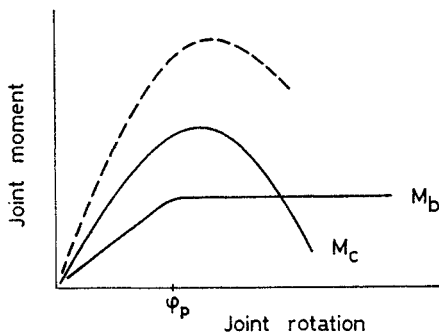


Fig. 1 構造物の耐力カーブ

論計算を行っている。また荷重条件や組立上の偏心量によっては非対称あるいはそれに近い曲げモーメントを受ける場合が少なくない。にもかかわらず、非対称荷重を扱った二軸曲げの研究は非常に少ない。非対称問題のむずかしさは、柱の端に塑性ヒンジができて崩壊することがあり、二軸曲げの場合扱いが面倒になることと、荷重増加の途中で変形のモードが変わることがあることである。本レポートでは従来の二軸曲げの研究の前提条件であった両端ヒンジと等偏心にこだわることなく、より一般的な問題を扱っている。

二軸曲げを受ける柱は、一般に細長比が大きくなりねじり変形の影響は小さい。したがって、ねじりを無視した解析とねじりを考慮した解析では最終耐力に大きな差はない。しかしながら、強軸まわりに曲げを受けている柱の横だおれ座屈などでは、ねじり変形は微小であるが座屈に対しては無視できる量でなく注意を要する。本レポートではこのねじり変形の影響に注意しながら、Vlasov¹⁶⁾, Timoshenko¹⁷⁾, Galambos¹⁸⁾ らによって導かれた基礎方程式に検討を加えてみた。

本レポートで対象とする柱は Fig. 2 に示されている柱で、

- (1) 薄肉開断面から成る。
- (2) 断面は長さ方向に一様で、まっすぐである。
- (3) 荷重は両端だけに作用する。
- (4) 残留応力を持つ断面である。

解析にあたっては差分法を用いており、次の仮定を設けている。

[仮定]

- (1) 断面は変形後も元の形を保つ。
- (2) 変位は断面寸法に比べ小さい。
- (3) せん断ひずみは無視する。
- (4) 材料の応力-ひずみ関係は完全弾塑性である。ひずみ硬化やひずみもどりは考慮しない (Fig. 5)。

* 正会員 ローザンヌ工科大学鋼構造物研究室助手
** Ph. D. ローザンヌ工科大学鋼構造物研究室助手
*** Ph. D. ローザンヌ工科大学鋼構造物研究室教授

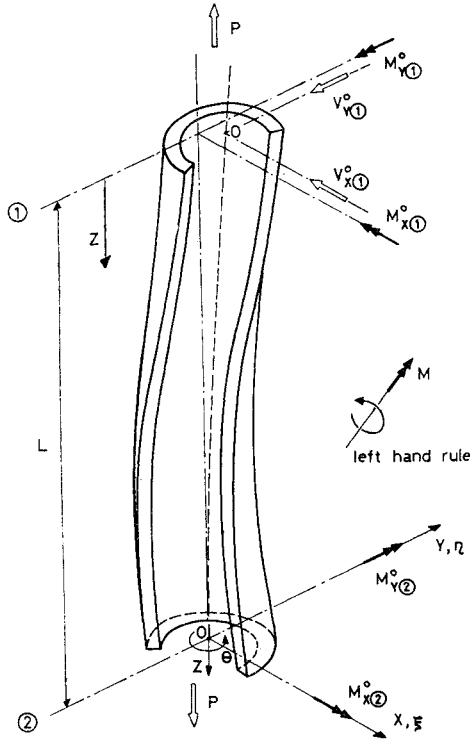


Fig. 2 二軸曲げを受ける柱

(5) 材料の降伏は垂直ひずみのみによって決まる。

2. 基礎方程式

(1) 座標系

荷重の増加に伴い塑性域が進行しねじり変形が生じてくると、断面の主軸の方向やせん断中心の位置が変わってくる。従来の多くの論文は、この主軸とせん断中心に注目して基礎方程式をたてている。この方法だと方程式は簡単になるが、この場合は座標軸の回転の影響を考慮しなくてはならず、これを省略しているために数学的に式が明りょうさを欠いてくる。本解析では主軸やせん断中心の動きは追わず別の座標系の上につり合い式をたてている。

Fig. 3(a) に示されるように、断面内に固定された座標系 $x-y$ と空間内に固定された座標系に平行な座標系 $X-Y$ を考えると、その間の関係は、

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ Y &= y \cos \theta + x \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.1)$$

断面内の任意の点 $S(x, y)$ は、ある基準点 O_s から測った板厚中心線の長さ s によって表わすこともでき、 s と $x-y$ の関係は角度 α を使って (Fig. 3(a)),

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds}$$

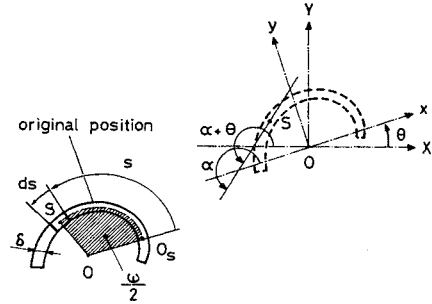


Fig. 3(a) 座標系

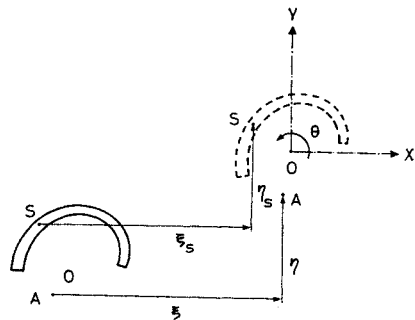


Fig. 3(b) 断面の変位

s と $X-Y$ の関係は式 (2.1) を使って、

$$\cos(\alpha + \theta) = \frac{dX}{ds}, \quad \sin(\alpha + \theta) = \frac{dY}{ds} \dots(2.2)$$

さらに、そり関数 ω と $X-Y$ の関係は、

$$X \sin(\alpha + \theta) - Y \cos(\alpha + \theta) = \frac{d\omega}{ds} \dots\dots\dots(2.3)$$

仮定 (3) よりねじり変形 θ は小さいから (2.1) は、

$$\left. \begin{aligned} X &= x - y\theta \\ Y &= y + x\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.4)$$

断面内の任意の点 $S(x, y)$ の変形 ξ_s, η_s, θ_s は、ある点 $A(a_x, a_y)$ の変形 ξ, η, θ で表わされ (Fig. 3(b)),

$$\left. \begin{aligned} \xi_s &= \xi - (y - a_y)\theta - (x - a_x)\frac{\theta^2}{2} \\ \eta_s &= \eta + (x - a_x)\theta - (y - a_y)\frac{\theta^2}{2} \\ \theta_s &= \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.5) \text{注1)}$$

座標の原点 O の変位 ξ_0, η_0 は、式 (2.5) において $x=y=0$ を代入すれば得られ、

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \xi + a_y\theta + a_x\frac{\theta^2}{2} \\ \eta_0 &= \eta - a_x\theta + a_y\frac{\theta^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.6)$$

式 (2.5) と (2.6) を組合せると、

注1) 式 (2.5) の第3項 $(x - a_x)\theta^2/2, (y - a_y)\theta^2/2$ は、Vlasov らの教科書では省略されているが、これらは高次の微小項ではない¹⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \xi_s &= \xi_0 - y\theta - \frac{x}{2}\theta^2 \\ \eta_s &= \eta_0 + x\theta - \frac{y}{2}\theta^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.7)$$

式(2.7)をZに関して微分し、式(2.4)を使って、 x, y をX, Yで置き変えると、

$$\left. \begin{aligned} \xi_s' &= \xi_0' - Y\theta' \\ \eta_s' &= \eta_0' + X\theta' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.8)$$

ここで、A点を座標の原点Oに選べば、

$$\xi_0 = \xi, \quad \eta_0 = \eta$$

以下、これで議論を進めていく。

(2) 内 力

変形後、断面内に生ずる垂直応力 σ とせん断応力 τ によって断面内に各種の内力が生ずる¹⁹⁾。これらは、

$$\left. \begin{aligned} P &= \int \sigma dF & K &= \int \sigma (X^2 + Y^2) dF \\ M_Y &= - \int \sigma X dF & Q_X &= \int (\tau \delta) dX \\ M_X &= \int \sigma Y dF & Q_Y &= \int (\tau \delta) dY \\ B &= \int \sigma \omega dF & M_\omega &= \int (\tau \delta) d\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.9)$$

ここに、X, Yは、 x, y ではないことを強調しておく。

(3) つり合い式

変形前にZ軸に垂直に柱を輪切りする。これが変形した後の断面をX-Z面、Y-Z面に投影したのがFig. 4である。点S(x, y)にある微小要素 $dF(= \delta ds)$ にはたらく垂直応力 σ 、せん断応力 τ の作る成分のX軸への投影は、

$$\tau \cos(\alpha + \theta) + \sigma \xi'_s$$

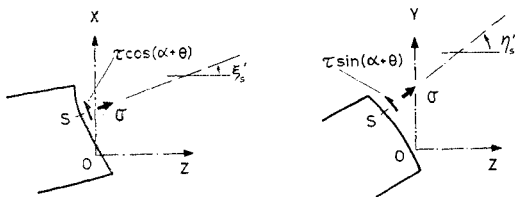


Fig. 4 変形後の断面にはたらく σ と τ

これを全断面にわたって積分すると、断面にはたらくせん断力のX軸への投影となる。

$$\int \{ \tau \cos(\alpha + \theta) + \sigma \xi'_s \} dF$$

荷重は両端にしかはたらかないから、

$$\left[\int \{ \tau \cos(\alpha + \theta) + \sigma \xi'_s \} dF \right] = 0 \dots\dots(2.10) \text{注2)}$$

式(2.10)の第1項は、式(2.2), (2.9)から Q_X 、第2項は、式(2.8), (2.9)から $P\xi' - \theta' M_X$ となる。

Q_X と M_Y の関係は、よく知られているように、

$$Q_X = -M_Y' \text{注3)}$$

したがって式(2.10)は、

$$(-M_Y' + P\xi' - \theta' M_X)' = 0 \dots\dots\dots(2.11 a)$$

同様にしてY軸への投影から、

$$(M_X' + P\eta' - \theta' M_Y)' = 0 \dots\dots\dots(2.11 b)$$

ねじりに関する方程式は、垂直応力 σ とせん断応力 τ の作るO点のまわりのねじりを計算することから得られる。Fig. 3(b)とFig. 4を組合せてO点のまわりのねじりを計算すると、

$$\int \tau \{ X \sin(\alpha + \theta) - Y \cos(\alpha + \theta) \} dF + \int \sigma (\eta'_s X - \xi'_s Y) dF$$

上式は式(2.3), (2.8), (2.9)から、

$$M_\omega + K\theta' - \eta' M_Y - \xi' M_X$$

しかるにせん断応力 τ は板厚方向の平均をとっているため、これにサンプソンのねじり項 $M_{SV} = GJ\theta'$ を加えたものが断面Zにはたらくねじりとなる¹⁹⁾。

このねじりが、端①での反力 $V_{X①}, V_{Y①}$ の作るねじりと、外力ねじりモーメントとつり合っているから、

$$M_\omega + M_{SV} + K\theta' - \eta' M_Y - \xi' M_X = \eta V_{X①} - \xi V_{Y①} + H \text{注4)}$$

M_ω はバイモーメントBのZに関する一階微分であることに注目して上式を一回微分すると、

$$\{ B' + (GJ + K)\theta' - \eta' M_Y - \xi' M_X - \theta V_{X①} + \xi V_{Y①} \}' = 0 \dots\dots\dots(2.11 c)$$

(4) つり合い式の積分

前節で導いたつり合い式をそのまま変形に関する方程式に変えると、変形の4階微分方程式が得られる¹⁹⁾。差分法を使って解析をする場合、4階微分方程式より2階微分方程式のほうが精度と計算時間からいって有利であることはいうまでもない。この節では2階微分方程式を得る目的で、つり合い式の積分を行う。

つり合い式(2.11 a)を2回積分すると、

$$-M_Y + P\xi - \int_0^Z \theta' M_X dZ = C_1 Z + C_2$$

注2) Vlasovらの考え方では積分と微分の順序が逆である。
注3) $Z + dZ$ での断面はZでの断面に対し $d\theta$ ねじれているので $Q_X = -M_Y'$ の関係は成立しない。

注4) 端で反力と断面にはたらくせん断力はつり合っているが、必ずしもこの2つの力は同一線上にはなくこの場合はねじりモーメントが生ずる。また、端でのSwayによっては反力がねじりモーメントを作る場合もある。Hは、これらのねじりモーメントのコンスタント部分(Zによらない部分)と外力ねじりモーメントの和を示す。

ここに C_1, C_2 は、境界条件から決まる積分定数。境界条件として、

$$\begin{aligned} Z=0 \text{ で } \xi &= \xi_{\textcircled{1}}, \quad M_Y = M_{Y\textcircled{1}} \\ Z=L \text{ で } \xi &= 0, \quad M_Y = M_{Y\textcircled{2}} \text{ を考える注5)。} \end{aligned}$$

ここにモーメントレベルのつり合い式を得る。

$$\begin{aligned} -M_Y + P\xi &= -M_{Y\textcircled{1}} + \frac{Z}{L}(M_{Y\textcircled{1}} - M_{Y\textcircled{2}}) \\ &+ \left(1 - \frac{Z}{L}\right)P\xi_{\textcircled{1}} + \int_0^Z \theta' M_X dZ \\ &- \frac{Z}{L} \int_0^L \theta' M_X dZ \dots\dots\dots (2.12 a) \end{aligned}$$

同様に式 (2.11 b) は、

$$\begin{aligned} M_X + P\eta &= M_{X\textcircled{1}} - \frac{Z}{L}(M_{X\textcircled{1}} - M_{X\textcircled{2}}) \\ &+ \left(1 - \frac{Z}{L}\right)P\eta_{\textcircled{1}} + \int_0^Z \theta' M_Y dZ \\ &- \frac{Z}{L} \int_0^L \theta' M_Y dZ \dots\dots\dots (2.12 b) \end{aligned}$$

式 (2.11 c) を 2 回積分すると、

$$\begin{aligned} B + (GJ + K)\theta - \int_0^Z \{(GJ + K)\theta' + \eta' M_Y + \xi' M_X \\ + \eta V_{Y\textcircled{1}} - \xi V_{Y\textcircled{2}}\} dZ &= C_1 Z + C_2 \end{aligned}$$

ここに C_1, C_2 は境界条件から決まる積分定数。境界でのねじり角とパイモーメントを、

$$\begin{aligned} Z=0 \text{ で } \theta &= \theta_{\textcircled{1}}, \quad B = B_{\textcircled{1}} \\ Z=L \text{ で } \theta &= 0, \quad B = B_{\textcircled{2}} \text{ とすると,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B + (GJ + K)\theta &= B_{\textcircled{1}} - \frac{Z}{L}(B_{\textcircled{1}} - B_{\textcircled{2}}) \\ &+ \left(1 - \frac{Z}{L}\right)(GJ + K)_{\textcircled{1}}\theta_{\textcircled{1}} \\ &+ \int_0^Z (\eta' M_Y + \xi' M_X + \eta V_{X\textcircled{1}} - \xi V_{Y\textcircled{2}}) dZ \\ &- \frac{Z}{L} \int_0^L (\eta' M_Y + \xi' M_X + \eta V_{X\textcircled{1}} - \xi V_{Y\textcircled{2}}) dZ \\ &\dots\dots\dots (2.12 c) \text{注6)} \end{aligned}$$

を得る。

(5) 変形と応力

任意点 $S(x, y)$ の垂直ひずみは¹⁵⁾、

$$\epsilon = \epsilon_0 - \xi'' X - \eta'' Y - \theta'' \omega + \frac{\sigma_r}{E}$$

注 5) $M_{Y\textcircled{1}}, M_{Y\textcircled{2}}$ 等は柱にかかるモーメントで、これらについては 2.(6) の境界条件の項でくわしく述べる。添字 $\textcircled{1}$ は、端 $\textcircled{1}$ での値を示す。

注 6) ここで積分の中の第 1 項 $(GJ + K)\theta$ は省略した。断面が塑性域に入ると塑性域と弾性域の間で $(GJ + K)$ の微分が不可能となり差分法を使ってそれを計算しても無意味になる。本レポートではやむを得ず $(GJ + K)'$ を切捨てている。実際には K は、弾性域では一定値をとり塑性域に入ると多少減少する程度で解析結果にはほとんど影響を及ぼさない。また、サンブナンの定数 J は、塑性域に入った後も弾性域での値をとるといふしばしば使われる仮定を採用すれば、 $(GJ + K)'$ を切捨てることは、それほど不合理なことではない。

ここに ϵ_0 はある Z の関数

σ_r は残留応力

仮定 (5) より断面の降伏は、垂直ひずみ ϵ のみによって決まる。もし、 ϵ が降伏ひずみより小さければ垂直応力 σ は、

$$\sigma = E(\epsilon_0 - \xi'' X - \eta'' Y - \theta'' \omega) + \sigma_r \dots\dots\dots (2.13 a)$$

ϵ が降伏ひずみより大きければ、

$$\sigma = \pm \sigma_y \text{ (一は圧縮)} \dots\dots\dots (2.13 b)$$

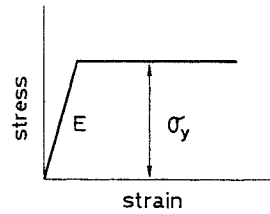


Fig. 5 応力-ひずみ関係

ここで Z 軸方向のつり合い式 $P = \int \sigma dF$ を使って式 (2.13 a) から ϵ_0 を消去すると、

$$\begin{aligned} \sigma = E \left\{ \left(\frac{\int_e X dF}{\int_e dF} - X \right) \xi'' + \left(\frac{\int_e Y dF}{\int_e dF} - Y \right) \eta'' \right. \\ \left. + \left(\frac{\int_e \omega dF}{\int_e dF} - \omega \right) \theta'' \right\} + \frac{P - \int_p (\sigma - \sigma_r) dF}{\int_e dF} + \sigma_r \\ \dots\dots\dots (2.13 c) \end{aligned}$$

ここに、積分記号内の添字 e は降伏していない要素のみの積分を表わし、 p は降伏した要素のみの積分を表わす。

(6) 境界条件

考えている柱の $X-Z$ 面内の境界条件は Fig. 6(a) に示され、 M^o, V^o は境界にはたらく外力である。Fig. 6(b) にははりの影響を取った柱だけの境界条件が示されている。ねじりに対してはそり拘束のある場合と拘束のない場合についてのみ考えられている。

両端のはりの影響としてスプリングを付けてあるが、このスプリングの負担するモーメントのカーブとして Fig. 1 のカーブ M_b が、よく構造物の特性を示している。ある限界 φ_P まで回転角 φ に比例する抵抗モーメントが生じ、限界 φ_P を越えるとはりに塑性ヒンジ等ができる理由から抵抗モーメントは一定に保たれる。これらを式で示すと、

$$\begin{aligned} M_b &= \alpha \varphi \quad 0 < |\varphi| < \varphi_P \\ &= \alpha \varphi_P \quad |\varphi| \geq \varphi_P \end{aligned}$$

したがって、Fig. 6(a) の外力モーメント M^o と Fig.

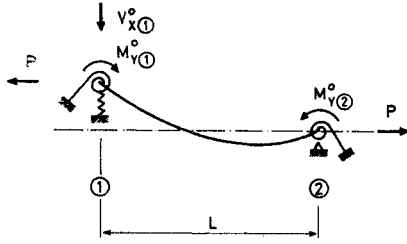


Fig. 6(a) X-Z 面内の境界条件

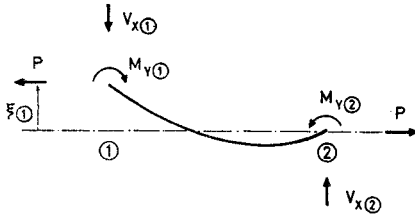


Fig. 6(b) 柱の負担する外力

6(b) の柱の負担するモーメント M の間には、

$$M^0 = M + M_b$$

$$= M + \alpha\varphi - \bar{\alpha}(\varphi - \varphi_P)$$

$$\text{ここに } \bar{\alpha} = 0 \quad 0 < |\varphi| < \varphi_P$$

$$\bar{\alpha} = \alpha \quad |\varphi| \geq \varphi_P$$

上の式をさらにそれぞれの軸方向別、境界ごとに書き直すと、

$$\left. \begin{aligned} M_{Y1}^0 &= M_{Y1} - \alpha_{Y1} \xi_1' + \bar{\alpha}_{Y1} (\xi_1' - \varphi_{PY1}) \\ M_{Y2}^0 &= M_{Y2} + \alpha_{Y2} \xi_2' - \bar{\alpha}_{Y2} (\xi_2' - \varphi_{PY2}) \\ M_{X1}^0 &= M_{X1} + \alpha_{X1} \eta_1' - \bar{\alpha}_{X1} (\eta_1' - \varphi_{PX1}) \\ M_{X2}^0 &= M_{X2} - \alpha_{X2} \eta_2' + \bar{\alpha}_{X2} (\eta_2' - \varphi_{PX2}) \\ &\dots\dots\dots(2.14) \end{aligned} \right\}$$

ここに添字 i は、端 ① に関するもの
 $i=Y$ なら Y 軸に関するもの
 $i=X$ なら X 軸に関するもの

ここに現われてくる柱の直接負担するモーメント $M_{Y1}^0, M_{Y2}^0, \dots$ が 2.(4) で使われている。

ねじりに対してはそりが拘束されていれば、境界で、
 $\theta' = 0$

そりが拘束されていないければ、境界で、
 $B = 0$ 注 6)

式 (2.14) で使われている M は、それぞれの境界で内力モーメントに等しい。内力モーメント、内力バイモーメントを求める式は 2.(2) で示されており、2.(5) で求めた垂直応力 σ を使って展開すれば、

$$\left. \begin{aligned} -M_Y &= -E(\tilde{I}_{Ye}\xi'' + \tilde{I}_{XYe}\eta'' + \tilde{I}_{\omega Xe}\theta'') + F_Y \\ M_X &= -E(\tilde{I}_{XYe}\xi'' + \tilde{I}_{Xe}\eta'' + \tilde{I}_{\omega Ye}\theta'') + F_X \\ B &= -E(\tilde{I}_{\omega Xe}\xi'' + \tilde{I}_{\omega Ye}\eta'' + \tilde{I}_{\omega e}\theta'') + F_\theta \\ &\dots\dots\dots(2.15) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{ここに、 } \tilde{I}_{Ye} = \int_e X^2 dF - \frac{\left(\int_e X dF\right)^2}{\int_e dF}$$

$$\tilde{I}_{Xe} = \int_e Y^2 dF - \frac{\left(\int_e Y dF\right)^2}{\int_e dF}$$

$$\tilde{I}_{XYe} = \int_e XY dF - \frac{\int_e X dF \int_e Y dF}{\int_e dF}$$

$$\tilde{I}_{\omega Xe} = \int_e X \omega dF - \frac{\int_e X dF \int_e \omega dF}{\int_e dF}$$

$$\tilde{I}_{\omega Ye} = \int_e Y \omega dF - \frac{\int_e Y dF \int_e \omega dF}{\int_e dF}$$

$$\tilde{I}_{\omega e} = \int_e \omega^2 dF - \frac{\left(\int_e \omega dF\right)^2}{\int_e dF}$$

$$F_Y = \frac{\int_e X dF}{\int_e dF} \left\{ P - \int_p (\sigma - \sigma_r) dF \right\} + \int_p (\sigma - \sigma_r) X dF$$

$$F_X = \frac{\int_e Y dF}{\int_e dF} \left\{ P - \int_p (\sigma - \sigma_r) dF \right\} + \int_p (\sigma - \sigma_r) Y dF$$

$$F_\theta = \frac{\int_e \omega dF}{\int_e dF} \left\{ P - \int_p (\sigma - \sigma_r) dF \right\} + \int_p (\sigma - \sigma_r) \omega dF$$

式 (2.15) を使えば、式 (2.14) の境界条件が変形の関数で表わされ、差分法で解くのに都合のよい形となる。

$$\left. \begin{aligned} E\tilde{I}_{Ye}\xi''_1 + E\tilde{I}_{XYe}\eta''_1 + E\tilde{I}_{\omega Xe}\theta''_1 - \alpha_{Y1}\xi'_1 - \alpha_{X1}\eta'_1 - \alpha_{\omega 1}\theta'_1 &= M_{Y1}^0 + F_{Y1} - \bar{\alpha}_{Y1}(\xi'_1 - \varphi_{PY1}) \\ E\tilde{I}_{Ye}\xi''_2 + E\tilde{I}_{XYe}\eta''_2 + E\tilde{I}_{\omega Xe}\theta''_2 + \alpha_{Y2}\xi'_2 + \alpha_{X2}\eta'_2 + \alpha_{\omega 2}\theta'_2 &= M_{Y2}^0 + F_{Y2} + \bar{\alpha}_{Y2}(\xi'_2 - \varphi_{PY2}) \\ E\tilde{I}_{XYe}\xi''_1 + E\tilde{I}_{Xe}\eta''_1 + E\tilde{I}_{\omega Ye}\theta''_1 - \alpha_{X1}\eta'_1 - \alpha_{\omega 1}\theta'_1 &= -M_{X1}^0 + F_{X1} - \bar{\alpha}_{X1}(\eta'_1 - \varphi_{PX1}) \\ E\tilde{I}_{XYe}\xi''_2 + E\tilde{I}_{Xe}\eta''_2 + E\tilde{I}_{\omega Ye}\theta''_2 + \alpha_{X2}\eta'_2 + \alpha_{\omega 2}\theta'_2 &= -M_{X2}^0 + F_{X2} + \bar{\alpha}_{X2}(\eta'_2 - \varphi_{PX2}) \end{aligned} \right\}$$

注 6) 多くの論文ではそりが拘束のない場合として $B=0$ ではなく $\theta''=0$ を使っているが、もし考えている端が塑性域に入っていると、 $B=0$ と $\theta''=0$ は等価でなくなる。より一般的にはそりが拘束のない状態は $B=0$ である。

$$\dots\dots\dots(2.16 a)$$

なおそり拘束のない場合の $B=0$ は,

$$E\tilde{I}_{\omega X e}\xi'' + E\tilde{I}_{\omega Y e}\eta'' + E\tilde{I}_{\omega e}\theta'' = F_{\theta} \quad (2.16 b)$$

(7) 差分法への準備

2.(4) で展開したつり合い式を差分法で解くためにつり合い式も変形の関数で表わす。式(2.14), (2.15) を式(2.12) の3つの式に代入すれば,

$$\begin{aligned} & E\tilde{I}_{Y e}\xi'' + E\tilde{I}_{X Y e}\eta'' + E\tilde{I}_{\omega X e}\theta'' - P\xi \\ & + \left(1 - \frac{Z}{L}\right) P\xi_{\textcircled{1}} - \alpha_{Y\textcircled{1}} \left(1 - \frac{Z}{L}\right) \xi'_{\textcircled{1}} \\ & + \alpha_{Y\textcircled{2}} \frac{Z}{L} \xi'_{\textcircled{2}} \\ & = M^{\circ}_{Y\textcircled{1}} - \frac{Z}{L} (M^{\circ}_{Y} - M^{\circ}_{Y\textcircled{2}}) + F_Y \\ & - \int_0^Z \theta' M_X dZ + \frac{Z}{L} \int_0^L \theta' M_X dZ \\ & - \bar{\alpha}_{Y\textcircled{1}} (\xi'_{\textcircled{1}} - \varphi_{P Y\textcircled{1}}) \\ & + \frac{Z}{L} \{ \bar{\alpha}_{Y\textcircled{1}} (\xi'_{\textcircled{1}} - \varphi_{P Y\textcircled{1}}) \\ & + \bar{\alpha}_{Y\textcircled{2}} (\xi'_{\textcircled{2}} - \varphi_{P Y\textcircled{2}}) \} \dots\dots\dots(2.17 a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E\tilde{I}_{X Y e}\xi'' + E\tilde{I}_{X e}\eta'' + E\tilde{I}_{\omega Y e}\theta'' - P\eta \\ & + \left(1 - \frac{Z}{L}\right) P\eta_{\textcircled{1}} - \alpha_{X\textcircled{1}} \left(1 - \frac{Z}{L}\right) \eta'_{\textcircled{1}} \\ & + \alpha_{X\textcircled{2}} \frac{Z}{L} \eta'_{\textcircled{2}} \\ & = -M^{\circ}_{X\textcircled{1}} + \frac{Z}{L} (M^{\circ}_{X\textcircled{1}} - M^{\circ}_{X\textcircled{2}}) + F_X \\ & - \int_0^Z \theta' M_Y dZ + \frac{Z}{L} \int_0^L \theta' M_Y dZ \\ & - \bar{\alpha}_{X\textcircled{1}} (\eta'_{\textcircled{1}} - \varphi_{P X\textcircled{1}}) \\ & + \frac{Z}{L} \{ \bar{\alpha}_{X\textcircled{1}} (\eta'_{\textcircled{1}} - \varphi_{P X\textcircled{1}}) \\ & + \bar{\alpha}_{X\textcircled{2}} (\eta'_{\textcircled{2}} - \varphi_{P X\textcircled{2}}) \} \dots\dots\dots(2.17 b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E\tilde{I}_{\omega X e}\xi'' + E\tilde{I}_{\omega Y e}\eta'' + E\tilde{I}_{\omega e}\theta'' - (GJ+K)\theta \\ & + \left(1 - \frac{Z}{L}\right) (GJ+K)_{\textcircled{1}}\theta_{\textcircled{1}} \\ & - \left(1 - \frac{Z}{L}\right) (E\tilde{I}_{\omega X e}\xi'' + E\tilde{I}_{\omega Y e}\eta'' \\ & + E\tilde{I}_{\omega e}\theta'')_{\textcircled{1}} - \frac{Z}{L} (E\tilde{I}_{\omega X e}\xi'' + E\tilde{I}_{\omega Y e}\eta'' \\ & + E\tilde{I}_{\omega e}\theta'')_{\textcircled{2}} \\ & = -F_{\theta\textcircled{1}} + \frac{Z}{L} (F_{\theta\textcircled{1}} - F_{\theta\textcircled{2}}) + F_{\theta} \\ & - \int_0^Z (\eta' M_Y + \xi' M_X + \eta V_{X\textcircled{1}} - \xi V_{Y\textcircled{1}}) dZ \\ & + \frac{Z}{L} \int_0^L (\eta' M_Y + \xi' M_X + \eta V_{X\textcircled{1}} \\ & - \xi V_{Y\textcircled{1}}) dZ \dots\dots\dots(2.17 c) \end{aligned}$$

3. 解析方法

ある荷重を受ける柱の変位を求めることは、基礎方程式 (2.17 a), (2.17 b), (2.17 c) をある境界条件のもとで解くことである。Fig. 7 に示されるように柱を間隔 h で m 等分し両端に仮想点を1点ずつ作っておく。基礎方程式は、点3から点 $m-1$ までにおいて満足されており、かつ各境界で6個の境界条件があるので、未知数 $3 \times (m+3)$ に対し $3 \times (m-1)$ 本の基礎方程式と12個の境界条件があり問題は解ける。

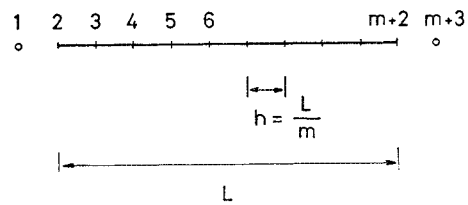


Fig. 7 部材の分割

点1から点 $m+3$ における変形 ξ, η, θ を成分とするベクトル $\{V\} = \{\xi_1, \eta_1, \theta_1, \xi_2, \eta_2, \theta_2, \dots, \xi_{m+3}, \eta_{m+3}, \theta_{m+3}\}$ を考えると、前章で論じた基礎方程式 (2.17 a), (2.17 b), (2.17 c) と変形で表わされた境界条件は差分法を使って、

$$[A]\{V\}^T = \{B\} \dots\dots\dots(3.1)$$

のマトリックスの形に書ける。

ベクトル $\{B\}$ の成分はそれぞれ式 (2.17) の右辺と境界条件の式の右辺から成り、マトリックス $[A]$ は $3(m+3) \times 3(m+3)$ の大きさを持った剛性マトリックスで各成分は式 (2.17) の左辺と境界条件の式の左辺となる。

未知数 $\{V\}$ を求める手順は以下のごとくである。

- (1) 式 (3.1) は線形でないので収束行算を行う。最初 $\{V\}$ を仮定する (たとえば0)。
- (2) 仮定した変形を使って各要素の垂直ひずみ ε を計算する (2.(5))。これで塑性域の分布と垂直応力 σ がわかる。
- (3) (2) で求めた塑性域の分布、垂直応力 σ から式 (2.9) の内力 M_X, M_Y, K と、式 (2.15) の中の諸係数 $\tilde{I}_{X e}, \tilde{I}_{X Y e}, \dots$ 等を計算する。
- (4) マトリックス $[A]$, ベクトル $\{B\}$ を組立てる。
- (5) 変形 $\{V\}^T = [A]^{-1}\{B\}$ を求める。
- (6) 変形 $\{V\}^T$ が収束するまで (2)~(5) の手順を繰返す。

4. 解析例

(1) 両端単純支持の二軸曲げ

ニューヨーク大学で行われた一連の二軸曲げの実験⁶⁾と比較した。特に 対称荷重を受ける柱として No. 7 の供試体, 非対称荷重を受ける柱として, No. 11 の供試体との比較をそれぞれ Fig. 8, 9 に示した。

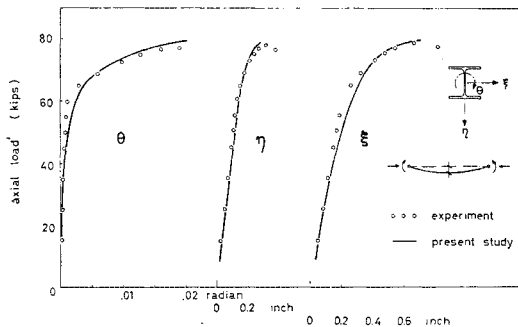


Fig. 8 対称荷重をうける柱

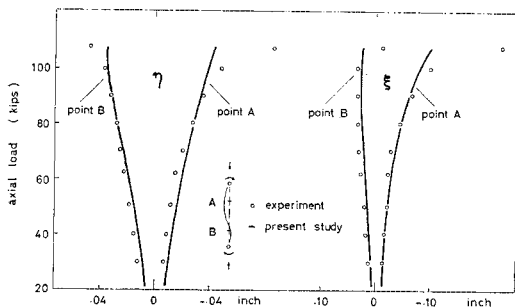


Fig. 9 非対称荷重を受ける柱

境界条件としては両端で変位 ξ, η が 0 で外力モーメント M^0 が与えられている。ねじりに関しては両端で θ が 0 でそりが拘束されている。したがって、両端で $\xi=\eta=\theta=0$ と式 (2.16 a) と $\theta'=0$ が変形で表わされた境界条件となる。対称荷重を受ける柱は、荷重増加に伴い変形が大きく増加するという不安定問題であった。しかるに、非対称荷重を受ける柱では、変形がさほど増加しない状態で両端に塑性ヒンジが発生し破壊した。後者は材料のレジスタンスが限界に達した場合で、安定問題ではなかったことを示している。どちらの例題も実験結果とよい一致を示している。

(2) 両端曲げ拘束柱の二軸曲げ

文献 14), 15) は, Fig. 10 に示される 供試体を使って 拘束柱の二軸曲げ実験を行い, あわせて理論解も紹介している。実験においては最初 W_1, W_2 を加えること

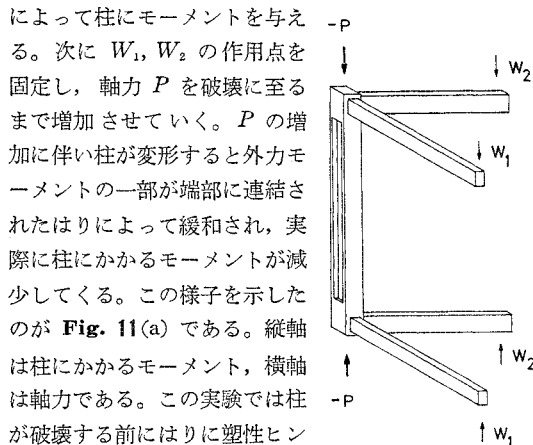


Fig. 10 曲げ拘束柱のモデル

によって柱にモーメントを与える。次に W_1, W_2 の作用点を固定し, 軸力 P を破壊に至るまで増加させていく。 P の増加に伴い柱が変形すると外力モーメントの一部が端部に連結されたはりによって緩和され, 実際に柱にかかるモーメントが減少してくる。この様子を示したのが Fig. 11(a) である。縦軸は柱にかかるモーメント, 横軸は軸力である。この実験では柱が破壊する前にはりに塑性ヒンジが生じないように十分剛性の高いはりを使っている。したがって, Fig. 1 における φ_P の値が十分大きい値となり耐力カーブ M_b は一定の傾きを持った直線となる (実は, そうなるように十分剛性の高いはりを使っているのであるが)。 Fig. 11 (a), (b) は, 文献 14), 15) の例題 A 2 との比較である。軸力 P が 7.0 kips に達すると柱の中央に塑性ヒンジが発生した。しかし, 両端に連結されたはりのために破壊にはいたらずさらに P は増加した。柱にかかるモーメントの緩和のために一度降伏した部分が再び弾性域にもどる現象が見られた。しかるに筆者の理論では仮定 (4) にあるようにひずみもどりを考慮していないので, この実験を完全な形で追うことはできない。最終荷重に近いところでの変形の実験値と計算値の差はこのひずみもどりの影響によると思われる。

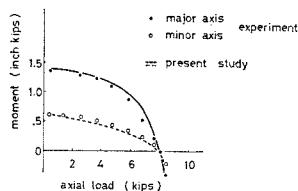


Fig. 11(a) 曲げ拘束柱のモーメント, 軸力カーブ

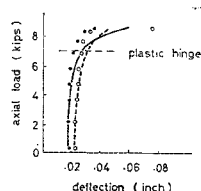


Fig. 11(b) 曲げ拘束柱の軸力, 変位カーブ

5. 結論

例題の計算にあたっては, ローザンヌ連邦工科大学 (EPF-L) の計算機 C.D.C. 6500 を使用した。一本の柱の最終耐力を求めるのに 20 秒ほどの時間を要した。結果はどれも実験値とよい一致を示していた。

(1) 二軸曲げの挙動を求めるには, 変位を与えてそれに対応する外力を求める方法と, 逆に外力を与えてそれによってひき起こされる変位を求める 2 つの方法が

ある。前者の方法の利点は、先に変位を与えてあるのでそれに対し一義的に外力が決まり収束計算をする必要がなく計算時間が短くてすむことと、最終荷重を越えた状態でも変位と外力の対応を見つけていることができるので最終荷重を求めるのが容易であることである。それに対し本レポートで示された後者の方法は、正しい変位が求まるまで収束計算を繰返さねばならず、特に最終荷重に近いところでは収束速度がおそい。しかしながら、変位を想像することがむずかしい場合には有効な手段である。たとえば、非対称問題では荷重が小さい場合は複数の曲率で変位が生じているがある荷重から変形のモードが変わって単数の曲率で柱が変形することがある。本レポートでは一般的に支持された柱の解析に主眼をおいているので後者の手法を採用した。非対称問題や曲げ拘束のある柱では変位を想像することが必ずしも容易でないので後者の方法がより有効であろう。

(2) 一般に二軸曲げに使われる柱は細長比が大きくなく、本レポートで扱った柱も細長比の大きくないものを選んである。Fig. 8 の柱では $L/r_x=35$, $L/r_y=63$, Fig. 9 の柱では $L/r_x=45$, $L/r_y=75$ となっている。したがって、本レポートで扱ったどの場合もねじり変形はたかだか 0.02 ラジアンくらいで、ねじりを無視した解と比べても最終耐力にはほとんどねじり変形の影響はなかった。

(3) 本レポートでは空間に固定された座標系の上でつり合い式をたて、主軸やせん断中心の動きには注目しなかった。弾性域においてはせん断中心と、主軸の位置方向は断面の動きとともに変化する。Vlasov, Timoshenko の考え方はこの主軸の上につり合い式をたてているのであるが、座標系自体がねじり角 θ で回転していることを考慮に入れていないようである。筆者の考察によれば式 (2.11) の最終項がそれぞれ $(\theta' M_X)'$, $(\theta' M_Y)'$, $(\eta' M_Y + \xi' M_X + \eta V_{X0} - \xi V_{Y0})'$ となっているが Vlasov, Timoshenko の式では $(\theta M_X)''$, $(\theta M_Y)''$, $\eta'' M_X + \xi'' M_Y$ であった。さらに、塑性域が発生するとせん断中心の意味自体がはっきりしなくなる。よく用いられる方法としてまだ降伏していない部分だけのコアを取ってせん断中心や主軸の方向、位置を決める手法がある。こうして得られた主軸の上につり合い式をたてるとつり合い式は簡単になり、弾性域で使われたつり合い式に多少の修正を加えるだけでよくなる。しかし多くの論文では主軸の方向や位置が、ねじり変形、塑性域の進行に伴って動いていることを部分的にしか考慮に入れていないようである。本レポートでは空間に固定された任意の座標系の上につり合い式をたてているのでこれらは、自動的に考慮されていることになる。Wide Flange 型の断面から成る柱の二軸曲げ問題ではねじり変形が小さいの

で、上に述べたつり合い式の差はたいした重要性を持たないようである。本レポートで扱った問題に関してはその差を論ずることはできなかった。

(4) 本レポートでは単純支持の柱と回転拘束を受ける柱についての例題を示した。端で変位拘束を受け、Sway を生ずるような柱についても筆者の方程式は有効である。それらについては別の機会に発表を行うつもりである。

6. あとがき

本研究は、The Swiss National Foundation for Scientific Research の援助によるものである。有益な助言と助力を提供してくれたローザンヌ連邦工科大学鋼構造研究室 (ICOM) の P. Äystö 君はじめ、数式のタイピングをやっていたいただいた R. Zbinden 嬢に感謝いたします。

7. 記号

- B : バイモーメント
- E : ヤング率
- G : せん断弾性係数
- J : サンプナンのねじり定数
- L : 柱の長さ
- L/r_x : 強軸まわりの細長比
- L/r_y : 弱軸まわりの細長比
- M_Y, M_X : Y, X 軸まわりの曲げモーメント
- M^o_{Y0}, M^o_{X0} : ② 端における Y, X 軸まわりの外力モーメント
- M_{SV} : サンプナンのねじりモーメント
- M_o : そりねじりモーメント
- P : 軸力 (圧縮は負)
- V_{X0}, V_{Y0} : 端 ① での X, Y 方向の支点反力
- $X-Y-Z$: 空間に固定された座標に平行な座標系 (左手系)
- $x-y$: 断面内に固定された座標系
- ϵ : 垂直ひずみ
- ξ, η : X, Y 軸方向の変位
- σ : 垂直応力
- σ_r : 残留応力
- σ_y : 降伏応力
- τ : せん断応力
- θ : ねじり変形
- ω : そり関数
- δ : 断面要素の板厚

参 考 文 献

- 1) 藤本盛久・松本芳紀：軸力と 2 方向曲げモーメントをうける H 形断面部材の力学的性状に関する研究，日本建築学会論文報告集，第 173 号，第 176 号。
- 2) 坂本 順・宮村篤典・渡辺稚生：二軸曲げをうける鋼構造部材の塑性耐力に関する考察，日本建築学会論文報告集，第 175 号。
- 3) 鈴木敏郎・木村 衛・石田和人：薄肉開断面材の弾塑性解析，日本建築学会論文報告集，第 174 号。
- 4) 藤田 譲・吉田宏一郎・大勝孝司：二軸曲げを受ける柱の弾塑性解析，日本造船学会論文集，第 126 号，第 127 号。
- 5) Culver, C.G. : Exact solution of the biaxial bending equations, Proc. ASCE, Vol. 92, ST 2, April, 1966.
- 6) Birnstiel, Ch. and K.C. Leu and J.A. Tesoro and R.L. Tomasetti : Experiments on H-columns under biaxial Bending, New York University, January, 1967.
- 7) Birnstiel, Ch. and G.A. Harstead and K.C. Leu : Inelastic behaviour of H-columns under biaxial bending, New York University, November, 1967. Or Harstead, G.A. and Ch. Birnstiel and K.C. Leu : Inelastic H-Columns under biaxial bending, Proc. ASCE, Vol. 94, ST 10, October, 1968.
- 8) Sharma, S.S. and E.H. Gaylord : Strength of steel columns with biaxially eccentric load, Proc. ASCE, Vol. 95, ST 12, December, 1969.
- 9) Syal, I.S. and S.S. Sharma : Elastic behaviour of biaxially loaded steel columns, Proc. ASCE, Vol. 96, ST 3, March, 1970.
- 10) Syal, I.S. and S.S. Sharma : Biaxially loaded beam-column analysis, Proc. ASCE, Vol. 97, ST 9, September, 1971.
- 11) Santathadaporn, S. and W.F. Chen : Tangent stiffness method for biaxial bending, Proc. ASCE, Vol. 98, ST 1, January, 1972.
- 12) Atsuta, T. : Analysis of inelastic beam-columns, Ph. D. Dissertation, Lehigh University, 1972. Or Chen, B.F. and T. Atsuta : Ultimate Strength of biaxially loaded steel H-columns, Proc. ASCE, Vol. 99, ST 3, March, 1973.
- 13) Djalaly, H. : Comportement élasto-plastique d'une barre sollicitée en compression et flexion déviée, Construction Métallique, No. 4, 1972.
- 14) Gent, A.R. and H.R. Milner : The ultimate load capacity of elastically restrained H-columns under biaxially bending, Proc. Institution of Civil Engineering, Vol. 41, December, 1968.
- 15) Milner, H.R. and A.R. Gent : Ultimate Load calculation for restrained H-columns under biaxially bending, Civil Engineering Transactions, Institute of Engineers, Australia, 1971.
- 16) Vlassov, B.Z. : Pièces Longues en Voiles Mirces, Editions Eyrolles, Paris, 1962.
- 17) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd Edition, McGrawhill Book Co., Inc., New York, 1961.
- 18) Galambos, T.V. : Structural Members and Frames, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.
- 19) Vinnakota, S. and Y. Aoshima : Inelastic behaviour of rotationally restrained columns under biaxial bending, accepted in The Structural Engineer, 1971.

(1973.7.18・受付)