

# 平面骨組の大変形解析

## A LARGE DEFLECTION ANALYSIS OF PLANE FRAME

篠 崎 武\*  
By Takeshi Shinozaki

### 1. 緒 言

仮想仕事の原理に基づくマトリックス変位法を使用して平面骨組の大変形問題を考察する。基礎式は増分形にて表現し、数値解を得る手段として修正荷重漸増法<sup>1)~3)</sup>を採用した。まず面内変形する任意の曲棒要素についてひずみ変位関係を考え、それにより弾性剛性マトリックスと幾何学的剛性マトリックスの一般的な表現をする。これらの表現式に共通なある一つのマトリックスを適当な要素について具体的に求めれば、各剛性マトリックスは機械的に得ることができる。

通常、直棒要素の集合体として構造物を理想化するが、微小変形解析に適用した場合でも、このやり方では過度の物理的な理想化を含むことがある。大変形問題を増分的に解析するとき、最初直線部分であったところも任意増分段階では直線ではあり得ない。さらに、最初から曲線部分であるところを直線要素で理想化する場合、かなり多くの要素数を必要とする。ここでは初期たわみを有する棒要素について各剛性マトリックスを考察した。このとき問題となるのは、初たわみを有する棒に適当な変位関数<sup>4)</sup>を見つけねばならないことである。横たわみには通常の直棒要素で使用されているものと同じ変位関数を採用したが、軸方向の変位関数の考慮により軸ひずみ増分が一定となるようにした。このことについては、トータルポテンシャルエネルギーを最小化する方法<sup>5)</sup>によって解いた Dawe にならったものである。これにより、初期軸力の表現がすっきりし、さらに各剛性マトリックスの誘導が容易になる利点もあり、精度上もすぐれていた。

このようにして求めた弾性剛性マトリックス、幾何学的剛性マトリックスの精度を見るために代表的な例とし

て高次の非線特性を有するアーチの飛移り現象の数値計算を行った。

### 2. 仮想仕事の原理による増分式

初期外力  $R$ 、初期内力  $S$  の状態にある棒要素を考える。この棒要素に外力増分  $\Delta R$  を加えると内力増分  $\Delta S$  が生じ平衡するものとして仮想仕事の原理を適用する。仮想変位  $\delta r$ 、それによる仮想変形を  $\delta(s+\eta)$  とする。ここで  $\delta s$  は初期状態での  $\delta r$  に対応するもので、増分後は  $\Delta R$  が作用することにより  $\delta\eta$  だけの変化が生じ、 $\delta r$  に対応する仮想変形は  $\delta(s+\eta)$  となる。棒要素の圆心に沿って  $x$  軸をとって仮想仕事を書けば次式となる。

$$\delta r^T (R + \Delta R) = \int \delta s^T \Delta S dx + \int \delta \eta^T S dx + \int \delta s^T S dx \dots\dots\dots (1)$$

ここで肩符  $T$  は転置を示す。初期内力は初期軸力  $T$  と初期曲げモーメント  $M$  よりなる列マトリックスで  $S^T = (T, M)$  と書かれ、 $\delta s$  に仮想軸ひずみ  $\delta\varepsilon$  と仮想曲率変化  $\delta\kappa$  とでなる列マトリックスで  $\delta s^T = (\delta\varepsilon, \delta\kappa)$  と表現される。式 (1) を整理して、

$$\delta r^T (\Delta R + \Delta R_s) = \int \delta s^T \Delta S dx + \delta \eta^T S dx \dots\dots\dots (2)$$

と表現する。 $\Delta R_s$  は初期状態でのつり合い力による項を示し、次のように表わされるものである。

$$\delta r^T \Delta R_s = \delta r^T R - \int \delta s^T S dx \dots\dots\dots (3)$$

変形  $s$  の一要素  $s_k = s_k(r_i)$  に注目し、テーラー展開を考えれば次の関係式が出てくる。

$$\delta s_k \doteq \left( \frac{\partial s_k}{\partial r_i} \right)_{r=0} \delta r_i \dots\dots\dots (4a)$$

$$\Delta s_k \doteq \left( \frac{\partial s_k}{\partial r_i} \right)_{r=0} \Delta r_i \dots\dots\dots (4b)$$

\* 正会員 工修 名古屋大学助手 工学部航空学科  
(筆者篠崎氏は1月9日事故により急逝されました)

$$\delta(s_k + \eta_k) \doteq \left( \frac{\partial s_k}{\partial r_i} \right)_{r=dr} \delta r_i \doteq \left( \frac{\partial s_k}{\partial r_i} \right)_{r=0} \delta r_i + \left( \frac{\partial^2 s_k}{\partial r_i \partial r_j} \right)_{r=0} \delta r_i \Delta r_j \dots \dots \dots (4c)$$

$$\delta \eta_k = \delta(s_k + \eta_k) - \delta s_k \doteq \left( \frac{\partial^2 s_k}{\partial r_i \partial r_j} \right)_{r=0} \delta r_i \Delta r_j \dots \dots \dots (4d)$$

ここで  $\Delta r$  は外力増分  $\Delta R$  に対応する変位増分であり、 $\Delta s$  は  $\Delta r$  に対応する要素内変形である。式 (4) を行列の表現に戻し、式 (2) の右辺第 2 項目を整理すれば、

$$\int \delta \eta^T S dx = \sum_{k=1}^2 \int \delta \eta_k S_k dx = \sum \int S_k \left( \frac{\partial^2 s_k}{\partial r_i \partial r_j} \right)_{r=0} \delta r_i \Delta r_j dx = \delta r^T k^G \Delta r \dots \dots \dots (5)$$

となり、ここで  $k^G$  は棒要素の幾何学的剛性マトリックスでその  $i$  行  $j$  列要素  $k_{ij}^G$  は次のように表わされるものである。

$$k_{ij}^G = \sum_{k=1}^2 \int S_k \left( \frac{\partial^2 s_k}{\partial r_i \partial r_j} \right)_{r=0} dx \dots \dots \dots (6)$$

同様にして、式 (2) の右辺第 1 項目については、弾性棒を取扱うものとして、要素内ひずみ増分  $\Delta s$  と内力増分  $\Delta S$  との間に通常フック則  $\Delta S = E \Delta s$  を仮定すれば次のように整理できる。

$$\int \delta s^T \Delta S dx = \int \delta s^T E \Delta s dx = \delta r^T k^E \Delta r \dots \dots (7)$$

ここで  $E$  は弾性定数マトリックスであり、 $k^E$  は弾性剛性マトリックスである。 $k^E$  の  $i$  行  $j$  列要素  $k_{ij}^E$  は次のように表わされるものである。

$$k_{ij}^E = \int \left( \frac{\partial s}{\partial r_i} \right)_{r=0}^T E \left( \frac{\partial s}{\partial r_j} \right)_{r=0} dx \dots \dots (8)$$

ここで  $(\partial s / \partial r_i)_{r=0}$  は  $(\partial s_1 / \partial r_i)_{r=0}$ 、 $(\partial s_2 / \partial r_i)_{r=0}$  を要素とする列マトリックスである。式 (6)、(8) より弾性剛性マトリックスについては  $s$  についての 1 次項の考慮でよいが、幾何学的剛性マトリックスのほうは  $s$  につづての 2 次項まで考えねばならないことがわかる。

### 3. 面内変形する細い曲棒の軸ひずみと曲率変化

図-1 のように曲棒の軸心に  $x$  軸をとり、その軸の接線方向に単位ベクトル  $a_1$  をとり、それと直交する方向

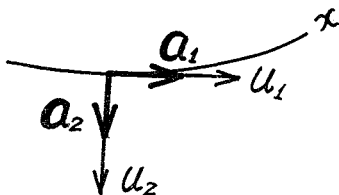


図-1 軸心  $x$  の任意点の基底ベクトル変位

に単位ベクトル  $a_2$  をとる。 $a_1$ 、 $a_2$  に沿っての変位を  $u_1$ 、 $u_2$  とすれば、軸ひずみ  $\varepsilon$  および曲率変化  $\kappa$  は次のように表わせる<sup>9)</sup>。

$$\varepsilon = e + \theta^2 / 2 \dots \dots \dots (9)$$

$$\kappa = \phi - e \phi - \theta f \dots \dots \dots (10)$$

ここで用いた記号は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \omega_{12} &= (da_1/dx) \cdot a_2 \\ e &= du_1/dx - \omega_{12} u_2 \\ \theta &= du_2/dx + \omega_{12} u_1 \\ \phi &= d\theta/dx \\ f &= de/dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11 a \sim e)$$

表現を簡単にするため  $q^T = (e, \theta, f, \phi) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$  なる列マトリックス  $q$  を導入する。この  $q$  を用いれば  $\varepsilon$  および  $\kappa$  は次のようになる。

$$\varepsilon = q_1 + q_2^2 / 2 \dots \dots \dots (12)$$

$$\kappa = q_4 - q_1 q_4 - q_2 q_3 \dots \dots \dots (13)$$

$q$  が  $r$  に関し 1 次結合であるとすれば、

$$\left( \frac{\partial s}{\partial r_i} \right)_{r=0}^T = \left( \frac{\partial e}{\partial r_i}, \frac{\partial \phi}{\partial r_i} \right) \dots \dots \dots (14)$$

と書ける。また次の表現も可能である。

$$\left( \frac{\partial^2 s_k}{\partial r_i \partial r_j} \right)_{r=0} = \frac{\partial^2 s_k}{\partial q_m \partial q_n} \frac{\partial q_m}{\partial r_i} \frac{\partial q_n}{\partial r_j} \dots (15)$$

## 4. 剛性マトリックス、修正荷重項の一般表現

### (1) 弾性剛性マトリックス

式 (14) を式 (8) に代入し、 $\partial q_i / \partial r_j$  を  $i$  行  $j$  列要素とするマトリックス  $B$  を導入すれば弾性剛性マトリックス  $k^E$  は

$$k^E = \int B^T D B dx \dots \dots \dots (16)$$

となり、上式中のマトリックス  $D$  は軸剛性を  $EA$ 、曲げ剛性を  $EI$  とすれば次のように表わされる。

$$D = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \dots \dots \dots (17)$$

式 (16) は面内変形する任意曲棒に有効なる式である。適当なるマトリックス  $B$  を求めれば、それに対応する弾性剛性マトリックスが得られる。

### (2) 幾何学的剛性マトリックス

式 (15) を式 (6) に代入し、弾性剛性マトリックスの場合と同様なマトリックス  $B$  の導入により、幾何学的剛性マトリックス  $k^G$  は、

$$k^G = \int B^T G B dx \dots \dots \dots (18)$$

となり、上式中の  $G$  は次のように表わされる。

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -M \\ 0 & T & -M & 0 \\ 0 & -M & 0 & 0 \\ -M & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(19)$$

式 (18) も式 (16) と同様に面内変形する任意曲棒に対して有効なる式である。適当なるマトリックス  $B$  が知れば、それに対応する幾何学的剛性マトリックスが得られる。

(3) 修正荷重項

不つり合い力による項、すなわち修正荷重項の式 (3) は同様にマトリックス  $B$  を導入して整理すれば次のようになる。

$$4 R_s = R - \int B^T H dx \dots\dots\dots(20)$$

ここに  $H$  は次のように表わされる列マトリックスである。

$$H^T = (T \ 0 \ 0 \ M) \dots\dots\dots(21)$$

修正荷重項もマトリックス  $B$  がわかれば、具体的に求めることができる。

5. 直棒要素

以上に適当な  $B$  マトリックスを求めれば、対応する各剛性マトリックスおよび修正荷重項が得られることを示

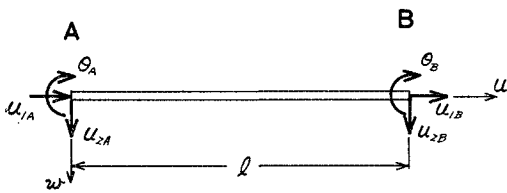


図-2 直棒要素

した。ここでは直棒要素についての  $B$  マトリックスを求め、これを利用して通常の直棒要素の各剛性マトリックスが得られることを示す。

図-2 に示された直棒要素の節点変位増分  $dr$  は次のように書く。

$$dr^T = (u_{1A} \ u_{2A} \ \theta_A \ u_{1B} \ u_{2B} \ \theta_B) \dots\dots\dots(22)$$

軸心に沿う変位  $u$  とそれと直交する方向のたわみ  $w$  は次のように仮定される。

$$u = u_{1A}(1-\xi) + u_{1B}\xi \dots\dots\dots(23)$$

$$w = u_{2A}(1-3\xi^2+2\xi^3) + u_{2B}(3\xi^2-2\xi^3) + \theta_A l \xi(1-\xi)^2 + \theta_B l(\xi^3-\xi^2) \dots\dots\dots(24)$$

ここに  $\xi = x/l$  である。

直棒の場合  $\omega_{12} = 0$  なので式 (11) より

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{du}{dx}, & q_2 &= \frac{dw}{dx} \\ q_3 &= \frac{dq_1}{dx}, & q_4 &= \frac{dq_2}{dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25 a \sim d)$$

となる。上式に式 (23), (24) を代入し、 $\partial q_i / \partial r_j$  を求めれば、 $B$  マトリックスは次のようになる。

$$B = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6(\xi^2-\xi) & (1-4\xi+3\xi^2)l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6(2\xi-1)/l & 6\xi-4 & 0 \\ 0 & 0 & 6(\xi-\xi^2) & (3\xi^2-2\xi)l \\ 0 & 0 & 6(1-2\xi)/l & 6\xi-2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(26)$$

この  $B$  を式 (16), (18) に代入し、積分を実行すれば通常の直棒要素の弾性剛性マトリックスおよび幾何学的剛性マトリックスと一致する。

6. 微小な初期たわみを有する棒

棒要素の両端末節点を通る  $x$  軸とそれに直交する  $y$  軸とでなる座標系における棒要素の軸心に沿う  $x_1$  軸の任意点の単位基底ベクトルを考える。

図-3 のごとく  $x_1$  の任意の接線方向に  $a_1$ 、それと直交する方向に  $a_2$  の単位基底ベクトルをとる。初期たわみを  $w_0$  とすれば、 $P$  点と  $Q$  点を結ぶ線要素は、

$$a_1 dx_1 = r' - r = dx i + dw_0 j \dots\dots\dots(27)$$

となり、これを  $dx_1$  について整理すれば、

$$dx_1 = dx \left[ 1 + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots(28)$$

となる。この関係式より、

$$\frac{d}{dx_1} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{dx}{dx_1} = \frac{d}{dx} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] \dots\dots\dots(29)$$

となり、 $dw_0/dx$  を 1 次の微小量とすれば、2 次以上の微小量を無視して上式より  $d/dx_1 = d/dx$  としてもよいことになる。

$a_1, a_2$  は  $x, y$  軸方向の単位ベクトル  $i, j$  で表現すれば

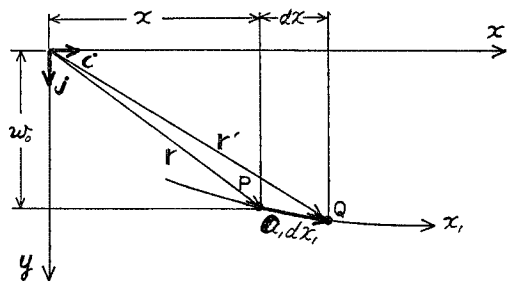


図-3 初たわみを有する棒の軸心に沿う線要素

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] i \\ &\quad + \frac{dw_0}{dx} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] j \\ a_2 &= -\frac{dw_0}{dx} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] i \\ &\quad + \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] j \end{aligned} \right\} \dots(30 a, b)$$

となる。これも  $dw_0/dx$  について 2 次以上の微小量を無視すれば次のようになる。

$$a_1 = i + \frac{dw_0}{dx} j, \quad a_2 = -\frac{dw_0}{dx} i + j \dots\dots(31 a, b)$$

$i, j$  方向の変位成分を  $u, w$  とし,  $a_1, a_2$  方向の変位成分を  $u_1, u_2$  とすれば, 図-4 を参照して,

$$u_1 = u + w \frac{dw_0}{dx}, \quad u_2 = w - u \frac{dw_0}{dx} \dots\dots(32 a, b)$$

となる。式 (31), (32) を式 (11) に代入して高次の微小項を省略すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_{12} &= \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \quad q_1 = \frac{du}{dx} + \frac{dw}{dx} \frac{dw_0}{dx} \\ q_2 &= \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dx} \frac{dw_0}{dx}, \quad q_3 = \frac{dq_1}{dx} \\ q_4 &= \frac{dq_2}{dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots(33 a \sim e)$$

節点変位増分  $\Delta r$  は直棒の場合と同じにとり, 初期たわみ  $w_0$  を 図-5 のように, 初期たわみ角  $\theta_{0A}, \theta_{0B}$  を導入し  $\xi$  についての 3 次式に仮定する。

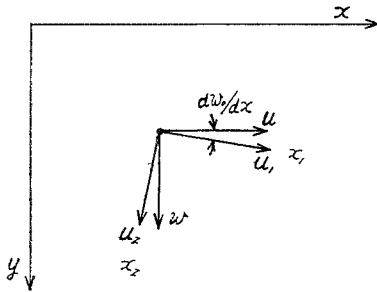


図-4 棒要素任意点の変位成分

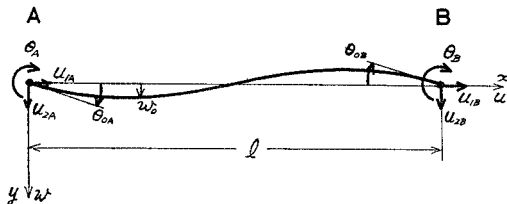


図-5 初たわみを有する棒要素

$$w_0 = \theta_{0A} l \xi (1 - \xi)^2 + \theta_{0B} l (\xi^3 - \xi^2) \dots\dots(34)$$

$y$  方向の変位増分  $w$  は直棒の場合の式 (24) と同じものを仮定するが,  $x$  方向の変位増分は軸ひずみ増分が要素内で一定となるように次のごとく仮定する。

$$\begin{aligned} u &= u_{1A} + \left( \frac{u_{1B} - u_{1A}}{l} + \frac{1}{l^2} \int_0^1 \frac{dw}{d\xi} \frac{dw_0}{d\xi} d\xi \right) l \xi \\ &\quad - \frac{1}{l} \int_0^\xi \frac{dw}{d\xi} \frac{dw_0}{d\xi} d\xi \dots\dots(35) \end{aligned}$$

軸ひずみ増分は  $\Delta \epsilon = dw/dx + (dw_0/dx)(dw/dx)$  であるので式 (35) の変位関数を使用すれば,

$$\Delta \epsilon = \frac{u_{1B} - u_{1A}}{l} + \frac{1}{l^2} \int_0^1 \frac{dw}{d\xi} \frac{dw_0}{d\xi} d\xi \dots\dots(36)$$

となり要素内で一定であることがわかる。これで示されるように  $\Delta \epsilon$  は要素内の軸ひずみ増分の平均値を表わしている。

式 (24), (34), (35) を式 (33) に代入し,  $\partial q_i / \partial r_j$  を計算すれば, 所用のマトリックス  $B$  は次のように求まる。

$$B = \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} -1 & C_1 & C_2 l \\ w_{0,\xi} & 6(\xi^2 - \xi) & (1 - 4\xi + 3\xi^2)l \\ 0 & 0 & 0 \\ w_{0,\xi\xi}/l & 6(2\xi - 1)/l & 6\xi - 4 \\ 1 & -C_1 & C_3 l \\ -w_{0,\xi} & 6(\xi - \xi^2) & (3\xi^2 - 2\xi)l \\ 0 & 0 & 0 \\ -w_{0,\xi\xi}/l & 6(1 - 2\xi)/l & 6\xi - 2 \end{Bmatrix} \dots\dots(37)$$

ここでは以下の記号を使用している。

$$\left. \begin{aligned} w_{0,\xi} &= \theta_{0A} (3\xi^2 - 4\xi + 1) + \theta_{0B} (3\xi^2 - 2\xi) \\ w_{0,\xi\xi} &= \theta_{0A} (6\xi - 4) + \theta_{0B} (6\xi - 2) \\ C_1 &= (\theta_{0A} + \theta_{0B})/10 \\ C_2 &= 2\theta_{0A}/15 - \theta_{0B}/30 \\ C_3 &= 2\theta_{0B}/15 - \theta_{0A}/30 \end{aligned} \right\} \dots\dots(38 a \sim e)$$

以上より, 弾性剛性マトリックスは式 (37) を式 (16) に代入し積分を実行すれば得られる。幾何学的剛性マトリックスおよび修正荷重項については初期力を次のようにおき,

$$\left. \begin{aligned} T &= P \\ M &= M_A (1 - \xi) - M_B \xi - P w_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(39 a, b)$$

これと式 (37) を式 (18) および式 (20) に代入し積分を実行すればよい。ここで  $M_A, M_B$  は 図-5 における棒要素の節点  $A$  および  $B$  の初期曲げモーメントである。以下にこれらの結果を示す。

$$\begin{aligned}
 & k^E = \frac{EA}{l} \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & -C_1 & -C_2l & -1 & C_1 & -C_3l \\ & C_1^2 & C_1C_2 & C_1 & -C_1^2 & C_1C_3 \\ & & C_2^2 & C_2l & -C_1C_2 & C_2C_3 \\ & \text{sym.} & & 1 & -C_1 & C_3l \\ & & & & C_1^2 & -C_1C_3 \\ & & & & & C_3^2 \end{array} \right\} \\
 & \frac{EI}{l^3} \left\{ \begin{array}{cccccc} D_1 & D_2 & D_3l & -D_1 & -D_2 & D_4l \\ & 12 & 6l & -D_2 & -12 & 6l \\ & & 4l^2 & -D_3l & -6l & 2l^2 \\ & \text{sym.} & & D_1 & D_2 & -D_4l \\ & & & & 12 & -6l \\ & & & & & 4l^2 \end{array} \right\} \\
 & k^C = \frac{P}{l} \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & -C_1 & -C_2l & 0 & C_1 & -C_3l \\ & 6/5 & l/10 & C_1 & -6/5 & l/10 \\ & & 2l^2/15 & C_2l & -l/10 & -l^2/30 \\ & \text{sym.} & & 0 & -C_1 & C_3l \\ & & & & 6/5 & -l/10 \\ & & & & & 2l^2/15 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(40 a \sim c) \\
 & + \frac{1}{l^2} \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & M_A+M_B & M_Bl & 0 & -M_A-M_B & M_Bl \\ & 0 & 0 & -M_A-M_B & 0 & 0 \\ & & 0 & -M_Al & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & 0 & M_A+M_B & -M_Bl \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{array} \right\} \\
 & \Delta R_3 = R - P \left\{ \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} -1 \\ C_1 \\ C_2l \\ 1 \\ -C_1 \\ C_3l \end{pmatrix} & -\frac{M_A}{l} \begin{pmatrix} \theta_{0A} \\ 1 \\ l \\ -\theta_{0A} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & -\frac{M_B}{l} \begin{pmatrix} \theta_{0B} \\ 1 \\ 0 \\ -\theta_{0B} \\ -1 \\ l \end{pmatrix} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

ここに新たに導入した記号は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned}
 D_1 &= 4(\theta_{0A}^2 + \theta_{0B}^2 + \theta_{0A}\theta_{0B}) \\
 D_2 &= 6(\theta_{0A} + \theta_{0B}) \\
 D_3 &= 4\theta_{0A} + 2\theta_{0B} \\
 D_4 &= 4\theta_{0B} + 2\theta_{0A}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41 a \sim d)$$

7. 増分後の初たわみ角の補正

以上に各剛性マトリックスおよび修正荷重項を要素に

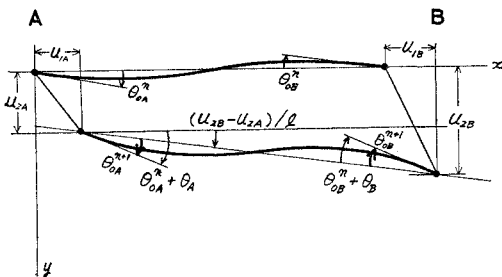


図-6 増分前後の棒要素

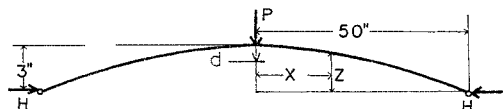
ついて提示したが、これを構造系について表現するのは通常の方法と全く同じなので省略する。ただ初たわみ角の補正についてのみ直棒要素の場合と相違点があるので述べることにする。

図-6 は局所座標における初たわみを有する棒要素の第  $n$  段階での増分前後の状態を示すものである。これより剛体回転の項だけ補正してやらねばならないことがわかる。第  $n+1$  段階での初たわみ角は補正して次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_{0A}^{n+1} &= \theta_{0A}^n + \theta_A - \frac{u_{2B} - u_{2A}}{l} \\
 \theta_{0B}^{n+1} &= \theta_{0B}^n + \theta_B - \frac{u_{2B} - u_{2A}}{l}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42 a, b)$$

8. 数値計算例と若干の考察

式 (40) によって表わされた各剛性マトリックスおよび修正荷重項を使用して、その精度、収束性を見るべく、Dawe<sup>5)</sup> が扱ったものと同じアーチの飛移り現象の数値



CROSS SECTION 1" x 3.117"

E=10<sup>7</sup> PSI

$$Z = \left(\frac{L}{4} - X^2\right) / 2R$$

R=10.58 m

L=2.54 m

図-7 両端ヒンジ, 中央点荷重のアーチ

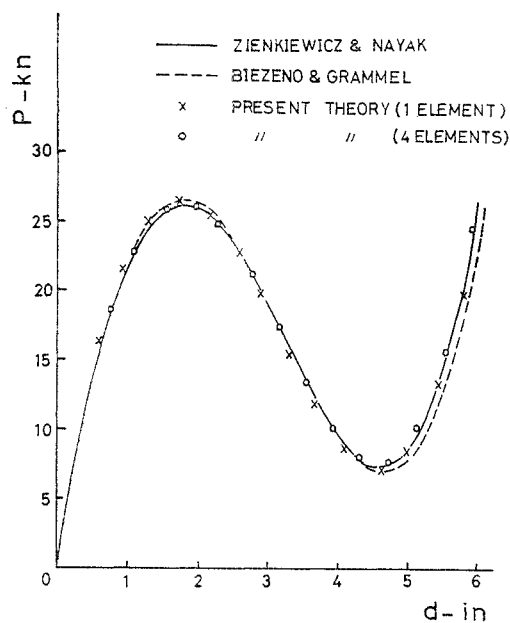


図-8 荷重 P とその点のたわみ d のグラフ

計算を行った。両端末は回転支持端で荷重  $P$  が中央部に作用する対称変形を取扱っている。 $H$  は水平支持反力で  $d$  は荷重点のたわみを示している。図-8 は  $P$  と  $d$  についてのグラフを示す。アーチの半分を一要素で理想化したもの、4 要素で理想化したものを示している。また比較解として、アイソパラメトリック要素 10 個で理想化した Zienkiewicz と Nayak の方法<sup>7)</sup> および Biezeno と Grammel の方法<sup>8)</sup> も示してある。図-9 は荷重  $P$  と水平反力  $H$  のグラフである。図-10 はステップ幅を変化させたときの  $P-d$  曲線を示している。これらに見られるようにこの程度の浅いアーチなれば、1 分割で充分実用的な解が得られる。このときの  $\theta_{0A}, \theta_{0B}$  はほぼ 0.06 である。理想化については 1 分割から順に 8 分割まで数値計算を実行したがほとんど差異がなく、精度、収束性とも良好であった。

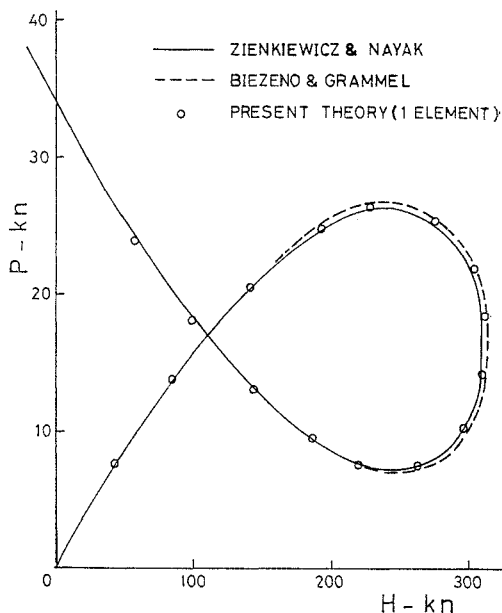


図-9 荷重 P と水平反力 H のグラフ

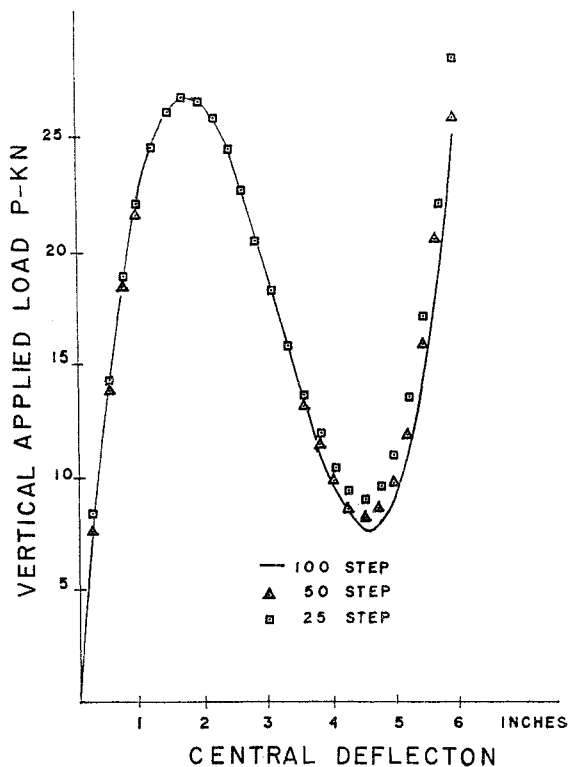


図-10 ステップ数(この曲線の終端までを 100 段階, 50 段階, 25 段階で行った場合)と  $P-d$  曲線

## 9. 結 論

仮想仕事の原理に基づき、修正荷重漸増法基礎増分式を導出し、それに必要な弾性剛性マトリックス、幾何学的剛性マトリックス、修正荷重項の一般表現をした。これは面内変形する細い曲棒に対して有効であるが、実用的には 6. で誘導した微小な初期たわみを有する棒程度であろうと思われる。

式 (40) 中に微量の 2 乗項があり、誘導の過程から見て矛盾があるが、これは初期たわみ角が大ききとき、誤差が大きくなり、直棒要素よりも劣ることになるので、そのときでも直棒要素程度の精度を得るために保持した。

変位関数、式 (35) の導入により  $B$  マトリックスが簡単となり各剛性マトリックス、修正荷重項の計算が簡略された。また、初期軸力の表現がすっきりし、精度も良好であった。

式 (40) 中に見られるように、幾何学的剛性マトリックスに初期曲げモーメントの項が入っているが、この項により、初期力として曲げモーメントを含む問題の解析が可能である<sup>9)</sup>。

数値例で見られるように、分割数がかなり少なくでき、従来の直棒要素よりも経済的に有利である。

最後に、本研究に関し、終始適切なるご指導を賜った名古屋大学工学部 西村融教授に深く感謝致します。なお、数値計算は名古屋大学大型計算センター FACOM 230-60 によった。

## 参 考 文 献

- 1) Hofmeister, L.D., G.A. Greenbaum, and D.A. Even-  
sen : Large Strain, Elasto-Plastic Finite Element  
Analysis, AIAAJ, Vol. 9, No. 7, pp. 1248-1254,  
1971.
- 2) Stricklin, J.A. and W.E. Haister : Evaluation of So-  
lution Procedures for Material and/or Geometrically  
Nonlinear Structural Analysis by the Direct Stiffness  
Method, AIAA/ASME/SAE 13th Structures, Struc-  
tural Dynamics, and Materials Conference, pp. 72-  
352~72-355, 1972.
- 3) Stricklin, J.A., W.A. Von Risemann, J.R. Tillerson,  
and W.E. Haisler : Static Geometric and Material  
Nonlinear Analysis, Advance in Computational Meth-  
od in Structural Mechanics and Design edited by  
J.T. Oden, R.W. Clough and Y. Yamamoto. pp. 301  
~324, 1972.
- 4) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method in  
Engineering Science, McGraw-Hill, London, pp. 28~  
36, 1971.
- 5) Dawe, D.J. : A Finite-Deflection Analysis of Shallow  
Arches by the Discrete Element Method, Internation-  
al Journal for Numerical Methods in Engineering,  
Vol. 3, pp. 529~552, 1971.
- 6) 篠崎 : 大変形する 空間棒要素の剛性マトリックス, 日本  
航空宇宙学会誌に投稿中.
- 7) Zienkiewicz, O.C. and G.C. Nayak : A General Ap-  
proach to Problems of Large Deformation and Plas-  
ticity using Iso-Parametric Elements, Proceeding of  
the Air Force Third Conference on Matrix Methods  
in Structural Mechanics, pp. 937~1004, 1971.
- 8) Biezeno, C.B. and R. Grammel : Elastic problems of  
Single Machine Elements, Van Norstrand, New  
Jersey, 1956.

(1973.9.3・受付)