【討　議】

諸戸靖史著 "Anisotropy and Stress Distribution in Sand" への討議

（土木学会論文報告集第212号・1973年4月号掲載）

討議者：木村　孟（東京工業大学工学部）

著者は，砂中の応力伝播が弾性論によって取り扱い得，弾性体における異方性の応力一ひずみ則は土のダイレイタンシーを表現するのに有効であると述べている。筆者も同種の研究に興味を有するものであるが，論文の内容，論法に若干の疑義があり，また解釈の誤りも見受けられるので，次の諸点について質問を呈する次第である。

（1）筆者は現在までの砂に関する研究の情勢から判断して，砂の変形問題に対する弾性論の適用性にはきわめて悲観的である。たしかに著者も引用しているごとく，Barden は「Manchester group の研究により $n(=E_x/E_z)<1$ であることが指示されている」と述べている。これは当時学位論文を書いていた El-Sohby (1964) の研究を暗に指しているものと考えられる。El-Sohby はその論文の中で，一般に砂の変形には塑性（irrecoverable）変形と弾性（recoverable）変形とが同時に存在し，前者は変形の絶対量がかなり小さいときでも起こり得ること，および後者の弾性変形に関しては，Hertz の弾性接触理論を参考にした理論計算が実験値と比較的良い一致を示すこと，を明らかにしている。

その後この線に関する研究は数多いが，El-Sohby の結論を支持するものが多いようである。また砂は力を受けると異方性の主軸が回転し，いわゆる inherent anisotropy とは異なった状態を呈するに至ることが予想される。

このような事情から，砂のごとき粒状体に弾性論を適用するには，おのずと限界があるように思われる。

（2）著者は Wolf の解が誤っていることを指摘し，独自の解を導いたとしている。たしかに Wolf の解にはミスがあり，このことについてはすでに筆者（1969）が述べている。軸対称の解の誤りは大きいが，著者の扱っている二次元の場合のそれはきわめてさ細である。Wolf はまず幅 $2a$ の帯荷重の場合の応力解を求め，次にこの式において $a\to 0$ とする常套手段によって，線荷重に対する応力式を得ている。すなわち，正解とともに示すと

$$(\delta_x,\ \delta_z,\ \tau_{xz})=\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{k}{\{x^2+z^2\}\{k^2x^2+z^2\}}\cdot(x^2,\ z^2,\ xz)z \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

$$\text{正解；}(\delta_x,\ \delta_z,\ \tau_{xz})=\frac{P}{\pi}\cdot\frac{(1+k)}{\{x^2+z^2\}\{k^2x^2+z^2\}}\cdot(x^2,\ z^2,\ xz)z$$

Wolf は $a\to 0$ とする計算過程で小さなミスを犯しただけで，この式（A）のよってきたる帯荷重に関する解は正解である。その意味で本文中の式（51）を著者の解とするのはどうであろうか。

また著者は，Wolf の解の定数とみずから求めた解中の定数とを比較している（本文中の Table 1）が，そもそも Wolf と著者とでは弾性係数比 k の取り方が異なっている。

（3）著者は，応力解を求めるために "Poisson 比の二乗の項を無視する" という手段を処々に用いているが，これはいかなる理由に基づくものであろうか。かような省略は，取り扱っている問題において，工学的見地からの割り切りが可能な場合にのみ行われるべきであって，砂のごとき dilatant material に対しては容認され得ないと考えられる。またかりにすべての Poisson 比が小さいと仮定したとしても，本文式（70）の諸定数を種々の k（あるいは n）の値について吟味すれば，これらが式（74）のごとくに簡単に単純化し得ないことは明らかである。

（4）著者は plane-strain の応力一ひずみ関係式（本文（30）～（32））から出発し，式（36）なる Barden の関係式を利用することによって応力解を導いている。しかしながらこの Barden の関係式は，工学的立場に立った一つの近似的な考えから導かれたものであって，これ自体 plane-stress 状態におけるものである。したがって，この関係式を plane-strain 状態の応力一ひずみ式に持ち込むには，それ相当の理由が必要であろう。

以上の諸点に関し，著者のご意見をお伺いできれば幸いである。

参考文献

a) El-Sohby (1964): The behaviour of particulate materials under stress, Manchester University, Ph. D thesis.

b) 木村　孟 (1969)：最上武雄編土質力学（第三章），技報堂

【回　答】

回答者：諸 戸 靖 史（東北大学工学部）

今回，私の論文に対してご討議をいただき非常に光栄に思い，感謝いたします。ご討議の内容は，筆者の論文に賛成しかねる部分，厳密性に欠ける部分があるとのご指摘であります。そのご意見，ある意味ではごもっともであると思いますが，全般的にみて討議者は，筆者の意図するところを誤解しておられるように思われます。また，なかには討議者の何かの思い違いであろうと見受けられるところもありますので，ここにお答えいたしたく存じます。

いうまでもなく，砂のような材料は変形初期から弾性変形のみならず塑性変形も生じ，またそれらの変形は非線形性を帯びかつ経路に依存するようなものであります。現在，粒状体の弾性，塑性法則は確立していなく，厳密に弾性変形と塑性変形とを分離することはできません。そのうえ土のような材料の弾性をどのように定義していったらよいかということに対する明白な意見もまだ聞いていないようであります。このような事情を考えれば，筆者も砂のような材料に対して，討議者と同様，厳密に弾性論を適用していくことにきわめて悲観的とならざるをえないことになります。

しかし，筆者と討議者との思いの違いは，厳密な意味で成立しないからその理論はよろしくない，用いられないとしてあきらめてしまうのではなく，完全ではないが一つの工学的手段として用い，土の力学において有用な結論を引き出すべく努めようとしているところにあるのではないでしょうか。

もっとも，土の変形は経路の指定なしには厳密には評価できないものであります。また，その変形に本質的に非線形性を有しております。しかし，荷重経路が単純でしかもその変形過程において平均的な変形係数が規定できる場合は，弾性論を援用して地盤問題の有用な情報が得られることは経験上よく知られているところであります。このことを念頭におき若干不本意でありますが，弾性論を用いているのであります。

等方性としての取り扱いからのズレは土の力学において重要と思われます。その一つには土粒子の堆積が異方的な重力場で行われるからであります。完全な球でも，その配列構造に異方性を帯びるようであります。砂粒子自体いびつであり，回転楕円体あるいは偏平な楕円体としての近似が適しているようであります。このことは堆積時の異方的配列構造を促進させるでありましょう。

もう一つは，粒状体の変形の重要な特性であるダイレイタンシーであります。土の変形を表わすには最低3つの変形係数が必要と考えられます。すなわち，一様圧縮における体積変形係数 K, せん断時におけるせん断変形係数 G, それにダイレイタンシーを表わす係数 D の3つであります。等方弾性理論では体積変形において K と D を区別して取り扱うことは不可能であります。したがって，ダイレイタンシーの記述には異方性の考慮が有用であることは明白なことであります。土における異方的変形特性の考慮は，スケンプトンの間げき水圧係数[1)]

$$u=B(\sigma_1+A(\sigma_1-\sigma_3))$$

のうちの A 係数の発想においてみられます。等方理論では

$$A=1/3$$

となるべきでありますが，実際には

$$A \fallingdotseq 1/3$$

が重要な意味をもつ土質定数となっているのであります。ホーン[2),3),4)]，小田[5)]の研究でダイレイタンシーと異方性の関連もかなり明確になってきたようであります。これらの事実により，土の力学における異方性の考慮は重要であることが理解できるのであります。そしてまず異方性の効果を大づかみに把握することが大切になってきます。

以上のような観点から多少精度を犠牲にしても問題を簡略化して取り扱っているわけです。そして第一義的な要素を重要として，特に異方性の程度を表わす尺度 $n=E_x/Ez$ を重視しております。ここに n は横方向と縦方向の変形係数の比であります。

ここで考えなければならないのはいかに n の値を評価するかということです。初期構造の異方性の尺度は等方圧縮試験における横方向と縦方向のひずみの比を用いて把握することが可能でありますが，ポアソン比を仮定する必要があります。ダイレイタンシーによる異方的変形時の n の値は通常の三軸試験で求める時にはある種のポアソン比を仮定する必要があり，真の三軸試験を理論上用いることを要請されます。この辺の事情を説明をいたします。

三軸試験を例にとって考えます。等方圧で砂供試体を圧縮した場合に生ずる縦方向ひずみ増分 $d\varepsilon_a$, 横方向ひずみ増分 $d\varepsilon_r$ の比を λ とおくと

$$\text{(d.1)}\quad \lambda=\frac{d\varepsilon_r}{d\varepsilon_a}=\frac{E_a(1-\nu_{rr})-\nu_{ar}E_r}{E_r-2\nu_{ra}E_a}$$

$$\text{(d.2)}\quad d\varepsilon_a=\frac{1}{E_a}d\sigma_a-\frac{2\nu_{ra}}{E_r}d\sigma_r$$

$$\text{(d.3)}\quad d\varepsilon_r=-\frac{\nu_{ar}}{E_a}d\sigma_a+\frac{1-\nu_{rr}}{E_r}d\sigma_r$$

ゆえに，

(d.4) $n=\dfrac{E_r}{E_a}=\dfrac{1-\nu_{ra}+2\lambda\nu_{ra}}{\lambda+\nu_{ar}}$

$d\sigma_a$：縦方向応力増分

$d\sigma_r$：横方向応力増分

E_a：縦方向変形係数

E_r：横方向変形係数

$\nu_{ar}, \nu_{ra}, \nu_{rr}$：ポアソン比

ここで，等方圧縮時においてはポアソン比の違いはあまりないものと仮定すると

(d.5) $n=\dfrac{1-\nu+2\lambda\nu}{\lambda+\nu}\ (\nu=\nu_{ar}=\nu_{ra}=\nu_{rr})$

λ を実測し ν を仮定すると r の値が求まります。

次にダイレイタンシーが生じている場合を考えます。せん断時において，せん断ひずみ $\gamma=\varepsilon_a-\varepsilon_r$，体積ひずみ $v=\varepsilon_a+2\varepsilon_r$ が

(d.6) $v=\dfrac{D}{2}(q/p)^2 \qquad q=\sigma_a-\sigma_r$

(d.7) $\gamma=G(q/p) \qquad p=\dfrac{1}{3}(\sigma_a+2\sigma_r)$

D, G：変形係数

圧縮時において

(d.8) $v=C\log p$

C：変形係数

とおけたとします。この場合，

(d.9) $dv=\dfrac{C}{p}dp+\dfrac{D}{p}(k)dq \qquad k=q/p$

(d.10) $d\gamma=\dfrac{G}{p}dq$

となります。式 (d.9)，(d.10) と式 (d.2)，(d.3) を比べると

(d.11) $\dfrac{1}{E_a}=\left[\dfrac{C}{9}+\dfrac{1}{3}(2G+Dk)\right]\dfrac{1}{p}$

(d.12) $\dfrac{\nu_{ra}}{E_r}=\left[-\dfrac{C}{9}+\dfrac{1}{3}\left(G+\dfrac{Dk}{2}\right)\right]\dfrac{1}{p}$

(d.13) $\dfrac{\nu_{ar}}{E_a}=\left[-\dfrac{C}{9}+\dfrac{1}{3}(G-Dk)\right]\dfrac{1}{p}$

(d.14) $\dfrac{1-\nu_{rr}}{E_r}=\left[\dfrac{2C}{9}+\dfrac{1}{3}(G-Dk)\right]\dfrac{1}{p}$

を得ます。

ここで，

(d.15) $\dfrac{\nu_{rr}}{E_r}=\left[-\dfrac{C}{9}+\dfrac{1}{3}(G-m'D\cdot k)\right]\cdot\dfrac{1}{p}$

m'：ある定数

とおきます。式 (d.15) と式 (d.14) から

(d.16) $\dfrac{1}{E_r}=\left[-\dfrac{C}{9}+\dfrac{1}{3}(2G-mDk)\right]\cdot\dfrac{1}{p},$

$m=m'+1$

式 (d.16) と式 (d.11) から

(d.17) $n=\dfrac{E_r}{E_a}=\dfrac{(\alpha+1)-\beta}{(\alpha+1)+m\beta}$

$$=1-\frac{(1+m)\beta}{\alpha+1+m\beta}$$

$$\frac{2}{9}C\Big/\frac{2}{3}G=\alpha \qquad \frac{Dk}{2G}=-\beta$$

となり，ダイレイタンシーに関する係数 β が大きくなれば n の値は小さくなることがわかります。ここで n の値を算出するには，m の値を仮定するかあるいは式(d.14)において，ν_{rr} の値を仮定する必要があります。

このように現実問題といたしまして，n の値を求めることがかなりめんどうであることが推察されます。ポアソン比を正しく定めることにいたってはそれこそ不可能といってもよいでしょう。ただ，ダイレイタンシーが生じてきますと ν_{ar} はだんだん増加いたしますが，ν_{ra} のほうは0に近い値をとるように変化することが考えれらます[6]。討議者は理論的精度を念頭におき，ポアソン比の自乗を無視していること，あるいはダイレイタンシーを有する変形時の異方性の主軸が回転することを考えていないことは許されないと述べておられます。筆者は現段階においては，まず n の値が地盤の特性とどのように関連しているかを調べるほうが，実験的に求めることがきわめて困難なパラメーターを多く含む複雑な数式を取り扱うよりも賢明であると考えるのであります。

バーデンは式 (36) で示される近似的な関係式を平面応力の仮定で求めておりますが，実際には三次元の問題に適用しております。筆者もこれにならって，三次元問題の一つの特殊な場合である平面ひずみの問題に用いているのであります。

ボルフは変形係数比 $n=E_z/E_x$ にとっております。この場合ボルフの解は

(d.18) $(\sigma_z, \sigma_x, \tau_{xz})=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{2k}{(x^2+z^2)(k^2x^2+z^2)}\cdot(z^2, x^2, xz)z$

ここで $n=E_x/E_z$ と書いた場合 $k\to 1/k$ として式(d.18) を書きなおすと

(d.19) $(\sigma_z, \sigma_x, \tau_{xy})=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{2k}{(x^2+z^2)(x^2+k^2z^2)}\cdot(z^2, x^2, xz)z$ ……………(53)

となります。筆者とボルフの n のとりかたが異なっておりますから，式 (53) のようにボルフの解を書き換えて比較しているのであります。

ボルフの式を用いて，

(d.20) $\bar{\sigma}_z=\gamma\displaystyle\int_0^h\int_0^\infty \sigma z dx dz$

を計算しても，$\bar{\sigma}_z=\gamma h$ とはなりません。

そこで，

(d.21) $(\sigma_z, \sigma_x, \tau_{xz})$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\eta_1\eta_2(\eta_1+\eta_2)}{\{(\eta_1z)^2+x^2\}\{(\eta_2z)^2+x^2\}}$$

$\cdot(z^2, x^2, xz)z$ ……………………………(49)

を用いて計算すると

(d.22) $\bar{\sigma}_z=\gamma h$

となります。また，

(d.23) $\bar{\sigma}_x=2\int_0^h\int_0^\infty \sigma x dx dz$

を計算すると

(d.24) $\bar{\sigma}_x=\eta_1\eta_2\gamma h$

となります。式 (d.22) と式 (d.24) の比をとると

(d.25) $K_0'=\frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\sigma}_z}=\eta_1\eta_2$

ここで，K_0' 値は地盤の K_0 値に類似する定数であります。バーデンの式 (36) を用いた場合

$K_0'=\sqrt{n}=k$ $(\because\ \eta_1=k,\ \eta_2=1)$

となります。ここで，$\sqrt{n}$ の値そのものよりも，K_0'といった定数に変形係数比 n すなわち異方性が密接に関係していることに興味があります。このことは実際の砂地盤の静止土圧係数が堆積時の異方性によっても影響されているであろうことを示唆するものとして興味深いものであります。正解（式 (49)）を用いると，式 (d.20)，式 (d.23) の操作がすっきりします。そのために筆者は式 (49) を誘導しているのであります。式 (51) を筆者の独自の解とするような考えは全然ありませんが，正解と近似解の違いは単に $k(k+1)$ と $2k$ であり，近似解を用いる利点はないのでありますから，今後式 (51) のほうを用いていくほうがよいのではないかと考えております。

砂地盤に載荷がある場合，初期構造による異方性もダイレイタンシーによる異方性も，荷重方向に応力を集中させるように働く。この応力集中性は変形係数比 $n=E_x/E_z$ により第一義的に左右される。フレーリッヒの集中係数の意味のなかには異方性も含めて考えていかなければならない。というのが筆者が主に述べているところであります。筆者は，討議者のような理論に厳密な行き方を軽視するものでは絶対にございません。いろいろ教えていただきました。しかし，筆者の立場，意図するところをも理解していただければ幸いです。今後ともよろしくご教示願う次第であります。

参考文献

1) Skempton, A.W. : The pore pressure coefficients A and B, Geot. 4, (1954), pp. 143-147.

2) Horne, M.R. : The behaviour of an assembly of retund, rigid, cohesionless particles, Proc. Roy. Soc. London, Series A, Vol. 286, (1965), pp. 62-78.

3) Horne, M.R. : The behaviour of an assembly of retund, rigid, cohesionless particles II, Proc. Roy. Soc. London, Series A, Vol. 286, (1965), pp. 79-97.

4) Horne, M.R. : The behaviour of an assembly of refund, rigid, cohesionless particlec III, Proc. Roy. Soc. London, Series A, Vol. 310, (1969), pp. 21-34.

5) Oda, M. : The mechanism of fablic changes during compressional deformation of sand, Proc., JSSM, Vol. 12, No. 2, (1972), pp. 1-17.

6) 諸戸靖史：砂の弾性的な変形特性，土質工学会論文報告集，Vol. 12, No. 3, (1972), pp. 65-74.