

増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法

AN ACCELERATION APPROACH FOR LARGE DEFORMATION
STRUCTURAL ANALYSIS BY INCREMENTAL METHOD

前田 幸雄*・林 正**・中村 守***

By Yukio Maeda, Masa Hayashi and Mamoru Nakamura

1. 緒 言

有限要素法による構造物の非線形問題の解析は、すでに多くの研究者によって発表されており^{1)~4)}、それらの計算法についても種々の方法が研究されている。幾何学的非線形問題とともに材料非線形問題の解析に用いられる増分法は、累積誤差のために荷重の増分量の大きさによって計算結果の値が異なり、精度上問題がある。この累積誤差を除く最も簡単な方法として修正増分法⁵⁾が考えられ、さらに精度を上げるには Newton-Raphson 法を併用した混合法が用いられる。

この混合法による解法は、信頼性の高い解を与えるが、各増分段階において反復計算を行うために計算時間が長くなる欠点がある。そこで、この反復計算を加速する方法も発表されている⁶⁾。一般に用いられている混合法では、新たな荷重増分に対する変位増分を求めるのに、前段階までに求められた変位または応力をそのまま用いて計算を行っているので、得られた変位の第1近似値は真の平衡状態とはかなり異なる。それゆえに、与えられた荷重に対する平衡状態を求めるための反復計算の回数は多くなる。

本文で提案する‘推定増分法’では、新たな荷重増分に対する計算を行うときに、前段階までに生じた変位からいま求めようとする未知変位を推定し、その推定変位を用いて平衡方程式をたてる。したがって、その推定した変位が真の平衡状態に近いものであれば、反復法による修正計算をほとんど必要とせず、計算時間の大幅な短縮化になる。

推定増分法は、原則として、混合法における計算を加

速する方法であって、荷重を1~2回増分した後、新たな荷重増分に対する変位増分の第1近似値を多元連立方程式を解くことなく簡単な代数計算により推定するので推定値の計算に要する演算時間はごくわずかである。

推定増分法は、荷重—変位曲線が滑らかな形をしている限り適用可能であり、本文では計算例として、平面骨組構造物の幾何学的非線形問題の場合を示すが、他の非線形問題にも適用することができる。

平面骨組構造物の大変形問題における剛性行列は、文献²⁾に詳細に与えられているが、本文においては変形後の状態を考えれば式が簡単になることを示し、さらに境界条件が異なった場合の剛性行列も導いた。また、この計算手順を用いれば、部材の曲率を表わす式に近似式を用いても大変形問題を解くことができることを示した。

2. 推定増分法

増分法において、第 n 回までの増分段階が完了している状態を考える(図—1)。このとき、次の荷重段階 P_{n+1} に対する変位 D_{n+1} を求めるときに、通常増分法では、荷重増分 ΔP_{n+1} に対する変位増分 ΔD_{n+1} を未知変位に関する多元連立方程式を解くことにより求め、第1近似解として $\Delta D_{n+1}'$ を得る。したがって、新たな荷重増分 ΔP_{n+1} に対する真の変位増分 ΔD_{n+1} を求めようとするならば、さらに数回の反復計算を行わねばならない。

これに対して、推定増分法では、荷重増分に対する変位増分を前段階までの計算結果 (D_n, D_{n-1}, \dots) を用いて外挿的に推定し、この推定値 ΔD_{n+1}^* を ΔD_{n+1} の第1近似解とするものである。すなわち、図—1に示すように通常増分法では荷重—変位曲線に対する接線から変位の近似値を求めるのに対し、推定増分法では荷重—変位曲線を適当な関数で近似した曲線から求めるので、接線を用いる場合より精度の高い近似値が得られる。

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 大阪大学講師 工学部土木工学科

*** 学生会員 大阪大学大学院工学研究科修士課程 土木工学専攻

† 土木学会第27回年次学術講演会にて一部発表済

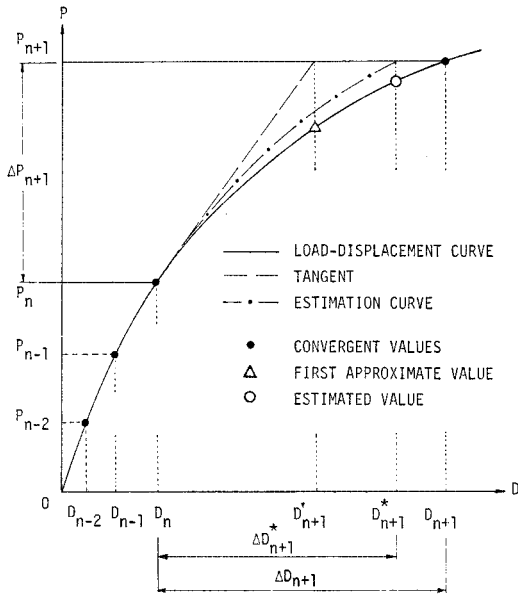


図-1 推定増分法

推定値の計算には種々の曲線式が考えられるが、もっとも簡単な2次および3次放物線による計算式と、割線に相当する1次式による計算式は次のようになる。

1次式：

$$\Delta D_{n+1}^* = \Delta P_{n+1} \frac{\Delta D_n}{\Delta P_n} \quad (n \geq 1) \dots\dots\dots (1)$$

2次式：

$$\Delta D_{n+1}^* = \Delta P_{n+1} \left\{ \frac{\Delta D_n}{\Delta P_n} + \left(\frac{\Delta P_{n+1} + \Delta P_n}{\Delta P_n + \Delta P_{n-1}} \right) \cdot \left(\frac{\Delta D_n}{\Delta P_n} - \frac{\Delta D_{n-1}}{\Delta P_{n-1}} \right) \right\} \quad (n \geq 2) \dots\dots\dots (2)$$

3次式：

$$\Delta D_{n+1}^* = \Delta P_{n+1} \left\{ \frac{\Delta D_n}{\Delta P_n} + \left(\frac{\Delta P_{n+1} + \Delta P_n}{\Delta P_n + \Delta P_{n-1}} \right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta P_{n+1} + \Delta P_n + \Delta P_{n-1}}{\Delta P_n + \Delta P_{n-1} + \Delta P_{n-2}} \right) \cdot \left(\frac{\Delta D_n}{\Delta P_n} - \frac{\Delta D_{n-1}}{\Delta P_{n-1}} \right) - \left(\frac{\Delta P_{n+1} + \Delta P_n}{\Delta P_{n-1} + \Delta P_{n-2}} \right) \cdot \left(\frac{\Delta P_{n+1} + \Delta P_n + \Delta P_{n-1}}{\Delta P_n + \Delta P_{n-1} + \Delta P_{n-2}} \right) \cdot \left(\frac{\Delta D_{n-1}}{\Delta P_{n-1}} - \frac{\Delta D_{n-2}}{\Delta P_{n-2}} \right) \right\} \quad (n \geq 3) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

$$\Delta D_k = D_k - D_{k-1}, \quad \Delta P_k = P_k - P_{k-1}, \quad D_0 = P_0 = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (4)$$

この推定増分法によれば、各増分段階での第1近似解は簡単な代数計算により求められるので、多元連立方程式を解く通常の方法に較べて第1近似解を求めるための計算時間は無視できるほど短い。しかも、構造物の全節点の各変位成分に対する推定値をそれぞれに適した曲線

から計算するので、近似値の精度がよい。したがって、第2近似値以下の値を求めるための Newton-Raphson 法による修正計算の反復回数は少なくなる。

推定増分法は、荷重-変位曲線が滑らかな形をしている場合には曲率の正負に関係なく適用することができるが、曲率が急に変化する場合にはその効果は減少する。

3. 大変形解析の計算式と計算手順

この節では、本文の計算例で用いた大変形解析の計算式と計算手順を簡単に説明する。

(1) 剛性行列

平面骨組構造物は等断面の直線材により構成されているものとし、ひずみと応力の関係は線形であるとする。

図-2 に示すような記号を用いれば、軸変形 ϵ_x および曲率 ρ は高次の微小項を省略して、それぞれ式 (5) および式 (6) で与えられる。

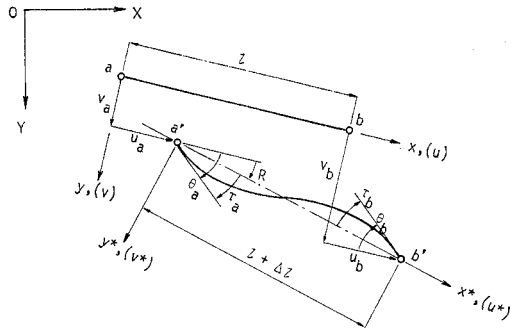


図-2 部材端変位

$$\epsilon_x \approx \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \dots\dots\dots (5)$$

$$\rho \approx - \frac{d^2v}{dx^2} \dots\dots\dots (6)$$

したがって、部材のひずみエネルギー U は

$$U = \int_V \frac{1}{2} E \epsilon^2 dV = \frac{EA}{2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 + \frac{I}{A} \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right\} dx \dots\dots\dots (7)$$

となる。ここで、部材内の変位 u, v を

$$u \approx \left(1 - \frac{x}{l} \right) u_a + \left(\frac{x}{l} \right) u_b \dots\dots\dots (8)$$

$$v \approx \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \right) v_a + \left(3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} \right) v_b + \left(x - 2 \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) \theta_a + \left(- \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) \theta_b \dots\dots\dots (9)$$

と仮定すれば、ひずみエネルギー U は部材端変位 d

$(u_a, v_a, \theta_a, u_b, v_b, \theta_b)$ の関数として表わすことができる。

部材端力 f と材端変位 d との関係式は、全ポテンシャル・エネルギーの停留条件から剛性行列 k を用いて、式 (10) のような形に導くことができる。

$$f = k(d) \cdot d = \{k_0 + k_1(d) + k_2(d)\} d \dots \dots \dots (10)$$

ここに、 k_0 は微小変形理論における剛性行列であり、 k_1, k_2 が非線形項でそれぞれ変位 d の 1 次および 2 次の項を含む。

また、部材端力の増分 Δf と材端変位の増分 Δd との関係式は、式 (10) より

$$\Delta f = \Delta k(d) \cdot \Delta d = \{k_0 + 2k_1(d) + 3k_2(d)\} \Delta d \dots \dots \dots (11)$$

となる。

種々の境界条件に対する剛性行列 $k(d)$ を付録—1 に示す。

(2) 計算手法

式 (10) を導くときには種々の仮定が用いられているので、数値計算を行うときにはこれらの仮定を犯さないような計算手法を考えねばならない。

式 (8), (9) で仮定した変位関数は微小変形理論による解であり、曲率を表わす式 (6) には $(dv/dx)^2 \ll 1$ という仮定が含まれている。そこで、部材端変位を变形後の部材座標系で表わして剛体変位を除去する。したがって、式に含まれる回転角は節点回転角 θ ではなくて、接線回転角 τ を用いる。この手法により、部材回転角が大きくても接線回転角が微小である限り式 (6) の近似は許されるし、さらに、部材の分割数を多くすることにより接線回転角を小さくすることができる。このような計算手法により、式 (10) は大変形問題にも十分適用できるものとなる。

数値計算においては、式 (10) を变形後の部材座標系で表わした式 (12) を、また基準座標系で表わした式 (13) を用いた。ただし、* 印は变形後の部材座標系、大文字は基準座標系に関する値であることを意味する。

$$f^* = k(d^*) \cdot d^* \dots \dots \dots (12)$$

$$F = C(X) \cdot k(d^*) \cdot d^* \dots \dots \dots (13)$$

ここに、 $C(X)$ は座標変換行列で、 X は变形後の節点座標を表わす。また、变形後の材端変位 $d^*(u_a^*, v_a^*, \theta_a^*, u_b^*, v_b^*, \theta_b^*)$ は、次式で与えられる (図—2)。

$$u_b^* - u_a^* = d l \dots \dots \dots (14.1)$$

$$v_a^* = v_b^* = 0 \dots \dots \dots (14.2)$$

$$\theta_a^* = \left. \frac{dv^*}{dx^*} \right|_a = \tan \tau_a = \frac{(l + u_b - u_a) \cdot T_a - (v_b - v_a)}{(l + u_b - u_a) + (v_b - v_a) \cdot T_a} \dots \dots \dots (14.3)$$

$$\theta_b^* = \left. \frac{dv^*}{dx^*} \right|_b = \tan \tau_b = \frac{(l + u_b - u_a) \cdot T_b - (v_b - v_a)}{(l + u_b - u_a) + (v_b - v_a) \cdot T_b} \dots \dots \dots (14.4)$$

$$T_a = \tan \theta_a = \left. \frac{dv}{dx} \right|_a \dots \dots \dots (14.5)$$

$$T_b = \tan \theta_b = \left. \frac{dv}{dx} \right|_b \dots \dots \dots (14.6)$$

式 (14) の関係式を用いた剛性行列 $k(d^*)$ を、付録—2 に示す。

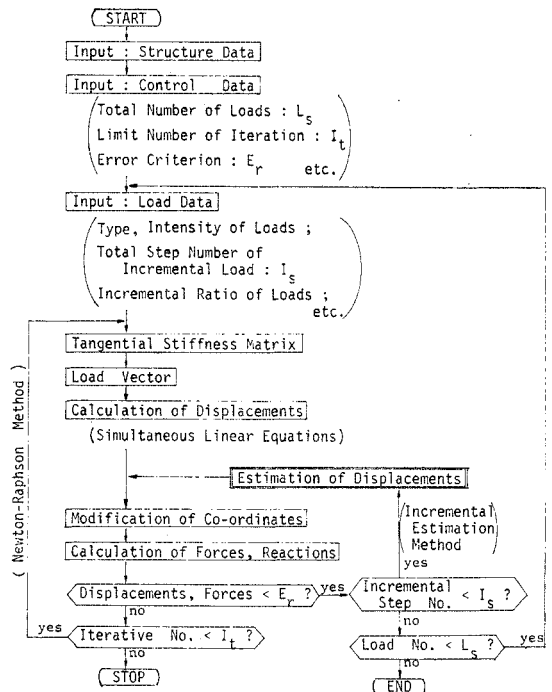
(3) 計算手順

数値計算の手順を図—3 に示す。

増分法においては、各節点における不平衡力を次の増分段階で節点外力として加えた。

(4) 収束条件と誤差

Newton-Raphson 法における収束判定条件にはいろいろな条件式が考えられるが、本文では変位に対しては式 (15) を、応力に対しては式 (16) を用いた。すなわち、荷重の各増分段階において、全節点の各変位成分に対しては増分量の相対誤差が許容誤差 ϵ_d を満足するまで、荷重載荷点の不平衡力に対しては荷重増分量に対する相対誤差が許容誤差 ϵ_f を満足するまで反復計算を繰返した。さらに、全節点の不平衡力については絶対誤差に対する収束判定も同時に行った。



図—3 流れ 図

$$\max_i \left| \frac{\Delta \delta_{n,i}^{(k)} - \Delta \delta_{n,i}^{(k-1)}}{\sum_k \Delta \delta_{n,i}^{(k)}} \right| \leq \epsilon_d \dots\dots\dots (15)$$

$$\max_j \left| \frac{\Delta F_{n,j}^{(k)}}{\Delta P_{n,j}} \right| \leq \epsilon_f \dots\dots\dots (16)$$

ここに、

$\Delta \delta_{n,i}^{(k)}$: 第 n 回目の荷重増分により、第 i 節点に生ずる変位成分の第 k 回目の反復計算時の増分量

$\Delta F_{n,j}^{(k)}$: 第 n 回目の荷重増分において、第 k 回目の反復計算による第 j 節点の不平衡力

$\Delta P_{n,j}$: 第 j 節点に作用する第 n 回目の荷重増分量

ϵ_d, ϵ_f : 変位および応力に対する許容誤差

推定増分法により変位の増分量を推定したときの誤差を次式で定義する (図-1)。

$$\text{推定誤差} = \left(\frac{\Delta D_n^* - \Delta D_n}{\Delta D_n} \right) \times 100 (\%) \dots (17)$$

ここに、 ΔD_n は第 n 段階目における増分量の収束値である。

4. 数値計算例

推定増分法の効果および推定値の精度を、平面骨組構造物の幾何学的非線形問題の場合について調べてみる。

(1) ケーブル・トラス (計算例 1)

図-4 に示すようなスパン 100 m のケーブル・トラスに種々の荷重を載荷した場合の計算を行った。

主ケーブル、サブ・ケーブルおよびハンガー・ケーブルの伸び剛性 EA の値は、それぞれ次のとおりである。

$$EA = 1.0 \times 10^5, 0.6 \times 10^5, 0.1 \times 10^5 \text{ t}$$

荷重は 2 段階に分けて逐次重ね合わせた。その値を表-1 に示す。また、各荷重段階においては、荷重を

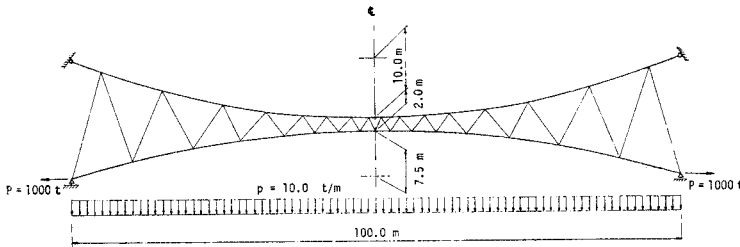


図-4 ケーブル・トラス (計算例 1)

表-2 増分荷重 (計算例 2)

Step No.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Case A	ΔP	35	35	30	50	50	10	10	10	10	10	10	10	10	10
	P	35	70	100	150	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290
Case B	ΔP	35	35	30	10	10	10	10	10						
	P	35	70	100	110	120	130	140	150						

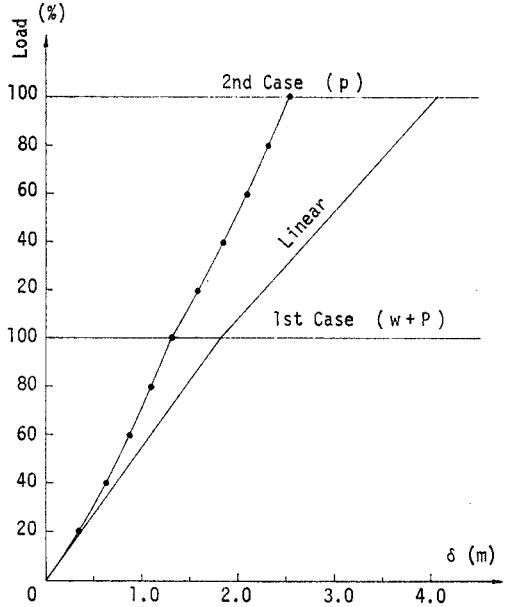


図-5 たわみ (計算例 1)

表-1 載荷荷重 (計算例 1)

Case No. of Load	Kind of Loads
1st Case ($w+P$)	Dead weight + Prestress
2nd Case (p)	Full-uniform distributed load

20% ずつ増加した。

サブ・ケーブルの中央点のたわみ δ の荷重-変位曲線を図-5 に示す。

(2) 2 ヒンジアーチ (計算例 2)

図-6 に示す 2 ヒンジアーチ²⁾の大変形解析を行った。数値計算に用いた断面積、断面 2 次モーメントおよびヤング係数は次のとおりである。

$$A = 8.65 \times 10^{-2} \text{ m}^2, I = 3.64 \times 10^{-2} \text{ m}^4,$$

$$E = 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

荷重は、節点集中荷重をアーチに飛移が発生するまで載荷した。このとき、図-7 のような 2 通りの場合を計算した。Case B の荷重は、逆対称モードを起させるために Case A の荷重に強度 1/100 の荷重を付加したものである。それぞれの荷重に対する荷重増分を表-2 に示す。

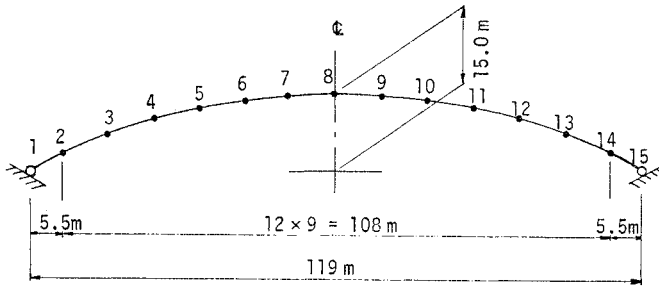


図-6 2 ヒンジャーチ (計算例 2)

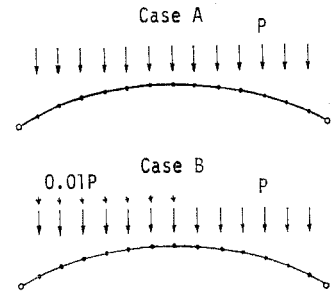


図-7 荷重載荷状態 (計算例 2)

図-8 は最大たわみが生ずる点の荷重-変位曲線である。図中に対称および逆対称座屈荷重を記入した。実線は変形の影響を考慮した全体座屈荷重²⁾であり、破線は弾性座屈荷重である。数値計算では、増分荷重が全体座屈荷重を越えたときに飛移が起きた。Case A では飛移の直前での変形が大きいため、弾性座屈荷重より 15% も少ない荷重で飛移が生ずる。

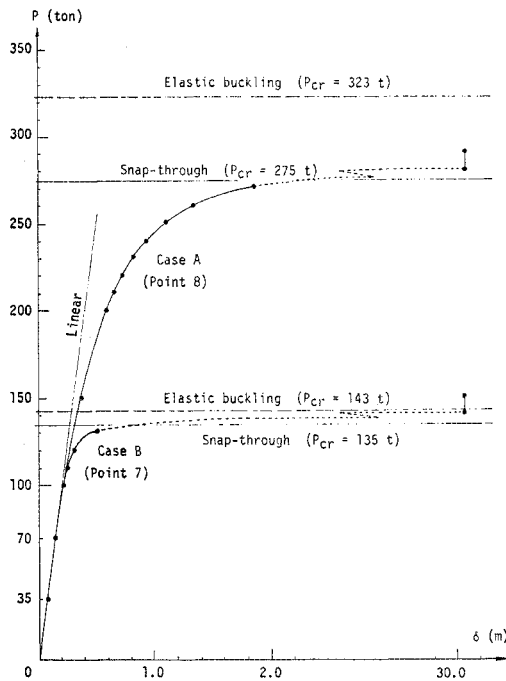


図-8 最大たわみ (計算例 2)

(3) エラスティカ (計算例 3)

変位の 2 次項を含む非線形剛性行列 k_2 が無視できない場合の計算例として、エラスティカを扱った (図-9)。

計算で用いた無次元量は

$$EA = EI = 10^6$$

であり、部材を 20 分割して初期変位 δ_0 を部材長 L の $1/1000$ とした。

オイラーの座屈荷重 $P_{cr} = 61.685$ に対して、表-3 に示す 2 通りの方法で荷重を 100 まで載荷した。Case A では、荷重が 50 以後は増分量を一定値 1.0 にした場合、Case B では座屈荷重後、増分量を比例級数的に増加させた場合である。

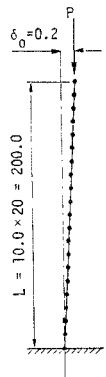


図-9 エラスティカ (計算例 3)

表-3 増分荷重 (計算例 3)

Case	A		B					
	1~5	6~55	1~5	6	7~17	18~21	22, 23	24~27
N	1~5	6~55	1~5	6	7~17	18~21	22, 23	24~27
ΔP	10.0	1.0	10.0	5.0	1.0	2.0	3.0	5.0
P	0~50	51~100	0~50	55	56~66	68~74	77, 80	85~100

N : Step number of incremental method.

計算結果は Case A, B と同じ値であり、楕円積分による解析解²⁾とよく一致している (表-4)。荷重を Case A の方法で載荷した場合の自由端の変位を 図-10, 11 に示す。

変形後の部材の節点回転角 θ^* を

$$\theta^* = \tau = \theta - R$$

表-4 計算値と解析解 (計算例 3)

$\tan \theta_0$		0.28250	0.90397	1.5308	5.7521	-10.869	-3.4018
P	Computed	62.00	66.00	70.00	80.00	90.00	100.00
	Theoretical	62.27	66.06	70.00	79.89	89.77	99.65
U_0	Computed	34.78	88.38	113.72	143.91	155.78	160.20
	Theoretical	34.74	88.39	113.80	144.04	155.95	160.40
V_0	Computed	3.823	26.36	46.88	88.51	119.93	144.45
	Theoretical	3.785	26.25	46.77	88.39	119.84	144.40

として、式(14.3),(14.4)による変換を行わなかった場合には計算結果はかなり違った値に収束する。この値を図-10, 11 に白丸印で示した。黒丸印は式(14)を用いた値である。

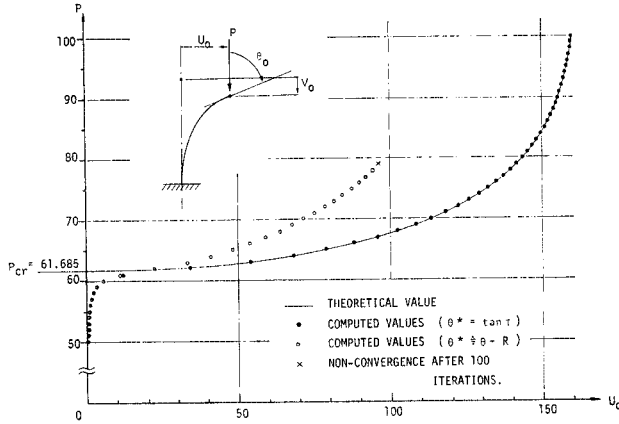


図-10 水平変位 (計算例 3: Case A)

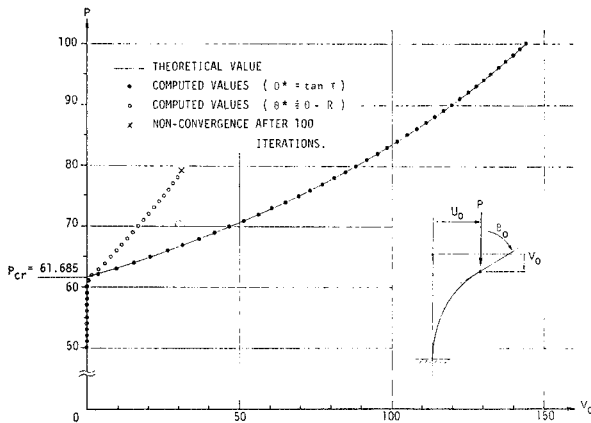


図-11 鉛直変位 (計算例 3: Case A)

(4) 推定増分法の評価

計算例 1, 2 の場合のスパン中央点のたわみの推定値の誤差と Newton-Raphson 法の反復回数を表-5, 6 に示す。また、計算例 3 の場合の自由端の水平変位の推定誤差を図-12 に示す。変位の推定を行わない場合の誤差とは、Newton-Raphson 法により求めた第 1 近似値に対する誤差を式(17)と同じ定義により算出したものである。正の推定誤差は変位を収束値より過大に推定したものであり、負の値は過小であることを意味する。

2 次または 3 次式による推定の効果は、第 3 または第 4 回目以後の荷重増分段階で現われる。計算例 1, 2 では 3 次式による推定値が一番良好な値を示している。計算例 3 では、Case A のときには 2 次式による推定値の誤差が最も小さい。荷重増分量が大きい Case B の場合では、2 次式による推定誤差は 10~30%, 3 次式では 5~20% になった。他の変位成分 V_0 , θ_0 に対する推定誤差は、 U_0 に対する誤差よりずっと小さい。

次に、計算時間についての推定法の効果は、Newton-Raphson 法における許容誤差により一概には評価しがたい。推定増分法では各増分段階における第 1 近似値のみを推定するので、収束条件が厳しいときにはそれだけ反復法の繰返し回数が多くなり、推定法の効果は平均化された形で評価されることになる。計算時間は Newton-Raphson 法の反復回数にほぼ比例するので、概略的な計算時間の短縮率は反復回数

表-5 たわみの推定誤差と反復回数 (計算例 1)

Case No.	1st					2nd					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
Step No.	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
P (%)	20	40	60	80	100	20	40	60	80	100	
Error (%)	Eq.(1)	—	16.18	12.98	10.96	9.55	—	5.50	5.01	4.60	4.25
	Eq.(2)	—	16.18	-5.31	-3.44	-2.45	—	5.50	-0.77	-0.64	-0.54
	Eq.(3)	—	16.18	-5.31	2.44	1.32	—	5.50	-0.77	0.16	0.12
Times	—	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	Eq.(1)	4	3	3	3	3	4	3	3	3	3
	Eq.(2)	4	3	2	2	2	4	3	3	2	2
	Eq.(3)	4	3	2	2	2	4	3	3	2	2

表-6 たわみの推定誤差 (計算例 2: Case A)

Step No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
P (t)	35	70	100	150	200	210	220	230	240	250	260	270	
Eq.	(1)	—	-8.3	-10.1	-17.5	-32.8	-30.1	-15.9	-18.6	-22.2	-27.2	-35.2	-52.0
	(2)	—	-8.3	-3.2	-7.3	-18.1	-16.4	-7.4	-5.7	-7.7	-11.1	-17.5	-35.1
	(3)	—	-8.3	-3.2	-3.6	-11.2	-9.9	-4.5	-3.1	-3.3	-5.5	-10.3	-26.7

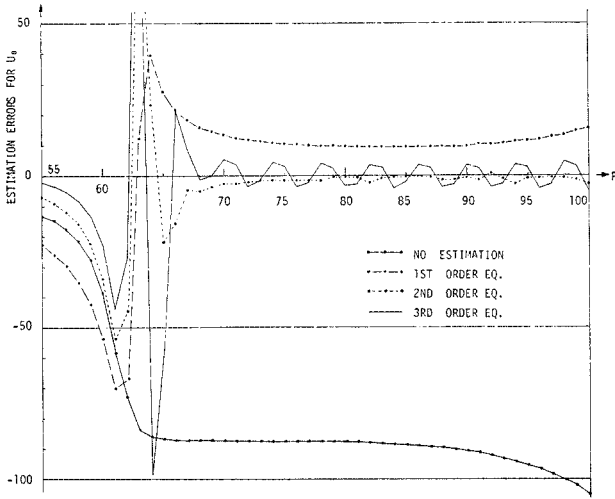


図-12 U_x の推定誤差 (計算例 3: Case A)

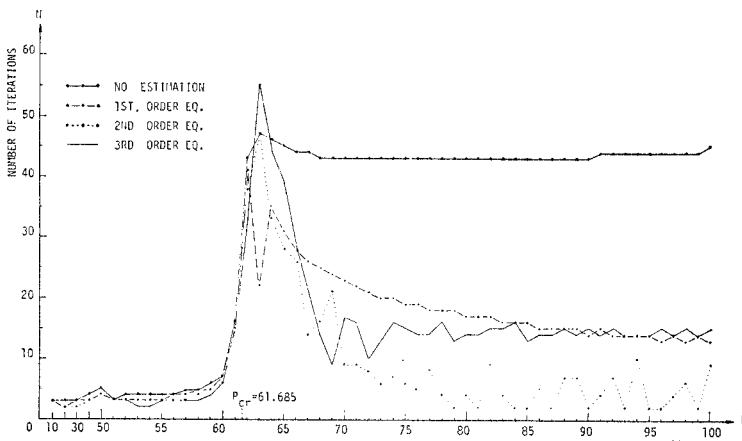


図-13 反復回数 (計算例 3: Case A)

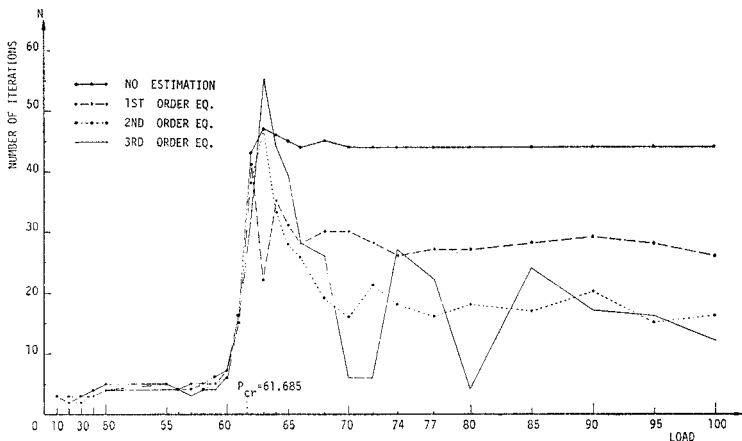


図-14 反復回数 (計算例 3: Case B)

表-7 計算時間 (計算例 1) (sec)

N	2	3	4
CPU time	1.45	2.08	2.51

(for NEAC 2200-700)

で評価できる。

具体的には、計算例 1 では式 (15), (16) の許容誤差として $\epsilon_d = \epsilon_f = 10^{-4}$ とした。このとき 1 回の荷重増分に要する計算時間は表-7 のようになった。ここに、 N は Newton-Raphson 法の反復回数を表わす。したがって、2 次または 3 次式による推定法の効果は、計算時間を 20~40% ほど短縮する。

計算例 3 における Newton-Raphson 法の反復回数を図-13, 14 に示す。このときの許容誤差は $\epsilon_d = \epsilon_f = 10^{-3}$ とした。計算時間は 1 回の荷重増分に対して反復回数が 43 回のとき 9.70 秒かかった。一方、2 次の推定式を用いた場合には、荷重が 70 以上のときに Case A で平均反復回数は約 5 回で計算時間は 1.24 秒であった。Case B では平均反復回数は約 18 回で 4.15 秒であった。したがって、計算時間はそれぞれ約 87% および 57% 短くなる。

5. 結 語

本文では、増分法を用いて構造物の非線形解析を行う場合に、計算時間を短縮する一手法として推定増分法を提案したものである。数値計算例から次のようなことがいえる。

(1) 推定増分法による推定値の精度は良好であるので、増分法による非線形解析の計算時間を短縮するには効果がある。

(2) 変位の推定には、簡略な点からも 2 次式を用いるのがよいと思われる。

(3) 推定増分法の計算式は簡単であり、また、普通の増分法のプログラムに容易に組み込むことができる。

(4) 変形後の座標を用いれば剛性行列は簡単になり、かつ、曲率を表わす式に近似式を用いても大変形問題を解くことができる。

(5) 平面骨組構造物の大変形解析を行う場合に、2次の非線形剛性行列 k_2 を省略しても座屈直前までの計算結果にはほとんど影響しない。しかし、座屈荷重以上の荷重に対する計算では k_2 の項は必要である。

推定増分法の使用には、増分量のとり方や記憶容量の増加などまだ問題点もあるが、連続体を含めた他の非線形問題への適用も可能である。また、本文では多元連立方程式の解法に掃出法⁵⁾を用いたが、SOR 法や CG 法を用いて大節点構造物の非線形解析を行う場合にも解の初期値の設定への応用が考えられる。

数値計算は単精度演算で行い、大阪大学大型計算機センターの NEAC 2200-700 (48 bits/word) と、一部京都大学大型計算機センターの FACOM 230-60 (36 bits/word) を使用した。

参 考 文 献

- たとえば
R.K. Livesley: Matrix Method of Structural Analysis, Pergamon Press, 1969.
J.S. Przemieniecki: Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, 1968.
O.C. Zienkiewicz: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.
大地羊三: 構造解析とコンピュータ, 産業図書, 1971.
山田嘉昭編: マトリックス法の応用, 東京大学出版会, 1972.
上田幸雄: 骨組構造の弾塑性解析; コンピュータによる構造工学講座 II-1-B, 培風館, 1971.
- 堀井・齋藤・川原・森: 骨組構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, No. 191, 1971.
- 川股・大山・半谷・田中: 幾何学的非線形問題における荷重漸増法の問題点, マトリックス構造解析法研究発表論文集, 日本鋼構造協会, 1971.
- 三本木茂夫: 梁および板の非線形解析, マトリックス構造解析法研究発表論文集, 日本鋼構造協会, 1971.
- G.C. Nayak and O.C. Zienkiewicz: Note on the "Alpha"-Constant Stiffness Method for the Analysis of Non-linear Problems, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 4, No. 4, 1972.
- 林 正: 科学計算用サブプログラム・ライブラリ, 大阪大学大型計算機センター・ニュース, No. 8, 1972.
- S.P. Timoshenko and J.M. Gere: Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, pp. 76~82, 1961.

【付 録-1】

(1) 両端剛の場合 (線形項 k_0 は省略)

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0 & A_1 & B_1 & 0 & -A_1 & C_1 \\ & D_1 & E_1 & -A_1 & -D_1 & E_1 \\ & & F_1 & -B_1 & -E_1 & -G_1 \\ & & & 0 & A_1 & -C_1 \\ \text{Symm.} & & & & D_1 & -E_1 \\ & & & & & F_1 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & A_2 & B_2 & 0 & -A_2 & C_2 \\ & & E_2 & 0 & -B_2 & D_2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{Symm.} & & & & A_2 & -C_2 \\ & & & & & F_2 \end{bmatrix}$$

ここに,

$$A_1 = \frac{EA}{20l} \left\{ \frac{12}{l} (v_b - v_a) - (\theta_a + \theta_b) \right\}$$

$$B_1 = \frac{EA}{60} \left\{ \frac{3}{l} (v_b - v_a) - (4\theta_a - \theta_b) \right\}$$

$$C_1 = \frac{EA}{60} \left\{ \frac{3}{l} (v_b - v_a) + (\theta_a - 4\theta_b) \right\}$$

$$D_1 = \frac{3}{5l} N, \quad E_1 = \frac{1}{20} N, \quad F_1 = \frac{l}{15} N$$

$$G_1 = \frac{l}{60} N, \quad N = \frac{EA}{l} (u_b - u_a)$$

$$A_2 = \frac{3EA}{70l^3} \{ 24(v_b - v_a)^2 - 6l(v_b - v_a) \cdot (\theta_a + \theta_b) + l^2(\theta_a^2 + \theta_b^2) \}$$

$$B_2 = \frac{EA}{280l^2} \{ 36(v_b - v_a)^2 - 24l(v_b - v_a)\theta_a - l^2(\theta_a^2 - 2\theta_a\theta_b - \theta_b^2) \}$$

$$C_2 = \frac{EA}{280l^2} \{ 36(v_b - v_a)^2 - 24l(v_b - v_a)\theta_b + l^2(\theta_a^2 + 2\theta_a\theta_b - \theta_b^2) \}$$

$$D_2 = \frac{EA}{840l} \{ -6l(v_b - v_a)(\theta_a + \theta_b) - 3l^2(\theta_a^2 + \theta_b^2) + 4l^2\theta_a\theta_b \}$$

$$E_2 = \frac{EA}{420l} \{ 18(v_b - v_a)^2 + 3l(v_b - v_a)(\theta_a - \theta_b) + l^2(12\theta_a^2 + \theta_b^2) - 3l^2\theta_a\theta_b \}$$

$$F_2 = \frac{EA}{420l} \{ 18(v_b - v_a)^2 - 3l(v_b - v_a)(\theta_a - \theta_b) + l^2(\theta_a^2 + 12\theta_b^2) - 3l^2\theta_a\theta_b \}$$

(2) α 端剛, b 端ヒンジの場合 (線形項 k_0 は省略)

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0 & A_1 & B_1 & 0 & -A_1 & 0 \\ & C_1 & D_1 & -A_1 & -C_1 & 0 \\ & & E_1 & -B_1 & -D_1 & 0 \\ & & & 0 & A_1 & 0 \\ \text{Symm.} & & & & C_1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & A_2 & B_2 & 0 & -A_2 & 0 \\ & & C_2 & 0 & -B_2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{Symm.} & & & & A_2 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{EA}{10l} \left\{ \frac{6}{l} (v_b - v_a) - \theta_a \right\} \\
 B_1 &= \frac{EA}{10l} \{ (v_b - v_a) - l\theta_a \} \\
 C_1 &= \frac{3}{5l} N, \quad D_1 = \frac{1}{10} N, \quad E_1 = \frac{l}{10} N \\
 N &= \frac{EA}{l} (u_b - u_a) \\
 A_2 &= \frac{3EA}{70l^3} \{ 24(v_b - v_a)^2 + 2l^2\theta_a^2 \\
 &\quad - 12l\theta_a(v_b - v_a) \} \\
 B_2 &= \frac{EA}{70l^2} \{ 18(v_b - v_a)^2 - 12l(v_b - v_a)\theta_a + l^2\theta_a^2 \} \\
 C_2 &= \frac{EA}{70l} \{ 6(v_b - v_a)^2 - 2l(v_b - v_a)\theta_a + 3l^2\theta_a^2 \}
 \end{aligned}$$

(3) a 端ヒンジ, b 端剛の場合(線形項 k_0 は省略)

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 & A_1 & 0 & 0 & -A_1 & B_1 \\ & C_1 & 0 & -A_1 & -C_1 & D_1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & A_1 & -B_1 \\ \text{Symm.} & & & & C_1 & -D_1 \\ & & & & & E_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & A_2 & 0 & 0 & -A_2 & B_2 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{Symm.} & & & & A_2 & -B_2 \\ & & & & & C_2 \end{bmatrix}$$

ここに, C_1, D_1, E_1 は (2) と同じものであり, A_1, B_1, A_2, B_2, C_2 は (2) において, θ_a を θ_b に置き換えたものである。

(4) 両端ヒンジの場合

剛性行列を, (4×4) に縮小した形で示す。

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{k}' & -\mathbf{k}' \\ -\mathbf{k}' & \mathbf{k}' \end{bmatrix}$$

ここに,

$$\mathbf{k}' = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & A' \\ A' & B' \end{bmatrix}, \quad A' = \frac{1}{2l} (v_b - v_a)$$

$$B' = \frac{1}{2l^2} \{ l(u_b - u_a) + (v_b - v_a)^2 \}$$

【付 録—2】

変形後の部材座標系に関する剛性行列は, 付録—1 の

各要素をそれぞれ次の要素で置き換えたものである。

(1) 両端剛の場合

$$A_1 = -\frac{EA}{20l} (\theta_a^* + \theta_b^*)$$

$$B_1 = -\frac{EA}{60} (4\theta_a^* - \theta_b^*)$$

$$C_1 = -\frac{EA}{60} (-\theta_a^* + 4\theta_b^*)$$

$$D_1 = \frac{3}{5l} N^*, \quad E_1 = \frac{1}{20} N^*, \quad F_1 = \frac{l}{15} N^*$$

$$G_1 = \frac{l}{60} N^*, \quad N^* = \frac{EA}{l} (u_b^* - u_a^*) = EA \frac{\Delta l}{l}$$

$$A_2 = \frac{3EA}{70l} \{ (\theta_a^*)^2 + (\theta_b^*)^2 \}$$

$$B_2 = -\frac{EA}{280} \{ (\theta_a^*)^2 - 2\theta_a^*\theta_b^* - (\theta_b^*)^2 \}$$

$$C_2 = \frac{EA}{280} \{ (\theta_a^*)^2 + 2\theta_a^*\theta_b^* - (\theta_b^*)^2 \}$$

$$D_2 = -\frac{EAl}{840} \{ 3(\theta_a^*)^2 + 3(\theta_b^*)^2 - 4\theta_a^*\theta_b^* \}$$

$$E_2 = \frac{EAl}{420} \{ 12(\theta_a^*)^2 + (\theta_b^*)^2 - 3\theta_a^*\theta_b^* \}$$

$$F_2 = \frac{EAl}{420} \{ (\theta_a^*)^2 + 12(\theta_b^*)^2 - 3\theta_a^*\theta_b^* \}$$

(2) a 端剛, b 端ヒンジの場合

$$A_1 = -\frac{EA}{10l} \theta_a^*, \quad B_1 = -\frac{EA}{10} \theta_a^*$$

$$C_1 = \frac{3}{5l} N^*, \quad D_1 = \frac{1}{10} N^*, \quad E_1 = \frac{l}{10} N^*$$

$$N^* = EA \frac{\Delta l}{l}, \quad A_2 = \frac{3EA}{35l} (\theta_a^*)^2$$

$$B_2 = \frac{EA}{70} (\theta_a^*)^2, \quad C_2 = \frac{3EA}{70} (\theta_a^*)^2$$

(3) a 端ヒンジ, b 端剛の場合

C_1, D_1, E_1 は (2) と同じものであり, A_1, B_1, A_2, B_2, C_2 は (2) において, θ_a^* を θ_b^* に置き換えたものである。

(4) 両端ヒンジの場合

$$\mathbf{k}' = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta l/2l \end{bmatrix}$$

(1973.5.16・受付)