

水文学の和に関する統計的研究

STOCHASTIC STUDIES ON SUMS OF HYDROLOGIC VARIABLES

室田 明*・江藤 剛治**・田中 剛***

By Akira Murota, Takeharu Etou and Katashi Tanaka

1. 緒 論

水資源計画や洪水防衛計画などの水工計画において、水文学の和の分布に関する知識を貯えておくことは非常に重要である。たとえば、水資源計画において「渇水の代表的継続時間」といったようなものが定義され、これが前もって解析した水文学時系列の時間単位の n 倍であったとすると、当然 n 個の水文学の和の分布より代表的な渇水の生起確率を知ることができよう。また高水問題においては、時間を代表する量として集中時間 (concentration time) などが用いられ、この集中時間に相当する長さの連続降雨の統計的特性を基礎として計画を策定することがいわゆる雨量法の基本的な考え方の1つである。

よって古くは Sherman¹⁾ そのほかによる研究に始まり、今日まで多くの DDA 解析などの研究が行われている。しかしながらこれらの研究のほとんどは、観測水文学資料の整理による最大降雨強度等の推定に関する実験式の提案に止まっており、最大降雨強度が水文学のサンプル・サイズの関数であるというような常識的な反論を示すまでもなく、今後の水工計画法の発展には、より理論的・一般的な時間単位に関する研究の推進が重要となることはいうまでもない。

ただ、水資源計画においては「渇水を代表する時間軸上での長さ」の定義が曖昧であるが、これはたとえば次のような量で代表させればよいであろう。

i) 水需要の立場から考えれば、水の不足状態がそれ以上続いたら困る限界の渇水の継続期間 (損失関数のメモリーの長さに比例する²⁾)。

ii) 水供給の立場からは、貯水池からの放流量の時定数、あるいはそれに適当な定数を乗じたもの。

これらの量に関しては筆者らの文献^{2),3)}に詳細な検討がなされている。実際問題への適用に際しては、両者のうち大きいほうを用いればよい。以後この時間長を T_* と書くことにする。

また筆者らの文献^{2),3)}に示したごとく、水資源計画における最適時間単位は貯水池の規模の相異などにより各計画ごとに全く異なるから、その計画の基礎となる水文学の特性・解析法も対応する時間単位に対して考察されねばならない。既往の多くの研究においては、各研究者・現場技術者の莫然とした判断によって、このような代表的時間単位や継続時間 T_* として日・旬・月などを選び、それに対応する水文学の特性について個々別々に研究が行われてきた。現在は、これらの成果を踏まえて、解析に用いた時間単位との関連からそれらに統一的な説明を加え、河川水文学の総合化を進める段階にまで来ていると考えられるが、このためにも水文学の和に関する種々の特性を知っておくことは非常に重要である。

このような研究がいまだそれほど進展していないのは、次のような理由によるものと考えられる。水文学が年周期変動を含む非定常時系列をなすこと、水文学がガンマ分布に近いゆがんだ分布をなすこと、降水量時系列は、降水・無降水の2つの事象から構成されるなどの複雑な時系列をなすこと、降水から流量への変換系としての流域の非線形性・非均一性などが介在することによる。

ところが既往の多変量統計学において取扱われているのは、確率分布が正規分布をなす場合のみであるといっても過言ではない。例外的には、井沢⁴⁾の研究を実用化を目的として発展させた角屋・長尾⁵⁾の2変数ガンマ分布に関するすぐれた研究があるが、ガンマ分布をなす多変数の和の分布についての理論解を導くためには、あまりに複雑すぎてほとんど適用不可能であろう。

筆者らは原点母数 '0' なるガンマ分布が、形状母数 α 、尺度母数 β の2つの母数で表わされ、これらは平均値と標準偏差のみによって決定されること、およびどのよう

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 近畿大学講師 理工学部土木工学科

*** 正会員 工修 大成建設

な時間単位に対しても水文量の確率分布がガンマ分布でほぼ近似できることに着目して、ガンマ分布の和に関する近似解を導いた。この解は従属な系列や、降水量時系列のごとく確率分布に飛躍を伴う系列（降水・無降水の2つの事象があるから）に対しても適用可能である。

時系列特性を代表する自己相関特性についても、同様に水文量の和をとることによる相関特性の変化を示す式を導いた。

ところで渇水の評価においては、不足水量と継続期間の双方を同時に考慮しなければならないことはよく知られた事実である。上記の文献⁹⁾においては、低次の近似として継続期間の効果を無視して理論的考察を行っている。流域面積や貯水池規模が非常に大きく、放流量時系列の時定数が上記 i) のごとき水需要者側から見た渇水の継続期間よりも十分に大きいときは、継続期間の効果を無視したり、これを放流量の時定数とほぼ等しいとして一定の値に固定して考えても大過ないと考えられるのだが、わが国の河川のごとく、流域あるいは人工的貯留調節効果がそれほど大きくない場合には、渇水の継続期間の効果は必ずしも無視できないことも多い。よって本論文の後半においては、継続期間 T_* 自身も確率変数と考え、Yevjevich らの研究⁹⁾において渇水の評価に導入された連の理論の拡張により、不足水量と継続期間の確率分布やそれらの相関関係についての理論的・実証的研究を行った。

研究に用いた実測水文資料は、近畿圏の各気象台・測候所における降水量資料、および淀川支川・木津川・月が瀬地点の1918年～65年の流量資料である。

2. ガンマ分布変数の和の分布と水文量への適用

(1) 独立な2変数の和

一般に河川流量、降水量などの水文量の確率分布は原点母数が '0' なるガンマ分布により表わされるといわれている。たとえば、Fig. 1 は木津川・月が瀬月流量資料へのガンマ分布の適用例であるが、ガンマ分布は実測流量資料にきわめてよく適合していることがわかる。ガンマ分布はピアソンⅢ型分布とも呼ばれ、

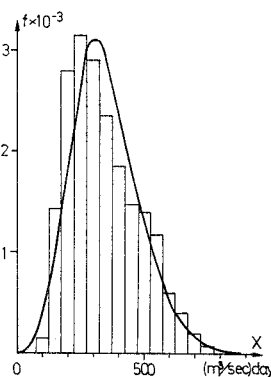


Fig. 1 Fitness of Gamma distribution (solid line), monthly discharge of the Kizu River (January)

その確率密度関数は次式により表わされる。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & (0 \leq x) \\ 0 & (0 > x) \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 α : 形状母数, $\alpha = \mu^2/\sigma^2 > 0$

β : 尺度母数, $\beta = \mu/\sigma^2$

μ, σ : 平均値, 標準偏差

その概形はよく知られているように、 $\alpha \leq 1$ のとき逆J字型分布（特に $\alpha = 1$ のとき指数分布）、 $\alpha > 1$ のとき1つのモードを有するゆがんだ釣鐘状分布、 $\alpha \gg 1$ のとき正規分布に近づく。またそのモーメント母関数 $M(u)$ は、

$$M(u) = (1-u/\beta)^{-\alpha} \dots\dots\dots (2)$$

このように原点母数が '0' のガンマ分布（以下簡単にガンマ分布と呼ぶ）は、 α, β という2つのパラメータのみによって決定され、 α, β はまた平均値・分散、すなわち1次・2次のモーメントのみによって表わされる。よってどのような時間単位に対する水文量の確率分布も、原点を適当に選ぶことによってガンマ分布で近似できるものとするれば、水文量の和の分布を求めるということは和の分布についての α, β を求めること、すなわち単に水文量の和の平均値と分散を求めるという単純な問題に帰着するわけである。このためにはガンマ分布にしたがう多変数の和の分布もまたガンマ分布で近似できることが検証されていなければならない。

このような観点から本節では、コンボリューション積分の数値計算により比較的簡単に厳密な数値解を得ることのできるガンマ分布にしたがう独立な2変数の和の分布について、厳密解と、和の分布もまたガンマ分布で近似できると仮定して1次・2次のモーメントから決定した近似的な2変数の和の分布との比較を行い、上記のごとき近似の精度を確かめることにする。

いま X_1, X_2 が互いに独立でそれぞれ $f_1(x), f_2(x)$ なるガンマ分布にしたがうとき、それらの和 $X (= X_1 + X_2)$ のモーメント母関数 $M(u)$ は X_1, X_2 のモーメント母関数 $M_1(u), M_2(u)$ の積で表わされる。

$$M(u) = M_1(u) \cdot M_2(u) \\ = (1-u/\beta_1)^{-\alpha_1} \cdot (1-u/\beta_2)^{-\alpha_2} \dots\dots\dots (3)$$

また X の確率密度関数 $f(x)$ はコンボリューション積分により、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(x-x_1) dx_1 \\ = \frac{\beta_1^{\alpha_1} \cdot \beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1) \cdot \Gamma(\alpha_2)} \int_0^{\infty} x_1^{\alpha_1-1} \cdot (x-x_1)^{\alpha_2-1} \\ \cdot e^{-\beta_1 x_1 - \beta_2 (x-x_1)} dx_1 \dots\dots\dots (4)$$

Eq.(3) より、 $\beta_1 = \beta_2$ のとき、 X は $\alpha (= \alpha_1 + \alpha_2), \beta (= \beta_1 = \beta_2)$ を母数とするガンマ分布にしたがうが、一般的には $\beta_1 \neq \beta_2$ であるから和 X は厳密にはガンマ分

布にはしたがわれない。かりに X が十分な精度でガンマ分布により近似できたとして、この近似的分布に対応する諸量に '*' をつけて表示することにすると、この分布を決定する2つの母数 α_* , β_* は1次・2次のモーメントを用いて次のように簡単に求まる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_* &= \mu^2/\sigma^2, \beta_* = \mu/\sigma^2 \\ \mu &= \mu_1 + \mu_2 = \alpha_1/\beta_1 + \alpha_2/\beta_2 \\ \sigma^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \alpha_1/\beta_1^2 + \alpha_2/\beta_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、添字 '1', '2' のついた量はそれぞれ X_1, X_2 に対応する。

しかしながら、本節では近似度の照査が主目的であるから、モーメント母関数の u の1次・2次の項から α_* , β_* を導き、あわせて3次の項から近似度の定量的評価を行う。厳密解 $M(u)$, 近似解 $M_*(u)$ をテイラー展開して整理すれば、

$$M_*(u) = 1 + \frac{\alpha_*}{\beta_*} \cdot u + \frac{\alpha_*(\alpha_*+1)}{2\beta_*^2} \cdot u^2 + \frac{\alpha_*(\alpha_*+1)(\alpha_*+2)}{3!\beta_*^3} \cdot u^3 + \dots\dots\dots (6)$$

$$M(u) = 1 + \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) \cdot u + \left\{ \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2\beta_1^2} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2} + \frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2\beta_2^2} \right\} \cdot u^2 + \left\{ \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}{3!\beta_1^3} + \frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+1)}{2\beta_1^2\beta_2} + \frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_2+1)}{2\beta_1\beta_2^2} + \frac{\alpha_2(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}{3!\beta_2^3} \right\} \cdot u^3 + \dots\dots\dots (7)$$

右辺第2項・第3項、すなわち u に関する1次の項・2次の項の比較より α_* , β_* が求まって、

$$\alpha_* = \frac{(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)}{\alpha_1\beta_2^2 + \alpha_2\beta_1^2}, \beta_* = \frac{\beta_1\beta_2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)}{\alpha_1\beta_2^2 + \alpha_2\beta_1^2} \dots\dots\dots (8)$$

Eq. (8) は当然 Eq. (5) より得られる結果と一致する。この式により1次モーメントと2次モーメントについて、近似解と厳密解は完全に一致するわけであるから、誤差評価の基準として、原点まわりの3次モーメントにおける両者の差を用いることにすると、絶対誤差 δ は、

$$\delta = \left\{ \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}{3!\beta_1^3} + \frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+1)}{2\beta_1^2\beta_2} + \frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_2+1)}{2\beta_1\beta_2^2} + \frac{\alpha_2(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}{3!\beta_2^3} \right\} - \left\{ \frac{\alpha_*(\alpha_*+1)(\alpha_*+2)}{3!\beta_*^3} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

Eq. (9) に Eq. (8) を代入し、やや煩雑な計算ののち整理すると、

$$\delta = \frac{\alpha_1\alpha_2(\beta_1-\beta_2)^2}{3\beta_1^2\beta_2^2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)} \geq 0 \dots\dots\dots (10)$$

Eq. (10) より $\beta_1 = \beta_2$ のときのみ $\delta = 0$ となって厳密解と近似解は3次のモーメントまで一致することがわかる。これは前述のごとく X が厳密にガンマ分布となる条件にほかならない。絶対誤差 δ_r を求めるには、 δ を Eq. (9) の右辺第1項で割ればよい。

種々の $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ の組み合わせに対して、Eq. (8) より計算されるガンマ分布の確率密度関数と、Eq. (4) の数値積分より得られる厳密な確率密度関数との比較を行った。Table 1 は α_* , β_* と $\mu^2/\sigma^2, \mu/\sigma^2$ の比較の例、およびそのときの δ, δ_r を示しており、Fig. 2 に確率密度関数の比較例を示している。

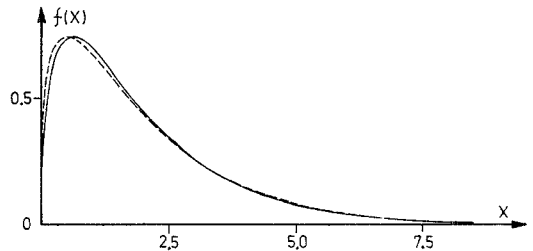


Fig. 2 Comparison of an approximate solution with an exact solution; Case II

これらの図表よりわかるように、厳密解と近似解はほとんど完全に一致し、 δ_r もたかだか3%程度である。このことから、ガンマ分布の和の分布もまたガンマ分布で近似できることがわかる。このように問題が単純化されれば、厳密解では解析不可能なほど一般的な場合に対してまで水文量の和に関する理論分布を求めることが可能となる。よって以下の節では、より一般的な2~3の場合について水文量の和の分布をガンマ分布で近似することを試みている。

(2) 確率分布に飛躍を伴う場合の多変数の和

日降水量のように時間単位の小さい降水量の確率分布関数は '0' 点において飛躍を伴う、すなわち降水量 '0' (無降水) の確率が正の有限の値を取る。これを確率密度関数で表示すれば、 $x=0$ の点で確率密度が無限大となる。よって確率分布関数で表示することになると、

$$F(x) \begin{cases} = (1-p) + p \cdot \int_0^x f_R(x) dx & (x \geq 0) \\ = 0 & (x < 0) \end{cases} \dots\dots\dots (11)$$

Table 1 Comparison of approximate solutions with exact solutions.

	α_1	β_1	α_2	β_2	μ^2/σ^2	α_*	μ/σ^2	β_*	δ	δ_r
Case I	0.5	2.0	0.5	1.0	0.78	0.90	1.04	1.20	0.014	0.028
Case II	1.0	2.0	0.5	1.0	1.46	1.33	1.49	1.33	0.021	0.028
Case III	5.0	2.0	0.5	1.0	5.32	5.14	1.80	1.71	0.035	0.005

ここに、 p : 降水確率

$f_R(x)$: 降水が生じたという条件付きの降水量 X の確率密度関数

これを図示すれば、

Fig. 3 のごとく表わされる。降水量以外にもこのような分布関数を持つ確率変数は意外に多い。たとえば待行列の分布などで、行列の長さが '0' なる事象はきわめて自然に生起する。このような場合には、 $x > 0$ なる領域を連続な確率分布で表示することはほぼ妥当な仮定とみなせるが、 $x = 0$ なる点に限ってはどうしても不連続な確率分布を仮定せざるをえない。

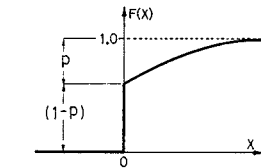


Fig. 3 Cumulative density function with a jump.

いま $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ なる n 個の互いに独立な確率変数を考える。この確率変数は $x=0$ において $(1-p_i)$ なる飛躍を持ち、 $x > 0$ なる領域に対しては $x > 0$ なる条件付で $f_{R_i}(x)$ なるガンマ分布にしたがうものとする。このとき X_i の $X > 0$ なる条件付分布の平均、分散は、 $\mu_i = \alpha_i / \beta_i$, $\sigma_i^2 = \alpha_i / \beta_i^2$ となる。 X_i の和を X とし、その降水確率を p_* , 降水条件付の分布の平均値、分散を μ_* , σ_*^2 とすると、 p_* , μ_* は、

$$p_* = 1 - \prod_{i=1}^n (1-p_i) \dots\dots\dots (12)$$

$$\mu_* = \sum_{i=1}^n p_i \mu_i / p_* \dots\dots\dots (13)$$

σ_*^2 は次のようにして導ける。まず $\mu' = \sum_{i=1}^n \mu_i$ とおくと、和 X の μ' まわりの 2 次モーメントは、

$$\begin{aligned} E\{(X-\mu')^2\} &= E\{[(X-\mu_*) + (\mu_*-\mu')]\}^2 \\ &= E\{(X-\mu_*)^2\} + 2E\{(X-\mu_*) \cdot (\mu_*-\mu')\} + E\{(\mu_*-\mu')^2\} \\ &= p_*\sigma_*^2 + (1-p_*)\mu_*^2 + 2(\mu_*-\mu')p_*\mu_* \\ &\quad - 2\mu_*(\mu_*-\mu') + (\mu_*-\mu')^2 \dots\dots (14) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} E\left\{\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)\right]^2\right\} &= \sum_{i=1}^n E\{(X_i - \mu_i)^2\} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i'=i+1}^n E\{(X_i - \mu_i)(X_{i'} - \mu_{i'})\} \\ &= \sum_{i=1}^n \{p_i\sigma_i^2 + (1-p_i)\mu_i^2\} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i'=i+1}^n (1-p_i)(1-p_{i'})\mu_i\mu_{i'} \dots (15) \end{aligned}$$

当然

$$E\{(X-\mu')^2\} = E\left\{\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)\right]^2\right\}$$

となるはずであるから Eq. (14), Eq. (15) の右辺を等置することにより、

$$\begin{aligned} \sigma_*^2 &= \frac{1}{p_*} \left[\sum_{i=1}^n \{p_i\sigma_i^2 + (1-p_i)\mu_i^2\} \right. \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i'=i+1}^n (1-p_i)(1-p_{i'})\mu_i\mu_{i'} \\ &\quad - (1-p_*)\mu_*^2 + 2(\mu_*-\mu') (1-p_*)\mu_* \\ &\quad \left. - (\mu_*-\mu')^2 \right] \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

X の降水確率 p_* は Eq. (12) により与えられ、Eq. (13), Eq. (16) より $\alpha_* = \mu_*^2 / \sigma_*^2$, $\beta_* = \mu_* / \sigma_*^2$ として X の降水条件付確率密度関数がガンマ分布表示できる。

$X_i (i=1, 2, \dots, n)$ が定常時系列をなす場合のごとく、同一の確率分布にしたがうときは、 $p_i, \alpha_i, \beta_i, \mu_i, \sigma_i$ を $p, \alpha, \beta, \mu, \sigma$ と書いて、

$$\left. \begin{aligned} p_* &= 1 - (1-p)^n \\ \mu_* &= n p \mu / p_* \\ \sigma_*^2 &= \frac{1}{p_*} [n\{p\sigma^2 + (1-p)\mu^2\} + n(n+1) \\ &\quad \cdot (1-p)^2\mu^2 - (1-p_*)\mu_*^2 + 2(\mu_* - n\mu) \\ &\quad \cdot (1-p_*)\mu_* - (\mu_* - n\mu)^2] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

Eq. (17) において、 n が十分大きくなったときの極限分布を考えてみる。このとき、

$$\left. \begin{aligned} p_* &\rightarrow 1 - (1-p)^n \rightarrow 1 \\ \alpha_* &\rightarrow n \cdot \frac{p^2 \mu^2}{p\sigma^2 + (1-p)(2-p)\mu^2} \\ \beta_* &\rightarrow \frac{p\mu}{p\sigma^2 + (1-p)(2-p)\mu^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

となり、 n が増大するにつれて、 α_* は n に比例する直線に、 β_* は定数に漸近することがわかる。また Eq. (17) において、 $p=1$ とするとき (すなわち '0' 点において飛躍がない場合)、当然一般の独立な確率変数の和の場合に一致する。このとき、

$$\mu_* = n\mu, \sigma_*^2 = n\sigma^2, \alpha_* = n\alpha, \beta_* = \beta.$$

(3) 従属な系列の和

従属定常な時系列を考える。原系列の平均・分散をそれぞれ μ, σ^2 とすると、時間単位 T_* にわたって加えて作った確率変数の平均 μ_* , および分散 σ_*^2 は次のように表わされる。

$$\mu_* = T_* \cdot \mu \dots\dots\dots (19)$$

$$\sigma_*^2 = 2\sigma^2 \int_0^{T_*} (T_* - \tau) R(\tau) d\tau \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 $R(\tau)$: 原系列の規準化された自己相関関数
またこの場合の遅れ T_* の共分散 Cov_* は次のように導くことができる。

$$Cov_* = \sigma^2 \int_0^{T_*} \{\tau R(\tau) + (T_* - \tau) R(T_* + \tau)\} d\tau \dots\dots\dots (21)$$

これらの式を用いて和 X の分布を決定する母数 α_* , β_* , 時系列特性を特徴づける自己相関係数 $\rho_* = Cov_* / \sigma_*^2$

がただちに求められる。たとえば $R(\tau) = e^{-\tau/k}$ に対しては、

$$\alpha_*^2 = 2k(T_* + k e^{-T_*/k} - k) \dots\dots\dots(22)$$

$$\text{Cov}_{**} = k^2(e^{-T_*/k} - 1)^2 \dots\dots\dots(23)$$

$$\rho_* = \frac{k(e^{-T_*/k} - 1)^2}{2(T_* + k e^{-T_*/k} - k)} \dots\dots\dots(24)$$

次に離散的な系列を考える。すなわち、有限個の従属変数 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ の和として X が求められる場合を考える。

$$\mu_* = \sum_{i=1}^n \mu_i = n \mu \dots\dots\dots(25)$$

$$\sigma_*^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{i,j} \cdot \sigma\{X_i\} \cdot \sigma\{X_j\} \dots\dots\dots(26)$$

ここに、 $\rho_{i,j}$: X_i と X_j の相関係数で $i=j$ のとき 1. たとえば $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ が 1 次マルコフ系列をなす場合は、 $\rho = \rho_{i,i+1}$ において、

$$\rho_{i,i'} = \rho^{i'-i}, (i' > i, i, i' = 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(27)$$

となり注1),

$$\begin{aligned} \sigma_*^2 &= \{n + 2(n-1)\rho + \dots + 2\rho^{n-1}\} \sigma^2 \\ &= \sigma^2(n - 2\rho - n\rho^2 + 2\rho^{n+1}) / (1-\rho)^2 \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

同様にして、

$$\text{Cov}_{**} = \rho \sigma^2(1 - 2\rho^n + \rho^{2n}) / (1-\rho)^2 \dots\dots\dots(29)$$

$$\rho_* = \frac{1 - 2\rho^n + \rho^{2n}}{n - 2\rho - n\rho^2 + 2\rho^{n+1}} \dots\dots\dots(30)$$

$$\alpha_* = \frac{\mu_*^2}{\sigma_*^2} = \frac{n^2(1-\rho)^2}{(n - 2\rho - n\rho^2 + 2\rho^{n+1})} \alpha \dots\dots\dots(31)$$

$$\beta_* = \frac{\mu_*}{\sigma_*} = \frac{n(1-\rho)^2}{(n - 2\rho - n\rho^2 + 2\rho^{n+1})} \beta \dots\dots\dots(32)$$

たとえば ρ_* について、Eq. (30) とシミュレーション結果を比較したものが Fig. 4 であるが、シミュレーション結果と理論値はよく一致しているといえよう。 n を十分大きくしたときの α_* , β_* の極限值を求めると、

$$\alpha_* = n \frac{1-\rho}{1+\rho} \alpha, \quad \beta_* = \frac{1-\rho}{1+\rho} \beta \dots\dots\dots(33)$$

となり、この場合についても n の増大とともに α_* は n に比例する直線、 β_* は一定値に漸近することがわかる。また $\rho=0$ とすれば独立な確率変数の和の分布の場合

注 1) 長尾正志氏(名古屋工業大学)より筆者の1人(江藤)へのパーソナル・コメントによれば、帰帰関係が直線とみなせる2変数ガンマ分布についてはこの仮定は正しい。

合に一致することはいうまでもない。

(4) 実測水文資料への適用

以上の解を実測雨量資料・流量資料に適用し、その適用性を検証する。Fig. 5 は大阪における8月の雨量資料に対する適用例であり、Fig. 6 は淀川支川木津川月が瀬地点の流量資料に対する適用例である。図中実線・鎖線・1点鎖線で示される理論解は次のようにして計算される。まず雨量資料の場合は、日雨量の $\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho$ を計算し、 n を 1~30 (1日~30日) として Eq. (17) より各 n に対する $\alpha_*, \beta_*, \rho_*$ を計算したものである。流量資料の場合は半旬流量資料を用いて Eq. (30)~(32) より、 n を 1~6 (5日~30日) として α_*, β_* を計算したものである。また点線は、 n を十分大きいとしたときの解 Eq. (18), Eq. (33) を示している。

これらの図より筆者らの解と実測値はよく一致しており、これらの解が実用上十分な適用性を示していること

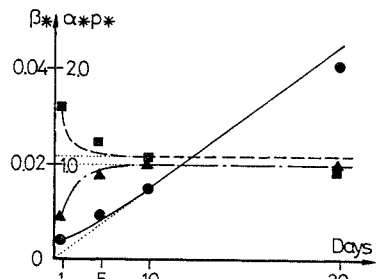


Fig. 5 Relation between n and parameters of p.d.f. of daily precipitation at Osaka in Aug. Lines : theory, dots : observed values. Circles, squares and triangles show α, β and ρ , respectively.

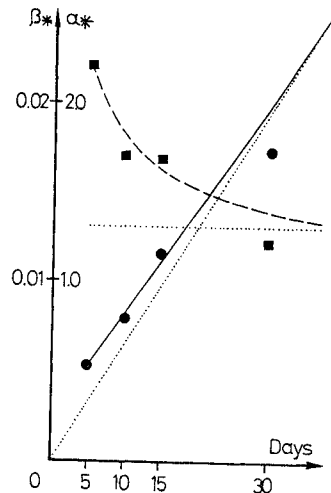


Fig. 6 Relation between n and parameters of p.d.f. of 5-days discharge of the Kizu River. Circles show α , squares show β .

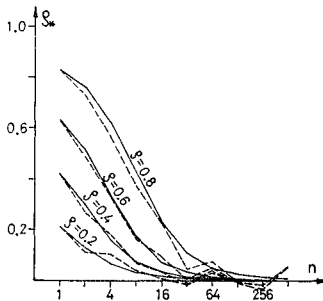


Fig. 4 Relation between ρ_* and n . Solid line : theory broken line : simulation

がわかる。また日雨量・半旬流量については、ただだか数個の水文量を加えれば、その分布は n が十分大きいという仮定のもとに得られる、より単純な形の極限分布の式により近似できることがわかる。

次に DDA 解析などにより経験的に得られた継続期間～降雨強度の関係を表わす実験式と、筆者らの理論の対応を考えてみる。

簡単のために定常とみなせる時系列を考えることにし、ある月あるいはある特定の季節の日雨量のみを継ぎ合せてできる時系列や、特定の季節についてピーク時間雨量の前後数時間の時間雨量をほぼ定常時系列をなすとみなして継ぎ合せてできる時系列を考える。

これらの時系列において、日雨量・時間雨量などがある基準量 X_0 を超過する確率が $\varepsilon\%$ となるものとする。雨量の確率分布がわかっているときは、 ε を与えて X_0 を求めることもできる。

次にもとの時系列を n 個ずつ加えた running totals (n 個ずつ移動平均したものの n 倍) を作ると、その確率分布は n 個の和の確率分布として Eq. (17), Eq. (30)～(32) などにより与えられる。この n 個の和の確率分布に対して、 $n=1$ の場合と同じ超過確率 $\varepsilon\%$ を与えると、それに対して同様に基準量 X_0^n が求められる。 n と X_0^n/n の関係がすなわち、DDA 解析における時間単位 Δt あるいは継続時間と平均降雨強度 I との関係に対応するものと考えられる。一例として $n \sim X_0^n/n$ 関係と、Sherman の式の比較を行う。Sherman の式は次式で表わされる。

$$I = a/(\Delta t)^k \quad \text{ここに、} a, k: \text{定数}$$

Fig. 7 は $p=1.0$, $\alpha=1.0$ (指数分布), $\varepsilon\%=1\%$ としたときのいくつかの ρ に対する比較の例であるが、両者はかなりよく一致していることがわかる。

降水確率 $p < 1.0$ の場合についても種々のケースについて同様の計算を行ったが、どの場合についても両者はよく一致した。これにより、筆者らの理論の従来用いられてきた経験式による実用性の検証と、経験式自身の理論的裏付けを行うことができたといえよう。

このような理論的研究により、高水・低水問題の双方において、stochastic hydrology の総合化あるいは統

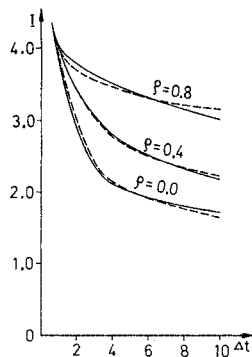


Fig. 7 Comparison of theoretical curve (solid) with Sherman's equation (broken).

一的な議論の展開が可能となる。

3. 連の理論の適用による渇水の統計的評価

(1) 独立定常な系列における連の理論

Downer, Siddiqui and Yevjevich は⁶⁾、渇水の統計的評価のために、以下に示すような連を考え、独立定常な系列に対してその統計的特性を理論的に導いた。これは次のように要約できよう。

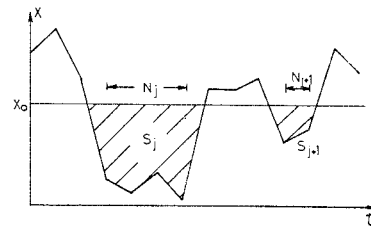


Fig. 8 Schematic representation of runs.

まず Fig. 8 に示すような離散的な系列を考える。確率変数 X_i は降水量、河川流量などを示すと考えればよい。ある基準値 X_0 (たとえば必要供給水量、河川維持用水量など) を定めて、 $X_i < X_0$ なる状態を渇水状態と定義するとき、一度渇水状態が生じ、これが N_j 期間引続いたのちに $X_i \geq X_0$ なる状態にもどったものとする。この N_j を不足継続期間 (deficit run-length), $S_j = \sum_{i=1}^{N_j} (X_0 - X_i)$ を不足総和 (deficit run-sum) と呼ぶ。 $X_i \geq X_0$ なる状態が続く場合についても同様に、充足継続期間 (surplus run-length) および充足総和 (surplus run-sum) が定義できる。

念のために、文献 3) において筆者らの導いた渇水回数 n , 総不足水量 S_n との相違を説明すると、 n はサンプル・サイズを有限としたときに、不足期間の総和がどのような統計的特性を示すかを調べるために用いられた量であり、run-length N_j は一旦渇水状態となって、次にこの状態を脱するまでに引き続いた渇水状態の継続期間の長さを示す。 S_n, S_j の関係も同様である。すなわち、有限の期間に対しては n は N_j の総和となり、 S_n は S_j の総和となる。

$X_i < X_0$ なる渇水の生ずる確率を q とすると、充足確率 p は $p=1-q$ であり、 k 個の不足の連続する確率を $p_r(N=k)$ とすると、

$$p_r(N=k) = pq^{k-1}, \quad (k=1, 2, \dots) \dots\dots\dots(34)$$

となる。次に Fig. 9 の斜線部 (不足の場合) で定義されるような確率変数 $X_i^*(i=1, 2, \dots)$ を考え、 X_i^* の確率分布関数を $F^*(X)$ とすれば、

$$F^*(X) \begin{cases} = F(X)/q & (X < X_0) \\ = 0 & (X \geq X_0) \end{cases} \dots\dots\dots(35)$$

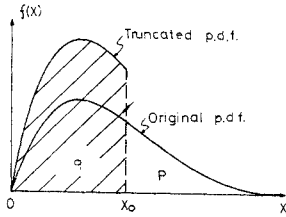


Fig. 9 Schematic representation of truncated distribution.

このとき N_j と S_j の結合キュムラント母関数 $K(u, v)$ は次式で表わされる。

$$K(u, v) = \log_e p + u + K^*(-v) + vX_0 - \log_e \{1 - p \exp[u + K^*(-v) + vX_0]\} \dots \dots \dots (36)$$

これを u, v で偏微分することにより、

$$\left. \begin{aligned} E(N) &= \frac{1}{p}, \text{ Var}(N) = \frac{q}{p^2}, \dots \dots \\ E(S_N) &= \frac{1}{p} (X_0 - \kappa_1^*) \\ \text{Var}(S_N) &= \frac{q}{p^2} (X_0 - \kappa_1^*)^2 + \frac{1}{p} \kappa_2^*, \dots \\ \text{Cov}(N, S_N) &= \frac{q}{p^2} (X_0 - \kappa_1^*) \\ \rho(N, S_N) &= \left[1 + \frac{p}{q} \cdot \frac{\kappa_2^*}{(\kappa_1^* - X_0)^2} \right]^{-1/2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

ここに、 E : 平均, Var : 分散, $\text{Cov}(N, S_N)$: N と S_N の共分散, $\rho(N, S_N)$: N, S_N の相関係数, $\kappa_1^*, \kappa_2^*, \kappa_3^*, \dots$: X^* の 1 次, 2 次, 3 次, ... のキュムラント。

以上が Yevjevich らによって導かれた理論解である。

(2) 弱定常時系列・従属な系列への適用

まず年周期変動などを含む弱定常系列 X_{Ij} を考えて、この系列における run-length の確率分布を求める。周期を J とすれば水文学では普通 $J=1$ 年となり、月単位で 12、日単位で 365 となることはいうまでもない。 L 年間の水文量時系列を年ごとに区切って、次のように行列表示する。

$$\begin{bmatrix} X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1j}, \dots, X_{1J} \\ X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2j}, \dots, X_{2J} \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{L1}, X_{L2}, \dots, X_{Lj}, \dots, X_{LJ} \end{bmatrix}$$

X_{Ij} が deficit である確率を q_j , surplus である確率を p_j であるとする、 X_{Ij} は周期 J を持つので、

$$q_i = q_m \text{ (i.e. } p_i = p_m), \\ m = i + kJ, (k=1, 2, \dots), (i=1, 2, \dots, J-1)$$

以上の仮定のもとに $P(N=k)$, すなわち deficit が k 個続く確率を求める。

L が十分大きいとき, surplus から deficit に移る回数は $L \cdot p_j q_{j+1}$, deficit が k 個続いて, $(k+1)$ 個目に surplus になる回数は

$$L \cdot p_j q_{j+1} q_{j+2} \dots q_{j+k} p_{j+k+1} = L \cdot p_j p_{j+k+1} \prod_{i=1}^k q_{j+i}$$

周期 J にわたって加えたものがそれぞれの総数になることから、平均的には、

$$P(N=k) = \frac{\sum_{j=1}^J \left(p_j p_{j+k+1} \prod_{i=1}^k q_{j+i} \right)}{\sum_{j=1}^J p_j q_{j+1}} \dots \dots \dots (38)$$

従属性の強い時系列に適用するための 1 案としては、もとの時系列を従属性を代表すると考えられる時定数の定数倍 (定数は 1.0 に近い) で区切って平均化した系列を考え、この系列を独立な系列とみなして、独立な系列に対する解を適用するという手法が考えられる (Fig. 10 参照)。

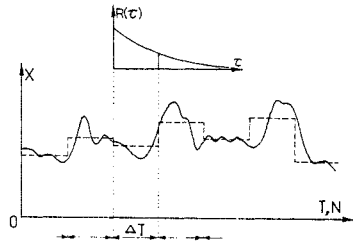


Fig. 10 Grouping of correlated sequence, solid line : original sequence, broken line : grouped sequence.

いま規準化された自己相関関数が $R(\tau) = e^{-\tau/k}$ なる正規分布をなす系列に対して、この手法を適用してみる。もとの系列を時定数 k で区切ると、平均値は $\mu_k = \mu$ で変わらないが分散は、

$$\sigma_k^2 = \frac{2 \sigma^2}{k^2} \int_0^k (k-\tau) R(\tau) d\tau = 0.739 \sigma^2 \dots \dots \dots (39)$$

となる。照査のために、自己相関係数と X_0 のいろいろな組み合わせに対してシミュレーションを行い、これより

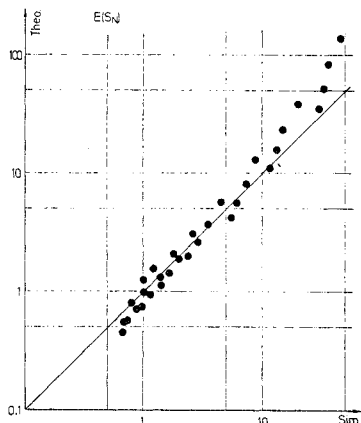


Fig. 11 Verification of grouping technique for $E(S_N)$.

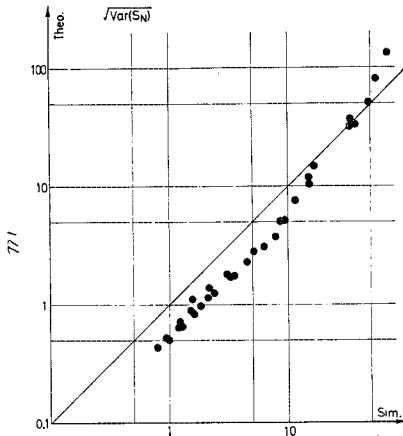


Fig. 12 Verification of grouping technique for $\sqrt{\text{Var}(S_N)}$.

得られる deficit run-sum の平均値・標準偏差と、 k で区切って作った新しい系列を独立な系列とみなして Eq. (37) より求めた $E(S_N)$, $\sqrt{\text{Var}(S_N)}$ を比較したものが Fig. 11, 12 である。両者はかなりよく一致しているといえよう。

(3) 実測水文資料への適用

以上の理論を実測水文資料に適用する。理論解は結局のところ独立な系列に対する解であるから、まずほぼ独立な系列とみなせる雨量資料に対して適用することにする。Fig. 13 は大阪の実測月雨量における run-length の相対頻度と、年周期変動を考慮した Eq. (38) より求められる理論値を比較した例である。両者はよく適合しているといえよう。

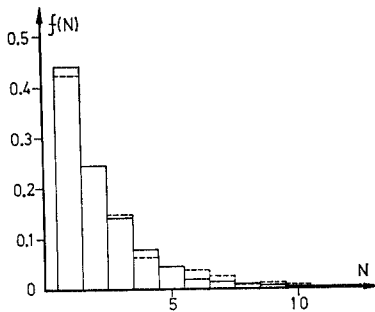


Fig. 13 Fitness of theoretical p.d.f. of run-length for monthly precipitation at Osaka, $X_0 = \mu$, solid line : theoretical, broken line : empirical.

次に N と S_N の相関関係について実測値より得られる結果を検討しよう。もしこの相関関係が非常に強ければ、渇水評価においては実質上 N と S_N の両方の効果を考慮する必要はなく、どちらか一方のみを用いて評価を行えばよい。これにより渇水評価の実際的・理論的取

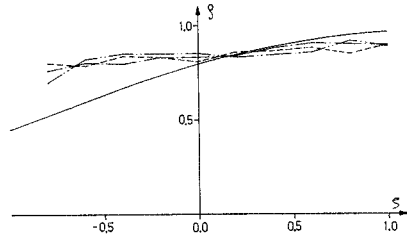


Fig. 14 Correlation between N and S_N for discharge data, solid line : theoretical curve for independent Normal distribution.

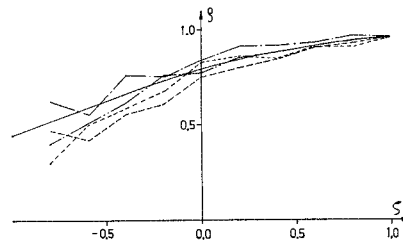


Fig. 15 Correlation between N and S_N for precipitation data, solid line : theoretical curve for independent Normal distribution.

り扱いは比較的簡単になるであろう注2)。

Fig. 14 は琵琶湖、木津川月が瀬地点の流量資料より得られる結果を示したものであり、Fig. 15 は近畿圏各地点の月降水量資料より得られる結果を示している。これらの図において横軸は、基準値 X_0 の無次元量 $z = (X_0 - \mu) / \sigma$ を示している。また参考のために、独立な正規分布をなす系列に対して Eq. (37) より得られる理論的な相関係数 $\rho(N, S_N)$ と z の関係を実線により示している。これらの図より次のようなことがわかる。

- i) 自己相関係数のかなり大きい流量資料においては、 N と S_N の相関係数は非常に大きく 0.8 以上である。
- ii) 雨量資料はほぼ独立とみなせるので、独立な正規分布に対して得られる理論解とほぼ一致し、実用上もっともよく用いられる z の値すなわち、 $z < 0.5$ に対しては $\rho(N, S_N) = 0.4 \sim 0.6$ とかなり小さい。

以上よりわかるように、流量資料を用いて渇水評価を行う場合は run-length のみを用いて評価すればよいであろう。雨量法的に、雨量資料を用いて渇水評価を行うときは、 N と S_N の相関はかなり低いので、両方を用いて評価を行わざるをえないが、雨量資料の場合は上記のごとく独立な系列を仮定して導かれる理論解がよく適合するから、この場合も今後の研究の発展はそう困難で

注 2) $N \sim S_N$ の相関関係を、理論的取り扱い上ここでは線形相関係数で示している。直感的には S_N は N の 2 乗ともっとも強い相関関係を有すると予想されるから、たとえば流量資料については本論文で指摘した以上に強い相関関係がある可能性がある。

はないと考えられる。

以上のごとく、これまで理論的な取り扱いが絶望視されていた渇水評価の研究について、かなり明るい見通しをつけることができた。

4. 結 論

水工計画において、各計画固有の代表的な時間単位あるいは継続時間に対する水文量の統計的特性を知る必要が生じることは多い。またいろいろな時間単位に対して個別に研究され蓄積されてきた既往の水文学的知見を総合化するためには、時間単位と水文量の特性との関係を統一的に表現しておく必要がある。よって本論文では、ある時間単位に対する水文量の和に関する統計的特性を理論的・実証的に研究した。その概要は以下のごとく要約できる。

水文量のごとくゆがんだ分布にしたがう確率変数の和の分布に対して厳密な解を導くことはほとんど不可能であるから、まず水文量の確率分布はガンマ分布で表現できると考え、もっとも単純な場合としてガンマ分布にしたがう独立な2変数の和もまた近似的にガンマ分布にしたがうことを示した。次にこの事実はより一般的な場合に対しても成立すると考えられるから、水文学上重要と考えられるより一般的な条件下における多変数の和の分布をガンマ分布で近似的に表現するための理論解を導いた。具体的には、

i) 日雨量時系列のごとく確率分布に飛躍を伴う系列に対する解

ii) 流量時系列のごとく従属な系列に対する解

iii) 以上のそれぞれに対して、十分多くの水文量を加えたときの極限分布を示す解。また実測水文資料への適用により、日雨量・半旬流量についてはたかだか数個の水文量を加えれば、このより単純な極限分布の式による近似が可能なることも確かめた。

これらの解は比較的簡単な式で表現されており、また実測水文資料より得られる結果に対して良好な適合度を示すことから、実用上十分な適用性を有しているといえることができる。

さらに DDA 解析により経験的に得られた降雨強度・継続時間曲線が上記の解から計算される曲線とほとんど完全に一致することも確かめられた。これにより筆者らの理論の従来用いられてきた経験公式による実用性の検証と、経験公式自身の理論的裏付を行うことができたといえよう。

一方水資源計画において重要な渇水状態は、各渇水の継続期間、その間の不足水量の和などにより評価すべき

であるといわれているが、このような場合には継続期間を固定して考えることはできない。本研究の後半においては、Yevjevich らにより導入された連の理論の適用により、継続期間をも確率変数と考えて、これと不足和をそれぞれ連の理論における run-length, run-sum とみなし、これらの確率分布や相互関係などについて統計的検討を行った。成果は次のとおりである。

i) 年周期を伴う非定常時系列に対する run-length の確率分布を表わす式を導いた。

ii) Yevjevich らの解、上記の解ともに独立な系列に対する解であるが、従属な系列においては適当な区間で区切って独立な系列とみなすことにより、独立な系に対する理論解がかなりの精度で適用可能なことを示した。

iii) 雨量資料については独立な系列に対する解が十分な精度で適用可能なことを示した。またこの場合 run-length と run-sum の相関係数は実用的には 0.4~0.6 とかなり小さく、統計的にむしろ独立に近い。

iv) 従属性の強い流量資料においては run-length と run-sum の相関係数は 0.8 以上とかなり大きく、この場合は渇水評価を run-length のみで行っても大過ないことがわかった。

謝辞：最後に本研究を進めるにあたって計算・資料整理に協力していただいた熊谷組 吉岡俊策氏に感謝の意を表する次第である。また本研究は室田明を代表者とする特定研究「水資源の貯留調節機能の研究」の課題で昭和 46 年度および昭和 47 年度文部省科学研究費の援助を受けた。ここに記して謝意を表する。

計算に使用した電子計算機は大阪大学大型電子計算機センターの NEAC 2200-700 および京都大学大型電子計算機センターの FACOM 230-60 である。

参 考 文 献

- 1) Linsley, R.K., M.A. Kohler and J.L.H. Paulhus: Applied Hydrology, McGraw-Hill, 1949, p. 91.
- 2) 室田 明・江藤剛治: 利水を目的とした貯水池の貯留調節機能に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集第 222 号, 1974.
- 3) 室田 明・江藤剛治・吉岡正道: 水文資料に起因する水資源計画の信頼度について, 土木学会論文報告集第 222 号, 1974.
- 4) 井沢竜夫: 2変数のガンマ分布について(続), 気象と統計, 第4巻, 第2号, 昭 28, pp. 15-19.
- 5) 長尾正志・角屋 睦: 2変数ガンマ分布とその適用に関する研究, 京大防災年報, 13 号, 14 号, 1970, 1971.
- 6) Downer, R.N., M.M. Siddiqui and V. Yevjevich: Applications of runs to hydrologic droughts, Proc. I.H.S., pp. 496-505, Sept., 1967.

(1973.6.27・受付)