

断面変形を考慮した薄肉はりの振動解析

DYNAMIC ANALYSIS OF THIN-WALLED BEAMS
CONSIDERING CROSS-SECTIONAL DEFORMATIONS

中 村 秀 治*

By Hideharu Nakamura

1. ま え が き

薄肉はりの断面形状の変化がはり全体の挙動に大きな影響をおよぼし、中間ダイヤフラムや補剛材の効果がそのような現象と関連していることは知られている。従来、薄肉はりの中でも特に薄肉箱型はりについては、直線桁および曲線桁について、理論的にも実験的にも多くの研究が行われ、断面変形挙動と中間ダイヤフラムの効果が明らかにされてきた。しかしながら、ほとんどの研究が静的な場合に限られており、薄肉はりの動的挙動に対して断面変形がどのような影響をおよぼし、中間ダイヤフラムおよび補剛材がどのような効果を有するのか検討したものは少ない¹⁾。

薄肉はりにおいては、そりおよび断面変形振動が縦、横、ねじり振動に近い固有周期を持ち、動的荷重に対する応答にも重要な役割を持つことが予測される。

本論文は、断面変形を考慮した薄肉はりの一振動解析法を示し、実橋に近い寸法の薄肉箱型はりについて、固有振動および動的応答解析の数値計算結果を示すことにより、薄肉はりの動的挙動と断面変形の関係を数値的に検討することを目的としている。また、中間ダイヤフラムの効果についても考察を加えるものである。

解析方法は、奥村・坂井によって導かれた折板理論式²⁾の動的解析への拡張といえるが、簡潔にマトリクス表示された折板要素の運動方程式は、任意の断面形状の薄肉はりに適用可能である。また、マトリクスの重ね合わせを有効な手段としている点は有限要素法に類似している。同様の考え方に基づいて、Y.K. Cheung が Finite Strip Method³⁾を提唱しているが、本解析法では各折板要素の節線変位、節線外力を最初から特定の関数で仮定していない。したがって、薄肉はりの運動方程式の作成において、マトリクスの重ね合わせ以外に特別

な考慮を必要としない。また、作成された薄肉はりの運動方程式を解く場合にも、級数解法、差分解法など構造物の形状、境界条件、荷重条件に応じて適当な解法を選択する余地を残しており、断面変形を考慮した薄肉はりのより一般的な振動解析理論と考えられる。

数値計算は、両端単純支持の薄肉箱型はりについて行う。現実には架設されるボックスガーター橋はほとんど連続桁であり、本解析法による連続桁の計算も可能であるが、断面変形を考慮し、薄肉はりの動的特性を検討するという主目的に対しては単純桁が最適である。板厚、断面寸法および支間長は実橋に近い数値を与え、現実には即した検討を行うよう留意した。その結果、薄肉はりの動的特性のいくつかが明らかになったが、それらは棒理論値、はり理論値、St. Venant のねじり理論値などとの対比を通して述べることにする。

2. 解 析 理 論

(1) 概 要

この手法は一種の有限要素法と考えられる。薄肉はりを何枚かの折板要素の集合体と考え、各要素間の節線上での適合条件を合わせて解く。一つの要素においては、はりの軸と直交する面内方向座標についてののみ、多項式で変位関数を仮定する。多項式は面内変位が一次関数、面外変位が三次関数としている。このような考え方は、O.C. Zienkiewicz⁴⁾が Semi-Analytical 有限要素法と述べている Y.K. Cheung の提唱した Finite Strip Method と同様のものといえる。

多項式に用いた変数は、変分原理に基づいて消去され、一つの折板要素について節線変位、節線外力の関係式が導かれる。この関係式が折板要素の運動方程式になるが、時間について2階、はりの軸方向座標について4階の線型連立偏微分方程式である。薄肉はりの運動方程

* 正会員 工修 電力中央研究所技術第二研究所

式は全要素の運動方程式をよせ集めることにより作られ、数値計算上は通常の有限要素法と同様のマトリクスの重ね合わせを行えばよい。

線型連立偏微分方程式は、節線変位、節線外力を境界条件を満足する Fourier 級数に展開し、各項の係数を未知関数とする時間について二階の連立常微分方程式に変換して解くことも可能であり、直接差分法し、代数一次方程式に変換して解くこともできる。本論文では Fourier 級数に展開する方法を用いる。変換して得られる連立常微分方程式の新しいマトリクス関係式は、質量マトリクス、剛性マトリクスともに対称であり、容易に固有値計算から固有モードと固有周期が求められる。ただし、薄肉はりの構造特性上、マトリクスが重根あるいは非常に近い値の固有値を多数持つ場合が多い。全部の固有モード、固有周期を精度良く、短時間で求めるには数値計算上の配慮が必要である。

動的応答解析はモード解析法により行う。不規則な動的荷重に対する応答を計算するための逐次積分式は、時間きざみの間で荷重が直線変化すると仮定しており、モードごとの常微分方程式の一般解になっている。

(2) 折板要素の運動方程式¹¹

図-1 に示すような何枚かの折板要素からなる構造系を考え、斜線で示した点 i, i', j, j' で囲まれた要素を要素 ij と呼ぶことにする。また、 ii', jj' を節線 ii' 、節線 jj' と呼ぶことにする。局所座標系 $s-n-z$ は、部材軸方向を z 軸に取り、要素の面内で z 軸に直交する方向を s 軸、要素に直交する方向を n 軸とし、座標軸 $0'-n$ が z の正方向から見て反時計回りに 90° 回転して座標軸 $0'-s$ と一致するとき、 n の方向を正と定める。全体座標系 $x-y-z$ は図-1 のように定める。

要素 ij について、 s, n, z 軸方向に対する変位をそれぞれ u, v, w とし、節点 ii', jj' 上での u, v, w をそれぞれ $u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j$ とする。また節線 ii', jj' 上での断面輪郭線に対する傾きを θ_i, θ_j とし、次の変位関数を仮定する。 t は時間、 b は要素 ij の板幅と

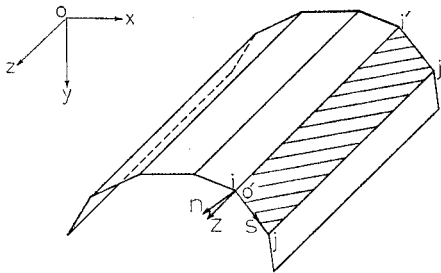


図-1 薄肉はりの折板要素分割

する。

$$w(z, s, t) = \left(1 - \frac{s}{b}\right)w_i(z, t) + \frac{s}{b}w_j(z, t) \\ = w^{(i)}(s)w_i(z, t) + w^{(j)}(s)w_j(z, t) \\ \dots\dots\dots(1)$$

$$u(z, s, t) = \left(1 - \frac{s}{b}\right)u_i(z, t) + \frac{s}{b}u_j(z, t) \\ = u^{(i)}(s)u_i(z, t) + u^{(j)}(s)u_j(z, t) \\ \dots\dots\dots(2)$$

$$v(z, s, t) = \left(1 - \frac{3}{b^2}s^2 + \frac{2}{b^3}s^3\right)v_i(z, t) \\ + \left(s - \frac{2}{b}s^2 + \frac{1}{b^2}s^3\right)\theta_i(z, t) \\ + \left(\frac{3}{b^2}s^2 - \frac{2}{b^3}s^3\right)v_j(z, t) \\ + \left(-\frac{1}{b}s^2 + \frac{1}{b^2}s^3\right)\theta_j(z, t) \\ = v^{(i)}(s)v_i(z, t) + \theta^{(i)}(s)\theta_i(z, t) \\ + v^{(j)}(s)v_j(z, t) + \theta^{(j)}(s)\theta_j(z, t) \\ \dots\dots\dots(3)$$

z, s, n 軸方向の平衡方程式は次の3式である^{5), 6)}。

$$N_z' + N_{zs}' - \rho h\dot{w} + p_z = 0 \dots\dots\dots(4)$$

$$N_{zs}' + N_s' - \rho h\dot{u} + p_s = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$M_z'' + 2M_{zs}'' + M_s'' - \rho h\dot{v} + p_n = 0 \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 $(\quad)' = \partial/\partial z(\quad)$ 、 $(\quad)' = \partial/\partial s(\quad)$ 、 $(\quad)' = \partial/\partial t(\quad)^2$ とし、 N_z, N_s, N_{zs} は要素の単位幅当りの応力、 M_z, M_s, M_{zs} は単位幅当り曲げモーメント、 ρ は密度、 h は板厚、 p_z, p_s は z, s 軸方向単位幅当り分布荷重、 p_n は n 軸方向単位面積当りの分布荷重とする。

式(4),(5),(6)の平衡方程式を用い、Galerkin法によって次の8式を導くことができる⁷⁾。

$$\int_0^b (N_z' + N_{zs}' - \rho h\dot{w} + p_z)w^{(i)} ds = 0 \dots\dots(7)$$

$$\int_0^b (N_z' + N_{zs}' - \rho h\dot{w} + p_z)w^{(j)} ds = 0 \dots\dots(8)$$

$$\int_0^b (N_{zs}' + N_s' - \rho h\dot{u} + p_s)u^{(i)} ds = 0 \dots\dots(9)$$

$$\int_0^b (N_{zs}' + N_s' - \rho h\dot{u} + p_s)u^{(j)} ds = 0 \dots\dots(10)$$

$$\int_0^b (M_z'' + 2M_{zs}'' + M_s'' - \rho h\dot{v} + p_n)v^{(i)} ds = 0 \\ \dots\dots\dots(11)$$

$$\int_0^b (M_z'' + 2M_{zs}'' + M_s'' - \rho h\dot{v} + p_n)v^{(j)} ds = 0 \\ \dots\dots\dots(12)$$

$$\int_0^b (M_z'' + 2M_{zs}'' + M_s'' - \rho h\dot{v} + p_n)\theta^{(i)} ds = 0 \\ \dots\dots\dots(13)$$

¹¹ 参考文献 2) の振動解析への拡張であり、記号などはほぼ同じものを用いているので参照のこと。

¹² 参考文献 2) では $(\quad)' = \partial/\partial s(\quad)$ としているが、時間微分と紛らわしいので $(\quad)' = \partial/\partial t(\quad)$ とした。

$$\int_0^b (M_z'' + 2M_{zs}'' + M_s'' - \rho h \ddot{v} + p_n) \theta^{(j)} ds = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

式(7)~(14)へ式(1),(2),(3)を代入すれば \$s\$ が消去され、要素 \$ij\$ の節線変位、節線外力の関係式が導かれるが、文献 2) と重複するので、質量マトリクスに組み入れられる慣性項のみを以下に記述する。

節線 \$ii'\$ に働く \$z\$ 軸方向慣性力

$$= \rho h \left[\left(\int_0^b w^{(i)} w^{(i)} ds \right) \ddot{w}_i + \left(\int_0^b w^{(j)} w^{(i)} ds \right) \ddot{w}_j \right] \quad \dots\dots\dots(15)$$

節線 \$jj'\$ に働く \$z\$ 軸方向慣性力

$$= \rho h \left[\left(\int_0^b w^{(i)} w^{(j)} ds \right) \ddot{w}_i + \left(\int_0^b w^{(j)} w^{(j)} ds \right) \ddot{w}_j \right] \quad \dots\dots\dots(16)$$

節線 \$ii'\$ に働く \$s\$ 軸方向慣性力

$$= \rho h \left[\left(\int_0^b u^{(i)} u^{(i)} ds \right) \ddot{u}_i + \left(\int_0^b u^{(j)} u^{(i)} ds \right) \ddot{u}_j \right] \quad \dots\dots\dots(17)$$

節線 \$jj'\$ に働く \$s\$ 軸方向慣性力

$$= \rho h \left[\left(\int_0^b u^{(i)} u^{(j)} ds \right) \ddot{u}_i + \left(\int_0^b u^{(j)} u^{(j)} ds \right) \ddot{u}_j \right] \quad \dots\dots\dots(18)$$

節線 \$ii'\$ に働く \$n\$ 軸方向慣性力

$$= \rho h \left[\left(\int_0^b v^{(i)} v^{(i)} ds \right) \ddot{v}_i + \left(\int_0^b \theta^{(i)} v^{(i)} ds \right) \ddot{\theta}_i + \left(\int_0^b v^{(j)} v^{(i)} ds \right) \ddot{v}_j + \left(\int_0^b \theta^{(j)} v^{(i)} ds \right) \ddot{\theta}_j \right] \quad \dots\dots\dots(19)$$

節線 \$jj'\$ に働く \$n\$ 軸方向慣性力

$$= \rho h \left[\left(\int_0^b v^{(i)} v^{(j)} ds \right) \ddot{v}_i + \left(\int_0^b \theta^{(i)} v^{(j)} ds \right) \ddot{\theta}_i + \left(\int_0^b v^{(j)} v^{(j)} ds \right) \ddot{v}_j + \left(\int_0^b \theta^{(j)} v^{(j)} ds \right) \ddot{\theta}_j \right] \quad \dots\dots\dots(20)$$

節線 \$ii'\$ に働く \$z\$ 軸まわり回転慣性力

$$= \rho h \left[\left(\int_0^b v^{(i)} \theta^{(i)} ds \right) \ddot{v}_i + \left(\int_0^b \theta^{(i)} \theta^{(i)} ds \right) \ddot{\theta}_i + \left(\int_0^b v^{(j)} \theta^{(i)} ds \right) \ddot{v}_j + \left(\int_0^b \theta^{(j)} \theta^{(i)} ds \right) \ddot{\theta}_j \right] \quad \dots\dots\dots(21)$$

節線 \$jj'\$ に働く \$z\$ 軸まわり回転慣性力

$$= \rho h \left[\left(\int_0^b v^{(i)} \theta^{(j)} ds \right) \ddot{v}_i + \left(\int_0^b \theta^{(i)} \theta^{(j)} ds \right) \ddot{\theta}_i + \left(\int_0^b v^{(j)} \theta^{(j)} ds \right) \ddot{v}_j + \left(\int_0^b \theta^{(j)} \theta^{(j)} ds \right) \ddot{\theta}_j \right] \quad \dots\dots\dots(22)$$

これらを整理すると、折板要素の運動方程式が次のマトリクス関係式で表わされる。

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\boldsymbol{\delta}}\} + [\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\delta}\} = \{\mathbf{P}\} \quad \dots\dots\dots(23)$$

ここで、\$\{\boldsymbol{\delta}\}\$、\$\{\mathbf{P}\}\$ はそれぞれ節線変位、節線外力であり、次に示すものである。

$$\{\boldsymbol{\delta}\} = \begin{Bmatrix} w_i(z, t) \\ u_i(z, t) \\ v_i(z, t) \\ \theta_i(z, t) \\ w_j(z, t) \\ u_j(z, t) \\ v_j(z, t) \\ \theta_j(z, t) \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{P}\} = \begin{Bmatrix} W_i(z, t) \\ U_i(z, t) \\ V_i(z, t) \\ \Theta_i(z, t) \\ W_j(z, t) \\ U_j(z, t) \\ V_j(z, t) \\ \Theta_j(z, t) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(24)$$

\$[\mathbf{M}]\$ は質量マトリクスで、次に示す対称マトリクスである。

$$[\mathbf{M}] = \rho h \begin{bmatrix} \frac{b}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{6} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{13}{35}b & \frac{11}{210}b^2 & 0 & 0 & \frac{9}{70}b & -\frac{13}{420}b^2 \\ & & & \frac{1}{105}b^3 & 0 & 0 & \frac{13}{420}b^2 & -\frac{1}{140}b^3 \\ & & & & \frac{b}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{b}{3} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & & & \frac{13}{35}b & -\frac{11}{210}b^2 \\ & & & & & & & \frac{1}{105}b^3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(25)$$

\$[\mathbf{K}]\$ は剛性マトリクスであり、次式で表わされる。

$$[\mathbf{K}] = \left[[\mathbf{K}_1] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 + [\mathbf{K}_2] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + [\mathbf{K}_3] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) + [\mathbf{K}_4] \right] \quad \dots\dots\dots(26)$$

\$[\mathbf{K}_1]\$、\$[\mathbf{K}_2]\$、\$[\mathbf{K}_3]\$、\$[\mathbf{K}_4]\$ は参考文献 2) に示されている。

ここで誘導した質量マトリクス、剛性マトリクスは、要素内で等方性、等厚という仮定に立ち、また面内変位と面外変位の間に相互の連成がないとし、同等に評価して求められている。

式(23)で示された一要素の運動方程式から、薄肉はり全体の運動方程式を作るために、質量マトリクス、剛性マトリクスの重ね合せを行うが、その際、局所座標系 \$s-n-z\$ から全体座標系 \$x-y-z\$ へ変換する必要がある。座標変換マトリクス \$[\mathbf{T}]^{13}\$ により、全体座標系の質量マトリクス \$[\bar{\mathbf{M}}]\$、剛性マトリクス \$[\bar{\mathbf{K}}]\$ が次式で求められる。

$$[\bar{\mathbf{M}}] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{M}] [\mathbf{T}] \quad \dots\dots\dots(27)$$

13 参考文献 2) 参照

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \dots\dots\dots (28)$$

減衰を考慮する方法として、減衰マトリクス $[\bar{C}]$ を考えることもできるが、本論文ではモード解析法により応答計算の際、減衰項を付加する。

(3) 中間ダイヤフラムの取り扱い⁸⁾

薄肉はりにおいて中間ダイヤフラムの効果を検討することは、静的にも動的にも重要である。中間ダイヤフラムが存在すれば、その位置に次式で示す $\{P_d\}$ が集中荷重として加えられる。

$$\{P_d\} = [\bar{K}_d] \{\delta\} \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $\{\delta\}$ は薄肉はりの節線変位であり、 $[\bar{K}_d]$ はダイヤフラムの剛性マトリクスである。したがって、薄肉はり全体の運動方程式が次式のように表わされていれば、

$$[\bar{M}]\{\ddot{\delta}\} + [\bar{K}]\{\delta\} = \{P\} \dots\dots\dots (30)$$

中間ダイヤフラムの項は次のように組み入れられる。

$$[\bar{M}]\{\ddot{\delta}\} + [[\bar{K}] - [\bar{K}_d]]\{\delta\} = \{P\} \dots\dots\dots (31)$$

$[\bar{K}_d]$ は骨組要素または有限要素法で用いる種々の要素の剛性マトリクスを用いて作ることができるが、変位と荷重の取り方を薄肉はりに合わせる必要がある。両端単純支持の薄肉箱型はりに中間ダイヤフラムの入る場合については、中村が二次元問題の有限要素法剛性マトリクスから $[\bar{K}_d]$ を求め、静的荷重に対する中間ダイヤフラムの効果と必要板厚について考察している。本論文の数値計算もこの方法を用いて行う。

このような方法では、中間ダイヤフラムの剛性を容易に考慮できるが、一般に格点以外で薄肉はりとはダイヤフラムの変位の適合条件が満たされない。また、二種類以上の剛性マトリクスを混合した複合解析になるため計算精度の低下が考えられるが、静的解析の場合だけでなく動的解析の場合についても満足できる結果が得られている。

(4) 固有値解析^{9),10)}

すべての折板要素とダイヤフラムを組み合わせ、次に示す薄肉はりの運動方程式が作られる。

$$[\bar{M}]\{\ddot{\delta}\} + [[\bar{K}] - [\bar{K}_d]]\{\delta\} = \{P\} \dots\dots\dots (31)$$

$[\bar{M}]$, $[\bar{K}]$ を薄肉はりの質量マトリクス、剛性マトリクスとし、節線変位 $\{\delta\}$ 、節線外力 $\{P\}$ を

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} \quad (n \text{ は節線数})$$

$$\dots\dots\dots (32)$$

とすれば、式 (31) は時間 t について 2 階、はりの軸方向座標 z について 4 階の線型連立偏微分方程式である。

両端単純支持のはりの場合には、節線変位、節線外力を次のように級数展開することができる。

$$\delta_i = \begin{Bmatrix} w_i(z, t) \\ u_i(z, t) \\ v_i(z, t) \\ \theta_i(z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{m=1}^p w_{im}(t) \cos \frac{m\pi z}{l} \\ \sum_{m=1}^p u_{im}(t) \sin \frac{m\pi z}{l} \\ \sum_{m=1}^p v_{im}(t) \sin \frac{m\pi z}{l} \\ \sum_{m=1}^p \theta_{im}(t) \sin \frac{m\pi z}{l} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

$$P_i = \begin{Bmatrix} W_i(z, t) \\ U_i(z, t) \\ V_i(z, t) \\ \Theta_i(z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{m=1}^p W_{im}(t) \cos \frac{m\pi z}{l} \\ \sum_{m=1}^p U_{im}(t) \sin \frac{m\pi z}{l} \\ \sum_{m=1}^p V_{im}(t) \sin \frac{m\pi z}{l} \\ \sum_{m=1}^p \Theta_{im}(t) \sin \frac{m\pi z}{l} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

式 (33), (34) を式 (31) へ代入し、級数の直交性を用いれば、次の式が導かれる。

$$[\underline{K}]\{\ddot{\delta}\} + [\underline{K}]\{\delta\} = \{P\} \dots\dots\dots (35)$$

ここで、 $[\underline{M}]$, $[\underline{K}]$ は変換された薄肉はりの質量マトリクス、剛性マトリクスである。 $[\underline{K}]$ はダイヤフラムまで含めたものとする。 $\{\delta\}$, $\{P\}$ は、

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_p \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_p \end{Bmatrix} \quad (p \text{ は級数項数})$$

$$\dots\dots\dots (36)$$

とし、 $\underline{\delta}_i$, \underline{P}_i は

$$\underline{\delta}_i = \begin{Bmatrix} w_{i1}(t) \\ u_{i1}(t) \\ v_{i1}(t) \\ \theta_{i1}(t) \\ \vdots \\ w_{ni}(t) \\ u_{ni}(t) \\ v_{ni}(t) \\ \theta_{ni}(t) \end{Bmatrix}, \quad \underline{P}_i = \begin{Bmatrix} W_{i1}(t) \\ U_{i1}(t) \\ V_{i1}(t) \\ \Theta_{i1}(t) \\ \vdots \\ W_{ni}(t) \\ U_{ni}(t) \\ V_{ni}(t) \\ \Theta_{ni}(t) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (37)$$

とする。さらに、

$$\underline{\delta}_i = e^{j\omega t} \begin{Bmatrix} \underline{w}_{i1} \\ \underline{u}_{i1} \\ \underline{v}_{i1} \\ \underline{\theta}_{i1} \\ \vdots \\ \underline{w}_{ni} \\ \underline{u}_{ni} \\ \underline{v}_{ni} \\ \underline{\theta}_{ni} \end{Bmatrix}, \quad \underline{P}_i = \{0\} \dots\dots\dots (38)$$

とおけば、式 (35) は

$$[[\underline{K}] - \omega^2 [\underline{M}]]\{\delta\} = \{0\} \dots\dots\dots (39)$$

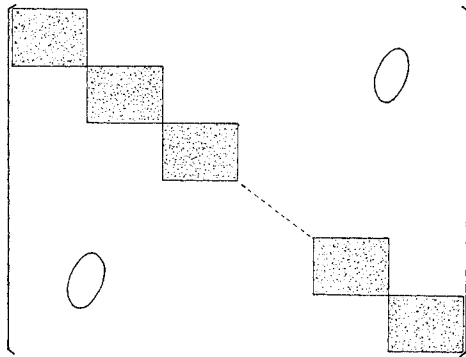


図-2 中間ダイヤフラムが入らない場合の $[M], [K]$

となり、

$$[[K] - \omega^2[M]] = 0 \dots\dots\dots(40)$$

から固有周期と固有モードが求められる。この場合、 $[K], [M]$ は対称マトリクスになり、中間ダイヤフラムが入らなければ、図-2 に示すように級数各項が分離されたバンドマトリクスになる。中間ダイヤフラムの入る場合は $[K]$ の零要素のいくつかが非零要素になる。

式 (40) を固有値計算するにあたっては、薄肉はりの構造特性により、マトリクスが重根あるいは非常に近い固有値を持つ場合が多い。したがって、

$$[[K]^{-1}[M] - \frac{1}{\omega^2}[I]] = 0 \quad ([I] \text{ は単位マトリクス}) \dots\dots\dots(41)$$

の形で、非対称マトリクス $[K]^{-1}[M]$ を POWER METHOD などにより最小固有値から逐次求めるのは適当でない。 $[K]$ をコレスキー分解^{11), 12)}すれば、

$$[K] = [L]^T[L] \dots\dots\dots(42)$$

$$[[L]^{-1}]^T[M][L]^{-1} - \frac{1}{\omega^2}[I] = 0 \dots\dots\dots(43)$$

となり、対称マトリクス $[[L]^{-1}]^T[M][L]^{-1}$ を Jacobi の方法、Householder-QR 法などにより固有値計算するのが適当である。ただし、式 (43) から得た固有モード $[V^*]$ はもとの式 (40) の固有モード $[V]$ とは異なるので、

$$[L]^{-1}[V^*] = [V] \dots\dots\dots(44)$$

によりもとの固有モードに変換する必要がある。

(5) 不規則な動的荷重に対する応答解析法^{13), 14), 15)}

薄肉はりの固有モードと固有周期が求められた場合、モード解析法により応答解析が行える。ここに述べる一方法は、動的荷重が時間きざみ dt の間に直線変化するという物理的近似を設けており、漸化式は各モードの常微分方程式の一般解である。

変位 $\{\delta\}$ は次式に示すように表わされる。

$$\{\delta\} = [\{\delta_1\}, \{\delta_2\}, \dots, \{\delta_n\}]\{z\} = [F]\{z\} \dots\dots\dots(45)$$

ここで、 $\{\delta_1\}, \{\delta_2\}, \dots, \{\delta_n\}$ は 1, 2, ..., n 次の固有モード、 $\{z\}$ は各モードを混ぜる比率とする。式 (45) を式 (35) に代入し、 $[F]^T$ を前にかけて、

$$[F]^T[M][F]\{z\} + [F]^T[K][F]\{z\} = [F]^T[P] \dots\dots\dots(46)$$

式 (46) は固有モードの直交性から、次の n 個の独立な常微分方程式に分解される。

$$\ddot{z}_i + \omega_i^2 z_i = \frac{\sum_{r=1}^n F_{ir} P_r}{m_i} (= Q_i) \dots\dots\dots(47)$$

ここで、 m_i は $[F]^T[M][F]$ の i 番目の対角成分とする。

減衰を考慮するために、臨界減衰比 (Critical Damping Ratio) を ζ_i とし、減衰項を次のように式 (47) に加える。

$$\ddot{z}_i + 2\omega_i\zeta_i\dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = Q_i \dots\dots\dots(48)$$

この n 個の独立した式を与えられた境界条件

$$z_i = z_{i0} \quad (t=0)$$

$$\dot{z}_i = \dot{z}_{i0} \quad (t=0)$$

で解くには、次に示す手順で各方程式を逐次積分すればよい。構造物の応答は n 個の解を加え合わせて求められる。

時間きざみ dt

の間に Q_i が直線変化 (図-3) するものとし、時刻 $t, t+dt$ における z_i, \dot{z}_i, Q_i をそれぞれ $z_i(t), \dot{z}_i(t), Q_i(t)$ 、および $z_i(t+dt), \dot{z}_i(t+dt), Q_i(t+dt)$ とすれば、次式が成り立つ。

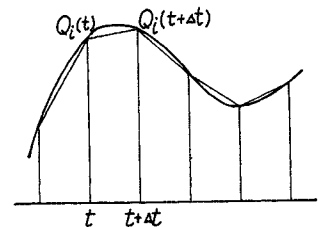


図-3 動的荷重の直線変化の仮定

$$z_i(t+dt) = E_1 z_i(t) + E_2 \dot{z}_i(t) + F_1 Q_i(t) + F_2 Q_i(t+dt) \dots\dots\dots(49)$$

$$\dot{z}_i(t+dt) = E_3 z_i(t) + E_4 \dot{z}_i(t) + F_3 Q_i(t) + F_4 Q_i(t+dt) \dots\dots\dots(50)$$

ここで、 $\omega_{iD} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$ とし、

$$E_1 = e^{-\omega_i \zeta_i dt} \left(\cos \omega_{iD} dt + \frac{\omega_i \zeta_i}{\omega_{iD}} \sin \omega_{iD} dt \right) \dots\dots\dots(51)$$

$$E_2 = \frac{e^{-\omega_i \zeta_i dt}}{\omega_{iD}} \sin \omega_{iD} dt \dots\dots\dots(52)$$

$$E_3 = -\frac{\omega_{iD}^2 + \omega_i^2 \zeta_i^2}{\omega_{iD}} e^{-\omega_i \zeta_i dt} \sin \omega_{iD} dt \dots\dots\dots(53)$$

$$E_4 = e^{-\omega_i \zeta_i dt} \left(\cos \omega_{iD} dt - \frac{\omega_i \zeta_i}{\omega_{iD}} \sin \omega_{iD} dt \right) \dots\dots\dots(54)$$

$$F_1 = \frac{S_2}{\omega_i D \Delta t} \dots\dots\dots (55)$$

$$F_2 = \frac{\Delta t S_1 - S_2}{\omega_i D \Delta t} \dots\dots\dots (56)$$

$$F_3 = \frac{-\omega_i \zeta_i S_2 + \omega_i D C_2}{\omega_i D \Delta t} \dots\dots\dots (57)$$

$$F_4 = \frac{-\omega_i \zeta_i (\Delta t S_1 - S_2) + \omega_i D (\Delta t C_1 - C_2)}{\omega_i D \Delta t} \dots\dots\dots (58)$$

$$S_1 = \int_0^{\Delta t} e^{-\omega_i \zeta_i \tau} \sin \omega_i D \tau d \tau$$

$$= \frac{e^{-\omega_i \zeta_i \Delta t} (-\omega_i \zeta_i \sin \omega_i D \Delta t}{\omega_i^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{-\omega_i D \cos \omega_i D \Delta t + \omega_i D}{\omega_i^2} \dots\dots\dots (59)$$

$$S_2 = \int_0^{\Delta t} \tau e^{-\omega_i \zeta_i \tau} \sin \omega_i D \tau d \tau$$

$$= \frac{\Delta t e^{-\omega_i \zeta_i \Delta t} (-\omega_i \zeta_i \sin \omega_i D \Delta t}{\omega_i^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{-\omega_i D \cos \omega_i D \Delta t}{\omega_i^2} \cdot$$

$$\frac{e^{-\omega_i \zeta_i \Delta t} [(\omega_i^2 \zeta_i^2 - \omega_i D^2) \sin \omega_i D \Delta t}{\omega_i^4} \cdot$$

$$\cdot \frac{+ 2 \omega_i \zeta_i \omega_i D \cos \omega_i D \Delta t - 2 \omega_i \zeta_i \omega_i D}{\omega_i^4} \dots\dots\dots (60)$$

$$C_1 = \int_0^{\Delta t} e^{-\omega_i \zeta_i \tau} \cos \omega_i D \tau d \tau$$

$$= \frac{e^{-\omega_i \zeta_i \Delta t} (-\omega_i \zeta_i \cos \omega_i D \Delta t}{\omega_i^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{+\omega_i D \sin \omega_i D \Delta t + \omega_i \zeta_i}{\omega_i^2} \dots\dots\dots (61)$$

$$C_2 = \int_0^{\Delta t} \tau e^{-\omega_i \zeta_i \tau} \cos \omega_i D \tau d \tau$$

$$= \frac{\Delta t e^{-\omega_i \zeta_i \Delta t} (-\omega_i \zeta_i \cos \omega_i D \Delta t}{\omega_i^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{+\omega_i D \sin \omega_i D \Delta t}{\omega_i^2} \cdot$$

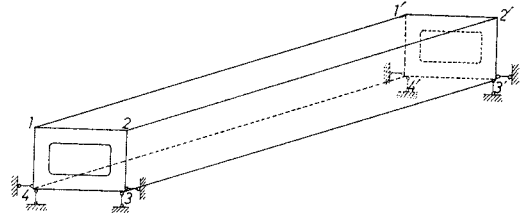
$$\frac{e^{-\omega_i \zeta_i \Delta t} [(\omega_i^2 \zeta_i^2 - \omega_i D^2) \cos \omega_i D \Delta t}{\omega_i^4} \cdot$$

$$\cdot \frac{-2 \omega_i \zeta_i \omega_i D \sin \omega_i D \Delta t - (\omega_i^2 \zeta_i^2 - \omega_i D^2)}{\omega_i^4} \dots\dots\dots (62)$$

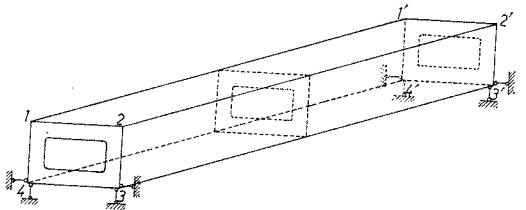
式 (49) と式 (50) の右辺 1, 2 項は式 (48) の同次方程式の解であり, 3, 4 項は式 (48) の特解である。加速度 $\ddot{z}_i(t+\Delta t)$ は, $\dot{z}_i(t+\Delta t)$, $z_i(t+\Delta t)$, $Q_i(t+\Delta t)$ を式 (48) へ代入して求められる。

3. 薄肉箱型はりの固有振動解析

2. に述べた解析理論を 図-4 (a), (b) に示す両端単純支持の薄肉箱型はりに適用する。(a) は両端にのみ面



(a) 中間ダイヤフラムが入らない場合



(b) 中間ダイヤフラムが入る場合

図-4 薄肉箱型はりの計算モデル

内剛性無限大のダイヤフラムが入っている場合, (b) は両端に面内剛性無限大, スパン中央に面内剛性有限のダイヤフラムが入っている場合である。ただし, 中間ダイヤフラムは薄肉はりの剛性に比較して, ある値以上の板厚を与えると面内剛性無限大と見なし得る³⁾ので, 中間ダイヤフラムはそのような十分剛な板厚を用いることにする。

計算に用いた寸法および材料定数は次のとおりである。

断面の高さ	3.0 m
断面の幅	4.5 m
スパン	60 m
上下フランジ板厚	1.5 cm
ウェブ板厚	1.3 cm
中間ダイヤフラム板厚	2.0 cm
ヤング率	2.1 × 10 ⁶ kg/cm ²
ポアソン比	0.3
密度	8.01 × 10 ⁻⁶ kg・sec ² /cm ⁴ (比重 7.85)

要素分割は 4 要素とし, 中間ダイヤフラムを入れた場合は, ダイヤフラムの質量を無視する。節線変位, 節線外力は式 (33), (34) のように級数展開し, 級数項は 5 項取る。固有値計算する質量マトリクス, 剛性マトリクスの大きさは 80 元である。

(1) 計算結果

上述の薄肉箱型はりについて, 式 (43) を Jacobi の方法により固有値計算した結果, 80 個の固有モードと対応する固有周期が得られた。波数という言葉を図-5の意味で用いることにすれば, 中間ダイヤフラムの入らない場合, 各モードは一つの波数成分のみを持ち, 1~5 までの各波数に対するモードはそれぞれ 16 個ずつある。

16 個ずつのモードは断面変形形状、軸方向変形などに注目すれば、波数によらず同一になるので、それ

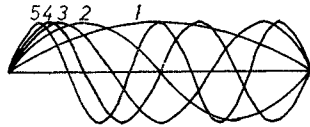


図-5 波数

ぞれ変形のタイプ (1), (2), ..., (16) と呼ぶことにする。

中間ダイアフラムが入る場合は、各モードは複数の波数成分を含むが、一つの波数成分が支配的で、他の波数成分は小さく、波数 1~5 が支配的なモードはそれぞれ 16 個ずつある。16 種類の断面変形形状、軸方向変形などは、中間ダイアフラムの入らない場合と同様、支配的な波数によらず同一であり、かつ、中間ダイアフラムの入らない場合とほぼ同一とみなせる。そこで、中間ダイアフラムの入らない場合と同様、変形のタイプ (1), (2), ..., (16) を定めることにする。

また、図-6 に示す 16 個の薄肉箱型はりの変形のパターン¹⁴を考え、それぞれ変形のパターン (1), (2), ..., (16) と呼ぶことにする。複数の変形のパターンの組み

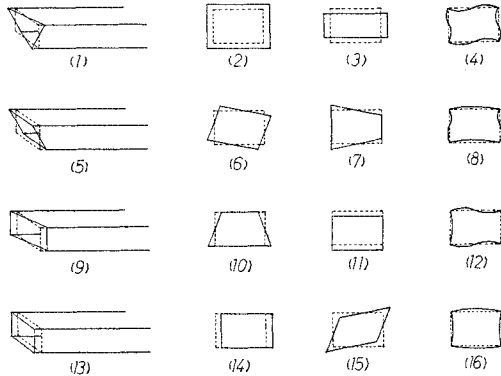


図-6 薄肉箱型はりの変形のパターン

表-2 薄肉箱型はりの固有周期 (秒)
(中間ダイアフラムが入らない場合)

波数 変形のタイプ	1	2	3	4	5
(1)	2.117×10^{-3}	2.083×10^{-3}	2.030×10^{-3}	1.963×10^{-3}	1.887×10^{-3}
(2)	2.512×10^{-3}	2.503×10^{-3}	2.486×10^{-3}	2.462×10^{-3}	2.429×10^{-3}
(3)	1.461×10^{-3}	1.459×10^{-3}	1.456×10^{-3}	1.451×10^{-3}	1.446×10^{-3}
(4)	8.439×10^{-2}	7.949×10^{-2}	5.323×10^{-2}	3.186×10^{-2}	2.133×10^{-2}
(5)	4.179×10^{-3}	3.957×10^{-3}	3.668×10^{-3}	3.367×10^{-3}	3.061×10^{-3}
(6)	3.879×10^{-2}	1.982×10^{-2}	1.326×10^{-2}	9.953×10^{-3}	7.967×10^{-3}
(7)	1.643×10^{-3}	1.640×10^{-3}	1.634×10^{-3}	1.626×10^{-3}	1.616×10^{-3}
(8)	1.551×10^{-1}	6.229×10^{-2}	3.072×10^{-2}	1.898×10^{-2}	1.334×10^{-2}
(9)	4.163×10^{-3}	3.937×10^{-3}	3.643×10^{-3}	3.338×10^{-3}	3.061×10^{-3}
(10)	2.034×10^{-3}	2.025×10^{-3}	2.012×10^{-3}	1.993×10^{-3}	1.967×10^{-3}
(11)	4.022×10^{-1}	2.637×10^{-1}	2.551×10^{-1}	2.513×10^{-1}	2.475×10^{-1}
(12)	1.356×10^{-1}	6.098×10^{-2}	2.984×10^{-2}	1.841×10^{-2}	1.294×10^{-2}
(13)	2.345×10^{-2}	1.174×10^{-2}	7.850×10^{-3}	5.913×10^{-3}	4.761×10^{-3}
(14)	2.748×10^{-1}	1.611×10^{-1}	1.574×10^{-1}	1.557×10^{-1}	1.539×10^{-1}
(15)	4.132×10^{-1}	1.310×10^{-1}	8.977×10^{-2}	8.692×10^{-2}	8.591×10^{-2}
(16)	3.972×10^{-1}	3.932×10^{-1}	3.868×10^{-1}	3.780×10^{-1}	3.673×10^{-1}

表-3 薄肉箱型はりの固有周期 (秒)
(中間ダイアフラムが入る場合)

波数 変形のタイプ	1	2	3	4	5
(1)	2.117×10^{-3}	2.083×10^{-3}	2.029×10^{-3}	1.963×10^{-3}	1.886×10^{-3}
(2)	2.501×10^{-3}	2.503×10^{-3}	2.453×10^{-3}	2.462×10^{-3}	2.205×10^{-3}
(3)	1.459×10^{-3}	1.459×10^{-3}	1.450×10^{-3}	1.451×10^{-3}	1.293×10^{-3}
(4)	9.925×10^{-2}	7.949×10^{-2}	8.814×10^{-2}	3.186×10^{-2}	8.590×10^{-2}
(5)	4.179×10^{-3}	3.957×10^{-3}	3.665×10^{-3}	3.367×10^{-3}	3.079×10^{-3}
(6)	3.890×10^{-2}	1.982×10^{-2}	1.331×10^{-2}	9.953×10^{-3}	8.036×10^{-3}
(7)	1.640×10^{-3}	1.640×10^{-3}	1.624×10^{-3}	1.626×10^{-3}	1.517×10^{-3}
(8)	1.551×10^{-1}	6.229×10^{-2}	3.068×10^{-2}	1.898×10^{-2}	1.333×10^{-2}
(9)	4.162×10^{-3}	3.937×10^{-3}	3.641×10^{-3}	3.338×10^{-3}	3.046×10^{-3}
(10)	2.025×10^{-3}	2.026×10^{-3}	1.989×10^{-3}	1.993×10^{-3}	1.876×10^{-3}
(11)	4.018×10^{-1}	2.637×10^{-1}	2.551×10^{-1}	2.513×10^{-1}	2.475×10^{-1}
(12)	1.356×10^{-1}	6.098×10^{-2}	2.981×10^{-2}	1.841×10^{-2}	1.294×10^{-2}
(13)	2.335×10^{-2}	1.174×10^{-2}	7.813×10^{-3}	5.913×10^{-3}	4.732×10^{-3}
(14)	2.745×10^{-1}	1.611×10^{-1}	1.574×10^{-1}	1.557×10^{-1}	1.539×10^{-1}
(15)	7.015×10^{-2}	1.310×10^{-1}	2.567×10^{-2}	8.692×10^{-2}	8.579×10^{-2}
(16)	3.972×10^{-1}	3.932×10^{-1}	3.868×10^{-1}	3.780×10^{-1}	3.673×10^{-1}

表-1 変形のタイプを構成する変形のパターン (◎は占める比率の特に大きいもの)

変形のタイプ \ 変形のパターン	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
(1)	◎			○		○									○	
(2)		◎	○										○			○
(3)		○	◎										○			○
(4)	○			◎		○								○		
(5)					◎			○		○	○					
(6)	○			○		◎								○		
(7)							◎		○			○				
(8)					○			◎		○	○					
(9)							○		◎			○		○		
(10)					○					◎	○					
(11)					○						◎					
(12)							○					◎		○		
(13)		○	○										◎			○
(14)							○							◎		
(15)	○			○											◎	
(16)		○	○										○			◎

14 参考文献 16) V.Z. Vlasov による断面変形を考慮した薄肉箱型はりの静的解析理論の“一般化された座標”に相当する。

合わせにより、変形のタイプを表わすことができる。表一は計算結果に基づいて、変形のタイプを構成する変形のパターンを示したものである。

表二、表三は、それぞれ中間ダイヤフラムの入らない場合、入る場合について、変形のタイプ(1),(2), ..., (16)、波数1, 2, ..., 5の固有モードに対応する固有周期をまとめたものである。

(2) 考 察

変形のタイプ(1),(2), ..., (16)は表一に示したとおり、複数の変形のパターンで構成され、縦振動、横振動、ねじり振動の場合にも断面変形のパターンを含んでいる。この断面変形のパターンの占める比率を無視できないのが薄肉はりの特性であり、横振動、ねじり振動について、はり理論値、St. Venantのねじり理論値と本解析法による値との相異が生じる原因になる。

表四は薄肉箱型はりの固有振動を、占める比率の特に大きい変形のパターンにしたがって分類したものである。それぞれについて、表二、表三をもとに考察する。

a) そり振動I(タイプ(1)), そり振動II(タイプ(5),(9))

そりという言葉は通常タイプ(1)の意味で使うが、広い意味でタイプ(5),(9)も含めることにする。固有周期は短い。地震波にはこのような周期のパワーが少なく、力もそりを起こさせるようには作用しないので、橋梁などではほとんど考慮する必要がない。中間ダイヤフラム

の影響も全くない。

b) 縦振動(タイプ(13))

そり振動と比較すると固有周期が長い。棒理論値と本解析法による値を対比すれば、表五のとおりである。タイプ(13)はパターン(13)の占める比率が大きく、パターン(2)などを含むが、棒理論でもパターン(2)を考慮しているため、両者は良く一致している。中間ダイヤフラムの影響は全くない。

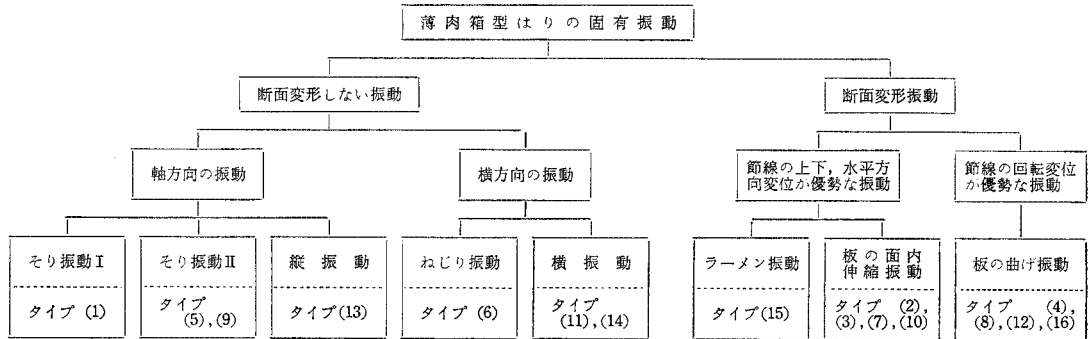
c) ねじり振動(タイプ(6))

固有周期は縦振動と同じオーダーである。St. Venantのねじり理論値と本解析法による値の比較は表六のとおり。タイプ(6)はパターン(6)の占める比率が大きく、パターン(1),(4),(15)を含むが、St. Venantの理論は断面変形を無視しているため、両者の差異は大きい。また、断面変形を考慮したタイプ(6)の固有周期の方が、St. Venantの理論から求めたものより短くなっている。中間ダイヤフラムの影響はほとんどない。

d) 横振動(タイプ(11),(14))

固有周期が長く、一般のはりと同様、薄肉はりにおいても最も重要な振動の一つである。はり理論値(Timoshenkoはり)と本解析法による値の比較は表七のとおり。タイプ(11),(14)は、それぞれパターン(11),(14)の占める比率が大きく、パターン(5),(8),(10)および(7),(9),(12)を含んでいるが、はり理論は断面変形を無視しているため両者の差は大きく、断面変形を考慮した方が固有周期は長くなる。本解析法とはり理論の相対的差異を

表一 薄肉箱型はりの固有振動の分類



表二 縦振動について本解析法と棒理論の固有周期の比較

(単位: 秒)

波数	1	2	3	4	5
本解析法	2.345×10^{-2}	1.174×10^{-2}	7.850×10^{-3}	5.913×10^{-3}	4.761×10^{-3}
棒理論	2.344×10^{-2}	1.172×10^{-2}	7.812×10^{-3}	5.859×10^{-3}	4.687×10^{-3}

表三 ねじり振動について本解析法と St. Venant のねじり理論の固有周期の比較

(単位: 秒)

波数	1	2	3	4	5
本解析法	3.879×10^{-2}	1.982×10^{-2}	1.326×10^{-2}	9.953×10^{-3}	7.967×10^{-3}
St. Venantのねじり理論	4.526×10^{-2}	2.263×10^{-2}	1.509×10^{-2}	1.131×10^{-2}	9.051×10^{-3}

表-7 横振動について本解析法とはり理論 (Timoshenko はり) の固有周期の比較 (単位: 秒)

解法	波数	1	2	3	4	5
本解析法	(11)	4.022×10^{-1}	2.637×10^{-1}	2.551×10^{-1}	2.513×10^{-1}	2.475×10^{-1}
	(14)	2.748×10^{-1}	1.611×10^{-1}	1.574×10^{-1}	1.557×10^{-1}	1.539×10^{-1}
はり理論	(11)	3.498×10^{-1}	9.282×10^{-2}	4.594×10^{-2}	3.074×10^{-2}	2.601×10^{-2}
	(14)	2.672×10^{-1}	7.127×10^{-2}	3.564×10^{-2}	2.432×10^{-2}	2.142×10^{-2}

$$\frac{\text{本解析法による値} - \text{はり理論値}}{\text{本解析法による値}} \times 100 \%$$

とすれば、波数1について見てもタイプ(11)が13.1%、タイプ(14)が2.9%の相対的差異を生じている。

スパンが長くなり、板厚が厚くなると断面変形のパターンを含む比率が小さくなると考えられる。そこで、断面の諸寸法はそのままとし、スパンのみ30m, 90m, 120mに変えて同様の計算をした結果が図-7であり、スパンはそのままとし、板厚のみ2倍, 4倍, 8倍に変えた結果が図-8である。薄肉はりのスパンが長くなるほど、板厚が厚くなるほど、はり理論値と本解析法による値は接近している。なお、横振動においても中間ダイヤフラムの影響はほとんど無い。

e) ラーメン振動 (タイプ (15))

固有周期が長く、自動車荷重のような局所的集中荷重、非対称断面の桁の場合に地震荷重などによって容易に引き起こされる。横振動と同様に薄肉はりにおける最も重要な振動の一つといえる。V.Z. Vlasov¹⁰⁾が薄肉箱型はりの静的解析に取り入れた変形モードと同じもので

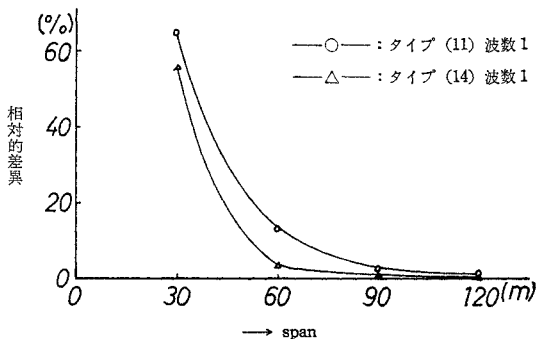


図-7 スパンと相対的差異

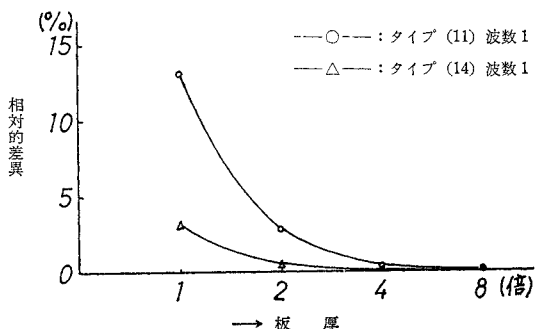


図-8 板厚と相対的差異

ある。波数が大きくなるにしたがって急速に固有周期が短くなり、中間ダイヤフラムの影響を最も受けやすい。

f) 板の面内伸縮振動 (タイプ (2), (3), (7), (10))

固有周期は短い。特に重要とは考えられないが、多主桁の合成桁の下横構を薄板に置換して閉断面材として解析する場合、タイプ(10)を考慮する必要がある。波数が大きくなっても固有周期はほとんど変わらない。中間ダイヤフラムの影響は若干受ける。

g) 板の曲げ振動 (タイプ (4), (8), (12), (16))

固有周期は長い。板の曲げの固有周期とほぼ一致する。板厚が厚くなるにしたがって急速に固有周期は短くなる。波数が大きくなってもほとんど固有周期は変わらず、ダイヤフラムの影響もほとんど受けない。

4. 薄肉箱型はりの動的応答解析

モード解析法により薄肉箱型はりの動的応答計算を行う。動的荷重は EL CENTRO における強震記録 1940 年、NS 成分¹⁷⁾を用いることにする。横方向に質量に比例した慣性力が載荷されるものとし、計算上、支点を固定し分布荷重を等価節線外力に置換して節線に載荷する。支点から入る地震入力をも、このように置きかえることは、スパンが短く位相差が無視できること、応答変位が小さいことから十分合理的と思われる。

計算モデルは図-4 (a), (b) であるが、断面形状が上下、左右対称の場合、断面変形振動の影響がほとんど入らない。実際の橋梁では舗装用アスファルトが敷かれており、上下非対称断面である。そこで、図-9 に示すように上フランジにアスファルトを 6 cm (比重 2.35) 敷いたものについても計算を行い、断面変形の影響と中間ダイヤフラムの効果を考察する。

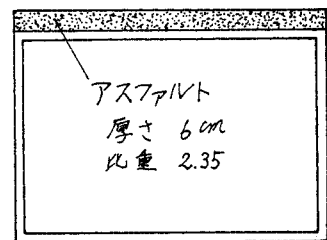


図-9 アスファルトを敷いた薄肉はりの断面

(1) 計算結果

図-10 は計算に用いた EL CENTRO 波形である。

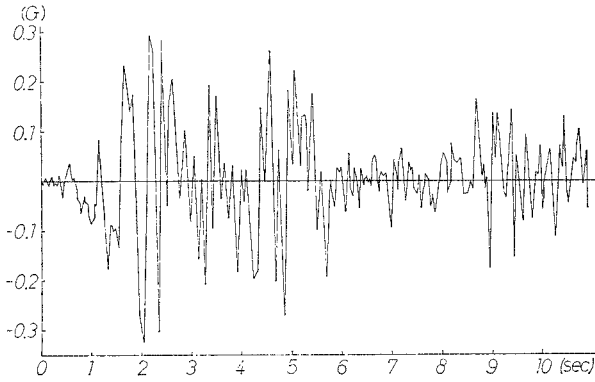
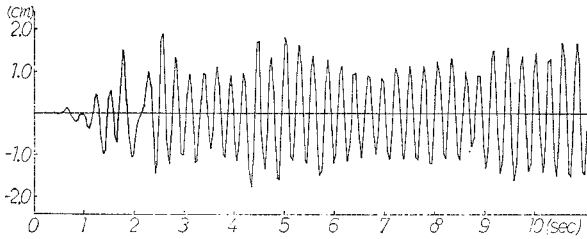
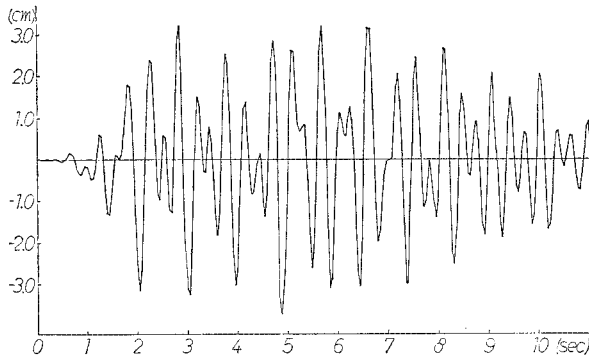


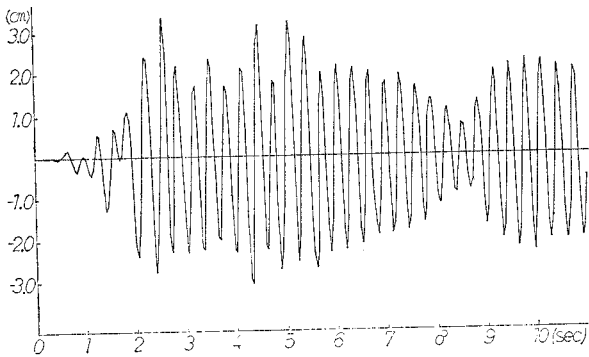
図-10 EL CENTRO波形 (1940年 NS, 最大加速度 0.326 G)



(a) 図-4 (a),(b) の場合



(b) 図-4 (a) にアスファルトを敷いた場合



(c) 図-4 (b) にアスファルトを敷いた場合

図-11 節線 11' スパン中央の横方向変位の応答波形

2.007 秒に最大加速度 0.326Gを生じている。応答スペクトルは図-12 に示すとおりであり、減衰定数によって異なるが、ほぼ周期 0.25~0.50 秒にピークがある。薄肉はりの固有周期はタイプ (14)、波数 1 が 0.27 秒、タイプ (15)、波数 1 が 0.41 秒である。アスファルトを敷いた場合は若干固有周期が長くなる。

図-11(a),(b),(c) は薄肉箱型はりの横方向変位の応答波形である。変位を図示した位置は、節線 11' のスパン中央であり、応答計算は 11 秒間行なっている。固有周期と固有モードは、級数項を 5 項取り固有値計算して得た中から、固有周期の長い順に 20 番目まで用いた。逐次積分する際の時間きざみ Δt は、経験的に最も短い固有周期の 1/30 程度を取り、1/250 秒とした。減衰はすべてのモードに対して、臨界減衰比 0.01¹⁸⁾ である。

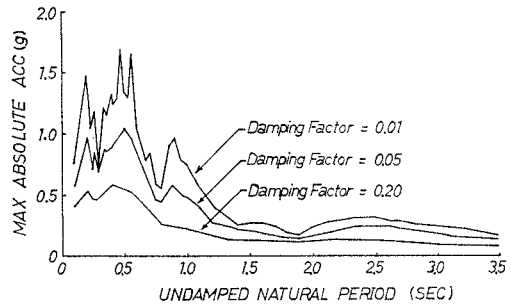
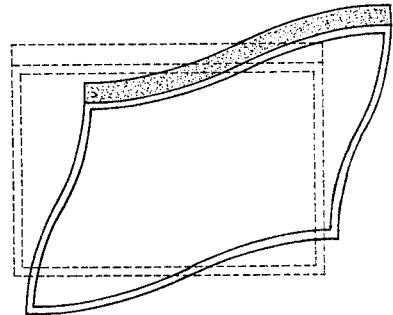
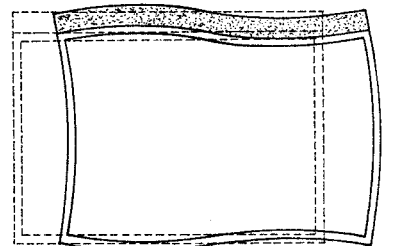


図-12 EL CENTRO 波形 (1940, NS) の応答スペクトル



(a) 中間ダイアフラムが入らない場合



(b) 中間ダイアフラムが入る場合

図-13 最大変位した時の薄肉はりの断面形状

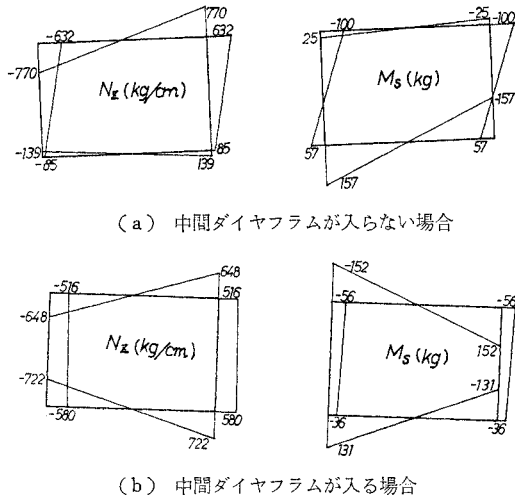


図-14 最大変位した時のスパン中央の応力分布

図-13(a),(b) はアスファルトを敷いた場合に、節線 11' が最大変位する時の断面形状を示したものである。

図-14(a),(b) はアスファルトを敷いた場合に、節線 11' が最大変位する時のスパン中央の応力分布図である。単位幅当り軸方向応力 N_x と、 x 軸まわり曲げモーメント M_x を図示した。

(2) 考 察

図-11(a) はアスファルトを敷かない場合の応答計算結果である。断面変形振動の影響がほとんど入らないため、中間ダイヤフラムの有無による応答の差異は認められなかった。タイプ (14)、波数 1 の固有振動が卓越し、ほぼ 0.27 秒の周期で規則的に振動している様子が認められる。変位最大応答時は 2.56 秒で、最大変位は 1.89 cm である。0.326G が静的に載荷された場合、スパン中央の変位は、0.72 cm であり変位の倍率は 2.6 倍といえる。

図-11(b) は図-4(a) にアスファルトを敷いた場合の応答計算結果である。タイプ (14)、(15)、波数 1 が卓越し、タイプ (6)、波数 1 の影響も多少加わる。0.47 秒程度の周期の波形 (タイプ (15)、波数 1) に、0.31 秒程度の周期の波形 (タイプ (14)、波数 1) が重なっている。変位最大応答時は 4.92 秒で、最大変位は 3.70 cm である。0.326G が静的に載荷された場合、断面変形を起こさないとして、スパン中央変位は 1.00 cm である。変位の倍率は 3.7 倍といえる。図-13(a) に最大変位した時の断面形状が示され、図-14(a) にその時のスパン中央の単位幅当り x 軸方向応力 N_x 、 x 軸まわり曲げモーメント M_x が示されているが、タイプ (15) の振動が大きく影響していることは明らかである。

図-11(c) は図-4(b) にアスファルトを敷いた場合

の応答計算結果である。タイプ (15)、波数 1 も応答計算に用いているがほとんど影響なく、タイプ (14)、波数 1 (固有周期 0.311 秒) が卓越して規則的に振動している。中間ダイヤフラムのタイプ (15) を抑制する効果は非常に大きいといえる。変位最大応答時は 2.56 秒で、最大変位は 3.34 cm である。変位の倍率は 3.3 倍といえる。図-13(b) に最大変位した時の断面形状が示され、図-14(b) にその時の N_x 、 M_x が示されているが、図-13(a)、図-14(a) と比較して断面変形の抑制されている様子が明確に認められる。

5. 結 論

薄肉はりの動的挙動に対する断面変形の影響を検討するために、一種の有限要素法と考えられる薄肉はりの一振動解析法を示し、実橋に近い寸法の両端単純支持の薄肉箱型はりに適用してみた。その結果、次のような結論を得た。

(1) 薄肉はりの固有モードには、縦振動、横振動、ねじり振動のモード以外に、多数のそり振動、断面変形振動のモードが存在する。箱型はりを 4 要素分割し、級数項を 5 項取った場合、1~5 までの波数に対して、それぞれ 16 個ずつの固有モードが得られた。16 個ずつのモードは断面変形形状、軸方向変形などに注目すれば、波数によらず同一である。

(2) 多数の断面変形振動の中の幾つかは、横振動、ねじり振動に近い固有周期を持ち、応答を考える上で重要である。箱型はりの場合、タイプ (4)、(8)、(12)、(15)、(16) がそれに相当するが、中でもタイプ (15) は地震荷重、自動車荷重などにより引き起こされ、大きな影響をおよぼす。

(3) 薄肉はりでは、縦振動、横振動、ねじり振動の場合でもわずかながら必ず断面変形を伴う。特に横振動、ねじり振動は断面変形の影響が入りやすく、横振動ははり理論で求めた固有周期より長くなり、ねじり振動は逆に St. Venant の理論値より短くなる。この傾向は断面寸法を一定にした時、スパンが短くなるほど、板厚が薄くなるほど顕著になる。

(4) 中間ダイヤフラムは断面変形振動に対して固有周期を短くする効果がある。箱型はりの場合、タイプ (15) に対して特に有効である。

(5) 薄肉はりの横方向動的荷重に対する応答は、断面形状が二軸対称ならば、断面変形はほとんど起こらず、横振動の固有周期で規則的に振動する。非対称断面では断面変形振動と横振動が連成されて不規則に振動する。

(6) 断面変形を伴う薄肉はりの動的応答に対して、中間ダイヤフラムは有効に働く。本例におけるようなス

パン長の箱型はりの場合，中間ダイヤフラムをスパン中央に一枚入れるだけで，ほぼ完全に断面変形を抑制し，横振動のみによる応答に近づける。

6. あとがき

本研究は，ボックスガダーや，従来マスーばね系置換法により耐震設計を行っている原子力発電所建屋，一次遮蔽壁のような三次元薄板構造物を，より実状に近い計算仮定で計算するために行ったものである。数値計算には IBM 370 モデル 165 を用いた。

本研究を行うにあたり，懇切なるご指導をいただいた電力中央研究所 高野 博氏，渡辺啓行氏，塩尻弘雄氏に深く謝意を表す。また数値計算にあたり，東京大学工学部 西野文雄助教授，大学院博士課程 倉方慶夫氏，川崎重工 坂井藤一氏に種々の助言をいただいた。ここに記して感謝の意としたい。

参考文献

- 1) de Boer, R. : Der Einfluß der Querschnittsverformung auf die Eigenschwingungen gerader dünnwandiger Stäbe, Z.A.M.M. 50, T 222-T 225, 1970
- 2) 奥村敏恵・坂井藤一：有限要素法と折板構造の関連について，日本鋼構造協会マトリクス構造解析シンポジウム論文集，1969年5月。
奥村敏恵・坂井藤一：薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析に関する一方法とその応用，土木学会論文報告集，No. 176, 1970年4月
- 3) Cheung, Y.K. : Folded Plate Structures by Finite Strip Method, Proc. of ASCE, Vol. 95, ST, pp. 2963-79, 1969.
- 4) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.
- 5) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959.
- 6) 林 毅編：軽構造の理論とその応用，日本科学技術連盟，1966，上巻。
- 7) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968.
- 8) 中村秀治：薄肉弾性梁の静力学的挙動について，東京大学修士論文，1971。
- 9) 戸川隼人：マトリクスの数値計算，オーム社，1971。
- 10) Walsh, J. : Numerical Analysis : An Introduction, Academic Press, 1966, 邦訳，高須 達：数値解析概論，日本評論社，1970。
- 11) Weaver, W. Jr. : Computer Programs for Structural Analysis, D. Van Nostrand Company, Inc., 1967, 邦訳 山本善之：構造物解析のプログラム，共立出版，1968。
- 12) Clough, R.W. : Analysis of Structural Vibration and Dynamic Response, Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods, August, 1969, US 3-1.
- 13) 高野 博・佐藤宏一・塩尻弘雄：原子力発電所 容器構造物の振動解析 (P.C. 圧力容器の地震時応答解析への適用例)，電力中央研究所 技術 第二研究所報告，No. 72002, 1972年9月
- 14) 川井忠彦：マトリクス法振動および応答，コンピューターによる構造工学講座 I-4-B, 培風館，1972。
- 15) 河島佑男：動的応答解析，コンピューターによる構造工学講座 II-4-A, 培風館，1972。
- 16) Vlasov, V.Z. : Thin-Walled Elastic Beams, Publ. for the National Science Foundation, 1961, 邦訳，奥村敏恵他：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1967。
- 17) 土木学会・本州四国 連絡橋技術調査委員会：本州四国 連絡橋技術調査報告書，付属資料 2，耐震設計指針 (1967)・同解説および耐震設計詳説，1967。
- 18) 伊藤 学・片山恒雄：橋梁構造の振動減衰，土木学会論文報告集，No. 117, 1965年5月

(1973.7.18・受付)