

利水を目的とした貯水池の貯留・調節機能に 関する基礎的研究

A BASIC STUDY ON THE FUNCTION OF RESERVOIRS TO CONTROL WATER RESOURCES

室田 明*・江藤 剛治**
By Akira Murota and Takeharu Eto

1. 緒 言

近年、都市圏における都市用水・工業用水の需要の伸びはめざましく、近い将来において水資源問題が逼迫した状況下におかれるであろうことは大方の予想するところである。これに対処するため広域的な利水調査や水資源開発が策定され、その理論的裏付けのための基礎的研究も活発に行われている。しかし、これらの研究のほとんどは Simulation によるケース・スタディであり、どのような流域における計画も統一的に説明しうる一般的、かつ解析的な研究はほとんど見当たらない。このため水資源開発の基本方針についてさえ、すでにいくつかの重大な矛盾が指摘されているにもかかわらず、現在のところ具体的な解決策を打出すまでには至っていないようである。

ただ LP, DP による水の最適配分計画、ダム最適操作、Langbein¹⁾ などによる線形貯留システムに関する研究など、若干の先駆的な研究成果もあるが、現実の計画問題に直接的、かつ総合的な貢献をなした研究は多くないといわざるをえない。いうまでもなくこの方向の研究を困難にしているのは、水資源計画策定の過程が非常に複雑なシステムを構成すること、また各サブ・システムがメモリーを有し、かつ高次の非線形システムであること、入力情報としての降水量・自然流量などの水文量時系列、あるいは水需要量時系列が年周期・トレンド成分を含む非定常時系列をなすことなどであろう。これらを各計画段階において厳密に定式化して解こうとすることは、解析をほとんど不可能ならしめるのみならず、トータル・システムとしての見とおしにおいてその一般性をも失わせることにもなりかねない。本研究で

は、実際の水資源計画に対するシステム工学的アプローチが成功するか否かでさえ定かでない現状に鑑み、さし当って計画の各段階で関連する情報を少なくともその定性的特性は保持する程度に簡略化し、もってトータル・システムとしての水資源計画全体の解析的アプローチを可能ならしめることを基本的な方向として、一連の研究を継続している。

水資源計画策定の過程をシステムとして表示すれば、Fig. 1のごとく表わされるであろう。図中、矩形で囲まれたものは input, output であり、楕円で囲まれたものはシステムである。このうち自然流域システムについては、Sharman²⁾ により一種の bl-

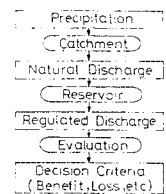


Fig. 1 Total system of water resources design.

ack box 的システムとして認識されて以来今日まで、このような観点に立った多くの研究が発表されている。さらに筆者らは、貯水池などによる人工貯留調節システムはもとより、水需要者が水量を評価する過程までも1つのシステムと考えて統一的な解析を試みた。

本論文はこのうち、人工貯留システムについて得られた成果を述べたものである。このシステムにおいては、解析を困難にしているシステムの持続性（メモリーを有すること）、非線形性の2つの性質のうち、前者のほうをより重要な性質と考えて、この性質を保持しつつ非線形性をとり除くために等価線形貯留システムを提案した。この仮定の妥当性は、貯水池がその調節機能によって自然流量時系列を平滑化する特性を考えれば明らかであろう。この結果、利水を目的とする貯水池システムの貯留・調節機能を一般的、かつかなり定量的に評価することができた。

一方、水資源計画においては各計画に対して生起しう

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 近畿大学講師 理工学部土木工学科

る渇水の諸特性を十分把握しておくことが重要である。渇水現象は工学的には継続期間、その間の不足水量などにより特性づけられると考えられるが、既往の研究成果によってこれらの諸量を求めるには、シミュレーションや貯水量の推移確率行列の数値計算などによるほかはないであろう。本研究においては前述の等価線形貯留システムに非線形効果を再導入することにより、渇水期間の総数、その間の総不足水量などに関する理論解を導くことができた。

以上の成果は、正規分布を仮定したモデル化された時系列のみならず、実測水文資料を用いたシミュレーション結果に対してもきわめてよい適合性を示した。

2. 貯留調節システムと等価線形貯留システム

(1) 貯留関数あるいは操作方程式

ダムによる人工貯留調節システムや自然流域による貯留システムは集中定数系 (lumped parameter system) として次の2つの方程式により表現されることが多い。

$$I(t) - X(t) = \frac{d}{dt} S(t) \dots\dots\dots (1)$$

$$S(t) = S\{I(t), X(t)\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、

- $I(t)$: 入力としての降水量や流入量,
- $X(t)$: 出力としての自然流量あるいは放流量,
- $S(t)$: 貯留量。

式(1)はいうまでもなく連続の式であり、式(2)は貯留関数、あるいは人工的貯留調節機能を持つ貯水池では操作方程式とでもよぶべき式である。貯留調節システムの特性は式(1),(2)で表わされる簡単な常微分方程式を解くことによって与えられるわけであるが、多くの場合式(2)は高次の非線形性を有しており実用的な解析解を得ることは非常に難しい。Chow-Kulandaiswamy³⁾は自然流域における洪水追跡のために式(2)をテイラー展開して線形化し、理論値と実測値との比較からその係数をさらに (I, X) の関数として表わすことにより非線形性を考慮しており、吉川・日野・四俣・木村⁴⁾は摂動法的に非線形性を考慮しようと試みている。しかし、い

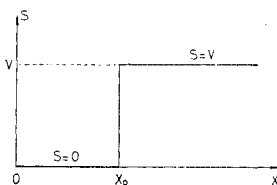


Fig. 2 An example of reservoir operation, S: storage, V: capacity, X: outflow, X_0 : target discharge.

ずれの方法によっても、自然流域システムよりもずっと非線形性の強い人工貯留調節システムに適用して実用的な解を得ることは困難であろう。たとえば、一定量放流方式 (Fig. 2 参照) を例に考えてみても、 $S \sim X$ 関係の不連続性のために上記2手法に必須と考えられる微係数 dS/dX さえ存在しない。よって本論文では、まずは人工的貯留調節システムを等価な線形システムで近似する手法を提案し、これを用いてトータル・システムの特性を解析する上でのシステム工学的アプローチの有効性を確かめた。

(2) 人工貯留調節システムの非線形度

以上述べたごとく本論文では、人工的貯留調節システムとしての貯水池操作は線形化して近似的に解析されるが、たとえば一定量放流方式のごとききわめて高次の非線形システムの線形化近似の妥当性については当然その検証がなされるべきであるし、たとえこのような等価線形システムによるシステム工学的アプローチが有効なことが確かめられても、次には即、非線形システムとしての解析を試みるのが常道であろう。よって人工貯留調節システムの線形性の程度、逆に言うならば非線形解析において考慮すべき非線形性の程度を前もって調べるために、もっとも強い非線形性を有すると考えられる一定量放流方式の貯水池に種々の正弦波をなす流入量時系列を入れた場合の、放流量時系列の周波数分析を行った。一定量放流方式について念のために説明すると、Fig. 2 に示すごとく貯水池が満水

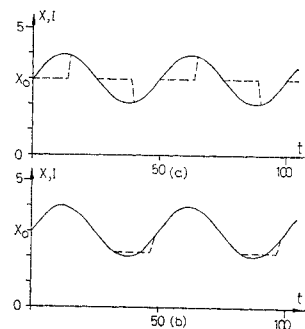


Fig. 3 Solid line: inflow, broken line: outflow $I(t) = \sin(2\pi t/50) + 3.0$, $V=10$, (a) $X_0=3.0$, (b) $X_0=2.2$.

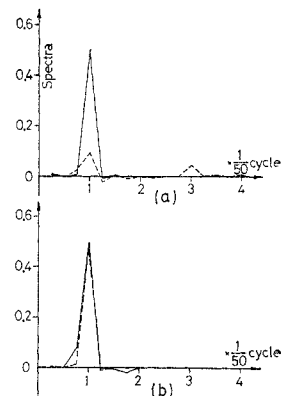


Fig. 4 Power spectra of inflow and outflow hydrograph, solid line: inflow, broken line: outflow, (a) $X_0=3.0$, (b) $X_0=2.2$.

が満水るとき目標放流量 X_0 以上の流入量があったとき、または貯水池が空で目

標放流量 X_0 に満たない流入量しかなかったときは流入量 $I(t)$ をそのまま放流し、それ以外のときは目標放流量 X_0 を放流する放流方式のことである。代表的な 2 例について入出力波形、パワースペクトルを示したものが **Fig. 3, 4** である。これらの図より次のようなことがわかる。

波形でみれば、放流量時系列はジャンプを伴う強い非線形性を示しているが、パワースペクトラムを見れば明らかのように、その周波数成分としては流入量時系列の周波数のたかだか 3 倍周波数成分しか含んでおらず、かつ線形成分（流入量と同じ周波数成分）が卓越している。

このことから、どのような人工的非線形貯留システムであっても、少なくとも定性的な解析においては線形近似が有効となることが予想され、また非線形解析にあっては最大限 3 次の非線形度までを考慮すれば実用上十分であると思われる。

(3) 等価線形貯留システム

人工貯留調節システムにおいて微小時間を考えれば、放流量 $X(t)$ は貯留量 $S(t)$ のみの関数として近似しても大過ないことが多いから、式 (2) においてまず流入量 $I(t)$ を無視する。これにより操作方程式は貯留量～放流量関係式 $S(X)$ となるが、 $S(X)$ の近似解をいま $U(X)$ で表わすことにする。

このとき最適近似の尺度としてまず次のような尺度が考えられる。

$$\sigma_e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{S(X) - U(X)\}^2 dX, \sigma_e^2 \rightarrow \min. \quad \dots\dots\dots (3)$$

単純な最小自乗法による近似であるが、式 (3) において積分範囲を $(-\infty, \infty)$ とするのは無意味であるし、なによりも数学的に $U(X)$ のパラメーターが確定しないことが多い。一方、水資源問題で対象となる流量時系列は、確率的変動をしているいろいろな値を取るから、 $S(X)$ と $U(X)$ の関数関係については、もっとも生起確率の高い放流量のまわりでできるだけ近似度が高いことがのがましい。このような理由から筆者らは、式 (3) の右辺に重み関数として出力の確率密度関数 $f(X)$ を導入した次式を修正された最小自乗法として採用する。

$$\sigma_e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{S(X) - U(X)\}^2 f(X) dX, \sigma_e^2 \rightarrow \min. \quad \dots\dots\dots (4)$$

式 (4) を直接に解くことは難しい。本論文ではさらに、 $f(X)$ を流入量の確率密度関数 $f'(X)$ で近似した。

一例として $U(X)$ が X の多項式で表わしうる場合を解いてみよう。すなわち、

$$U(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n = \sum_{i=0}^n a_i X^i, \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (S^2 - 2S \cdot U + U^2) f' dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (S^2 - 2S \sum_{i=0}^n a_i X^i + \sum_{i=0}^n a_i^2 X^{2i} \\ &\quad + 2 \sum_{i=0}^n \sum_{i'=1}^n a_i a_{i'} X^{i+i'}) f' dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (S^2 - 2S a_i X^i - a_i^2 X^{2i} \\ &\quad + 2 a_i \sum_{i''=0}^n a_{i''} X^{i+i''} + \phi_i) f' dX, \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここに、 $\phi_i : a_i$ を含まない項。

$$\therefore \frac{\partial \sigma_e^2}{\partial a_i} = \int_{-\infty}^{\infty} (-2S X^i + 2 \sum_{i''=0}^n a_{i''} X^{i+i''}) f' dX = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\therefore \sum_{i''=0}^n a_{i''} \int_{-\infty}^{\infty} X^{i+i''} f' dX = \int_{-\infty}^{\infty} S X^i f' dX, \quad (i, i'' = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\nu_{i+i''} = \int_{-\infty}^{\infty} X^{i+i''} f' dX \quad \dots\dots\dots (9)$$

とおくと $\nu_{i+i''}$ は X に関する原点まわりの $(i+i'')$ 次モーメントとなる。また、

$$c_{i+1} = \int_{-\infty}^{\infty} S X^i f' dX \quad \dots\dots\dots (10)$$

とおくと、式 (8) は、

$$\sum_{i''=0}^n a_{i''} \nu_{i+i''} = c_{i+1}, \quad (i, i'' = 0, 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\sum_{i'=i}^{n+i} a_{i'-i} \nu_{i'} = c_{i+1}, \quad (i, i' = 0, 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (12)$$

式 (12) を書きなおすと、

$$\left. \begin{aligned} \nu_0 a_0 + \nu_1 a_1 + \dots + \nu_n a_n &= c_1 \\ \nu_1 a_0 + \nu_2 a_1 + \dots + \nu_{n+1} a_n &= c_2 \\ \vdots &\vdots \\ \nu_n a_0 + \nu_{n+1} a_1 + \dots + \nu_{2n} a_n &= c_{n+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$$\therefore a_i = \frac{\begin{vmatrix} \nu_0 \nu_1 \dots \nu_{i-1} \dots \nu_n \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{i-1} \dots \nu_{n+1} \\ \vdots \\ \nu_n \nu_{n+1} \dots \nu_{n+i-1} \dots \nu_{2n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \nu_0 \nu_1 \dots \nu_n \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n+1} \\ \vdots \\ \nu_n \nu_{n+1} \dots \nu_{2n} \end{vmatrix}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $\nu_0 = 1$ 、式 (14) を計算する上で誤差を小さくするために、原点を X に関する平均値に移して計算したほうがよい。このとき、

$$a_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 \mu_1 \dots \mu_{i-1} \dots \mu_n \\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{i-1} \dots \mu_{n+1} \\ \vdots \\ \mu_n \mu_{n+1} \dots \mu_{n+i-1} \dots \mu_{2n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 \mu_1 \dots \mu_n \\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n+1} \\ \vdots \\ \mu_n \mu_{n+1} \dots \mu_{2n} \end{vmatrix}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、

$\mu_i : X$ に関する平均値まわりの i 次モーメント、

c_i' ：座標軸を平均値に移して式 (10) を計算したものの。

したがって、非線形項をおとした次式が等価線形貯水池として定義されよう。

$$U(X) = a_0 + a_1 X, \text{ あるいは } U(X) = a_1 X \left. \begin{array}{l} a_1 = \left| \begin{array}{cc} 1 & c_1' \\ \mu_1 & c_2' \end{array} \right| / \left| \begin{array}{cc} 1 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{array} \right| \end{array} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

a_1 を等価線形貯留定数と呼ぶことにし、これを a と書き、等価線形貯留システムは $S = aX$ と書くことにする。

(4) 正規分布の場合の適用性の検証

上記の理論の適用性を検証する。適用例としては、流入量時系列が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う場合を考える。

$$f'(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} \dots\dots\dots (17)$$

貯水池操作方式としては、貯水池容量 V 、目標放流量 X_0 なる一定量放流方式を考える。規準化のために $X_* = (X - \mu) / \sigma$ なる変換を行い、新座標での諸量に ‘*’ を付して表示すると、

$$\begin{aligned} \mu_{1*} &= 0, \mu_{2*} = 1, \\ c_1' &= \int_{-\infty}^{\infty} S_* f_*' dX_* = V \int_{X_{0*}}^{\infty} f_*' dX_* = V \cdot p, \\ c_2' &= \int_{-\infty}^{\infty} S_* X_* f_*' dX_* = V \int_{X_{0*}}^{\infty} X_* f_*' dX_* \\ &= V \cdot \phi_*(X_{0*}), \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} X_{0*} &= (X_0 - \mu) / \sigma, \quad p = \int_{X_{0*}}^{\infty} f_*' dX_*, \\ \phi_*(X_{0*}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X_{0*}^2}{2}}, \end{aligned}$$

したがって、式(16)は、

$$a = \left| \begin{array}{cc} 1 & V \cdot p \\ 0 & V \cdot \phi_* \end{array} \right| / \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = V \cdot \phi_*$$

座標をもとにもどして

$$a = \frac{V}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(X_0 - \mu)^2}{2\sigma^2}} \dots\dots\dots (18)$$

式 (18) は非常に簡単な形をしているにもかかわらず、次のような重要な事実を説明している。すなわち、人工的貯留調節システムの貯留効果は、貯水池容量と流入量時系列の標準偏差の比 V/σ 、および目標放流量 X_0 の無次元量 $(X_0 - \mu) / \sigma$ の関数の積で近似できる。

たとえば、これまでよく使われてきたごとく⁵⁾、貯水池機能の評価基準として、水の利用率を何%に上げるには平均流入量の何倍の貯水池を作ればよいか(すなわち、この場合目標放流量の無次元量は X_0/μ 、貯水池機能を代表するパラメーターは V/μ である)などの議論は、少なくとも貯水池による流量時系列の平滑化機能を評価

するためには妥当な議論とは考えられず、これに替えて上記の2つのパラメーターを用いねばならないことがわかる。

式 (18) の結果を、一定量放流操作方式を用いた貯水池シミュレーション結果と比較し、その適用性を検討する。流量シミュレーション手法は筆者の文献 6) に詳述してある。等価線形貯水池の放流量の諸特性量の近似解は次のような仮定により計算した。

i) 流入量時系列は自己相関係数 ρ なる線形回帰一次マルコフ系列で近似できるとし、このときの規準化された自己相関関数は $R(\tau) = e^{-\tau/k}$ で表わされるものとした。このとき、

$$k \approx \left(-\frac{1}{\log_e \rho} + \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta t \dots\dots\dots (19)*$$

ii) 放流量時系列の時定数は $(a+k)$ で近似できるものとする。

iii) 放流量時系列の平均値は当然流入量時系列のそれに等しいが、分散は $k/(a+k)$ 倍になるものとする。

シミュレーション・ケースは Table 1 Simulation cases. Table 1 に示す。

$\rho = 0.0, 0.8$
$V = 1, 3, 30$
$X_0 = 3, 2, 1$
$\mu = 3$
$\sigma = 1$

一定量放流方式を用いたシミュレーションにより得られる放流量時系列の諸量と、等価線形貯水池システムより得られる近似的な理論解を比較したものの例が Fig. 5, 6 および Table 2 である。これらの図表において温水(この場合は $X < X_0$ と定義する)の生起確率が1%以下の場合には実際的な値とはいえないので省略してある。Table 2 は平均値まわりの各次のモーメント、Fig. 5 は自己相関関数、Fig. 6 は模式的に放流量時系列の代表的パターンと確率分布の比較の例を示している。これらの図表より次のようなことがわかる。

i) 平均値はもとより、標準偏差についても等価線形解とシミュレーション結果はかなりよく一致しているが、ひずみ度・とがり度などの高次のモーメントでは大きな差を示す場合がある。

ii) この差は V/σ が大きいほど、また $(\mu - X_0) / \sigma$ が

* 線形単純マルコフ系列を考えれば、 $n = t/\Delta t$ だけ離れた2変数の相関係数は ρ^n である。連続量である自己相関関数におきかえるためにはたとえば、 $\rho^n \approx e^{-t/k}$ において $k \approx -\Delta t / \log_e \rho$ となる。ところがこの式では、 Δt の時間間隔で観測した量の自己相関係数 $\rho = 0$ のとき、 $k = 0$ となる。 $k = 0$ なる物理現象は現実にはありえないから、その補正の一方法として次のように考える。

$\rho = 0$ のとき自己相関関数は $t = 0$ から $t = \Delta t (n = 1)$ まで直線的に減少し、 $t \geq \Delta t$ では $\rho = 0$ になるものとする。このとき定数は $\Delta t / 2$ である。よって $\rho = 0$ のとき $k = \Delta t / 2$ になるように補正定数 $\Delta t / 2$ を加えて、

$$k = \left(-\frac{1}{\log_e \rho} + \frac{1}{2} \right) \Delta t$$

Table 2 Verification of equivalent linear reservoir.

	V	X ₀	st. dev.		skew.	curtosis
			Sim.	Theo.	Theo.=0.0	Theo.=3.0
ρ=0.0	1	3	0.75	0.75	-0.02	4.83
		2	0.90	0.82	0.55	2.87
		1	1.00	0.95	0.15	2.81
	3	3	0.54	0.54	-0.07	8.40
		2	0.88	0.64	0.70	2.83
	30	3	0.20	0.20	-6.86	72.50
ρ=0.8	1	3	1.01	0.96	-0.06	3.50
		2	1.03	0.97	0.09	3.15
		1	1.05	0.99	0.01	3.07
	3	3	0.94	0.90	-0.10	3.95
		2	1.00	0.93	0.24	3.07
		1	1.04	0.98	0.07	2.92
	30	3	0.58	0.54	-0.70	11.30

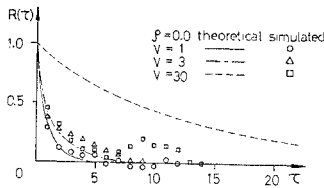


Fig. 5 Correlogram of outflow.

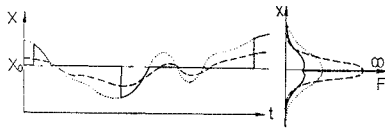


Fig. 6 Hydrographs and p.d.f. of inflow and outflows

dotted line : inflow,
solid line : out-flow from non-linear system,
broken line : out-flow from equivalent linear system

小さいほど大きくなる。

iii) 自己相関関数についても同様の傾向があり、 V/σ が大きく $(\mu - X_0)/\sigma$ が小さくなると等価線形解はシミュレーション結果に比して過大な持続性を示す。

iv) これらの性質は ρ が小さいほど顕著である。

このように非線形変換の強度は V , $(\mu - X_0)$, σ , ρ などにより表わされるわけであるが、前者の3個は等価線形貯留定数により代表されると考えられ、 ρ は式(9)により k に変換されることを考慮して、たとえば、とがり度を a/k というパラメーターで整理すると(実はこれは線形変換の強度を表わすパラメーターでもあるのだが)、**Fig. 7** のごとく表わされる。流域による自然の貯留効果が k で代表され、人工貯留効果が a により代表されるこ

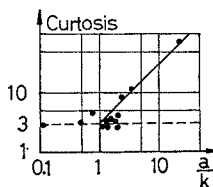


Fig. 7 Curtosis of out-flow.

とを考えながらこの図を見てみると、自然貯留効果のほうが人工貯留効果より大きいと考えられる $a/k < 1$ なる領域では、とがり度は正規分布の理論値3に一致し、逆に $a/k > 1$ に対しては理論値から離れて実験的に a/k の関数として良く表わされていることは注目すべき事実であろう。

以上のごとく筆者らの提案した等価線形貯留システムにより、より一般的な貯留関数あるいは操作方程式を有する人工的貯留調節システムについても、すでに十分性質の知られた線形システムに変換してその定性的な特性を把握することができる。

(5) より一般的な場合への応用

本論文においては等価線形貯水池システムは式(16)のごとく定義されているが、これまでの適用例は流入量時系列が正規分布をなし、貯水池操作方式は一定量放流方式の場合のみであった。し

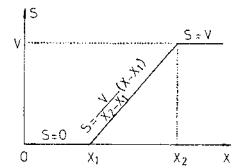


Fig. 8 Approximate representation of general reservoir operation.

かし、実際の貯水池操作は一定量放流方式であるとはかぎらないし、流入時の確率分布は普通原点母数が0のガンマ分布をなす。よってこれらのより一般的なケースに対して等価線形貯留定数を求める。

人工的な貯水池方程式は一般に **Fig. 8** のごとき折れ線で近似できよう。このとき、

$$S = \begin{cases} =0, & (X < X_1) \\ =\frac{V}{X_2 - X_1} (X - X_1), & (X_1 \leq X \leq X_2) \\ =V, & (X > X_2) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} S(X) f'(X) dX = \int_{X_1}^{X_2} \frac{V}{X_2 - X_1} (X - X_1) f'(X) dX + \int_{X_2}^{\infty} V f'(X) dX \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$c_2 = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot S(X) f'(X) dX = \int_{X_1}^{X_2} X \cdot \frac{V}{X_2 - X_1} (X - X_1) f'(X) dX + \int_{X_2}^{\infty} V X f'(X) dX \quad \dots\dots\dots(22)$$

正規分布あるいは原点母数が'0'のガンマ分布に対してはそれぞれ、

$$f'(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$f'(X) = \begin{cases} =\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x} & (x \geq 0) \\ =0 & (x < 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(24)$$

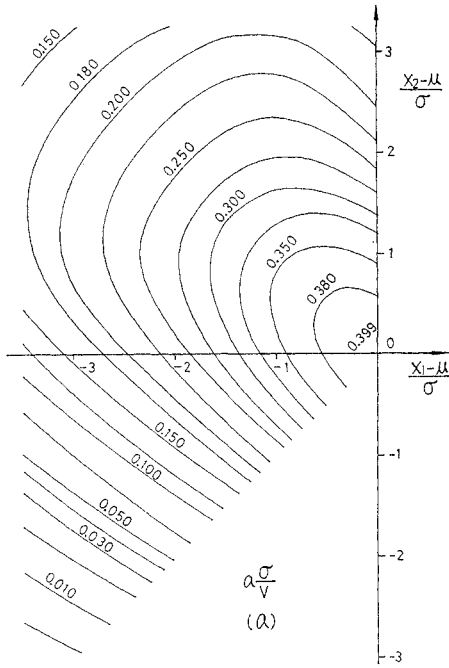


Fig. 9 'a' for normal distribution.

ここに、 $\alpha = \mu^2 / \sigma^2$, $\beta = \mu / \sigma^2$

実用性を考えて、正規分布に対して等価線形貯留定数 a の無次元量 $a \cdot \sigma / V$ を、放流操作方式を規定するパラメーターの無次元量 $(X_1 - \mu) / \sigma$, $(X_2 - \mu) / \sigma$ の関数として図化したものが Fig. 9 である。また流入量がガンマ分布に従い、目標放流量が X_0 の一定量放流方式に対して、 $a \cdot V / \sigma$ を X_0 / σ と形状母数 α の関数として表わしたものが Fig. 10 (a) である。これらの図より a はただちに求められる。また、実際の水資源計画で現われる範囲については、

$$a \cdot \sigma / V = 0.15 \sim 0.4 \dots\dots\dots (25)$$

であり変化せず、もっともよく用いられる範囲では 0.2~0.3 程度であるとみなしうる**。この結果は貯水池の調留・調節機能のオーダー的な評価において非常に便利である。たとえば、計画貯水池規模（容量）とその地点での自然流量の標準偏差の比 V/σ が与えられれば、その貯水池を造った場合の放流量の時定数は $(a+k)$ 程度となり、標準偏差は $\sqrt{a/(a+k)}$ 倍程度に減少するとしてただちに推算できる。ここに k は式 (19) より計算される。

(6) 実測資料への適用性の検討

以上の議論は時系列の定常性の仮定のもとに行われてきたが、これを実流域に適用する場合、流入量は年周期変動をなすため、その非定常性が問題となる。よって本節では実測流量資料を用いて、このような年周期変動を含む非定常時系列に対するこれまでの理論の適用性を調べる。用いた資料は琵琶湖および淀川支川木津川が瀬地点の月流量資料、およびそれをもとにして模擬発生した 1000 年分 (12000 個) の月流量資料である。模擬発生の手法は筆者らの文献⁹⁾ に詳しい。今回はごく単純に次の 2 ケースを仮定してみた。

- i) 年周期変動を無視し、流入量時系列を定常時系列とみなす場合、
- ii) 流入量時系列が正弦波をなす年周期変動成分(その分散を σ_a^2 とする)とそのまわりの定常時系列成分(分散を σ_b^2 とする)より構成されるとみなす場合。

年周期変動を $A \sin \omega t + B$ で表わすことにすると、 $\sigma_a^2 = A^2/2$ であり、等価線形貯水池システムを通過したのちの放流量の分散 $\sigma_a'^2$ はよく知られているように $\sigma_a'^2 = \sigma_a^2 / (1 + a^2 \omega^2)$ となる。各月の分散を σ_j^2 ($j=1, 2, \dots, 12$) とすれば $\sigma_b^2 = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} \sigma_j^2$ であるが、これに対応する放流量の分散は $\sigma_b'^2 = \sigma_b^2 \cdot k / (a+k)$ で近似できるから、

** 中小ダムでは $a \approx 0.2 V/\sigma$ 程度、琵琶湖クラスになると計算上の係数は 0.3 以上になるが、シミュレーション結果と比較してみると、非線形効果が強く影響して実際には 0.3 以下の値に落着く。よって、
 $a \approx 0.2 \sim 0.3 V/\sigma$

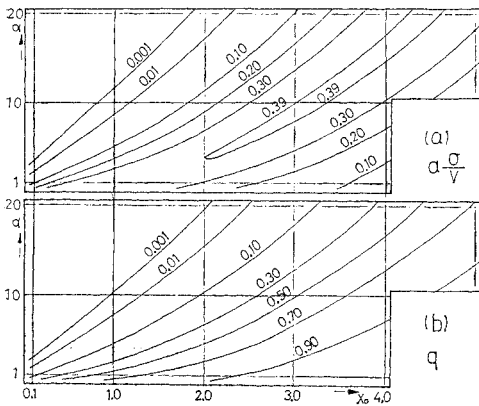


Fig. 10 (a), (b) $a \cdot \sigma / V, q$ for Gamma distribution.

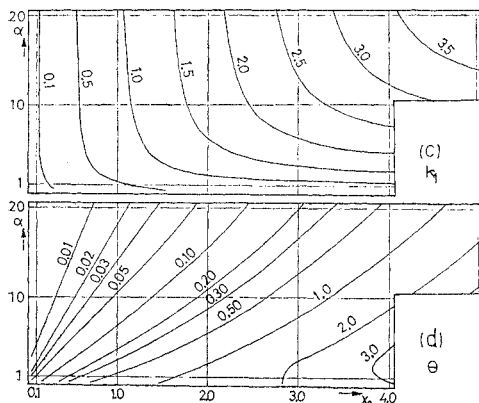


Fig. 10 (c), (d) κ_1, θ for Gamma distribution.

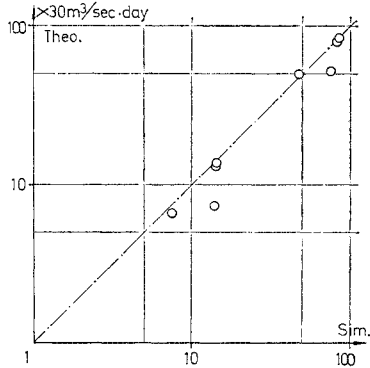


Fig. 11 Comparison of theoretical reduction of standard deviation with simulated reduction.

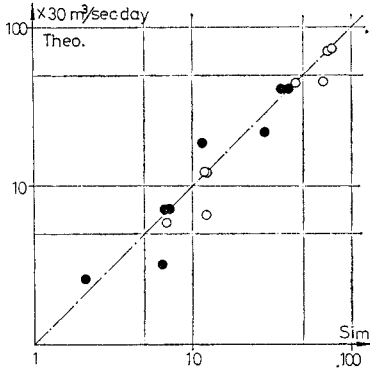


Fig. 12 The case taking account of annual periodicity
solid : annual periodic component,
blank : variation around annual periodicity.

全体としての分散の減少は、

$$(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) - (\sigma_{a'}^2 + \sigma_{b'}^2) = (\sigma_a^2 + \sigma_b^2) \cdot \left[1 - \frac{1}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2} \left(\sigma_a^2 \frac{1}{1+a^2\omega^2} + \frac{k}{a+k} \sigma_b^2 \right) \right] \dots\dots\dots(26)$$

となり、式 (26) の [] 内を計算することにより貯水池による平滑化の程度がわかる。まずこの式(26)の検証を行う。

放流操作方式は一定量放流方式とし、琵琶湖・木津川の資料に対してそれぞれ数組の貯水池容量・目標放流量の組み合わせに対して、年周期変動を無視した場合のシミュレーション値と理論値の比較を行ったものが Fig. 11 であり、年周期変動を正弦波とした場合について同じく理論解と比較したものが Fig. 12 である。両者はかなりよく一致しているといえよう。年周期変動が年を周期とする正弦波およびそのどの程度の倍周期成分より構成されるかは、実測資料の周波数分析により容易に見出せる⁷⁾、その結果を用いれば理論値はシミュレーション値とさらによく一致するはずである。

3. 非線形性の再導入と渇水回数・不足水量

(1) 非線形効果の導入

水資源計画においては、各計画に対して生じうる渇水の諸特性を十分把握しておくことが重要である。渇水現象は工学的には継続期間・その間の総不足水量などにより特性づけられると考えられるが、既往の研究においてはこれらの諸特性はシミュレーションや貯水量の推移確率行列の数値計算などによって調べるほかはなかった。本研究では前章に示した等価線形貯水池システムに非線形効果を再導入することにより、これらの諸量に対する理論的な展開を試みた。

簡単のために一定量放流方式を考える。この場合は目標放流量 X_0 に等しい放流量が非常に多くなる。したがって、放流量の確率分布においては、流入量の確率分布の X_0 以外の部分が減少し、その分だけ X_0 の部分における確率密度に集中する。Fig. 8 のごときより一般的な貯水池操作方式に対しては、減少分が $X_1 \leq X \leq X_2$ なる部分に等分布に加わるなどの仮定をおけば、以下の議論は同様に成り立つであろう。これらを図で説明すれば Fig. 13 のごとく示される。

これまでのシミュレーションですでに次のような結果が得られている。

- i) 流入量と放流量の平均値はどのケースについても当然等しい。
- ii) 標準偏差については等価線形解により、その減少度合(平滑化の度合)をほぼ正しく推算できる (Table 2, Fig. 11, 12 参照)。
- iii) 放流量の確率密度は、 $X < X_0$, $X > X_0$ のそれぞれの部分に対して、流入量の確率密度 $f(X)$ にほぼ比例して減少する。減少分は当然 $X = X_0$ の部分に集中する (Fig. 14 参照)。ここでは、この減少率をそれぞれ

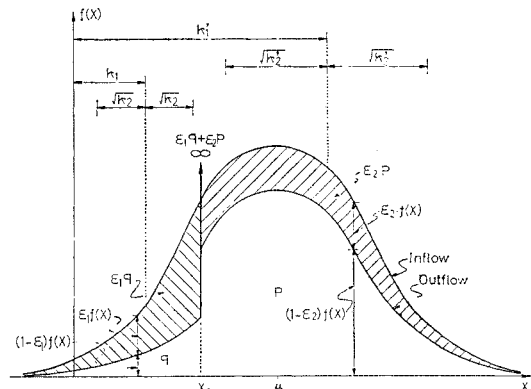


Fig. 13 p.d.f. of inflow and outflow.

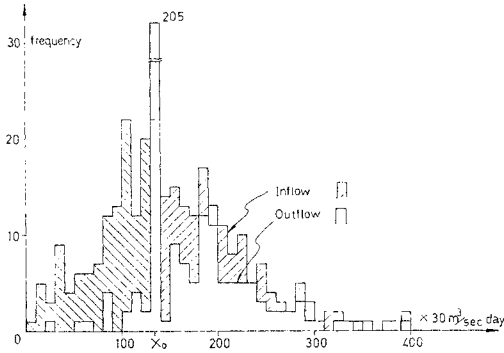


Fig. 14 Comparison of p.d.f. of outflow with p.d.f. of inflow, an example for Lake Biwa.

れ ϵ_1, ϵ_2 としている (Fig. 13 参照)。

以上の条件より非線形効果を導入する。まず平均値が変らないという条件のもとに、 $X \approx X_0$ の部分における確率密度の減少分 $\epsilon_1 \cdot f(X), \epsilon_2 \cdot f(X)$ による放流量の1次モーメントの減少分 $(\epsilon_1 \cdot q \cdot \kappa_1 + \epsilon_2 \cdot p \cdot \kappa_1')$ と、その分が $X = X_0$ の部分に加わったことによる1次モーメントの増加分 $(\epsilon_1 \cdot q + \epsilon_2 \cdot p) X_0$ がつり合うはずであるから、

$$(\epsilon_1 q \kappa_1 + \epsilon_2 p \kappa_1') - (\epsilon_1 q + \epsilon_2 p) X_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(27)$$

次に式(26)において [] の部分を、

$$D = \left[1 - \frac{1}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2} \left(\sigma_a^2 \frac{1}{1 + a^2 \omega^2} + \frac{k}{a + k} \sigma_b^2 \right) \right] \quad \dots\dots\dots(28)$$

と表わしておく、分散が $D \cdot \sigma^2$ だけ小さくなるという条件より、

$$[\epsilon_1 q (\kappa_1^2 + \kappa_2) + \epsilon_2 p (\kappa_1'^2 + \kappa_2)] - (\epsilon_1 q + \epsilon_2 p) X_0^2 = D \cdot \sigma^2 \quad \dots\dots\dots(29)$$

以上において、

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{X_0} X f(X) dX, \\ \kappa_2 &= \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{X_0} X^2 f(X) dX - \kappa_1^2, \\ \kappa_1' &= \frac{1}{p} \int_{X_0}^{\infty} X f(X) dX, \\ \kappa_2' &= \frac{1}{p} \int_{X_0}^{\infty} X^2 f(X) dX - \kappa_1'^2, \\ q &= 1 - p = \int_{-\infty}^{X_0} f(X) dX \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(30)$$

式(27)より、 $\epsilon_1 p = \theta \cdot \epsilon_2 q$ 、ここに、 $\theta = -(X_0 - \kappa_1) / (X_0 - \kappa_1')$ 、であるから、これを式(29)に代入して整理すると、

$$\epsilon_1 = \frac{D \cdot \sigma^2}{q [\kappa_1^2 + \kappa_2 + \theta (\kappa_1'^2 + \kappa_2') - (1 + \theta) X_0^2]} \quad \dots\dots\dots(31)$$

これより、渴水回数の期待値 $E(n)$ 、不足水量 $E(S_n)$ は、

$$E(n) = (1 - \epsilon_1) q \cdot N \quad \dots\dots\dots(32)$$

$$E(S_n) = (1 - \epsilon_1) q \cdot N \cdot |\kappa_1 - X_0| \quad \dots\dots\dots(33)$$

ここに、 $\epsilon_1 \geq 1.0$ のときは $\epsilon_1 = 1.0$ とおくものとする。

$\kappa_1, \kappa_2, \dots, \theta, a, q$, 式(31)の分母などに対しては、前もっているいろいろなケースに対して数値計算をして、適当な形で図化しておけば便利であろう。水流量は一般にガンマ分布をなすことが多いから、この場合についてはすでに作図を完了している。Fig. 10 (b)~(d)はその例である。

(2) シミュレーションによる理論式の検証

以上の理論式をシミュレーションにより検証する。流入量時系列は正規分布あるいはガンマ分布とし、確率分布と時系列特性を規定するパラメーターをいろいろに変化させたときのシミュレーション値と理論値を比較した。Fig. 15は正規分布に対する比較の例である。この場合、流入量の確率分布は $N(3, 1)$ とし、貯水池容量 $V = 1 \sim 30$ 、目標放流量 $X_0 = 1 \sim 3$ 、自己相関係数 $\rho = 0.0 \sim 0.8$ であって、非常に広範囲のシミュレーション・ケースを含んでいるといえよう。

この図よりわかるように、シミュレーション値と理論値は非常によく一致している。

ただ ϵ_1 が1に近づいて、渴水回数が非常に小さくなるときは、シミュレーションでは渴水がおこっているに

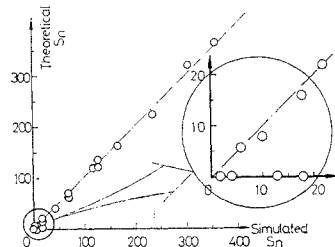


Fig. 15 Comparison of theoretical value with simulated value for $S_n, N = 10,000$.

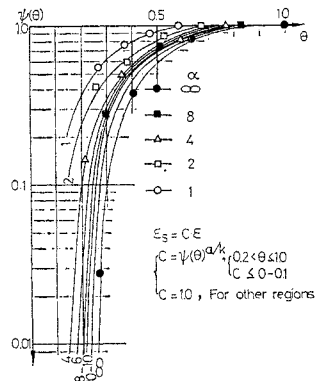


Fig. 16 Modification.

もかわらず、理論解では渇水回数 '0' となることが多い (Fig. 15 の円内参照)。一般には、この程度の精度で十分であろうが、念のためにさらに若干の補正を試みると、経験的に $\epsilon_1' = c \cdot \epsilon_1$, ここに、

$$c = \psi(\theta)^{\alpha/k} \dots \dots \dots (34)$$

$\psi(\theta)$ はガンマ分布の形状母数 α をパラメーターとして Fig. 16 に示されている。この補正を行えば、補正のためのシミュレーションに用いた定常 1 次マルコフ線形回帰過程をなすとして理想化された流入量時系列に対しては少なくとも、渇水回数が小さいときでも計算値はシミュレーションにより得られた結果とよく一致する。このように水資源計画においてシミュレーションを用いずして、しかも式 (32)~(34) のごとき比較的簡単な式で渇水回数や不足水量などの重要な諸量を表現できることを示したことは、水資源計画およびその理論的研究の発展に益するところがきわめて大きいと信ずる。

(3) 非定常性の考慮

2.(6) と同様に、上記の理論を現実の水資源計画に適用するために、実際の水文量時系列の持つ非定常性の影響を検討する。この場合解析は次の 3 ケースについて行った。

- a) 年周期変動を無視し、流入量時系列を定常時系列とみなす場合、
- b) 1 年を適当な 2 期間 (低水期・豊水期とよんでおくことにする) に分けて、低水期のみを継ぎ合せた時系列と豊水期のみを継ぎ合せた時系列を作り、各時系列を定常な時系列とみなしそれぞれ個別に渇水回数・不足水量を求めておき、それを加えて全渇水回数・総不足水量とする場合、
- c) 流入量時系列が正弦波をなす年周期成分と、そのまわりの定常時系列をなす変動成分より構成されると考える場合。

計算にさきだって若干補足しておくが、琵琶湖の流量資料では、降水や流域諸河川からの琵琶湖への流入量よりも、蒸発散などによる水の損失量のほうが大きくて、月流入量として負のデータが入っている場合がある (最小限 $-50 \times 30 \text{ m}^3/\text{sec} \cdot \text{day}$ 程度)。そこで観測月流入量資料に $50 \times 30 \text{ m}^3/\text{sec} \cdot \text{day}$ を加えたものが原点母数 '0' のガンマ分布をなすとして月流量の模擬発生を行ったのち、一律に $50 \times 30 \text{ m}^3/\text{sec} \cdot \text{day}$ を差し引いてシミュレーションに用いた。よって理論解析にあたっては、上記の定数を加えた流量資料について平均値、目標放流量、形状母数などを計算して Fig. 10 の各図により必要な諸量を求めた。

Fig. 17, 18, Table 3 に琵琶湖・木津川の流量パターンおよびこれを代表するおもな量を示している。またシ

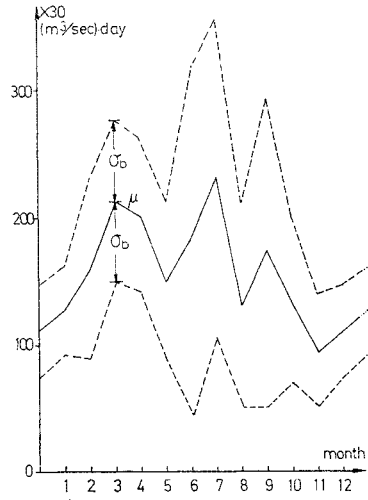


Fig. 17 Variation of monthly inflow to the Lake Biwa.

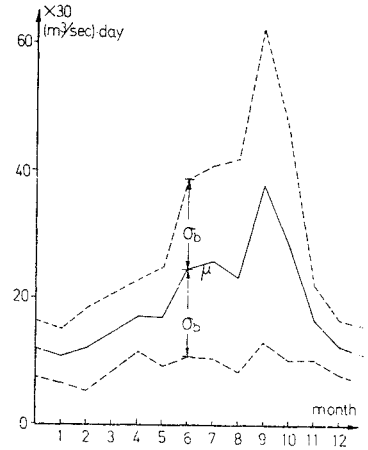


Fig. 18 Variation of monthly discharge of the Kizu River.

Table 3

		μ	σ	σ_a	σ_b	ρ	k	α
琵琶湖	全年定常	160	90			0.373	1.51	5.44
	豊水期 (2~9)	182	100			0.323	1.39	5.38
	低水期 (10~1)	116	51			0.407	1.63	10.6
	年周期考慮	160	94.1	46	82	0.373	1.51	5.44
木津川	全年定常	20.4	14.4			0.317	1.37	2.01
	豊水期 (6~10)	28.3	19.4			0.259	1.24	2.13
	低水期 (11~5)	14.6	6.4			0.346	1.44	5.20
	年周期考慮	20.4	15.4	8.5	12.9	0.317	1.37	2.01

ミュレーション結果と理論値の比較の例を Fig. 19(a)~(c) に示す。これらの図においてシミュレーション結果は実線で、理論解はそれぞれ黒点で示している。これらの図より次のようなことがわかる。

- i) 全般的にみて、皮肉にも非定常性を考慮していない a) のケースが十分にシミュレーション値に近い値

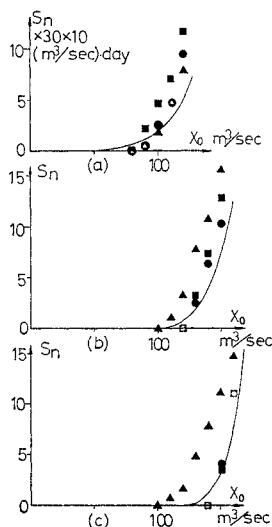


Fig. 19 Deficit of water

(a) $V=134$, (b) 401, (c) 801×30 (m³/sec)day],

circles : stationary sequence,
triangles : deviding the sequence to 2 seasons,
squares : taking account of annual periodicity.

をとっている。

ii) b) のケースは貯水池容量が小さいときにはもって適合度が高い。この傾向は木津川の資料の場合のほうが著しかった。これは次のような理由によるものと考えられる。

低水期の最初の月（先行する豊水期の最後の月）においては貯水池は満水であることが多いであろう。今回はこの効果を見捨てて低水期のみをつなぎ合わせている。貯水池容量 V が小さく、貯留定数 a あるいは放流量の時定数 $(a+k)$ が、各年の低水期の期間に比して十分小さいときはこの初期貯水位が満水である効果はほとんどきかない。この場合は放流量系列を2つに分けて非定常性を考慮したほうがよく合うのは当然であろう。ところが V が大きくなり、したがって貯留定数 a が大となって低水期間長よりも大きくなると、各低水期の初期に貯水池が満水であると、どの低水期間に対しても渇水はほとんどおこりえない。ところが b) の方法ではより小さな目標放流量に対しても渇水が生起することになり、当然理論解はシミュレーション結果に比して渇水回数・不足水量を過大評価することになる。

iii) c) はもっとも正統的な方法であるが、貯水池が小さい場合に対してはそれほどよく合わなかったのは、2. (6) の場合と同じく年周期変動を単一の正弦波で近似したのが若干粗すぎたのであろう。しかし、貯水池容量が大となるとまわりの変動成分に比して年周期成分が比較的卓越してきて、これを考慮したことによる c) の解はシミュレーション値にもっとも近い値を示している。

以上より、

i) それほどの厳密さを要求されない場合には、a) のごとく年周期変動を見捨てて解析しても、かなり良い精度の解が得られる。

ii) 初期貯水量の効果を導入すれば、貯水池規模が大きい場合に対しても、b) の手法による非定常性の考慮が有効となろう。またそれができれば、本論文では目標放流量や貯水池容量が年間を通じて一定であるとしているが、それらが各期間ごとに変わるような場合に対しては、この手法が比較的容易に適用できることになる。

iii) しかしながら、c) の手法はもっとも正統的であるし、以上のごとくこのような理論的アプローチが実用上十分な精度で展開できることがわかった以上、今後流量時系列変動をより正確に解析し、この結果を用いて c) の手法により再度より精密な理論解析を行うことが望まれる。

5. 結論と展望

普遍的な水資源計画方法論の確立のための基礎的研究の一環として、水資源計画策定の各ステップをシステムとしてとらえ、もって計画全体について一般的なかつ解析的な研究や特性の把握を可能ならしめるために、本研究においてはまず、貯留・調節システムを少なくとも定性的には等価より単純なシステムでおきかえる手法を提案し、そのシステムの諸特性を理論的に導いた。すなわち、貯水池システムに対して、流量時系列の平滑化機能だけではできるだけ忠実に再現することを狙いといた等価線形貯水池システムを提案した。

これはかなり基礎的な研究であるにもかかわらず、すでに若干の実用的成果も得られている。たとえば、これまで貯水池機能の評価においては、平均流入量 μ に対する貯水池容量 V ・目標放流量 X_0 の比 V/μ , X_0/μ (後者はいわゆる利用率である) などのパラメーターを基準とした議論がほとんどであったが、少なくとも流量時系列の平滑化機能という見地からはこれに替えて V/σ , $(X_0 - \mu)/\sigma$ をパラメーターとした整理が妥当であることが導かれた。

次にこのシステムに非線形効果を再導入することにより、貯水池による水の貯留・調節を含む水資源計画システムに対して、渇水回数・その間の総不足水量などの重要な諸量を表わす式を理論的に導いた。

またこれらの式が実用上十分な精度を有することがシミュレーションにより検証された。

謝 辞：本研究は文部省昭和 47 年度科学研究費「特定研究：水資源の貯留・調節機能に関する研究(代表者：

室田明)の補助を受けて行った研究の一部である。記して謝意を表する次第である。

使用した電子計算機は大阪大学大型電子計算機センターの NEAC 2200-700, 京都大学大型電子計算機センターの FACOM 230-60 である。

参 考 文 献

- 1) Langbein, W.B.: Queuing Theory and Water Storage, Jour. of Hydr. Div., ASCE, Vol. 84, No. HY 5, pp. 1811-1~1811-19, Oct., 1958.
- 2) Sherman, L.K.: Streamflow from Rainfall by the Unit Graph Method, Eng. News Record, Vol. 108, 1932.
- 3) Chow, V.T. and V.C. Kulandaiswamy: General Hydrologic System Model, Jour. of Hydr. Div., ASCE, Vol. 97, No. HY 6, pp. 791~803, June, 1971.
- 4) 吉川秀夫・日野幹雄・四俣正俊・木村正和: 変動降雨による非線型流出系の解析, 第16回水理講演会講演集, pp. 111~115, 1972年2月.
- 5) 科学技術庁資源調査会: 水資源の変動様相に関する調査報告, 1965年.
- 6) 室田 明・江藤剛治・角湯正剛: 広域的な月水文量の解析とそのシミュレーション, 土木学会論文報告集, 第203号, 1972年7月.
- 7) たとえば, Quimpo, R. and V. Yevjevich: Stochastic Description of Daily River Flows, Proc. of I.H.S., Fort Collins, Colo., U.S.A., Sept., 1967.

(1973.5.28・受付)