土木学会論文報告集
第222号・1974年2月

貯水量の累加損失係数を用いた貯水池群の最適操作手法

OPTIMAL CONTROL OF WATER RESOURCE-SYSTEMS USING MARGINAL LOSS FUNCTIONS OF REMAINING RESERVOIR STORAGES

竹　内　邦　良*
By Kuniyoshi Takeuchi

本報文の直接の目的は，多段階決定問題の確率的最適化手法として新しく開発されたDynamic Programming Coupled with Linear Programming（以下 DCL と略す）を紹介することである。この手法は現実の複雑な貯水池群の最適操作の問題を解くために，既成の数学的プログラミングは有効でないという事実に基づいて新しく工夫されたものであり，したがってまず具体的な問題が与えられ，それを解くための手法として開発された。しかしながら，得られた手法は必要な基本的仮定が成立する問題に対しては数学的にきわめて一般性の高いものであり，貯水池操作問題への適用性は，広くコントロール問題一般への適用性の一例でしかない。にもかかわらずここでは，具体性のある説明を重視し，創案の過程そのままに貯水池操作問題を通じて議論を進める。ただし，ケース・スタディは理論構成そのものと直接関係はないし，またこれを記せばスペースの関係上理論面を多分に割愛せざるを得なくなってしまうのでやむを得ず省略するが，関心のあるむきには Takeuchi(1972) の参照をお勧めする。

1. 序　　論

水資源需要の急上昇と，安価な水資源確保がしだいに困難になりつつある状況においては，所与の水資源利用設備の最適操作はきわめて重大な問題として顕在化してくる。わが国においてはすでに数多くの貯水池が建設され，導水路網，ポンプ，発電施設，洪水調節用諸施設などが整備されているが，その操作・運用には歴史的なものを含む社会的ならびに技術的な制約のために，設備のグローバルな最適利用からはほど遠い現状のように思われる。このような状況を改善するために，水資源システムの最適操作手法を開発することは，基本的に次の二点で意義があると考えられる。一つは最適化が社会的な障害なしに可能である場合でも，技術的なおくれから実行できないでいる状況を打ち開くこと。もう一つは，最適操作手法を利用することによって，社会的な制約を遵守するために，社会全体として支払っている代価，すなわち機会費用がどの位についているかを算定することを可能にすることである。この第二の意義は，技術的な計画手法を，政治的・社会的な計画決定のプロセスの中に生かすために不可欠のものであると思われる。

貯水池群の最適操作の問題はその最適規模・配置などのデザインの問題とは独立である。言い換えれば，設備の運用の問題はその規模決定問題と独立に存在する。一方設備規模の最適化に当っては，設備の運用が最適であるということを前提にはじめて論ずることができる。したがって，最適デザインは最適操作より一次元高い最適化問題であるということができる。本論文はより基本的な，最適操作の問題を扱うものである。

貯水池群の最適操作の問題は Little (1955) によるダイナミック・プログラミング（DP）の応用にはじまるということができる。爾来最適操作の問題は各種の数学的プログラミングの応用により発展してきている。一方最適デザインの問題は，最適操作を前提とした二重の最適化を必要とするため，数学的プログラミングの応用はその計算過程がぼう大となることによりきわめてむずかしく，シミュレーションが主たる手法となっている。しかしながら，シミュレーションは直接的な最適化手法ではなく，所与のデザインと操作方式に対するシステム・リスポンスを調べる手段であって，最適化のためには steepest ascent などによる繰り返し計算によって間接的にアプローチするほかはない。ごくおおずかみに言って，最適操作の問題は数学的プログラミングにより，最適デザインはシミュレーションによるという手法上の使い分けが一般的に行われているということができよう。

ところで数学的プログラミングの手法を貯水池操作に限って適用する場合でもやはり dimensionality の問題

*　正会員　Ph.D. 東京工業大学助手　土木工学教室

は第一のボトル・ネックとなっている。ことに確率的最適化ということになると，多段階決定問題はきわめてむずかしい。Larson(1968) の State Increment Dynamic Programming を基礎とする Heidari ら (1971) による Discrete Differential Dynamic Programming や，Charnes and Cooper (1959) による Chance Constrained Linear Programming を利用した ReVelle ら (1969, 1970, 1973) による Linear Decision Rule などはこの問題を解決するための興味深い手法ではあるが，それらの適用性は非常に限られており，複雑なシステム，ことに決定変数の多いシステムの最適化の用には供さない場合が多い。くわしくは Takeuchi (1972, pp. 21～31) を参照されたい。このような既成の手法の欠点を克服するために開発された DCL 手法は，資源の空間的配分に LP を，時間的配分に DP を使うという両プログラミング手法の合理的融合を図ったものであるが，続く **2**. ではその基本概念を述べ，**3**. ではぼう大な数の LP を高速度で解く手法を紹介する。これは DCL には不可欠の課題である。**4**.，**5**.，**6**. では DCL の基本的概念に基づいて実際の計算を進める上での近似の方法について代案を理論的に比較検討する。

2. DCL 手法の基本概念

DCL 手法の基本概念を一言で述べれば，離散量を用いる DP の dimensionality の難点を連続量を用いる LP と組み合わせることによって回避し，多段階決定問題を解く上での DP の優秀性はそのまま残すものということができる。ここで LP との結合を図るために，DP の各段階における最小累加損失関数（目標が便益の最大化である場合には最大累加便益関数）を線型化する必要がある。この線型化をいかに適切に行うかというところに DCL 手法の理論的核がある。

非確率的状態変数ベクトルを $\boldsymbol{S}_t$, 確率的状態変数ベクトルを $\boldsymbol{I}_t$, さらに決定変数ベクトルを $\boldsymbol{u}_t$ であらわす。ここに添字 t は段階 (stage) を示しており，任意の大きい整数を N として $t=1, 2, \cdots, N$ の値をとる。貯水池操作の問題では，$\boldsymbol{S}_t$ は貯水量ベクトル，$\boldsymbol{I}_t$ は流入量ベクトル，また $\boldsymbol{u}_t$ は給水量ベクトルということになる。

段階 t において状態変数が $(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ であるときに，$\boldsymbol{u}_t$ なる決定を下した場合，その段階で生じる損失（これは以後直接損失と呼ばれる）を $L_t(\boldsymbol{u}_t\,;\,\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ とあらわし，段階 t において $(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ という状態であって，以後最後の段階 N まで最適な決定を行った場合の段階 t より N までの間の最小累加期待損失（これは以後しばしば単に累加損失と略される）を $f_t(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ であらわす。いま $p_t(\boldsymbol{I}_t)$ を段階 t において状態量 $\boldsymbol{I}_t$ の実現する確率とすれば，累加損失 $f_t(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ は確率的 DP の定式化法を用いて次のように書き表わされる。

$$f_t(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)=\min_{\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{S}_{t+1}}\Big[L_t(\boldsymbol{u}_t\,;\,\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)+\theta\cdot\sum_{\boldsymbol{I}_{t+1}} p_{t+1}(\boldsymbol{I}_{t+1})\cdot f_{t+1}(\boldsymbol{S}_{t+1}, \boldsymbol{I}_{t+1})\Big] \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに θ は時間的割引係数であって，一段階ごとの割引率を r とすれば $\theta=1/(1+r)$ の関係にある。

この定式化法は Little (1955) をはじめとする従来の確率的 DP の表わし方とは多少異なっている。その一つは段階 $t+1$ の状態変数 $\boldsymbol{S}_{t+1}$ が決定変数として扱われていることであり，もう一つは，確率変数 $\boldsymbol{I}_t$ が累加損失関数 f_t の独立変数の中に入っていることである。いま段階 t において状態量が $\boldsymbol{S}_t$ であるとき，段階 t より N までの最小累加期待損失を $G_t(\boldsymbol{S}_t)$ で表わせば，従来の確率的 DP の表示法では

$$G_t(\boldsymbol{S}_t)=\min_{\boldsymbol{u}_t}\Big[\sum_{\boldsymbol{I}_t} p_t(\boldsymbol{I}_t)\cdot\{L_t(\boldsymbol{u}_t\,;\,\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)+\theta\cdot G_{t+1}[T(\boldsymbol{u}_t\,;\,\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)]\}\Big] \quad \cdots\cdots(2)$$

と表わされるのが普通である。ここで T は状態変数の遷移関数であって，段階 t において状態量 $(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ であるとき，$\boldsymbol{u}_t$ なる決定を行うと，遷移関数 T にしたがって段階 $t+1$ における状態量 $\boldsymbol{S}_{t+1}$ は次のように定まる

$$\boldsymbol{S}_{t+1}=T(\boldsymbol{u}_t\,;\,\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t) \quad \cdots\cdots(3)$$

式 (1) において式 (3) の変換を直接用いずに，$\boldsymbol{S}_{t+1}$ を形式上決定変数として扱っているのは次節に述べるような利点があるからであるが，この場合には式 (3) は最小値問題の制約条件に含まれなければならない。次に確率変数を独立変数と考えずに，式 (2) のように期待値の最小を目標とする場合には，最適解を見出すために決定変数を離散化して，そのすべての組み合わせに対して式 (2) の { } 内の値を計算する方式に頼らざるを得ない。しいてそれを避けて LP を用いるとしても 2 段階 LP などの計算時間の非常に長いものを導入しなくてはならなくなる。したがって，式 (1) による定式化はそのいずれをもとらない DCL 手法を用いるためには必須のものである。なお，式 (1) は

$$G_t(\boldsymbol{S}_t)=\sum_{\boldsymbol{I}_t} p_t(\boldsymbol{I}_t)\cdot f_t(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t) \quad \cdots\cdots(4)$$

であることを考慮すれば，式 (2) と本質的には同一であり，これを 2 段階，すなわち式 (1) と (4) に分けたものと見ることができる。

いま式 (1) の最小問題の制約条件を状態変数の遷移方程式 (3) をも含めて $\Gamma_t(\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{S}_{t+1}\,;\,\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)\leq 0$ であらわせば，DP の基本式は次のように書き表わされる[注1)]。

注 1) ここでもし確率変数が段階ごとに独立と見なせない場合には，条件付確率 $p_{t+1}(\boldsymbol{I}_{t+1}|\boldsymbol{I}_t)$, $p_{s+1}(\boldsymbol{I}_{t+1}|\boldsymbol{I}_t, \boldsymbol{I}_{t-1})$ などを用いる必要がある。$p_{t+1}(\boldsymbol{I}_{t+1}|\boldsymbol{I}_t)$ で表わされる場合には f_t は変わらず $f_t(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ でよいが，G_{t+1} は $G_{t+1}(\boldsymbol{S}_{t+1}, \boldsymbol{I}_t)$ となる。また後者の場合には，$f_t(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t, \boldsymbol{I}_{t-1})$, $G_{t+1}(\boldsymbol{S}_{t+1}, \boldsymbol{I}_t, \boldsymbol{I}_{t-1})$ となる。

$$f_t(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t) = \min_{\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{S}_{t+1}} [L_t(\boldsymbol{u}_t) + G_{t+1}(\boldsymbol{S}_{t+1})]$$
$$\text{subject to } \Gamma_t(\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{S}_{t+1}; \boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t) \leq 0 \quad \cdots\cdots(5)$$

$$G_{t+1}(\boldsymbol{S}_{t+1}) = \theta \cdot \sum_{\boldsymbol{I}_{t+1}} p_{t+1}(\boldsymbol{I}_{t+1}) \cdot f_{t+1}(\boldsymbol{S}_{t+1}, \boldsymbol{I}_{t+1}) \quad \cdots\cdots(6)$$

式 (1),(2) の中の直接損失関数 L_t においては，決定変数 $\boldsymbol{u}_t$ の変域が状態変数 $(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ によって制約をうけるという意味で $L_t(\boldsymbol{u}_t; \boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ なる表記を行ったが，式 (5) では，その制約が $\Gamma_t \leq 0$ の形で別箇に明示してあるので，L_t としては条件付の表記を必要としないため，単に $L_t(\boldsymbol{u}_t)$ と書き表わしている。なお制約条件式 $\Gamma_t \leq 0$ の中には，たとえば各貯水池における質量保存則 $S_{it+1} + u_{it} = S_{it} + I_{it}$, $i=1, \cdots, M$（ここに S_{it}, u_{it} はベクトル $\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{u}_t$ の i 番目の要素，また M はシステム中の貯水池の数）などが含まれる。さらに式（6）では θ を G_{t+1} の中に含めて定式化の便宜を図った。

この DP 問題を従来のとおり離散量を用いて解こうとすると，$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{u}$ がたとえば，それぞれ5,2,13の要素よりなり，それがおのおの5つのレベルに分けられたとすると各段階において $5^{5+2+13} \simeq 10^{14}$ 個の組み合わせについて最小値を見つけ出す必要があり，各組み合わせに対して 10 micro seconds を要するとしても，1段階のみの計算に約 30 年かかることになる。Bellman (1962) の Successive Approximation や，Larson (1968) の State Increment Dynamic Programming などはこのような難点を克服するために開発されたものであるが，上の例のように決定変数の次元が状態変数のそれに比べてかなり高い場合には有効性を発揮しない。

筆者は，このようなDPのもつ基本的難点が，離散量を用いる技法には不可避のものであると考え，連続量を用いた技法との連結を図った。すなわち，式 (5) における最小値問題を LP に還元して解き，式 (5),(6) 全体で表わされる汎関数の最小値問題は，多段階最適化に有利な DP を用いる方式を開発した。

最小値問題を LP により解くためには，各段階での直接損失関数，累加損失関数さらに制約条件式が決定変数に関して線型でなくてはならない。重要なことは，L, Γ が線型であるとしても G が線型になるとは限らないということである。しかしながら L は給水量の限界効用逓減の法則により，また G は貯水量の限界効用逓減の法則によりそれぞれ $\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{S}_t$ について convex とみなすことができる。したがって，L ならびに G を piecewise に線型化することができれば，状態量の遷移方程式を含む制約条件が線型であれば convex LP を適用して最小値問題を解くことができるということになる。以下その線型化の手順を述べる。

まず直接損失関数 $L_t(\boldsymbol{u}_t)$ を線型化する。そのために，決定変数ベクトル $\boldsymbol{u}_t$ の各要素 $u_{\nu t}$, $\nu=1, 2, \cdots, n'$（ただし n' は決定変数の数）をそれぞれ q_ν 個の部分変数に分解する。すなわち，$u_{\nu t}$ に関する段階 t における損失係数が，$u_{\nu t}$ の第 q 番目の区間 $[u_\nu{}^q, u_\nu{}^{q+1}]$ において $c_{\nu t}{}^q$ である場合に，つまり

$$\left.\frac{\partial L_t(\boldsymbol{u}_t)}{\partial u_{\nu t}}\right|_{u_{\nu t} \in [u_\nu{}^q,\, u_\nu{}^{q+1}]} = c_{\nu t}{}^q$$
$$q=1, 2, \cdots, q_\nu \quad \cdots\cdots(7)$$

で表わされる場合に，新しい部分変数 $u_{\nu t}{}^{(q)}$, $q=1, \cdots, q_\nu$ を次のように定義する。

$$u_{\nu t}{}^{(q)} = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad u_{\nu t} \leq u_\nu{}^q \\ u_{\nu t} - u_\nu{}^q & \text{for} \quad u_\nu{}^q < u_{\nu t} \leq u_\nu{}^{q+1} \\ u_\nu{}^{q+1} - u_\nu{}^q & \text{for} \quad u_\nu{}^{q+1} < u_{\nu t} \end{cases} \quad \cdots(8)$$

ここで通常は $u_\nu{}^1 = 0$, $u_\nu{}^{q_\nu} = \infty$ である。このように定義された $u_{\nu t}{}^{(q)}$ を用いて，$u_{\nu t}$ は

$$u_{\nu t} = u_{\nu t}{}^{(1)} + u_{\nu t}{}^{(2)} + \cdots + u_{\nu t}{}^{(q_\nu)} \quad \cdots\cdots(9)$$

と書き表わされる。

この決定変数ならびに損失係数を用いれば，直接損失関数 L_t は次のように線型関数で書き表わすことができる。

$$L_t(\boldsymbol{u}_t) = \sum_{\nu=1}^{n'} \sum_{q=1}^{q_\nu} c_{\nu t}{}^q u_{\nu t}{}^{(q)} \quad \cdots\cdots(10)$$

ここであらためてベクトル $\boldsymbol{c}_t, \boldsymbol{u}_t$ を

$$\boldsymbol{c}_t = (c_{1t}{}^1\, c_{1t}{}^2 \cdots c_{1t}{}^{q_1}\, c_{2t}{}^1\, c_{2t}{}^2 \cdots c_{n't}{}^{q_{n'}}) \quad \cdots\cdots(11)$$

$$\boldsymbol{u}_t = (u_{1t}{}^{(1)}\, u_{1t}{}^{(2)} \cdots u_{1t}{}^{(q_1)}\, u_{2t}{}^{(1)}\, u_{2t}{}^{(2)} \cdots u_{n't}{}^{(q_{n'})})^T \quad \cdots\cdots(12)$$

と定義すれば，式 (10) は

$$L_t(\boldsymbol{u}_t) = \boldsymbol{c}_t \cdot \boldsymbol{u}_t \quad \cdots\cdots(13)$$

と書くことができる。

次に同様の操作を累加損失関数 $G_t(\boldsymbol{S}_t)$ についても行う。そのためまず貯水量ベクトル $\boldsymbol{S}_t$ の各要素である S_{it}, $i=1, \cdots, M$ を部分変数に分ける。いま貯水池 i の貯水容量 V_i を $K+1$ 個の離散量 $S_i{}^1, S_i{}^2, \cdots, S_i{}^{K+1}$ を用いて K 区間に分ける。ここですべての i について $S_i{}^1=0$, $S_i{}^{K+1}=V_i$ である。K は一般には i の関数 K_i と書かなくてはならないが，ここでは簡単化のためすべての貯水池について等しい値 K を考えることとする。各区間 $[S_i{}^k, S_i{}^{k+1}]$, $k=1, 2, \cdots, K$, $i=1, 2, \cdots, M$ に対して新しい部分変数 $S_{it}{}^{(k)}$ を次のように定義する。

$$S_{it}{}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad S_{it} \leq S_i{}^k \\ S_{it} - S_i{}^k & \text{for} \quad S_i{}^k < S_{it} \leq S_i{}^{k+1} \\ S_i{}^{k+1} - S_i{}^k & \text{for} \quad S_i{}^{k+1} < S_{it} \end{cases} \quad \cdots\cdots(14)$$

この変数を用いれば，S_{it} は

$$S_{it} = S_{it}{}^{(1)} + S_{it}{}^{(2)} + \cdots + S_{it}{}^{(K)} \quad \cdots\cdots(15)$$

と書き表わされる。

さて累加損失関数 $G_t(\boldsymbol{S}_t)$ を新しい部分変数に関して偏微分し，その微係数を λ とすると，

$$\frac{\partial G_t(\boldsymbol{S}_t)}{\partial S_{it}^{(k)}}=\lambda_{it}^{(k)} \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

と書ける。$\lambda_{it}^{(k)}$ は，貯水池 i において，その貯水量が k 番目の区間に属するときの単位水量の持つ，段階 t 以後の最小累加期待損失（これを累加損失係数または限界累加損失と呼ぶ）を意味している。したがって，λ は i 以外のすべての貯水池の貯水量の関数であるに違いない。ごく単純に考えて，貯水池 i の貯水量の累加損失係数は，ほかの貯水池が豊水であれば小であろうし，また乏しければ大となるであろう。

したがって λ は一般に次のように表わせる。

$$\lambda_{it}^{(k)}=\lambda_{it}^{(k)}(S_{p_1t}, S_{p_2t}, \cdots, S_{p_{M-1}t}) \cdots\cdots\cdots(17)$$

ここで $p_1, \cdots, p_{M-1}$ は貯水池 i 以外の貯水池を表わす。$\lambda_{it}^{(k)}$ が S_{pt} の関数で表わされている限り，$G_t(\boldsymbol{S}_t)$ を λ をそのまま用いて線型展開することはできない。そこで $\lambda_{it}^{(k)}$ を定数でおきかえることを考える。

この目的を達成する方法としては種々考えられるが，本報文ではそのうち三つの方法を紹介する。はじめの二つは実用性には乏しいが，実用性も高く理論的にもきわめて妥当である第三の方法を容易に理解するためのステップとして重要なものである。すなわち，第一の方法は，$\lambda_{it}^{(k)}(S_{p_1t}, S_{p_2t}, \cdots, S_{p_Mt})$ の値を，各独立変数の離散量化されたもののすべての可能な組合わせに対して計算しておいて，最小自乗法により平均値を推定してやるものである。第二の方法は，システム全体が最適に操作されているという条件の下では，貯水池 i の貯水量が区間 k（たとえば 25%～50% 満水の状態）に属するときには，他の貯水池もそれからあまり遠くない状態にあり，また段階ごとの貯水量変化も前段階の状態の近傍に限られると仮定できる特殊な場合(たとえば，並列な安定した貯水池群の場合など）を想定し，上記独立変数のうちその近傍の値の組み合わせのみについて $\lambda_{it}^{(k)}$ を計算して，同じく最小自乗法により平均値を推定するものである。第三の方法は第二の方法で仮定した特殊条件を取り除き，そのかわりに貯水池 i が区間 k に属する場合には，他の貯水池の貯水量はそれを所与とする条件付期待状態にあると仮定し，その限られた組み合わせのみより $\lambda_{it}^{(k)}$ を計算するものである。以上の三つの方式は **4.**，**5.**，**6.** にそれぞれ議論される。このようにして $\lambda_{it}^{(k)}$ の推定値が $\eta_{it}^{(k)}$ として定数で求められたとすると，式 (16) より

$$\frac{\partial G_t(\boldsymbol{S}_t)}{\partial S_{it}^{(k)}}\simeq\eta_{it}^{(k)} \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

と書けることになるから，$G_t(\boldsymbol{S}_t)$ の推定関数 $\hat{G}_t(\boldsymbol{S}_t)$ は次のように線型関数として書き表わされる。

$$\hat{G}_t(\boldsymbol{S}_t)=\eta_{0t}+\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\eta_{it}^{(k)}S_{it}^{(k)} \quad \cdots\cdots\cdots(19)$$

さらに

$$\boldsymbol{H}_t=(\eta_{0t}\ \eta_{1t}^{(1)}\ \eta_{1t}^{(2)} \cdots \eta_{1t}^{(K)}\ \eta_{2t}^{(1)}\ \eta_{2t}^{(2)} \cdots \eta_{Mt}^{(K)}) \cdots\cdots\cdots(20)$$

$$\boldsymbol{S}_t=(1\ S_{1t}^{(1)}\ S_{1t}^{(2)} \cdots S_{1t}^{(K)}\ S_{2t}^{(1)}\ S_{2t}^{(2)} \cdots S_{Mt}^{(K)})^T \cdots\cdots\cdots(21)$$

と書くことにすれば，式 (19) は

$$\hat{G}_t(\boldsymbol{S}_t)=\boldsymbol{H}_t\cdot\boldsymbol{S}_t \quad \cdots\cdots\cdots(22)$$

と表わすことができる。

最後に制約条件 $\Gamma_t(\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{S}_{t+1}; \boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)\leq 0$ の線型化を行う。この制約条件には決定変数に関する制約のほかに，状態変数に関するもの，また状態変数の遷移方程式 (3) が含まれているが，すでに導入された部分変数を用いることによってかりに非線型の制約が入っているとしても線型近似式で表わすことができる。その結果を，

$$\boldsymbol{A}_t\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_t\\ \boldsymbol{S}_{t+1}\end{bmatrix}\leq \boldsymbol{b}_t \cdots\cdots\cdots(23)$$

と書くこととする。ここに $\boldsymbol{A}_t$ は $m\times n$ の係数マトリックス，$\boldsymbol{b}_t$ は m 次元の列ベクトルである。ただし m は制約条件式の数，n は $\boldsymbol{u}_t$ ならびに $\boldsymbol{S}_{t+1}$ の部分変数化されたものを含む全変数の数で，

$$n=\sum_{\nu=1}^{n'}q_\nu+K\cdot M$$

$\boldsymbol{A}_t$ は一般には状態変数 $(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ を含んでいる。たとえば，段階 t における発生電力が制約条件にある場合には落差と放流量が積の形で制約の中に入ってくる。しかしながら，以下の議論は $\boldsymbol{A}_t$ は状態変数 $(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ にはよらないという前提条件の下に進められる。すなわち，制約条件式のうち $(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ に依頼して変化するものは定数項 $\boldsymbol{b}_t$ のみであるとする。この前提条件は DCL の基本的理論展開には不必要であるが，次節に述べる双対シンプレックス法の適用に不可欠のものである。

さて以上のようにして直接損失関数，累加損失関数，制約条件はそれぞれ式 (13)，(22)，(23) のように線型化され，DP の基本式 (5) は次のように書き替えることができる。

$$\left.\begin{aligned}f_t(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)=&\min_{\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{S}_{t+1}}\ [\boldsymbol{c}_t\cdot\boldsymbol{u}_t+\boldsymbol{H}_{t+1}\cdot\boldsymbol{S}_{t+1}]\\ &\text{subject to } \boldsymbol{A}_t\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_t\\ \boldsymbol{S}_{t+1}\end{bmatrix}\leq \boldsymbol{b}_t\end{aligned}\right\}\ (24)$$

DCL の基本的形式は以上で整えられたが，次に計算方式ならびに $\{\eta_{it}^{(k)}\}$ と操作方法の関連にふれておきたい。式 (5) を解くためには，任意の大きい整数 N について，

$$G_{N+1}(\boldsymbol{S}_{N+1})=0 \quad \cdots\cdots\cdots(25)$$

なる初期条件，ないしはこれと同等の条件

$$\boldsymbol{H}_{N+1}=\boldsymbol{0} \cdots\cdots\cdots(26)$$

を用いて，式 (23) の関係から $f_N(\boldsymbol{S}_N, \boldsymbol{I}_N)$ を状態変数の各組み合わせについて求め，$p_N(\boldsymbol{I}_N)$ より，N 段階の $G_N(\boldsymbol{S}_N)$ を求める。これを用いて $\{\eta_{iN}^{(k)}\}$ を推定し，その推定値にしたがって $\boldsymbol{H}_N$ を構成して，再び式

(24) を利用して $f_{N-1}(\boldsymbol{S}_{N-1}, \boldsymbol{I}_{N-1})$ を求める。

この繰り返し計算を，$\{\eta_{it}^{(k)}\}$ が各シーズン（たとえば，旬とか月）について収斂するまで続けることによって，最適な $\{\eta_{it}^{(k)}\}$ を決定する。累加損失係数が決定すれば，各段階での最適操作は，その段階の状態量の観測値 $(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$，ならびにその段階に対する $\{\eta_{it}^{(k)}\}$ を用いて式 (24) を解くことによって得られる。このように，$\{\eta_{it}^{(k)}\}$ は操作ルールそのものと同義であり，以後は累加損失係数をもって操作ルールと呼ぶこととする。

3．双対シンプレックス法の DCL への応用

DCL 手法による最適操作方法 $\{\eta_{it}^{(k)}\}$ を求めるためには，各段階 t において数多くの LP を解かなくてはならないし，また $\{\eta_{it}^{(k)}\}$ が収斂するまでには段階の数も非常に多くなる。したがって，一つ一つの LP がきわめて短時間で解ける保証がない限り DCL 手法開発の意味はない。本節では，状態変数の組み合わせによる LP のベースの変化が比較的少ないであろうという推定の下に，双対シンプレックス法によって高速度で LP を解く方法を述べる。

式 (24) の右辺の最小値問題は

$$\left.\begin{aligned}&\min_{u_t, S_{t+1}} [\boldsymbol{c}_t\ \boldsymbol{H}_{t+1}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_t\\ \boldsymbol{S}_{t+1}\end{bmatrix}\\ &\text{subject to } \boldsymbol{A}_t\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_t\\ \boldsymbol{S}_{t+1}\end{bmatrix}\leq \boldsymbol{b}_t\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

と書き表わされるが，以下の議論の簡明化のために，

$$\boldsymbol{C}_t=[\boldsymbol{c}_t\ \boldsymbol{H}_{t+1}] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

$$\boldsymbol{X}_t=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_t\\ \boldsymbol{S}_{t+1}\end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

とあらためて2つのベクトルを定義し，さらに段階をあらわす t を省略すれば式 (27) は

$$\left.\begin{aligned}&\min_{X} \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{X}\\ &\text{subject to } \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}\leq\boldsymbol{b}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

という一般的な LP 問題の表示に帰着する。

ここで本節に与えられた課題は LP(30) を高速度で大量に解く方法を見出すことであるが，段階 t においては，状態変数の組み合わせが変わっても，$\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}$ は不変であって，ベクトル $\boldsymbol{b}$ が変化するのみであることに注目すれば，いくつかの方法が採用できる。一つはベクトル $\boldsymbol{b}$ をパラメータとして，LP のパラメトリック・アナリシスを適用することである。もう一つは，双対シンプレックス法を適用することである。パラメトリック・アナリシスはあくまでもベースが変わらないという条件内でしか適用できないから，状態変数が変わったときベースに変化の生ずる度合が高い場合にはさほど期待できない。一方双対シンプレックス法ではベースが変化しなければ，パラメトリック・アナリシスによる場合と同様たちまち解が決まり，変化する場合でもその変化するベースについてのみイタレーションをすれば解が得られる。したがって，状態変数の組合わせの一つ一つの変化は，他の組み合わせは一定で一つの要素だけ一区間変化するものの集まりであることを考えれば，ベースの変化は比較的少ないと想定できるから，双対シンプレックスのほうに利があると考えられる。双対シンプレックス法そのものについては専門のテキストの説明に譲らざるを得ないが，ここでは DCL 手法とのつながりを明らかにするために必要な部分の概略を示す。

各ベクトルならびにマトリックスを改めて次のように定義する。

$\boldsymbol{C}$：$1\times n$ の損失係数ベクトル

$\boldsymbol{X}$：$n\times 1$ の変数ベクトル

$\boldsymbol{A}$：$m\times n$ の制約条件の係数マトリックス

$\boldsymbol{b}$：$m\times 1$ の制約条件の定数項ベクトル

$\boldsymbol{\Phi}_{nm}$：$n\times m$ の0マトリックス

$\boldsymbol{I}_m$：$m\times m$ の単位マトリックス

$\boldsymbol{X}_S$：$m\times 1$ のスラック変数ベクトル

ここで

$$z=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{X} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

とおけば，LP (30) は次のように書ける。

$$\left.\begin{aligned}&\text{Minimize}\quad z\\ &\text{subject to}\quad z-\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\Phi}_{1m}\cdot\boldsymbol{X}_S=0\\ &\qquad\qquad\quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I}_m\cdot\boldsymbol{X}_S=\boldsymbol{b}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(32)$$

したがって，最初のシンプレックス・タブローは次のようになる。

$$\begin{bmatrix}0 & -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{\Phi}_{1m}\\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_m\end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

ここでベースとして任意の m 個の変数を要素にもつ $m\times1$ ベクトル $\boldsymbol{X}_B$ を選んだとする。その変数に対する最初のシンプレックス・タブローの m 個の列を $\begin{bmatrix}-\boldsymbol{C}_B\\ \boldsymbol{A}_B\end{bmatrix}$ とすると，Wagner (1969 : p. 121) が示すように，シンプレックス・タブローは

$$\begin{bmatrix}1 & -\boldsymbol{C}_B\\ \boldsymbol{\Phi}_{m1} & \boldsymbol{A}_B\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{\Phi}_{1m}\\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

となる。ここで

$$\begin{bmatrix}1 & -\boldsymbol{C}_B\\ \boldsymbol{\Phi}_{m1} & \boldsymbol{A}_B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\boldsymbol{C}_B\cdot\boldsymbol{A}_B^{-1}\\ \boldsymbol{\Phi}_{m1} & \boldsymbol{A}_B^{-1}\end{bmatrix}\cdots\cdots(35)$$

であるから，式 (34) は

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_B\cdot\boldsymbol{A}_B^{-1}\cdot\boldsymbol{b} & -\boldsymbol{C}_B\cdot\boldsymbol{A}_B^{-1}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C} & \boldsymbol{C}_B\cdot\boldsymbol{A}_B^{-1}\\ \boldsymbol{A}_B^{-1}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}_B^{-1}\cdot\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}_B^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

となる。第1行第一列の値 $\boldsymbol{C}_B\cdot\boldsymbol{A}_B^{-1}\cdot\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{X}_B$ をベースとした場合の目標関数 z の値であり，第1列第二行以下は，$\boldsymbol{X}_B$ の値である。これはいうまでもなく非負である。第一行第二列以下の値が，双対値（LP (32) の双対問題の解）であって，z が最小値となるタブローにお

いては，いずれも非正でなくてはならない。すなわち，

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{C}_B\cdot\boldsymbol{A}_B^{-1}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\le\boldsymbol{\Phi}_{1n} \\ \boldsymbol{C}_B\cdot\boldsymbol{A}_B^{-1}\le\boldsymbol{\Phi}_{1m} \end{array}\right\}\cdots\cdots(37)$$

ここで注意すべき点は，状態変数 $(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ が変化した場合の影響は定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ を通じてタブロー (36) の第一列にのみ及ぶということである。したがって，$(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ の異なった値に対して，第一列を計算しなおしたとき，第二行以下が非負の値になれば，最適条件 (37) ははじめから満足されているから，そのまま解である。いくつかの要素が負になった場合には，双対シンプレックス法の原理から，式 (37) を満足しつつ，ベースの変更を行って，第一列第二行以下を非負にする摂動操作を施し，

$$\boldsymbol{A}_B^{-1}\cdot\boldsymbol{b}\ge\boldsymbol{\Phi}_{m1}\cdots\cdots(38)$$

の条件を満すベースを見出すことにより解を見出すことができる。実際の計算では，おのおのの状態変数の組み合わせの変化は微少であって，ベースが変化しない場合がきわめて多い。また変化する場合であっても，全体のベースのうちのせいぜい 1,2 割程度というように，ごくわずかの摂動で最適解に到達することができる。したがって，標準的な状態変数の組み合わせについて主シンプレックス法で解いておけば，残りの組み合わせに対する LP は双対シンプレックス法によってきわめて容易に解くことができるわけである。各組み合わせごとに，最初のベース $\boldsymbol{X}_S$ からはじめるのに比して 10 分 1 の程度のスピードで解けることは以上の論拠によりうなづけるであろう。IBM 360/75 を用いて $m\times n$ が 52×54 の場合平均 0.045 秒/LP，また 30×30 で 0.01 秒/LP のスピードが得られている (Takeuchi, 1972)。この事実が DCL 手法を十分実用性のあるものとする基礎条件を与えるものである。

4. 累加損失係数 $\eta_{it}^{(k)}$ の推定—方法 I

状態変数 $\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t$ はそれぞれ M ならびに L 個の成分よりなり，そのおのおのは $K+1$ ならびに J 個の離散量を取ることができる。したがって，その組み合わせの総数は $(K+1)^M\cdot J^L$ である。方法 I は，このすべての組み合わせに対して式 (24) を用いて $f_t(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{I}_t)$ を計算し，式 (6) より $G_t(\boldsymbol{S}_t)$ を計算して，$G_t(\boldsymbol{S}_t)$ のつくる標本曲面に，式 (22) の形で線型曲面を当てはめようとするものである。係数ベクトル $\boldsymbol{H}_t$ は最小自乗法を用いて次のように推定できる。

ベクトル $\boldsymbol{S}_t$ の組み合わせの数は $(K+1)^M$ であるが，その1つを $\boldsymbol{S}_t^r$, $r=1, 2, \cdots, (K+1)^M$ であらわす。さらに，

$$\psi_t=[G_t(\boldsymbol{S}_t^1)\ G(\boldsymbol{S}_t^2)\cdots G(\boldsymbol{S}_t^{(K+1)M})]^T\cdots(39)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_t^{1T} \\ \boldsymbol{S}_t^{2T} \\ \vdots \\ \boldsymbol{S}_t^{(K+1)MT} \end{bmatrix}\cdots\cdots(40)$$

なるベクトルならびに行列を定義すれば，

$$\psi_t=\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{H}_t^T+\boldsymbol{\epsilon}_t$$

と書くことができる。ここで $\boldsymbol{\epsilon}_t$ は $G_t(\boldsymbol{S}_t)$ に $\hat{G}_t(\boldsymbol{S}_t)$ なる線型曲面を当てはめた場合の誤差ベクトルである。

最小自乗誤差の条件より $\eta_{it}^{(k)}$ は

$$\boldsymbol{H}_t^T=(\boldsymbol{\Sigma}^T\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\cdot\boldsymbol{\Sigma}^T\cdot\psi_t\cdots\cdots(41)$$

と推定される。$(\boldsymbol{\Sigma}^T\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\cdot\boldsymbol{\Sigma}^T$ は，$\boldsymbol{S}_t$ の取る離散量が固定されているので定数マトリックス $\boldsymbol{Z}$ として記憶しておける。したがって ψ_t が計算されれば，

$$\boldsymbol{H}_t^T=\boldsymbol{Z}\cdot\psi_t\cdots\cdots(42)$$

として即座に求めることができる。

この方法は，G_t の多くの組み合わせに対して計算された値をすべて考慮して $\eta_{it}^{(k)}$ を推定するという点できわめて正攻法であり，導入される誤差は piece-wise な線型化によることのみに限られ，好ましいと思われるが，計算時間が問題である。すなわち，たとえば $K=4$, $J=5$, $M=5$, $L=2$ の場合に対して $(K+1)^M\cdot J^L=5^7\simeq7.8\times10^4$ 個の LP を解く必要があり，0.01 sec/LP の速度で解けるとしても，一段階に対し 13 分程度かかり，収斂をみるまでに 25 段階の計算が必要とすれば5時間以上の計算時間を要することとなる。30 年には比すべくもないが，0.01 sec/LP で解ける LP の規模は前節に述べたごとく，スラック変数なしで 30×30 程度のものであることを考えれば，5時間というのは決して満足なものではない。

以下に述べる方法 II, III は，この難点を解決するために，piece-wise 線型化以外にも妥当と思われる仮定を導入した方法である。

5. 累加損失係数 $\eta_{it}^{(k)}$ の推定—方法 II

方法 I では離散化された状態変数のすべての組み合わせに対して G_t を計算し，$\{\eta_{it}^{(k)}\}$ を i, k について同時決定したが，必ずしもすべての組み合わせに対する G_t を用いた同時決定が必要とは言えない。$\eta_{it}^{(k)}$ を推定する場合に，貯水量が区間 k の近傍に属する場合のみを用いてもある程度の近似値が得られるのではないかと考える。すなわち，貯水量に関する状態変数が，離散量として S_i^k と S_i^{k+1} $i=1, \cdots, M$, のみ取るという仮定の下に $G_t(\boldsymbol{S}_t)$ を計算し，それに基づいて $\eta_{it}^{(k)}$ を次のように推定する。

まず G_t を式 (19) のかわりに，

$$\hat{G}_t(\boldsymbol{S}_t)=\eta_{0t}+\eta_{1t}S_{1t}+\eta_{2t}S_{2t}+\cdots+\eta_{Mt}S_{Mt}\cdots(43)$$

とおく。このモデルに対して，方法 I で述べたものと同

じ操作によって η_{it} を最小自乗法で推定する。得られた η_{it} を用いて $\hat{G}_t$ を次の段階に代入し，η_{it} が収斂するまで計算を繰り返す。得られた η_{it} は，各状態変数を $S_i^k, S_i^{k+1}, i=1, \cdots, M$ の二つのレベルを取るというきわめてラフな離散化の下に計算されているから，累加損失係数の推定値としては信頼性がきわめて薄いと言わねばならないが，ここで得られた η_{it} を $\eta_{it}^{(k)}$ として用いるならば，すなわち状態変数が区間 k に属する場合の累加損失係数であるとするなら誤差はさほど多くはないと推論されよう。この議論にしたがって，各 $(k, k+1)$，$k=1, 2, \cdots, K$ の組に対して η_{it} を収斂させ，その値を $\eta_{it}^{(k)}$ として用いるというのが方法Ⅱである。

この方法の利点は計算時間がきわめて短いことが第一である。すなわち，各 LP の計算において制約条件に式 (14) の条件が入ってこないため LP そのものが簡単であることが一つ，また，状態変数が $S_i^k, S_i^{k+1}, i=1, \cdots, M$ の値を取るとすると仮定しているから，各段階での $\boldsymbol{S}_t$ のすべての離散量の組み合わせはわずかに 2^M であり，確率的状態変数 $\boldsymbol{I}_t$ の組み合わせとの積で $2^M \cdot J^L$ 個の組み合わせに対して LP を解けばよい。したがって，収斂までに N 段階の計算が必要であるとして，k のすべての組，K 組について計算すれば，$2^M \cdot J^L \cdot N \cdot K$ 個の LP を解くことになる。前節までの例のように $M=5, J=5, L=2, N=25, K=4$ の場合には8万個の LP ということになる。スラック変数ぬきで 30×30 の LP の場合には約 0.01 sec/LP であるから全部でおよそ13分の計算ということになる。

第二の利点は，状態変数が $S_i^k, S_i^{k+1}, i=1, \cdots, M$ でつねに代表されるということも，きわめてバランスのとれた貯水池システムにあっては健全な仮定とみなされる場合もあるということである。長期的に見てそのようなことは当然いえないが，短期的に見れば，今期に S_i^k, S_i^{k+1} の近傍にあれば，次期においてもそのような状態に近いものである確率は比較的高いと見なされる場合が多いということであれば，それに該当するシステムもあるといえよう。

実際にこの方法で $\{\eta_{it}^{(k)}\}$ を推定すると非常に楽観的な解が得られる。つまり，貯水量が比較的多い場合に対してはその累加損失係数が非常に小さく計算される。それは貯水池 i がたとえば50〜100% 満水の場合には，ほかの貯水池もすべて50〜100% 満水と仮定している点に由来している。したがって，これはあまりに楽観的な仮定にすぎるきらいがあるので方法 Ⅱ-B として以下の修正を加えた。方法 Ⅱ-B に対して上述の方法を Ⅱ-A と呼ぶ。

方法 Ⅱ-A では状態変数はつねに S_i^k, S_i^{k+1} のいずれかの離散量をとると仮定して $\eta_{it}^{(k)}$ を求めたが，方法 Ⅱ-B では $S_i^1, i=1, \cdots, M$ すなわち貯水量0の状態がつねに一つの離散量としてとり得る値に入るようにすることを考える。すなわち，状態変数が $S_i^1(=0)$ ないしは $S_i^k, i=1, \cdots, M$ の離散値をとると考え，モデルで η_{it} を収斂するまで計算し，それを ${}^{\circ}\eta_{it}^{(k)}$ とおく。これを $k=2, \cdots, K+1$ まで K 組について計算すれば，

$$\eta_{it}^{(k)}=({}^{\circ}\eta_{it}^{(k+1)}S_i^{k+1}-{}^{\circ}\eta_{it}^{(k)}S_i^k)/(S_i^{k+1}-S_i^k) \quad \cdots\cdots(44)$$

によって $\eta_{it}^{(k)}$ を推定することができる。この方法によれば離散量として貯水量が満杯である場合を考えたとしても，まったく空である状態も同様に考慮されているから，比較的保守的な累加損失係数が得られる。

本節に述べた方法は計算時間の短縮と，空間的にも時間的にも比較的安定した貯水池システムでは仮定が健全であるという利点はあるが，それにしても大胆すぎる仮定であることは論をまたない。したがって Ⅱ-A をとるかBをとるかということになれば，安全側に偏した Ⅱ-B を取るのが正当であろう。結果的にかなり良い精度の最適操作規準 $\{\eta_{it}^{(k)}\}$ が得られるならば，残りの不備は，計算時間の大幅削減とのバランスで評価されなければならない。

6. 累加損失係数 $\{\eta_{it}^{(k)}\}$ の推定—方法 III

方法Ⅱでは，貯水池 i の貯水量が区間 k に属する場合には，他の貯水池もほぼその近傍であろうという仮定より出発したが，方法Ⅲでは貯水池 i が区間 k に属する場合には，他の貯水池たとえば貯水池 p は，貯水池 i が区間 k に属するという条件付の期待値の貯水量を保有していると考える。この議論を真の累加損失係数 $\lambda_{it}^{(k)}$ に立ち帰って進める。すなわち $\lambda_{it}^{(k)}$ は式 (17) に示すとおり多変量関数であるからそのまま $G_t(\boldsymbol{S}_t)$ を線型展開することはできないが，$\lambda_{it}^{(k)}$ の期待値を $\eta_{it}^{(k)}$ として代用することを考えるのが方法Ⅲの基本方針である。この考えを数式で表わせば，

$$\begin{aligned}\eta_{it}^{(k)}&=\varepsilon\lambda_{it}^{(k)}\\&=\sum_{S_{p_1t}, \cdots, S_{p_{M-1}}}\lambda_{it}^{(k)}(S_{p_1t}, \cdots, S_{p_{M-1}t})\\&\quad\times \mathrm{prob.}(S_{p_1t}, \cdots, S_{p_{M-1}t}|S_{it}\in[S_i^k, S_i^{k+1}]) \quad\cdots\cdots(45)\end{aligned}$$

ここでもし $\lambda_{it}^{(k)}$ が，S_{pt}, $p=p_1, \cdots, p_{M-1}$ に関して線型であるか，ないしは S_{pt} が互いに独立とみなすことができれば，式 (45) は

$$\eta_{it}^{(k)}=\lambda_{it}^{(k)}[\bar{S}_{p_1t}(i, k), \bar{S}_{p_2t}(i, k), \cdots, \bar{S}_{p_{M-1}}(i, k)] \quad\cdots\cdots(46)$$

ここに

$$\bar{S}_{pt}(i, k)=\varepsilon(S_{pt}|S_{it}\in[S_i^k, S_i^{k+1}]) \quad\cdots\cdots(47)$$

と書きあらわすことができる。またこのいずれの仮定も

厳密には成立しないとしても，式 (46) は式 (45) の近似として用いることはできるであろう。線型ないしは独立という仮定のうち，S_{pt}, $p=p_1, \cdots, p_{M-1}$ が互いに独立ということはほとんど可能性のないことと思われるが，$\lambda_{it}^{(k)}$ が S_{pt} に関して線型であるということならさほど無理な仮定とは思われない。というのは $\lambda_{it}^{(k)}$ が S_{pt} に関して線型であるということは，式 (19) より，G_t を貯水量に関する二次式と仮定していることと同義であるから。したがって，近似式 (46) の基本的な仮定である $\eta_{it}^{(k)}$ を $\lambda_{it}^{(k)}$ の期待値として表わされるとしているということの妥当性は，$\bar{S}_{pt}(i, k)$ が果たして安定しているかどうか，具体的にはその分散が比較的小であるかどうかにかかっているということができる。

次にこの $\eta_{it}^{(k)}$ を推定する方法を述べる。式 (46) を $\lambda_{it}^{(k)}$ の定義式 (16) に代入して，

$$\eta_{it}^{(k)}=\lambda_{it}^{(k)}[\bar{S}_{p_1t}(i, k), \bar{S}_{p_2t}(i, k), \cdots, \bar{S}_{p_{M-1}t}(i, k)] \cdots\cdots (48)$$

$$=\frac{\partial}{\partial S_{it}^{(k)}} G_t[S_{1t}(i, k), \cdots, \bar{S}_{i-1t}(i, k), S_{it}, \bar{S}_{i+1t}(i, k), \cdots, \bar{S}_{Mt}(i, k)] \cdots\cdots (49)$$

ここで，

$$\Delta S_i=S_i^{k+1}-S_i^k \cdots\cdots (50)$$

$$\overline{\boldsymbol{S}}_t^{+}(i, k)=[\bar{S}_{1t}(i, k), \cdots, \bar{S}_{i-1t}(i, k), S_i^{k+1}, \bar{S}_{i+1t}(i,k), \cdots, \bar{S}_{Mt}(i, k)] \cdots\cdots (51)$$

$$\overline{\boldsymbol{S}}_t^{-}(i, k)=[\bar{S}_{1t}(i, k), \cdots, \bar{S}_{i-1t}(i, k), S_i^{k}, \bar{S}_{i+1t}(i, k), \cdots, \bar{S}_{Mt}(i, k)] \cdots\cdots (52)$$

とおいて式を差分化すると，

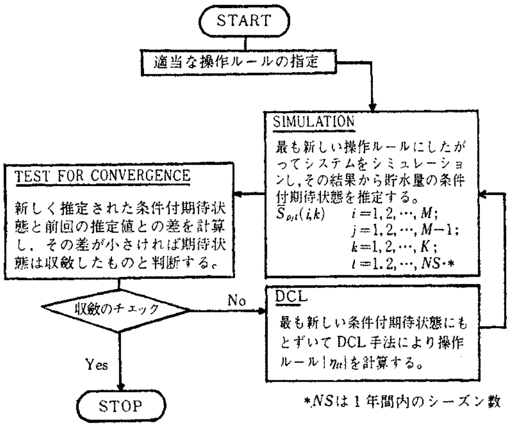
$$\eta_{it}^{(k)}=\frac{1}{\Delta S_i^k}\{G_t[\overline{\boldsymbol{S}}_t^{+}(i, k)]-G_t[\overline{\boldsymbol{S}}_t^{-}(i, k)]\} \cdots\cdots (53)$$

となる。この式の意味は，貯水池 i の貯水量が区間 k に属する場合の累加損失係数（ごく平たくいえば，水 1 m³ 当りの価値）は，ほかの貯水池が，貯水池 i の貯水量が区間 k に属するという条件下での期待状態にあるとして，貯水池 i の貯水量が区間 k の上限 S_i^{k+1} にある場合と，下限 S_i^k にある場合との累加損失の差の単位貯水量当りの平均であらわされるということである。

式 (53) より，$\eta_{it}^{(k)}$ を推定するためには，G_t の値は二つの定数ベクトル $\overline{\boldsymbol{S}}_t^{+}(i, k)$ ならびに $\overline{\boldsymbol{S}}_t^{-}(i, k)$ についてのみ計算されていれば十分ということになる。すなわち，確率状態ベクトル $\boldsymbol{I}_t$ が，L 個の成分 $(I_{1t}, I_{2t}, \cdots, I_{Lt})$ とあらわされ，I_{jt} が J 個のレベルによる離散量で表わされるとすれば，f_t は $2\cdot J^L$ 個の値に関して計算されていれば良いことになる。さらに，M 個の非確率的状態変数 S_{it} が K 個の区間に分けられているから，$\eta_{it}^{(k)}$ の段階 t におけるすべてを推定するために，$2K\cdot M\cdot J^L$ 個の f_t を計算する必要がある。したがって，前例どおり $K=4$, $M=5$, $L=2$, $J=4$ においては 640 個の f_t が各段階 t で計算されなくてはならない。しかしながら細かくいえば，確率状態変数の組み合わせは L^J 個すべてであるとは限らず，たとえば $100\cdot\alpha\%$ は空集合であるとすれば，$2(1-\alpha)\cdot K\cdot M\cdot J^L$ となり，$\alpha=0.3$ であれば 448 個の f_t を計算すれば良いということになる。convex LP を各段階で約 450 個解くことは双対シンプレックス法を用いればきわめて短時間でできる。

繰り返し計算の手順と収斂の理論

方法IIIにより最適操作方法を見出すためには，まず状態変数の条件付期待値 $\bar{S}_{pt}(i, k)$ を知らなくてはならない。しかしながら期待状態は明らかに操作方法によって異なるものであり，操作方法を見出すために，期待状態を知るための操作方法がわからなければならないということになれば，これは明らかに堂々めぐりになる。そこで収斂が約束されるような繰り返し計算でこの問題を解決する。具体的な繰り返し計算の手順は図—1 のとおりである。



図—1 方法 III の繰り返し計算の概念図

この図に示されたように，はじめに一応妥当と思われる操作方法を仮定し，その方法でシミュレーションを行い，システム・リスポンスを解析して条件付期待状態を推定する。その期待状態 $\bar{S}_{pt}(i, k)$ を用いて DCL 手法により限界損失係数 $\eta_{it}^{(k)}$ を推定する。$\eta_{it}^{(k)}$ は新しい操作ルールを与えるものであるから，それを用いて再びシミュレーションを行い，$\bar{S}_{pt}(i, k)$ を推定する。それが前回の期待状態と一致すれば，$\eta_{it}^{(k)}$ は最適解であり，さもなくば新しい $\bar{S}_{pt}(i, k)$ を用いて同様の過程を繰り返し，連続する二つの過程よりの期待状態が一致するまで繰り返し計算を続ける。

このような計算過程が最適解に導くものであるかどうかを以下に調べる。まず，条件付期待状態 $\bar{S}_{pt}(i, k)$ の微少変化が，$\eta_{it}^{(k)}$ にいかなる変化を及ぼすかを見たい。

式 (53) より，

$$\frac{\partial \eta_{it}^{(k)}}{\partial \bar{S}_{pt}(i, k)} = \frac{1}{\Delta S_i^k}\left\{\frac{\partial G_t[\bar{\boldsymbol{S}}_t^+(i, k)]}{\partial \bar{S}_{pt}(i, k)} - \frac{\partial G_t[\boldsymbol{S}_t^-(i, k)]}{\partial \bar{S}_{pt}(i, k)}\right\} \cdots\cdots\cdots(54)$$

ここで累加損失関数 G_t は貯水量 S_{it} に関して convex であるから，

$$\frac{\partial G_t[\bar{\boldsymbol{S}}_t^+(i, k)]}{\partial \bar{S}_{pt}(i, k)} \leq \frac{\partial G_t[\bar{\boldsymbol{S}}_t^-(i, k)]}{\partial \bar{S}_{pt}(i, k)} \cdots\cdots(55)$$

したがって

$$\frac{\partial \eta_{it}^{(k)}}{\partial \bar{S}_{pt}(i, k)} \leq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

すなわち，条件付期待状態を真の値より大きめに推定すると，その結果として累加損失係数は小さめに推定される。

これは，他の貯水池の期待貯水量が大きめに推定されていれば，貯水池 i の貯水量の限界累加損失は少ないと見積られるのは当然であって，直観的判断と一致する。また逆に期待状態が真の値より小さめに見積られていれば，式(56)は結果として限界損失係数は大きく算定されることを示しているが，これも直観的判断と合致する。

累加損失係数として小さめのものを用いてシミュレーションを行えば，貯水池は比較的安易に放流を行うことになるから，シミュレーション結果では貯水池の水量は比較的少なめに出てくる。逆に大きめの係数を用いれば，貯水池の水はセーブして使われることになるから，シミュレーション結果では期待状態は大きめに出てくる。したがって，期待状態を真の値より小さめに推定すれば，大きめの損失係数によるシミュレーションを介して，逆に大きめの期待状態として算出され，また次の回には，逆に小さめの期待状態を得ることになる。この現象をサイクリック現象と呼ぶことにする。

サイクリック現象が期待状態についておこれば，その収斂を期待することはできないが，以上の議論が一つの状態変数の期待値 $\bar{S}_{pt}(i, k)$ についてのみ展開されているものであり，$\eta_{it}^{(k)}$ は多次元の $\bar{\boldsymbol{S}}_t(i, k)$ に依存することを考慮するなら，必ずしもサイクリック現象が収斂に導かないものであると断定することはできない。すなわち，$\bar{S}_{pt}(i, k)$ がある p について真の期待値よりプラスの側に偏っていたとしても，ほかの p についてはマイナス側に偏していることもあり得る。その結果 $\eta_{it}^{(k)}$ は真の値に近いものと算出され，それに基づいてシミュレーションされた結果は真の値に近い期待状態を与えることになることもあり得る。この効果を相殺効果と呼ぶ。かりにはじめの期待状態の推定値が真の値の両側にランダムに分布していれば，サイクリック現象がおこる前に，相殺効果によって大幅に真の値に近づくことができる。しかもこのような偏りが得られることは，真の値が不明であって，便宜的な操作ルールを用いて計算した場合にはむしろ不可避のことであって，図—1 に示した計算手順が相殺効果をあげることは確実である。

次に相殺効果が終って，サイクリック現象が現われた段階での最適化法としては，相続く二組の $\bar{S}_{pt}(i, k)$ の平均ないしは，適当な加重平均，たとえば，前回と今回のものを四分六に加重平均したものなどを次回の DCL 計算過程に用いることにより原理的にはこの現象を減衰させることができる。

最後に，相殺効果と，サイクリック現象の認定方法であるが，各回ごとに $\bar{S}_{pt}(i, k)$ の前回に対する増減の度合を見ることにより判定することもできるが，真の値のときにシミュレーション結果による合計損失額が最小となるのであるから，相殺効果は，合計損失額の減少により，またサイクリック現象はその振動によって判定することもできる。実際には両現象は同時に起るものであるから，合計損失額では減衰振動の様相を呈すると考えられるが，サイクリック現象に対する処置は，前回の合計損失を上回る損失があらわれた時点で施されるのが適切であろう。

以上，理論式 (56) より敷延してこのようになると期待されるという形で議論を進めてきたが，これらの効果，現象については，ケース・スタディにより実証されており，Takeuchi (1972) を参照されたい。

7. 貯水量の累加損失係数による操作ルールの表わし方の利点

すでに 2. において，累加損失係数 $\{\eta_{it}^{(k)}\}$ が操作ルールそのものであることは言及したが，この方法による操作ルールの求め方また表わし方の利点は決して軽視すべきものではないので，ここにあらためて強調しておく。従来の DP による操作ルールの解は，各段階での最適化を状態変数ならびに決定変数の離散化された量の組み合わせについて逐一調べることにより行うため，収斂した操作ルールはどの組み合わせの状態変数に対しては，どの決定変数の組み合わせが最適であるかがすべての場合について表になって示される。これは組み合わせの数の少ない場合には当然妥当であるが，それが多くなった場合にはどうであろうか。状態変数の組み合わせは前節までの記号を用いて $(K+1)^M \cdot J^L$ 個であるが，1 年を 12 区分して月別の操作規準を求めた場合でもその 12 倍，したがって各数が前節までの例のとおりとすると，$5^7 \cdot 12 \simeq 9.4 \times 10^5$，すなわち 94 万個の場合について，13 個の決定変数おのおのの値が表となって示されることになる。したがって，表は横に 20 コラムあり，縦に 94 万行ということになり，実に千八百万を超える値を計算機

などに記憶させておかねばならない。これは実用上無理な相談である。かりに記憶容量については何とか対処できるとしても，そのような尨大な決定変数の組み合わせについて収斂させることは，そのチェックをするだけでも不可能に近いことであろう。困った点はこれだけではない。実際の操作時点で観測される状態変数は，離散値ではないから，表を用いるためには無理な近似をするか，ないしは状態変数に対する決定変数を最小自乗法を用いて hyperplane で表わすなどして決定変数を求める必要がある。

累加損失係数による表わし方であれば，パラメーターは $\eta_{it}^{(k)}$ の添字の最大値を掛け合せたもの，つまり $K\cdot M\cdot 12=240$ ですべてである。ただし，この場合にはそのものずばりの表は用意してないから，状態変数（$\boldsymbol{S}_t$, $\boldsymbol{I}_t$）の観測値を式 (24) に代入してこの LP を解くことにより，具体的な操作を決めなくてはいけない。しかしながら１回の LP を解く計算時間などは問題にもならない。さらに重要なことは，各段階で観測された状態量を離散化する必要がまったくなく，実測値をそのまま用いることができ，ここには誤差の入り込む余地はまったくないということである。また当然のことながら計算過程において尨大な決定変数について収斂させる必要はなく，240 個の $\eta_{it}^{(k)}$ についてのみ収斂を確認すればよい。より詳細にいえば，ある段階で，一年前のその段階のものと一致すれば（といってもこれはつねに誤差 1% 以内というような相対的な収斂をいうわけであるが），計算はそこで終了する。すなわち，実際の収斂のチェックには 20 個の $\eta_{it}^{(k)}$ でよい。またこの意味からは，従来の方法によれば，約８万個の決定変数の組み合わせについて収斂をチェックすることとなる。

ごく単的にいって，従来の DP による解法はこのような事実から大規模システムの最適化には適用ができないわけであり，累加損失係数を用いた表示法は，それを改善したことによる利点を多く含むというよりはむしろ，不可能を可能にするものである限り，そのような性質は当然持っていなくてはならないものと考えるのが妥当であろう。

8．結論ならびにまとめ

DCL 手法は，利水用貯水池操作の最適ルールを見出すために DP における直接損失関数ならびに累加損失関数を piece-wise に線型化することによって，各段階の最適解発見に LP を導入した手法である。各段階の直接損失関数は，利水のみを考えた場合限界効用逓減の法則により給水量に関して convex となる。また累加損失関数も同じ原理で貯水量に関して convex となる。したがって，その和は convex であるから，各関数の線型化により convex LP を用いることができる。また，このような性質を持つものに関しては貯水池操作の問題に限らず適用できる。

累加損失関数の線型化のためには，各貯水池の貯水量に関する累加損失係数を推定しなくてはならないが，その推定方法として三種類を考慮した。方法Ⅰでは各貯水池の離散化された貯水量のすべての組み合わせに対して関数の値を計算しておき，得られた標本値に線 piece-wise に線型の hyperplane を最小自乗法により当てはめるものである。これは計算時間ぼう大となり実用性がない。方法Ⅱ-A では，貯水池 i の貯水量が，区間 k の近傍にある場合にはほかの貯水池もほぼ同様であろうということ，さらに現段階に区間 k にあれば，次の段階でもその近傍であろうという２つの仮定の下に，他の区間との組み合わせをすべて省いた計算を導入した。方法Ⅱ-BではⅡ-A における楽観的な解の出ることを嫌って，各区間の下限の値すなわち貯水量０の組み合わせを常に含むこととした。最後に方法Ⅲでは，貯水池 i の貯水量が区間 k に属する場合には，ほかの貯水池は，貯水池 i の貯水量が区間 k に属するという条件下での期待状態にあるという仮定により，やはり組み合わせの数を（この場合貯水量の組み合わせに関しては全面的に）削減した。

DCL では各段階で数多くの LP を解かねばならないが，これには，各段階内においては LP の制約条件の定数部分だけが，状態変数の組み合わせの変化に従って変わるという点に着目して，双対シンプレックス法の応用を開発し，高速度解を可能とした。

最適操作ルールを DCL によって求めることにより，計算時間の大幅短縮のほかに重要な二点，すなわち操作ルールが各貯水池の貯水量の累加損失係数として少数のセットで求められ，ぼう大な数の操作を決定，記憶する必要がなくなったこと，また各段階での決定に当っては，観測値を離散量近似することなく，そのままの値を用いることができることがあげられる。欠点としては線型近似，ならびに方法Ⅱ,Ⅲに述べたような種々の仮定が入ってきたことであるが，その妥当性は一概にいうことのできる性質のものではなく，ケース・バイ・ケースで検討されねばならない。

あとがき

この研究は筆者がノースカロライナ大学留学中に主として進められたものであるが，当時の指導教官であった David H. Moreau, Maynard M. Hufschmidt, John A. Cole 諸先生の助言に感謝したい。また東京工業大

学の吉川・日野・椎貝諸先生に草稿を詳しく見ていただき有益なご忠告をいただいたことも感謝して付記する。

参 考 文 献

1) Bellman, R.E. and S.E. Dreyfus : *Applied Dynamic Programming*, (Princeton, N.J. : Princeton Univ. Press, 1962)
2) Charnes, A. and W.W. Cooper : Chance-Constrained Programming, *Management Science*, Vol. 6, pp. 73-79, 1959
3) Eastman, John and Charles ReVelle : Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design, 3. Direct Capacity Determination and Intraseasonal Constraints, *Water Resources Research*, Vol. 9, No. 1, Feb. 1973
4) Heidari, Manoutchehr, Ven Te Chow, P.V. Kokotovic and D.D. Meredith : Discrete Differential Dynamic Programming Approach to Water Resources Systems Optimization, *Water Resources Research*, Vol. 7, No. 2, April 1971
5) Larson, R.E. : *State Increment Dynamic Programming*, (New York : American Elsevier Publishing Co., Inc., 1968)
6) Little, J.D.C. : The Use of Storage Water in a Hydroelectric System, *J. Operations Research Society of America*, Vol. 3, pp. 187~197, 1955
7) Takeuchi, K. : Optimal Control of Multi-Unit Inter-Basin Water-Resource Systems, Ph.D. dissertation, Univ. of North Carolina, 1972
8) ReVell, C., E. Joeres, and W. Kirby : The Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design, 1. Development of the Stochastic Model, *Water Resources Research*, Vol. 5, No. 4, 1969
9) ReVelle, C. and W. Kirby : Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design, 2. Performance Optimization, *Water Resources Research*, Vol. 6, No. 4, 1970
10) Wagner, H.M. : *Principles of Operations Research*, (Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1969)

(1973.7.12・受付)